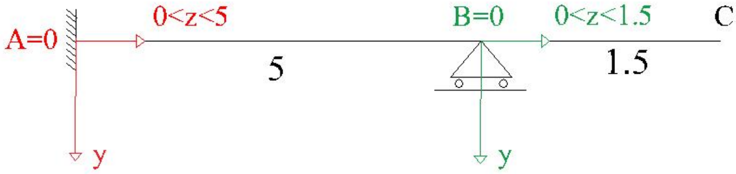
III.12 Scrittura funzioni N(z), T(z), M(z)

III.12.1 Definizione del sistema di riferimento e dell'origine

Per estrarre le funzioni CDS si definisce innanzitutto la coordinata *z*. Tale coordinata è solidale con l'asse della trave. Come tutte le coordinate, anche *z* possiede un'origine e un verso di percorrenza positivo.

L'origine è scelta solitamente con un estremo del tratto di trave in esame; in genere conviene scegliere origine e verso dell'asse *z* in modo che le sezioni del tratto siano tutte a zeta positiva. Gli assi *x* e *y* sono scelti in modo che *x* sia uscente dal piano del foglio e *y* sia tale da garantire che la terna *x*,*y*,*z* obbedisca alla regola della mano destra (*x*=pollice, *y*=indice, *z*=medio). Vedi Fig.1 per alcuni esempi.

Definiti asse *z* e sua origine, non è importante definire l'asse positivo di N(z), T(z), M(z), che può essere scelto in maniera arbitraria. Bisogna però rispettare la convenzione positiva definita precedentemente per N, T, M. Solo per il momento flettente è fondamentale che il diagramma si disegni dalla parte delle fibre tese.



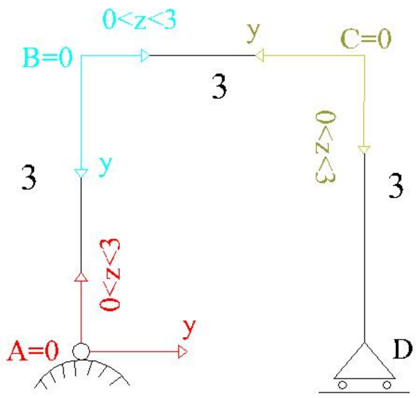


Fig. 1 – Esempi di asse z sui vari tratti

III.12.2 Scrittura delle funzioni

Le funzioni da definire sono N(z), T(z), M(z), quindi sforzo normale, sforzo di taglio e momento flettente, tutti in funzione dell'ascissa *z* definita precedentemente.

Per scrivere tali funzioni è utile ricordare la convenzione di positività. Lo sforzo normale è positivo se di trazione (vedi Fig. 2):

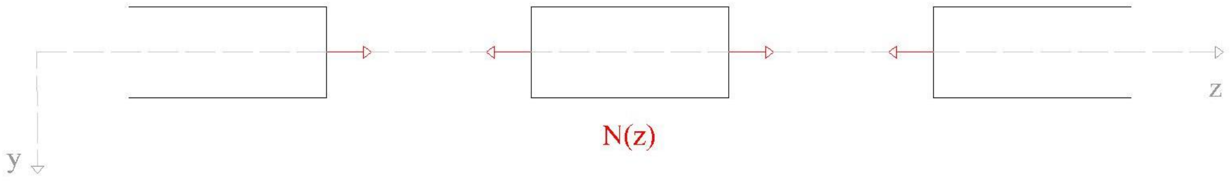


Fig. 2 – Convenzione positiva dello sforzo normale

Lo sforzo di taglio è positivo se ruota in verso orario rispetto al centro del tratto sul quale applicato (vedi Fig. 3):

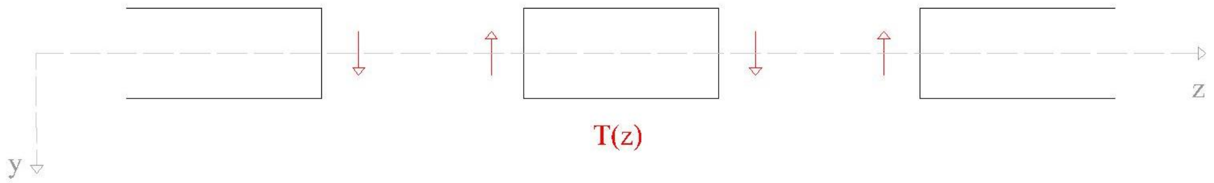


Fig. 3 – Convenzione positiva del Taglio

Il momento flettente è positivo se tende le fibre inferiori (se determinato su asse orizzontale), o in generale se tende le fibre delle y positive con z coincidente con l'asse della trave e x uscente dal piano del foglio (vedi Fig. 4 per alcuni tratti di trave comunque inclinati):

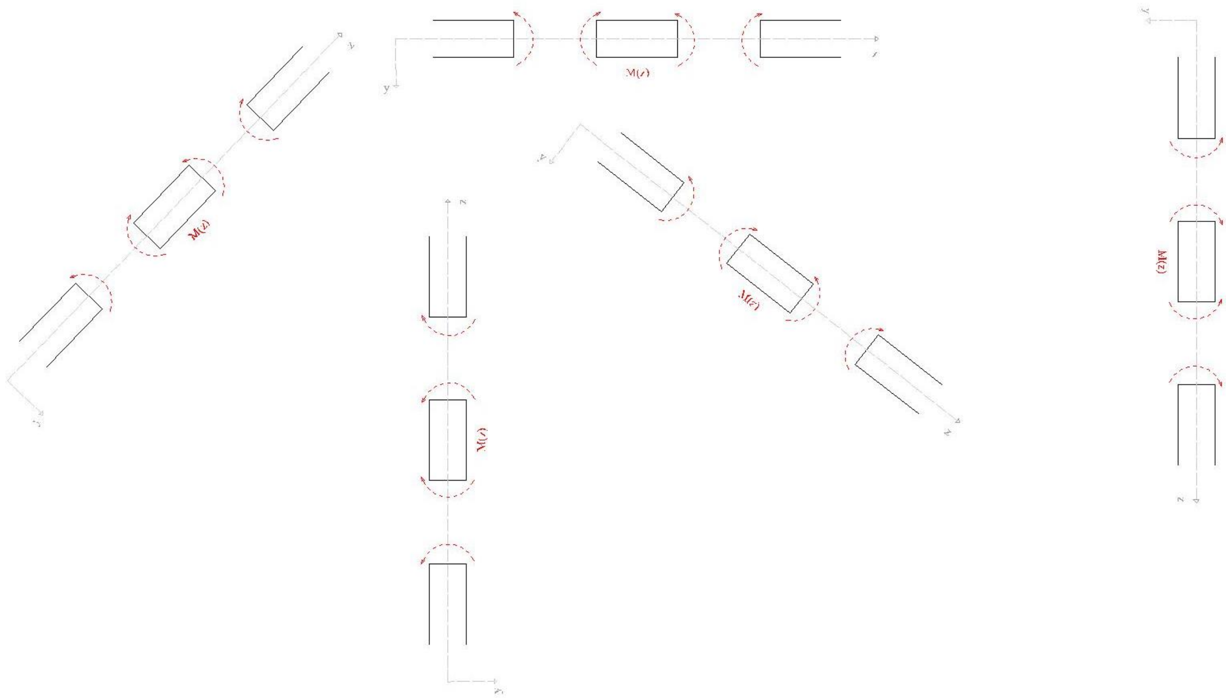


Fig. 4 – Convenzione positiva del momento flettente

Per scrivere le funzioni N(z), T(z) e M(z) è necessario determinare in prima battuta le reazioni vincolari del sistema. Note le reazioni vincolari esterne e interne, le funzioni N(z), T(z), M(z) in ogni tratto si determinano scrivendo le equazioni di equilibrio per la sotto-struttura prima della generica sezione z oppure dopo la generica sezione z.

Nota bene. Se la trave è unica (ossia non ci sono vincoli interni) le opzioni su cui imporre l'equilibrio sono due. Se invece il sistema è composto da due o più travi vincolate tra loro, allora le opzioni disponibili su cui imporre l'equilibrio sono più di due.

Scelta quindi la sottostruttura e assegnato il verso positivo alle caratteristiche della sollecitazione nella sezione generica a distanza z dall'origine del sistema di riferimento scelto, le funzioni N(z), T(z), M(z) si determinano imponendo l'equilibrio della sottostruttura soggetta alle CdS N(z), T(z), M(z), alle forze esterne e alle reazioni vincolari applicate sulla sottostruttura in esame.

<u>III.12.3 Esempi</u>

<u>Telaio 1</u>

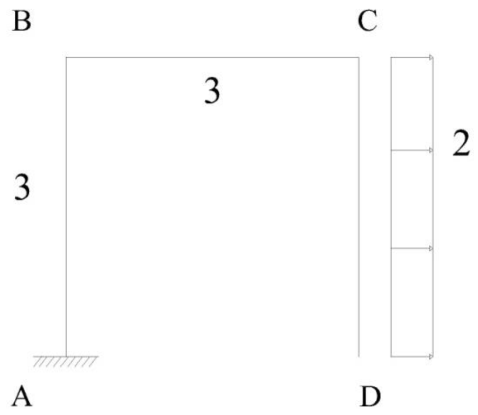


Fig. 5 – Esempio 1

Si consideri il telaio isostatico in Figura 5, caricato con carico distribuito sul ritto CD. Primo passo: ricavare le reazioni vincolari con uno dei metodi spiegati nelle lezioni precedenti. I risultati sono rappresentati in Fig. 6

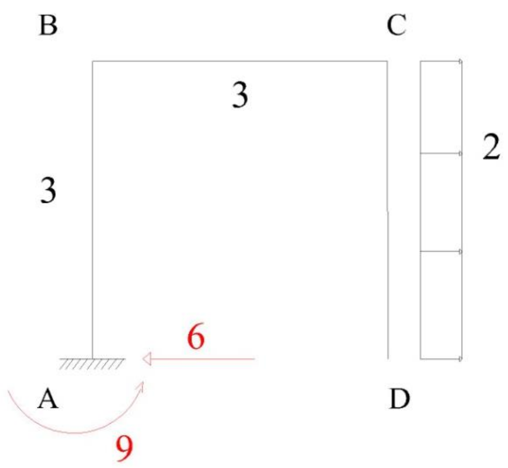


Fig. 6 – Reazioni vincolari Esempio 1

Secondo passo: suddividere la struttura in tre tratti, AB, BC e CD, e definire per ogni tratto verso dell'asse asse z e origine. La definizione è arbitraria e a discrezione dello studente; la più facile sembra essere quella in Fig. 7 (rossa per il tratto AB, blu per il tratto BC e verde per il tratto CD).

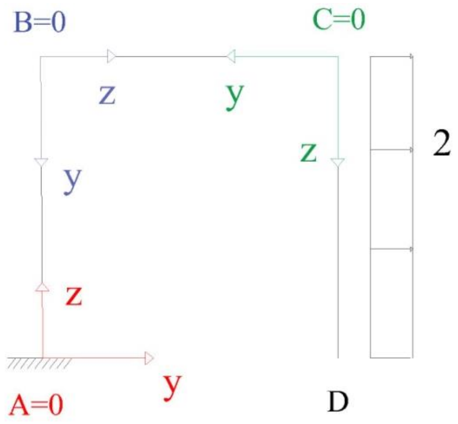


Fig.7 – Possibile definizione asse z per ogni tratto

Si analizzi ora, separatamente, ciascun tratto. Il tratto AB è lungo complessivamente 3, quindi avrà ascissa z∊[0;3]. Lo stesso vale per i tratti BC e CD, entrambi analizzati con ascissa z∊[0;3].

Le funzioni N(z), T(z), M(z) su AB si determinano imponendo l'equilibrio del tratto A-z oppure z-D: entrambe le opzioni sono corrette e sono rappresentate in Fig. 8:

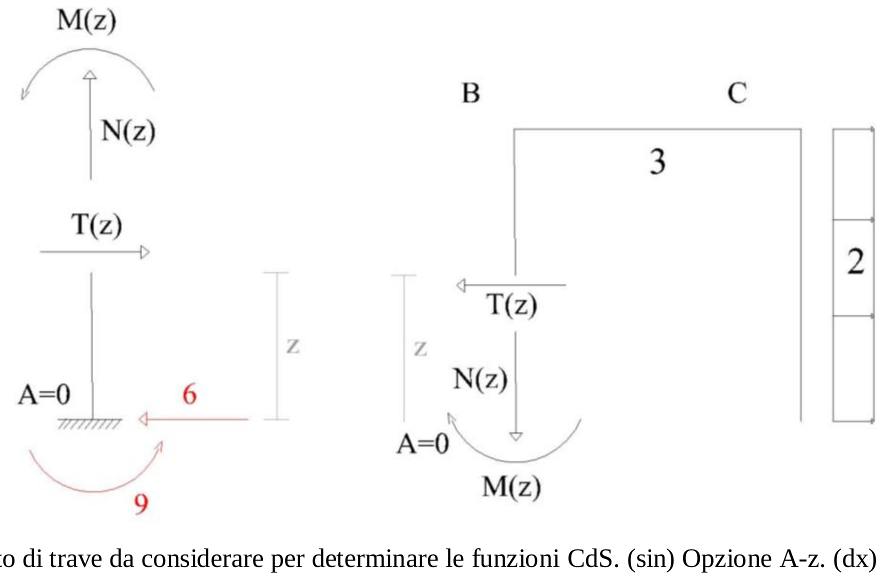


Fig. 8 – Tratto di trave da considerare per determinare le funzioni CdS. (sin) Opzione A-z. (dx) Opzione z-D

In generale conviene scegliere l'opzione per la quale risulti più semplice imporre l'equilibrio, ossia quella con meno azioni esterne e reazioni vincolari. Nell'esempio in esame sono entrambe ugualmente semplici. Imponendo l'equilibrio del tratto A-z si ha:

Equilibrio alla traslazione assiale: $N(z) = 0$

Equilibrio alla traslazione tagliante: $T(z) - 6 = 0 \Rightarrow T(z) = 6$

Equilibrio alla rotazione intorno al G della sezione in esame: 9 – 6*z + M(z) = 0 $\Longrightarrow$ M(z) = 6*z - 9

L'equilibrio del tratto z-B darebbe le stesse funzioni. Come ci si poteva aspettare analizzando i carichi applicati e tenendo presente le equazioni indefinite dell'equilibrio per la trave ad asse rettilineo, l'espressione trovata delle funzioni conferma taglio e sforzo normale costanti e momento flettente lineare in zeta.

Analogamente, le funzioni N(z), T(z), M(z) su BC si determinano imponendo l'equilibrio del tratto A-z oppure z-D: entrambe le opzioni sono corrette e sono rappresentate in Fig. 8:

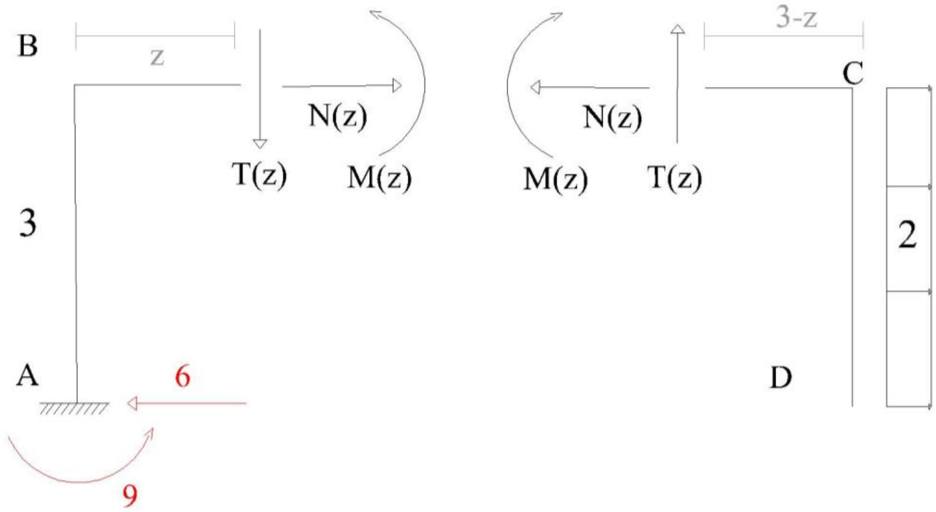


Figura 9 – Tratto di trave da considerare per determinare le funzioni CdS. (sin) Opzione A-z. (dx) Opzione z-D

Per finalità didattica si procede considerando entrambe le soluzioni, ma nella risoluzione dell'esercizio sarebbe sufficiente una sola delle due opzioni, avendo cura di scegliere la più semplice da sviluppare. In questo caso, sarebbero entrambe ugualmente semplici.

Imponendo l'equilibrio del tratto A-z si ha:

Equilibrio alla traslazione assiale: $N(z) - 6 = 0 \Rightarrow N(z) = 6$

Equilibrio alla traslazione tagliante: $-T(z) = 0 \Rightarrow T(z) = 0$

Equilibrio alla rotazione: $M(z) - 6 * 3 + 9 = 0 \Rightarrow M(z) = 9$

Imponendo l'equilibrio del tratto z-D si ha:

$N(z) - 3 * 2 = 0 \Rightarrow N(z) = 6$

$T(z) = 0 \Rightarrow T(z) = 0$

$M(z) - 3 * 2 * 1.5 = 0 \Rightarrow M(z) = 9$

Per quanto riguarda la sezione CD si può considerare il tratto A-z oppure il tratto z-D, riportati in figura 10.

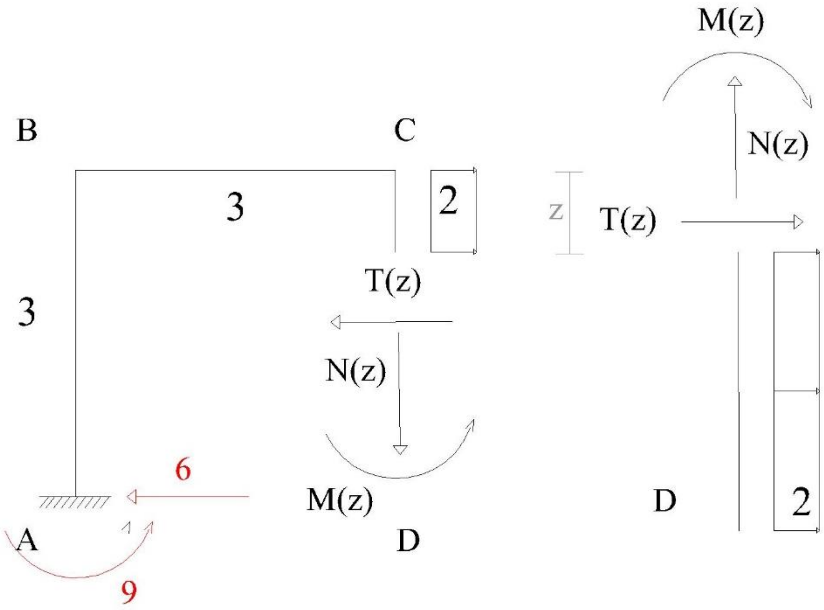


Figura 10

Si sceglie di sviluppare inizialmente il tratto z-D:

Equilibrio alla traslazione assiale: $N(z) = 0$

Equilibrio alla traslazione tagliante: $T(z) + 2 * (3 - z) = 0 \Rightarrow T(z) = 2z - 6$

Equilibrio alla rotazione: $-M(z) + 2 * (3 - z) * \frac{(3-z)}{2} = 0 \Rightarrow M(z) = z^2 - 6z + 9$

Per scopo didattico, si sviluppa anche il tratto A-z:

$N(z) = 0$

$-T(z) + 2 * z - 6 = 0 \Rightarrow T(z) = 2z - 6$

$M(z) - 2 * \frac{z^2}{8} - 6 * (3 - z) + 9 = 0 \Rightarrow M(z) = z^2 - 6z + 9$

<u>Telaio 2</u>

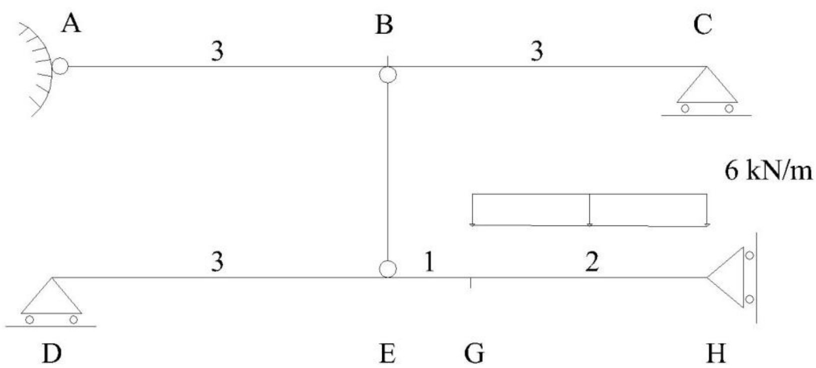


Figura 11

Il telaio è composto da due travi collegate con pendolo BE.

Ricavate le reazioni vincolari (soluzione in figura 12) si procede per determinare le funzioni N(z), T(z) ed M(z).

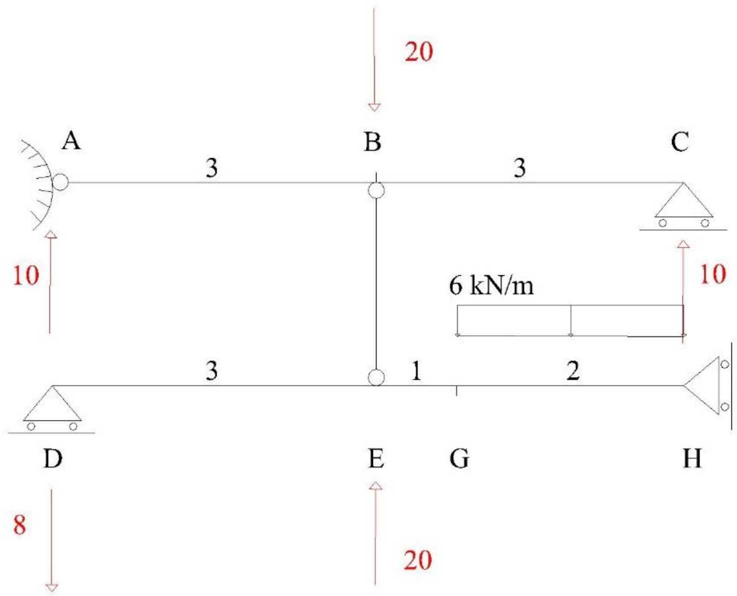


Figura 12

In questo caso, si suddivide la struttura in cinque sottoparti: AB, BC, DE, EG, GH (DE e GH vanno analizzate separatamente poiché sottoposte a diverse condizioni di carico e quindi con funzioni CdS di ordine diverso).

Per quanto concerne la parte inferiore di telaio, si può partire con il tratto DE, considerando la porzione D-z (figura 13), con z∊[0;3].

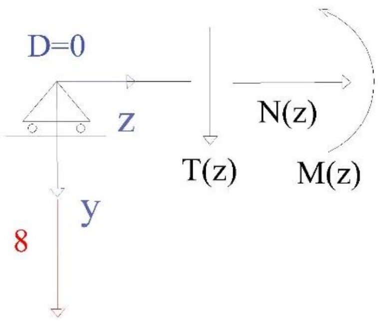


Figura 13

Equilibrio alla traslazione assiale: $N(z) = 0$

Equilibrio alla traslazione tagliante: $T(z) + 8 = 0 \Rightarrow T(z) = -8$

Equilibrio alla rotazione: $-M(z) + 8z = 0 \Rightarrow M(z) = -8\,z$

In seguito si considera il tratto EG, analizzando la porzione D-z, con z∊[0;1].

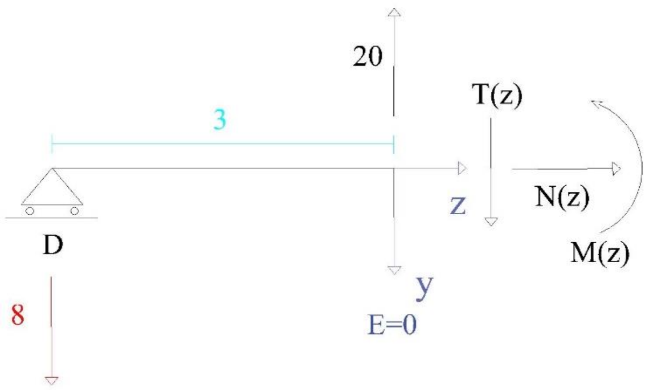


Figura 14

Equilibrio alla traslazione assiale: $N(z) = 0$

Equilibrio alla traslazione tagliante: $T(z) + 8 - 20 = 0 \Rightarrow T(z) = -12$

Equilibrio alla rotazione: $M(z) - 20\,z + 8 * (3 + z) = 0 \Rightarrow$

$M(z) = 12\,z - 24$

Per il tratto GH si può sia mantenere l'origine del sistema di riferimento in E, sia spostarla in G. Mantenendo l'origine del sistema di riferimento su GH in E (ossia z϶[1;3]) e considerando la porzione z-H si ottiene (vedi .

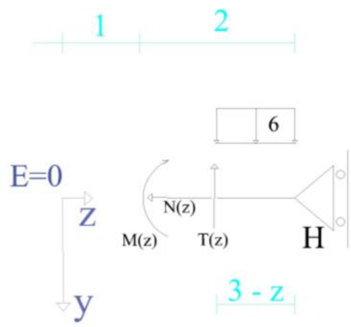


Figura 15

Equilibrio alla traslazione assiale: $N(z) = 0$

Equilibrio alla traslazione tagliante: $T(z) - 6 * (3 - z) = 0 \Rightarrow T(z) = 18 - 6\,z$

Equilibrio alla rotazione: $-M(z) - \frac{6}{2} * (3 - z)^2 = 0 \Rightarrow M(z) = -3z^2 + 18\,z - 27$