CAP. V – LA TENSIONE IN UN PUNTO

Il concetto di equilibrio ha portato alla conclusione che gli sforzi interni a una trave di un sistema (iso- o iper-statico) caricato e vincolato sono riassumibili nelle Caratteristiche della Sollecitazione applicate nel baricentro della sezione.

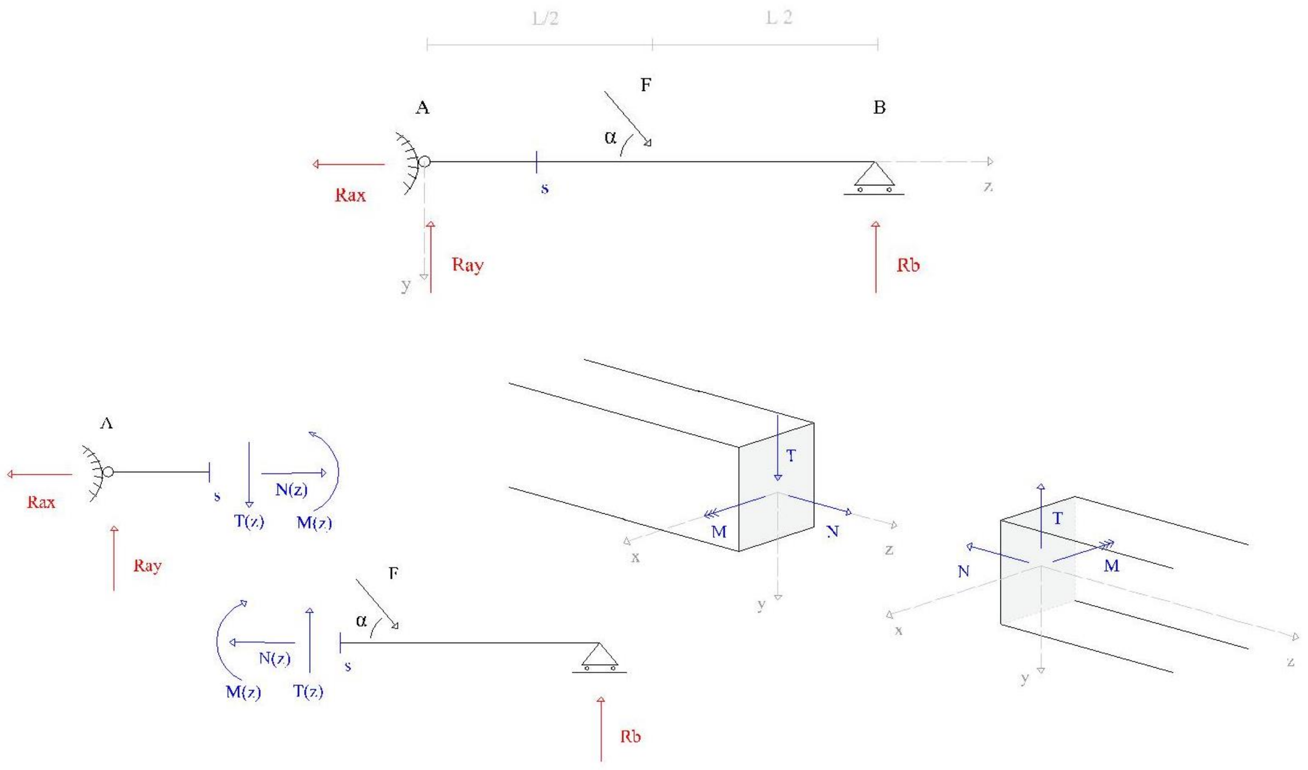


Figura 1

È presumibile, però, ipotizzare che gli sforzi interni si trasmettino punto per punto. Per far ciò si introduce prima il concetto di tensione secondo Cauchy.

V.1 Tensione in un punto secondo Cauchy

Gli sforzi interni agenti su una porzione finita ΔA della sezione sono equivalenti a una risultante $\Delta\mathbf{R}$ e a un momento risultante $\Delta\mathbf{M}$.

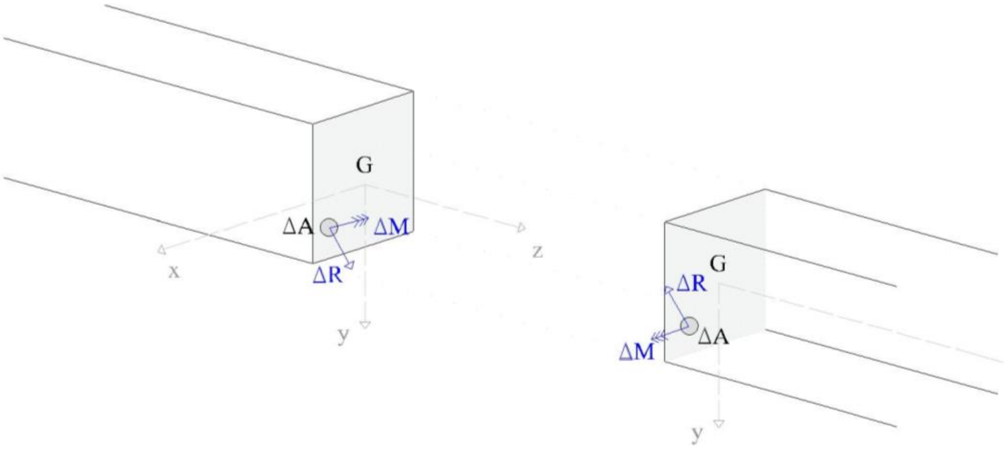


Figura 2

L’ipotesi di Cauchy è che la tensione sia definita come:

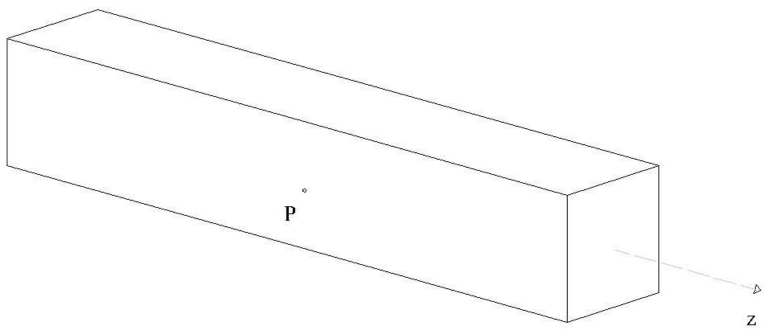
$$\boldsymbol{t}_n(\boldsymbol{P}) = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{R}}{\Delta A}$$

e che valga:

$$\lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{M}}{\Delta A} = 0$$

Ossia che la tensione sia il limite del rapporto tra forza applicata su una superficie e superficie al tendere a zero di quest’ultima, e che sia nullo invece il limite del rapporto tra il momento delle forze applicate sulla stessa superficie e superficie.

$\boldsymbol{t}_n$ è un vettore, in generale, a tre componenti e dipende dall’inclinazione della sezione effettuata. Finora si è sempre parlato della sezione trasversale, ossia della sezione ottenuta tagliando la trave perpendicolarmente al suo asse, ma nulla vieta di considerare sezioni ottenute tagliando la trave secondo piani diversamente inclinati. Ebbene la tensione in un punto dipende dal piano di taglio, ossia dalla sua normale (usualmente disposta a pedice di **t**).



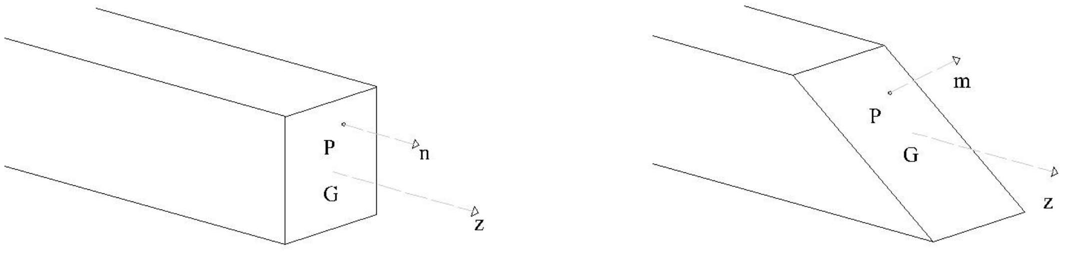
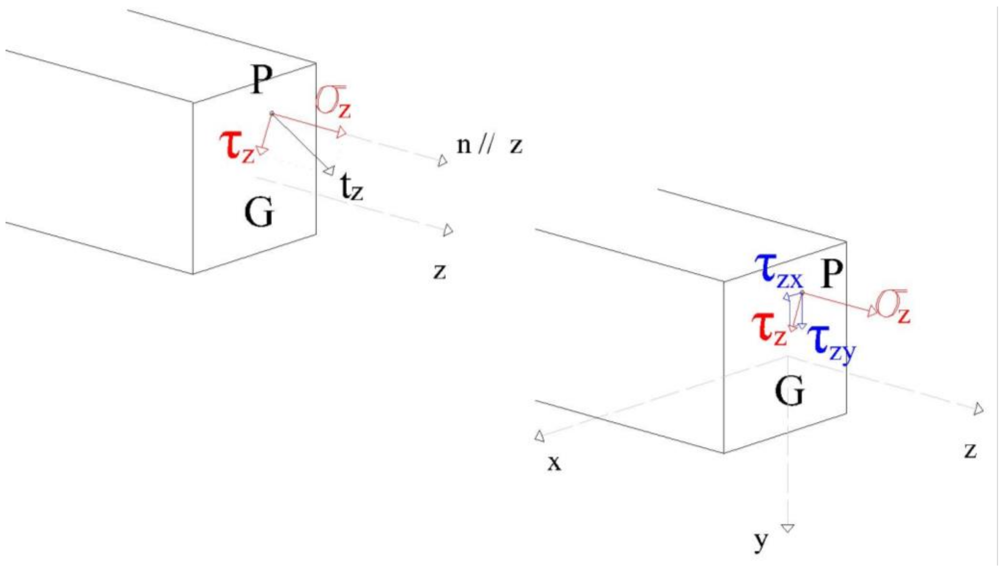


Figura 3

Per esempio in Fig. 3 si ha:

$$\boldsymbol{t}_n(\boldsymbol{P}) \neq \boldsymbol{t}_m(\boldsymbol{P})$$

La tensione $\boldsymbol{t}_z(\boldsymbol{P})$ rappresenta quindi la tensione nel punto P sull'elemento con perpendicolare l'asse z, ossia quella che usualmente viene considerata come sezione trasversale. Tale tensione, in generale, ha tre componenti (vd. Fig. 4 centro). La componente parallela a z è comunemente nominata come "componente normale della tensione" e indicata col simbolo σ_z, mentre la componente sul piano della sezione è chiamata "componente tangenziale della tensione" e indicata con il simbolo τ_z.(vd. Fig. 4 alto); quest'ultima a sua volta ha una componente secondo x, indicata con τ_{zx} e una componente secondo y, indicata con τ_{zy} (vd. Fig 4 – centro e basso).



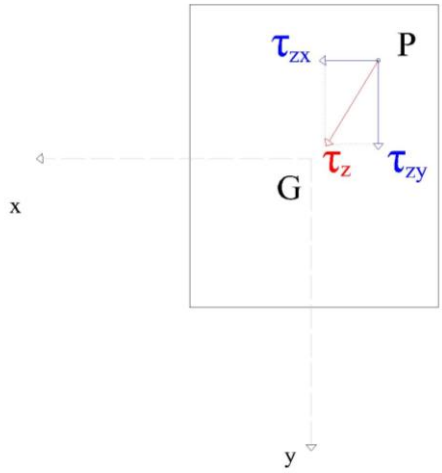


Figura 4

In definitiva, la tensione in punto è espressa attraverso le sue tre componenti $(\sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy})$, rispettivamente "normale", "tangenziale secondo x" e "tangenziale secondo y".

L'unità di misura della tensione (e delle sue componenti) è forza diviso area. Nel sistema internazionale è in genere espressa in $N/_{mm^2}$. In passato era espressa anche in $kgf/_{cm^2}$ dove:

$$1\, kgf/_{cm^2} \approx 0.1\, N/_{mm^2}$$

Il paragrafo successivo intende rispondere alla seguente domanda: come determinare le componenti della tensione in ogni punto di una sezione in cui sono note le caratteristiche della sollecitazione?

V.2 Corrispondenza CdS e tensione nel punto

Le caratteristiche della sollecitazione rappresentano risultante e momento risultante (rispetto a G) della tensione $\boldsymbol{t}_n(\boldsymbol{P})$ punto per punto. Poiché la tensione è distribuita in maniera continua sulla sezione, risultante e momento risultante vanno determinate con l'ausilio del concetto di integrale.

Nel caso di sistemi piani (travi, vincoli e carichi complanari) è facile intuire che:

- la risultante (ossia l'integrale d'area sulla sezione) della componente normale della tensione $\sigma_z(\boldsymbol{P})$ è pari allo sforzo normale N;
- il momento risultante (ossia l'integrale d'area dei momenti infinitesimi) rispetto a G della componente normale della tensione $\sigma_z(\boldsymbol{P})$ è pari al momento flettente M;

Nota la caratteristica della sollecitazione, il legame esplicitato sopra non è sufficiente per determinare la componente normale della tensione. La distribuzione delle componenti tensionali sulla sezione può, in linea di principio, essere qualsiasi.

Nei prossimi capitoli si farà implicitamente uso del principio di sovrapposizione degli effetti già ampiamente sviluppato nella dispensa n° 3 (par. III.6): lo stato tenso-deformativo (si introdurrà brevemente anche la misura della deformazione) associato a più caratteristiche della sollecitazione presenti contemporaneamente è uguale alla "somma" degli stati generati da una caratteristica della sollecitazione alla volta.

CAP. VI –TENSIONE E DEFORMAZIONE DA SFORZO NORMALE CENTRATO

Nelle lezioni scorse si è definito lo sforzo normale come la risultante assiale, degli sforzi interni, applicata nel baricentro G della sezione. Nonostante sia ridondante, si usa comunque indicare tale caratteristica come "sforzo normale centrato", sottolineando (con la parola "centrato") G come suo punto di applicazione, per distinguerlo da un altro stato tensionale, quello da sforzo normale eccentrico, di cui si parlerà più avanti.
In presenza di sforzo normale centrato i punti della sezione trasversale si spostano lungo l'asse z. Si indichi la componente lungo z dello spostamento di un punto $\boldsymbol{P}(x, y, z)$ di una sezione ad ascissa z (vd. Fig. 5) con:

$$w(\boldsymbol{P}) = w(x, y, z)$$

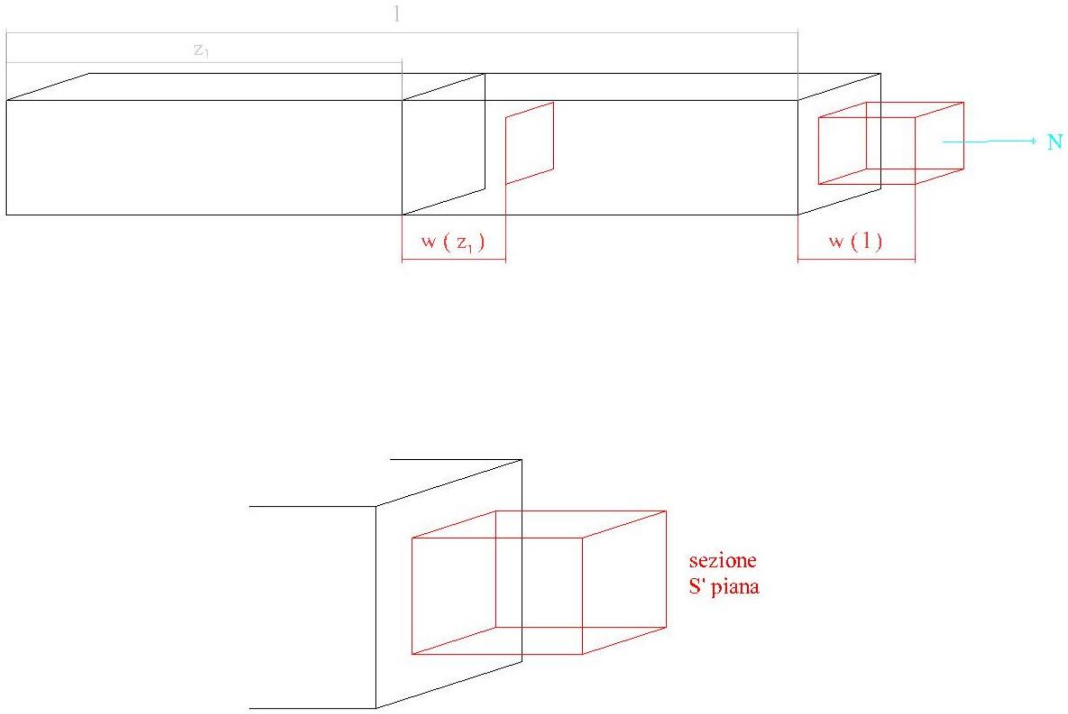


Figura 5

E si indichi con:

$$\varepsilon_z(\boldsymbol{P})$$

una misura della deformazione nel punto P secondo l'asse z, o anche deformazione assiale. Tale misura è data dalla derivata dello spostamento assiale rispetto all'asse z:

$$\varepsilon_z(x_P, y_P, z_P) = \varepsilon_z(\boldsymbol{P}) = \frac{dw(\boldsymbol{P})}{dz}$$

Per definizione $\varepsilon_z(\boldsymbol{P})$ è adimensionale essendo rapporto tra due lunghezze.

Il problema tenso-deformativo della trave può essere affrontato nell'ambito della cosiddetta "teoria tecnica della trave" (modello Eulero-Bernoulli oppure modello Timoshenko) oppure sulla base della teoria del De Saint Venant. Nell'ambito del corso di Statica, al fine di fornire gli strumenti minimi di comprensione delle travi soggette a sforzo normale e/o a momento flettente, ci si baserà sui risultati del modello di Eulero-Bernoulli, rimandando la trattazione del De Saint Venant al corso di Scienza delle Costruzioni. Una delle ipotesi alla base di tale modello è (principio di conservazione delle sezioni piane) che nella deformazione la sezione trasversale si mantenga piana (vd. Fig. 5 basso). In presenza di sforzo normale centrato ciò implica che la deformazione sia costante nella sezione. In tal caso, allora, la deformazione $\varepsilon_z(z)$ (non c'è più la dipendenza da x, y perché appunto ipotizzata costante nella sezione) rappresenta (vd. Fig. 6a):

$$\varepsilon_z(z) = \frac{dw(z)}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w(z)}{\Delta z}$$

oppure (un'interpretazione più fisica che matematica) misura il rapporto tra allungamento (o accorciamento se N è di compressione) di un tratto infinitesimo dz di trave e dz stesso (vd. Fig. 6b). È chiaro che, se costante con z, la deformazione rappresenta lo spostamento relativo tra due sezioni a distanza unitaria.

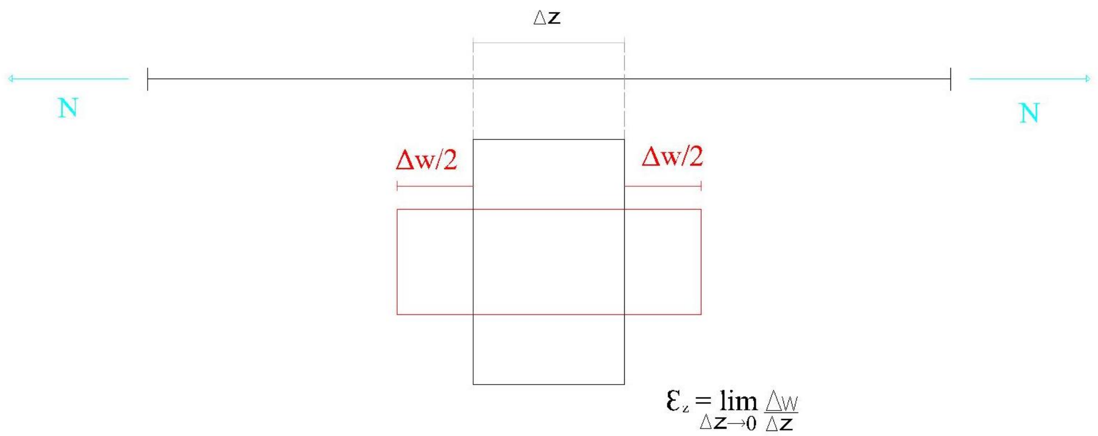


Figura 6a

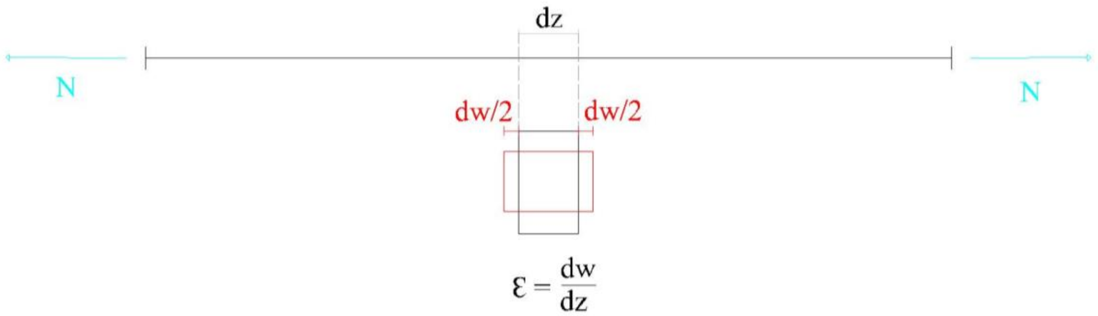


Figura 6b

L'ipotesi di elasticità lineare implica che tensione normale σ_z in un punto $\boldsymbol{P}$ e deformazione assiale ε_z nello stesso punto siano proporzionali tra loro (vd. Fig. 7), ossia:

$$\sigma_z = E\varepsilon_z$$

dove E è il modulo di Young del materiale

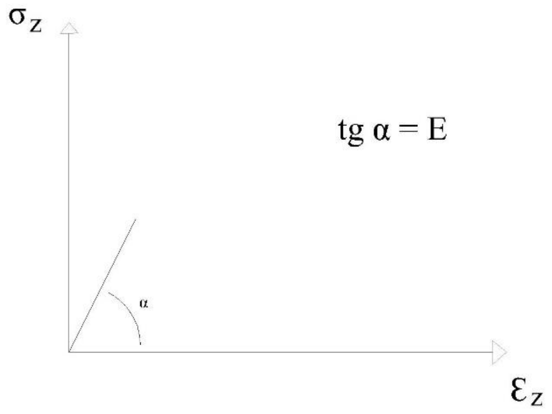


Figura 7

Tale ipotesi è verificata per tutti i materiali da costruzione all'interno di un intervallo massimo di tensione che varia da materiale a materiale. Il modulo di Young per l'acciaio è dell'ordine di 210000 $N/_{mm^2}$, mentre quello del calcestruzzo è dell'ordine di 30000 $N/_{mm^2}$ (l'unità di misura coincide con quella della tensione perché la deformazione per definizione è adimensionale).

In elasticità lineare quindi, a deformazione costante nella sezione corrisponde tensione costante. Quindi anche $\sigma_z = cost$ nella sezione. Poiché la sua risultante deve essere pari al valore di N, si ha:

$$\int_A \sigma_z(z)dA = N \Rightarrow \sigma_z(z)A = N \Rightarrow \sigma_z(z) = \frac{N(z)}{A} \qquad (6.1)$$

dove A è l'area della sezione trasversale. Quindi la tensione normale in una sezione dipende solo dal valore di N in quella sezione e dall'area della sezione.

La deformazione assiale vale quindi:

$$\varepsilon_z(z) = \frac{\sigma_z(z)}{E} = \frac{N(z)}{EA}$$

anche la deformazione varia con $N(z)$.

Se $N(z)$=cost in un tratto di trave AB, allora:

$$\Delta l_{AB} = \frac{N l_{AB}}{EA}$$

Se invece $N(z)$ varia nel tratto AB allora:

$$\Delta l_{AB} = \int_A^B \frac{N(z)}{EA} dz$$

Se materiale e area non cambiano da A a B (quindi E=cost e A=cost) allora:

$$\Delta l_{AB} = \frac{1}{EA}\int_A^B N(z)dz$$

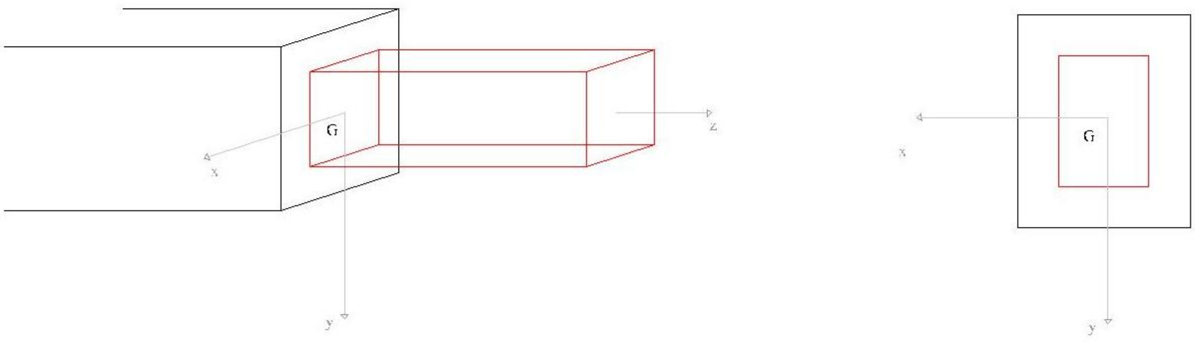


Figura 8

Per effetto dello sforzo normale centrato la sezione di trave si deforma assialmente ma subisce anche una deformazione nel piano della sezione stessa (vd. Fig. 8). Tale deformazione non è contemplata nella teoria tecnica della trave, lo è invece nella teoria del De Saint Venant e sarà trattata nel corso di Scienza delle Costruzioni. Giova anticipare che la sezione si restringe se soggetta a trazione (come in Fig. 8) si ingrossa se soggetta a compressione, in maniera "omotetica" ossia in modo che ogni punto della sezione si sposti lungo la retta che lo congiunge al baricentro di una quantità proporzionale alla sua distanza dal baricentro stesso.
L'entità della deformazione trasversale è funzione di un altro parametro meccanico, il coefficiente di Poisson ν, sempre minore di 1 per i classici materiali da costruzione. Per esempio un acciaio ha $\nu = 0.27 \div 0.30$ mentre un calcestruzzo ha $\nu \approx 0.2$.

VI.1 Esempi

Si consideri la mensola di Fig. 10, di sezione $25\ cm$ x $25\ cm$, caricata da una forza concentrata in sommità. Si supponga che la mensola sia costituita di un materiale con $\mathrm{E} = 30000\ {}^{N}/_{mm^2}$ e $\nu = 0.2$. Le reazioni vincolari sono indicate in rosso.

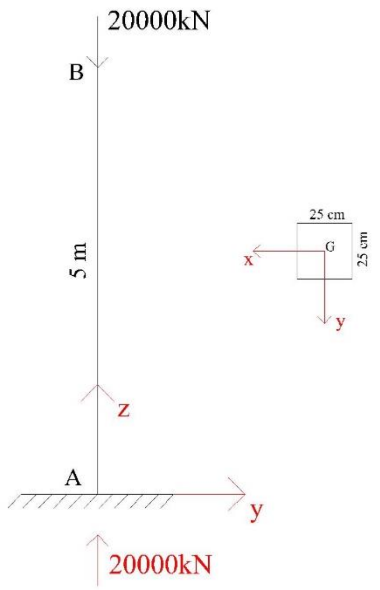


Figura 10

Il diagramma dello sforzo normale (di compressione) è chiaramente costante e pari a 20000kN. Il punto B si abbassa quindi di una quantità w_B pari a:

$$\Delta l_{AB} = w_B = \frac{N l_{AB}}{EA} = \frac{20000kN\ 5m}{30000\ {}^{N}/_{mm^2}\ 25cm\ 25cm} = \frac{20000\ 10^3\ 5\ 10^3}{30000\ 250\ 250} = 53\ \text{mm}$$

La sezione trasversale si ingrossa in un quadrato più grande, in blu in Fig. 11.

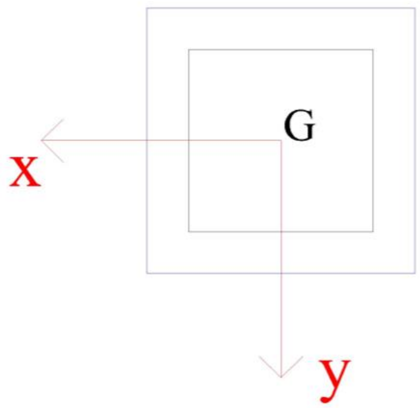


Figura 11

Lo spostamento orizzontale di un suo vertice è pari a:

$$\text{u} = \nu\varepsilon_z \frac{25cm}{2} = \nu \frac{N}{EA}\frac{25cm}{2} = 0.2 \frac{20000kN}{30000\ {}^{N}/_{mm^2}\ 25cm\ 25cm}\frac{25cm}{2} = 0.2 \frac{20000\ 10^3}{30000\ 250\ 2} = 0.27\ \text{mm}$$

Si consideri ora la mensola caricata come in Fig. 12.

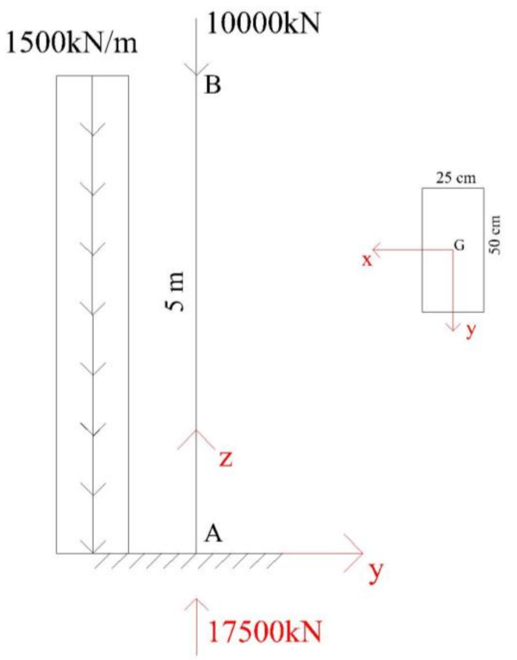


Figura 12

Il diagramma dello sforzo normale è lineare (vd. Fig. 13).

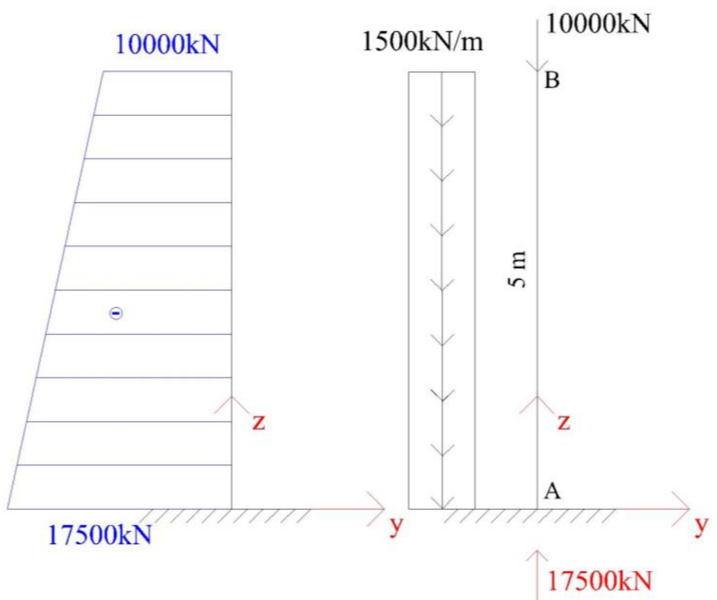


Figura 13

L'abbassamento del punto B vale quindi:

$$\Delta l_{AB} = w_B = \int_0^l \frac{N(z)}{EA} dz$$

La funzione $N(z)$ si può scrivere (origine in A):

$$N(z) = -17500kN + \frac{1500kN}{m} * z \qquad \text{NOTA BENE: } N(z) \text{ in kN} \quad z \text{ in metri}$$

Quindi:

$$\Delta l_{AB} = w_B = \frac{1}{EA}\int_0^l N(z)dz = \frac{1}{30000\, {}^{N}\!/_{mm^2} * 250mm * 500mm}\int_0^{5000mm}(-17500\ 10^3 + 1500\ z)dz =$$

$= 2.66710^{-10}\left(-17500\ 10^3\ 5000 + 1500\ \frac{5000^2}{2}\right) = 2.66710^{-10}(-8.75\ 10^{10} + 1.875\ 10^{10})$=-18.3mm

Il segno meno indica abbassamento.

VI.2 Verifica di resistenza e di deformabilità

Una verifica di resistenza semplificata consiste nel confrontare la tensione normale massima σ_z^{max} con una tensione di riferimento σ_{amm}, detta ammissibile, funzione del materiale. Le ultime norme tecniche non consentono, tranne in alcuni pochi casi particolari, di effettuare le verifiche alle tensioni ammissibili. Lo strumento rimane comunque utile per lo studente di Archiettura sia come strumento introduttivo di altri più sofisticati da sviluppare negli anni successivi, sia some strumento di pre-dimensionamento di massima.

La tensione ammissibile σ_{amm} è una tensione limite ottenuta riducendo la tensione di rottura del materiale attraverso un opportuno coefficiente di sicurezza, allo scopo di rimanere in campo elastico lineare.

Valori usuali di tensione ammissibile dell'acciaio spaziano tra 150 e 300 N/mmq, a seconda del tipo di acciaio, mentre valori ammissibili per il calcestruzzo oscillano tra 8 e 11 N/mmq a seconda della qualità del calcestruzzo.

Verificare alle tensioni ammissibili una trave soggetta a solo sforzo normale centrato N significa confrontare il valore della tensione massima con quella ammissibile.

$$\sigma_z^{max} = \frac{N_{max}}{A} \leq \sigma_{amm} \qquad (6.2)$$

Dalla Eq. (6.1) si evince che la tensione è massima nella sezione a N massimo.

Se N=cost sul tratto di trave AB, allora la verifica si può fare in una sezione qualsiasi. Se, invece, N(z) varia con z, allora la verifica si fa nella sezione dove N=N_{max}.

La verifica di deformabilità consiste nel controllare che la deformazione globale non superi dei valori limite: la struttura in esercizio, cioè, non deve deformarsi troppo altrimenti nascono problemi alle rifiniture, agli impianti e nasce un senso di disagio negli utenti.

In genere tale verifica si effettua controllando che la deformazione totale, ottenuta come spostamento massimo diviso luce, sia inferiore a una frazione in genere variabile tra 1/500 e 1/300.

<u>VI.2.1 Esempio</u>

La verifica della trave rappresentata in Fig. 12 si effettua nella sezione A dove N è massimo:

$$\sigma_z^{max} = \frac{17500kN}{250cm * 500cm} = 1.4\ {}^{N}\!/_{mm^2}$$

Ipotizzando una tensione ammissibile $\sigma_{amm} = 5\, {}^{N}\!/_{mm^2}$ la verifica risulta soddisfatta in quanto:

$$\sigma_z^{max} = 1.4 \ {}^{N}\!/_{mm^2} < \sigma_{amm} = 5 \, {}^{N}\!/_{mm^2}$$

VI.3 Progetto della sezione

Il progetto di una sezione (a forma scelta) di trave isostatica si può eseguire determinando la dimensione minima per la quale la tensione massima sia uguale a quella ammissibile. Infatti, l'area minima necessaria si ottiene dalla (6.2) scritta col segno uguale:

$$\frac{N_{max}}{A_{min}} = \sigma_{amm} \Rightarrow A_{min} = \frac{N_{max}}{\sigma_{amm}} \qquad (6.3)$$

Nota l'area minima si può progettare la sezione trasversale necessaria. Per esempio se si sta utilizzando un profilo metallico è sufficiente fissare la forma e dalla tabella corrispondente estrarre il profilo avente l'area superiore al valore minimo dato dalla (6.3). Se invece si sta progettando una sezione rettangolare, sarà sufficiente fissare la base per ottenere dall'area minima il valore dell'altezza.

VI.3.1 Esempio

Nell'esempio di Fig. 12 si supponga di non assegnare la sezione trasversale ma di voler progettare la mensola con una sezione in c.a. di forma quadrata e lato l. Si ipotizzi una $\sigma_{amm} = 8 \, {}^{N}\!/_{mm^2}$. L'area minima quindi deve essere uguale a:

$$A_{min} = \frac{N_{max}}{\sigma_{amm}} = \frac{17500kN}{8 \, {}^{N}\!/_{mm^2}} = \frac{17500 \ 10^3 N}{8 \, {}^{N}\!/_{mm^2}} = 2188 \ 10^3 \ mm^2 = 21880 \ cm^2 \Rightarrow l_{min} = \sqrt{21880} = 148cm$$

Da notare che non sarebbe possibile realizzare la stessa sezione con un profilo industriale HE. Infatti, ipotizzando per l'acciaio una $\sigma_{amm} = 160 \, {}^{N}\!/_{mm^2}$ si otterrebbe:

$$A_{min} = \frac{N_{max}}{\sigma_{amm}} = \frac{17500kN}{150 \, {}^{N}\!/_{mm^2}} = \frac{17500 \ 10^3 N}{150 \, {}^{N}\!/_{mm^2}} = 117 \ 10^3 \ mm^2 = 1170 \ cm^2$$

Dalle tabelle dei profili HE si evince che la dimensione massima industriale (HE 280M) ha un'area, insufficiente, di 240 cm^2.