

CAP. VII – FLESSIONE

Si analizzi ora quando la sezione di trave è soggetta a momento flettente. Il piano dove agisce la coppia flettente si chiama piano di sollecitazione. La sua traccia sulla sezione si chiama asse di sollecitazione s . La retta perpendicolare al piano di sollecitazione è la retta sulla quale giace il vettore momento flettente M e si indica con la lettera m . In Fig. 1 un esempio di flessione in un piano qualsiasi (oppure si dice intorno all'asse m). In Fig. 2 la stessa flessione rappresentata nel piano della sezione. Per definizione m e s sono sempre perpendicolari.

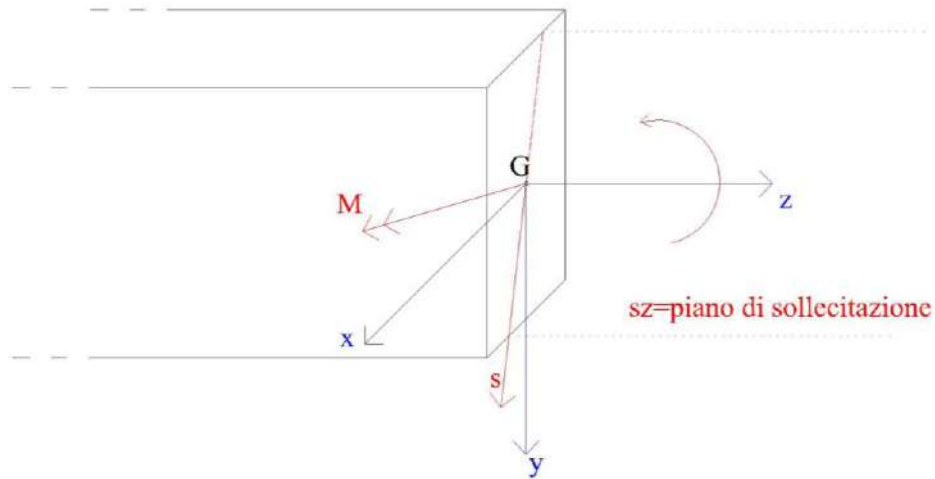


Figura 1

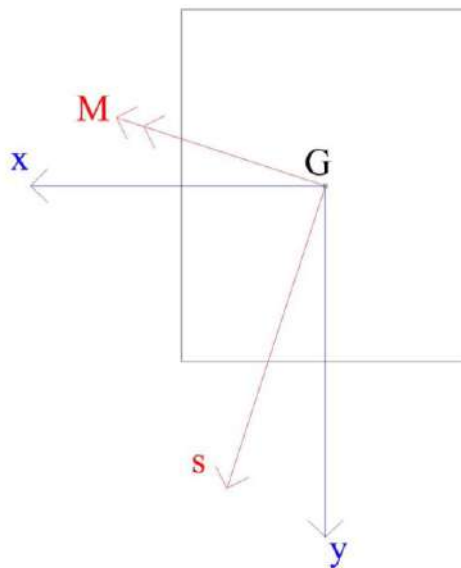


Figura 2

Se per esempio la coppia flettente agisce nel piano yz (piano di sollecitazione), allora l'asse di sollecitazione coincide con y e l'asse momento con x . In tal caso si parla di flessione attorno all'asse x (vd. Fig. 3).

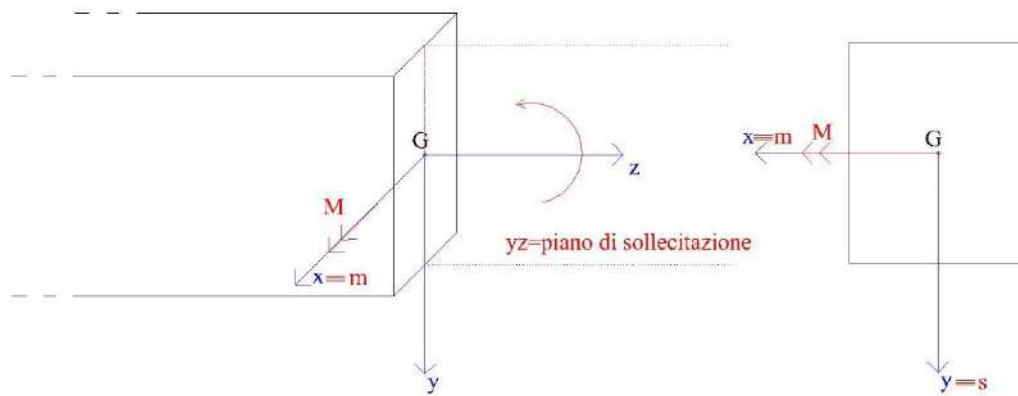


Figura 3

Se invece, altro esempio, la coppia flettente agisce nel piano xz (vd. Fig. 4), allora l'asse di sollecitazione è x e l'asse momento è y , e si parla di flessione attorno all'asse y .

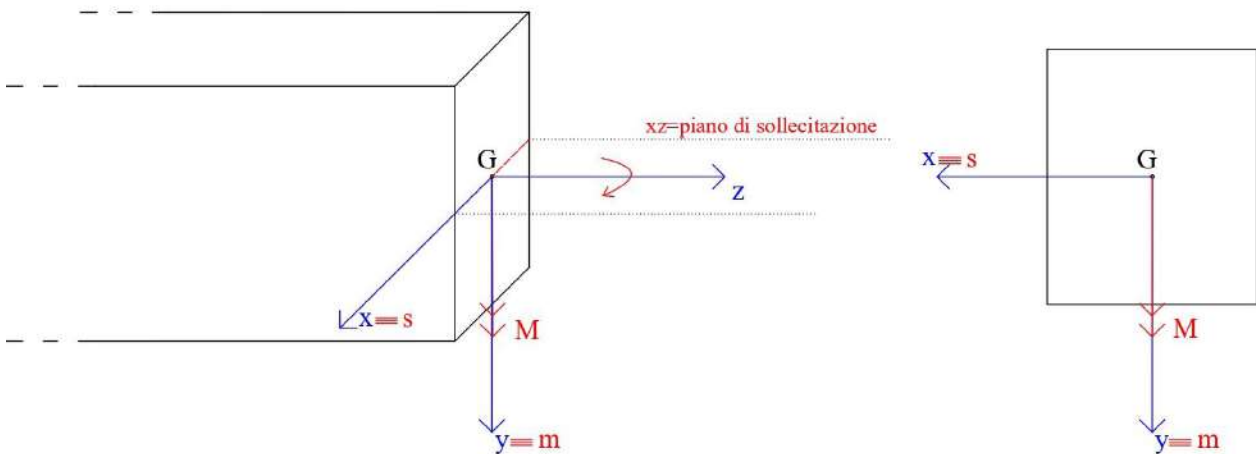


Figura 4

Nel piano della sezione si indichino gli assi di riferimento x, y e gli assi s, m (vd. Fig. 2).

In generale queste due coppie possono essere coincidenti o non coincidenti. In ogni caso il momento flettente si indica o come vettore sull'asse momento oppure come coppia flettente nel piano sz .

VII.1 Flessione retta intorno a x (con x oppure y asse di simmetria)

Si ipotizzi ora di avere un momento flettente attorno all'asse x e che l'asse x (oppure il suo perpendicolare y) sia coincidente con un asse di simmetria. In teoria sarebbe più corretto dire con x, y coincidenti con gli assi centrali d'inerzia (normalmente battezzati come ξ, η). Questi sono due assi speciali (perpendicolari tra loro) che saranno definite nel capitolo successivo. Nel frattempo basti

sapere che gli assi centrali d'inerzia sono noti se esiste almeno un asse di simmetria ortogonale: in tal caso coincidono con l'asse di simmetria e il suo perpendicolare (vd. Fig. 5). Nel capitolo successivo si spiegherà come determinare gli assi centrali anche in assenza di simmetria.



Figura 5

VII.1.1 Diagramma delle tensioni e delle deformazioni

Per ricavare la distribuzione delle σ_z sulla sezione si formulano le stesse ipotesi fatte per lo sforzo normale centrato, ossia:

- 1) La sezione trasversale piana si mantiene piana nella deformazione.
- 2) Elasticità lineare, ossia $\sigma_z = E \varepsilon_z$.

Per effetto del momento flettente la sezione trasversale ruota rigidamente. La deformazione assiale non è quindi costante sulla sezione ma lineare in y . Si può dimostrare che nel caso di flessione retta attorno a x la linea lungo la quale la deformazione si annulla risulta parallela a x .

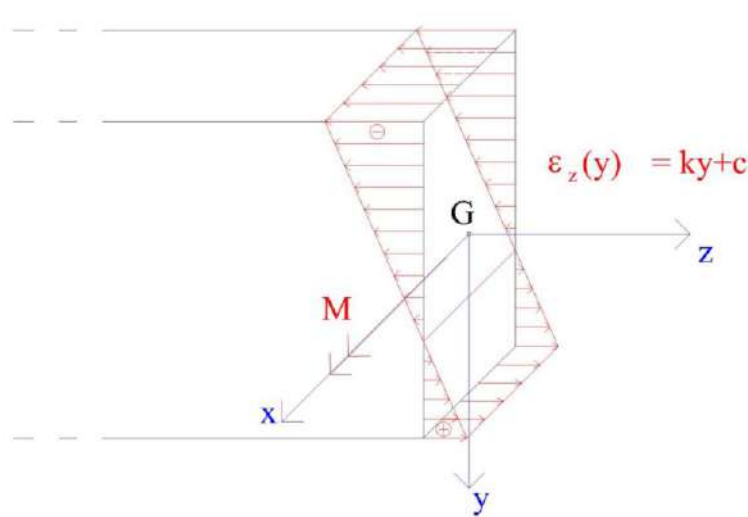


Figura 6

In tal caso, la forma più generale possibile della funzione deformazione è quella indicata in Fig. 6, dove si ipotizza che la deformazione sia nulla lungo una retta non baricentrica. Si dimostrerà che tale retta (che si battezzerà *asse neutro*) deve essere baricentrica. Infatti, la forma generale della deformazione deve essere quindi:

$$\varepsilon_z = \varepsilon_z(z, y) = k(z)y + c$$

In Fig. 6 il segno + indica allungamento, il segno – accorciamento.

La tensione vale quindi (per l'elasticità lineare):

$$\sigma_z(z, y) = E\varepsilon_z(z, y) = E(k(z)y + c)$$

La risultante delle tensioni deve essere zero (essendo applicato il solo momento flettente che, come noto, ha risultante nulla). Ciò implica:

$$\int_A \sigma_z(z, y) dA = 0 \Rightarrow E \left(k(z) \int_A y dA + c \int_A dA \right) = 0 \Rightarrow cA = 0 \Rightarrow c = 0$$

in quanto il primo integrale rappresenta il momento statico della sezione rispetto all'asse baricentrico x , zero per definizione quando riferito a un asse baricentrico (si veda capitolo successivo su geometria delle aree). Il diagramma delle $\sigma_z(y)$ (e anche quello delle $\varepsilon_z(y)$) nella sezione, quindi, è lineare con punti di nullo sull'asse x . L'asse luogo dei punti di nullo di $\sigma_z(y)$ si indica come asse neutro n (la parola neutro sta a indicare zero tensioni).

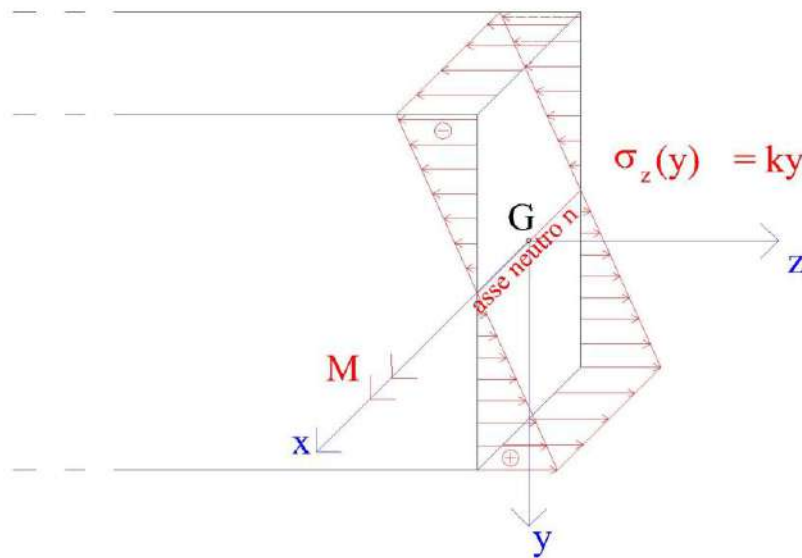


Figura 7

Il momento risultante delle $\sigma_z(y)$ rispetto al baricentro G deve valere M . Quindi:

$$\int_A \sigma_z(z, y) y dA = M \Rightarrow E \left(k(z) \int_A y^2 dA \right) = M \Rightarrow Ek(z)I_x = M \Rightarrow k(z) = \frac{M}{EI_x} \quad (7.1)$$

dove I_x rappresenta il momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse x . È una quantità che dipende solo dalla geometria della sezione (come l'area e il baricentro). Misura quanto la sezione è allungata rispetto all'asse x . Nel capitolo successivo si daranno definizione generale e strumenti per calcolarlo.

Per esempio il momento d'inerzia di un rettangolo $B \times H$ rispetto all'asse x baricentrico vale $\frac{BH^3}{12}$.

Dalla (7.2) si ricava in definitiva:

$$\sigma_z(z, y) = \frac{M(z)}{I_x} y \quad (7.1)$$

detta formula di Navier per flessione retta intorno a x (con x, y coincidenti con ξ, η , per esempio con x oppure y di simmetria per la sezione). I punti a tensione nulla sono localizzati sull'asse x che coincide quindi con l'asse neutro n . Tale flessione si dice retta perché l'asse neutro risulta perpendicolare all'asse di sollecitazione, la parola “retta” indica quindi l'angolo retto tra n e s . Da sottolineare che non è sempre così. Si mostrerà esistere la possibilità che, per assegnati momenti flettenti diversi da quello considerato in Fig. 5, per esempio quando M non giace su un asse di simmetria della sezione, i due assi n e s non sono perpendicolari.

Tornando alla flessione retta intorno a x , dall'ipotesi di elasticità lineare si ricava anche:

$$\varepsilon_z(z, y) = \frac{M(z)}{EI_x} y \quad (7.2)$$

Il diagramma $\sigma_z(y)$ nella sezione è fatto di vettori perpendicolari alla sezione. Per convenzione tale diagramma si ruota sul piano della sezione. Si traccia quindi una fondamentale perpendicolare all'asse neutro (vd. Fig. 8) e si traccia un diagramma bitriangolare che divide la sezione in una zona tesa e in una zona compressa. Per convenzione la tensione di trazione è positiva. Attenzione a riportare correttamente zona tesa e zona compressa in funzione del momento flettente assegnato. La tensione in un generico punto P è funzione della sola coordinata y (vd. Fig. 8).

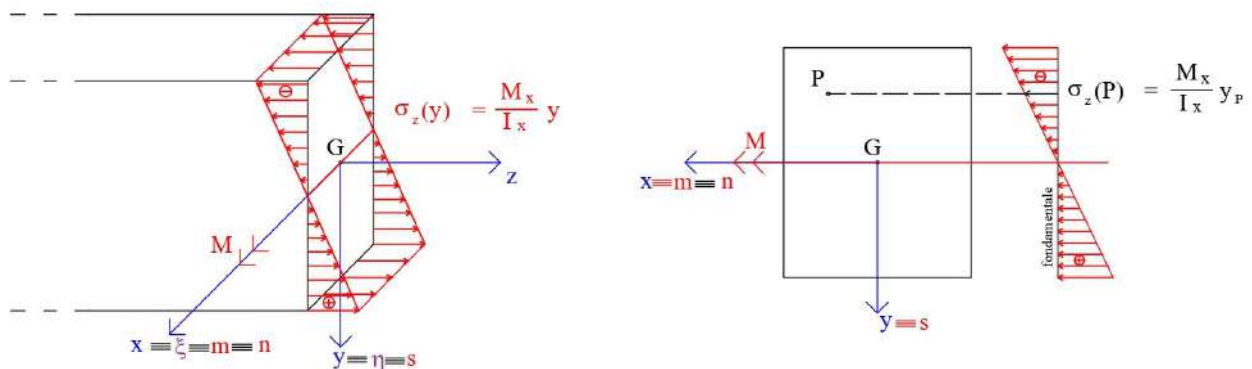


Figura 8

Il diagramma $\varepsilon_z(y)$ nella sezione è identico a quello delle $\sigma_z(y)$ a meno del modulo di Young E . La sezione quindi ruota intorno all'asse x .

Ricapitolando:

- Piano di sollecitazione = piano nel quale agisce la coppia flettente
- Asse di sollecitazione s = traccia del piano di sollecitazione sulla sezione
- Asse momento m = asse sul quale è steso il vettore momento flettente. Vale sempre $m \perp s$
- Asse neutro n = luogo dei punti a tensione nulla. Nella flessione retta n risulta perpendicolare a s (o, equivalentemente, n coincidente con m).

VII.1.2 Esempio

Dati:

profilo: HE140B

$$A = 31.4 \text{ cm}^2$$

$$I_x = 1'509 \text{ cm}^4$$

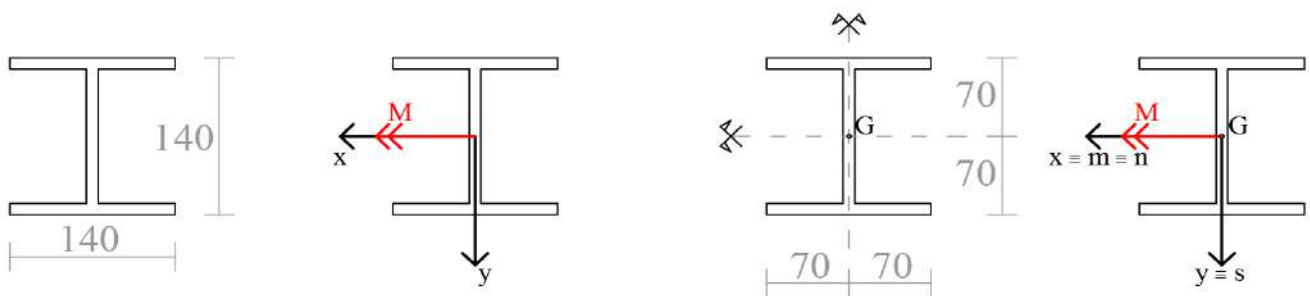
$$I_y = 549.7 \text{ cm}^4$$

$$M_x = 15 \text{ kNm}$$

Determinare: G, s, m, n

Diagramma σ_z

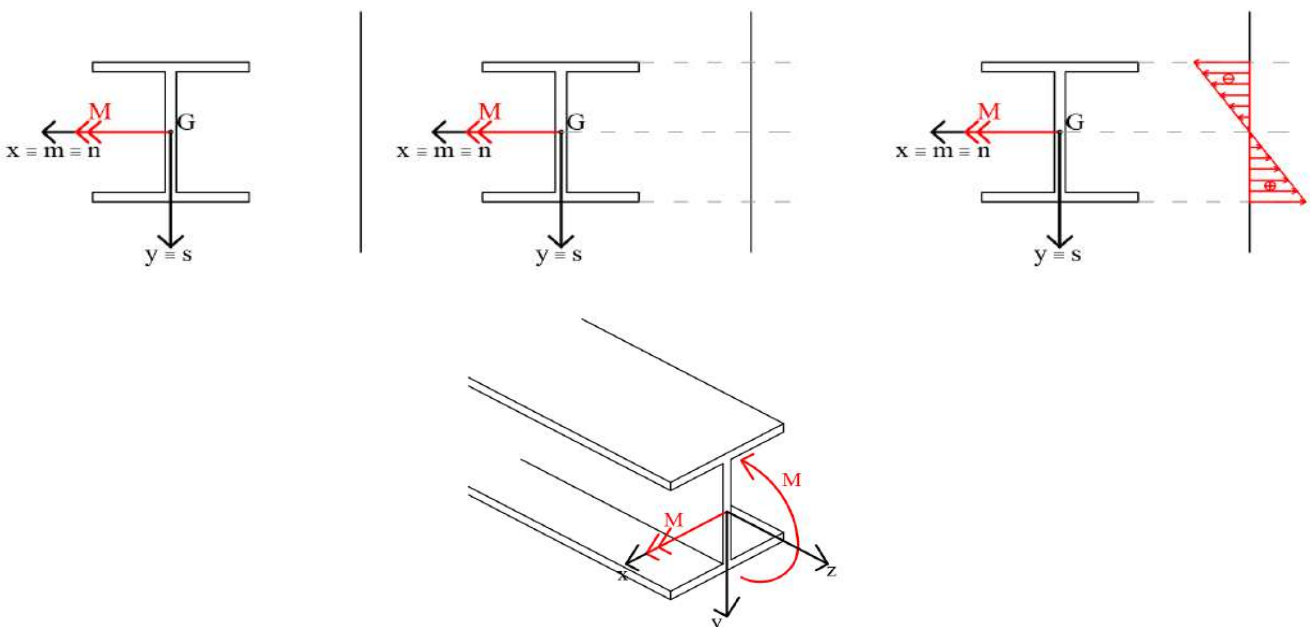
$|\sigma_z|_{max}$ ossia la sigma massima in valore assoluto



Il baricentro G si trova nel punto di intersezione dei due assi di simmetria della sezione (vd. Terza figura sopra).

L'asse di sollecitazione s è per definizione perpendicolare all'asse momento, quindi coincide con l'asse y . (vd. quarta figura sopra).

La flessione è retta perché s e m coincidono con gli assi di simmetria. Di conseguenza l'asse neutro n coincide con l'asse momento ossia l'asse x .



Il diagramma σ_z si traccia

- disegnando una fondamentale normale all'asse n (prima figura sopra),
- prolungando l'asse neutro fino alla fondamentale e proiettando gli estremi della sezione sulla fondamentale (seconda figura sopra),
- tracciando un diagramma lineare passante per l'intersezione di n con la fondamentale (terza figura sopra)

La sezione è quindi divisa in due parti dall'asse neutro: una parte compressa e una tesa. La parte tesa si può determinare esplicitando la formula di Navier, ossia:

$$\sigma_z(y) = \frac{M_x}{I_x} \cdot y \Rightarrow \sigma_z(y) = \frac{15 \cdot 10^6 \text{ N mm}}{1509 \cdot 10^4 \text{ mm}^4} \cdot y = 0.994 y$$

Dalla espressione della tensione si ricava quindi che la zona di sezione tesa è quella a $y > 0$ ossia la metà inferiore.

Con la formula di Navier si ricava i valori di σ_z^{min} e di σ_z^{max} :

$$\sigma_z^{max} = 0.994 \frac{N}{\text{mm}^3} \cdot 70 \text{ mm} = 69.6 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

$$\sigma_z^{min} = 0.994 \frac{N}{\text{mm}^3} \cdot (-70 \text{ mm}) = -69.6 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

E quindi:

$$|\sigma_z|_{max} = 69.6 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

VII.1.3 Deformazione flessionale

Per effetto del momento flettente la sezione ruota. Le rotazioni sono associate anche a spostamenti. Per esempio in Fig. 9 è rappresentata la deformata della linea d'asse (linea rossa, detta linea elastica) per effetto del carico. La linea rossa rappresenta la posizione dei baricentri di tutte le sezioni della trave AB a deformazione avvenuta. Si vede in figura come la generica sezione **S** (il cui baricentro appartiene al segmento AB) si abbassa (ruotando) nella posizione **S'**.

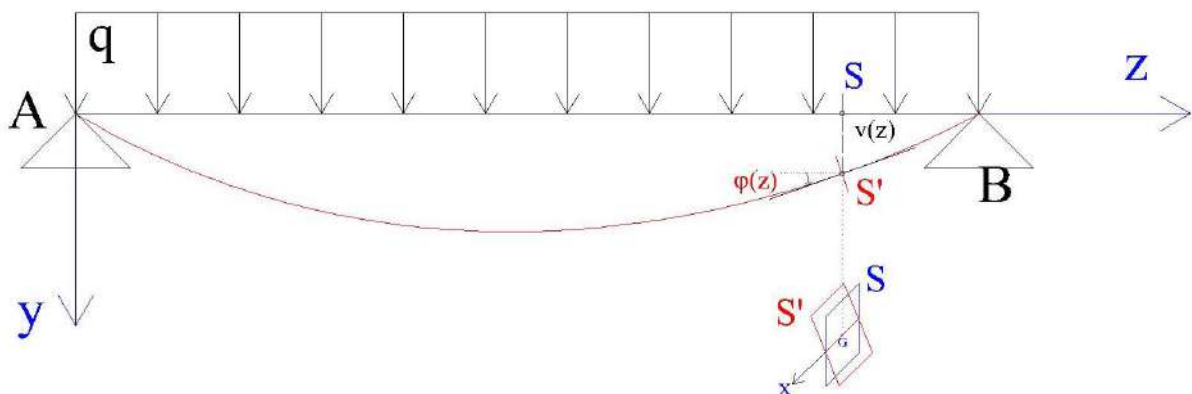


Figura 9

Il piano della deformata si chiama piano di flessione (in Fig. 9 è il piano zy). La traccia di tale piano sulla sezione trasversale di trave si chiama asse di flessione (in Fig. 9 coincide con l'asse y). Esso è sempre perpendicolare all'asse neutro. Se la flessione, come quella che si sta considerando, è retta intorno a x , allora l'asse flessione f coincide con l'asse di sollecitazione s e quindi in questo caso anche con y .

La linea curva in rosso in Fig. 9 rappresenta la linea elastica. Lo spostamento verticale (tratteggiato con riferimento alla sezione S in figura) del baricentro G di ogni sezione ad ascissa z è espresso dalla funzione:

$$v(z)$$

Per convenzione tale funzione si può rappresentare concordemente con l'asse y , ossia spostamenti positivi se concordi all'asse y geometrico.

Si ricordi che l'ipotesi fatta suppone che le sezioni trasversali si mantengano piano a deformazione avvenuta. La sezione generica si abbassa di una quantità $v(z)$ e ruota rispetto a un asse baricentrico di una quantità:

$$\varphi(z)$$

Per convenzione la rotazione si suppone positiva se antioraria. Per esempio in Fig. 9 le sezioni da A alla mezzeria subiscono rotazioni negative, mentre le sezioni dalla mezzeria a B rotazioni positive.

Il modello di trave di Eulero-Bernoulli (puramente flessionale) ipotizza che sezione e linea d'asse si mantengono perpendicolari tra loro nella deformazione, o anche (equivalentemente) che la rotazione della sezione coincide con la rotazione dell'asse (in Fig. 9 la rotazione indicata con $\varphi(z)$ è uguale alla rotazione che porta S su S'). In tal caso, quindi:

$$\frac{dv(z)}{dz} = -\tan \alpha = -\tan \varphi(z) \approx -\varphi(z)$$

L'uguaglianza $\tan \varphi(z) \approx \varphi(z)$ (tangente=angolo) è valida nell'ipotesi di piccole rotazioni, ossia rotazioni (adimensionali) dell'ordine di pochi per cento. Il segno meno è dovuto al fatto che per la convenzione adottata sulle rotazioni, a derivata di abbassamento positiva corrisponde una rotazione negativa; per esempio nel tratto da A alla mezzeria $\frac{dv(z)}{dz} > 0$ mentre la rotazione è oraria ossia negativa. Nel tratto dalla mezzeria a B si ha $\frac{dv(z)}{dz} < 0$ e la rotazione è antioraria ossia positiva.

La rotazione flessionale può essere determinata introducendo il concetto di curvatura flessionale.

La curvatura flessionale $\chi(z)$ si definisce come:

$$\chi(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi(z)}{\Delta z} = \frac{d\varphi(z)}{dz}$$

Essa rappresenta il limite del rapporto tra la rotazione relativa tra due sezioni a distanza Δz e la distanza stessa. Fisicamente, si può anche dare il significato espresso in Fig. 10.

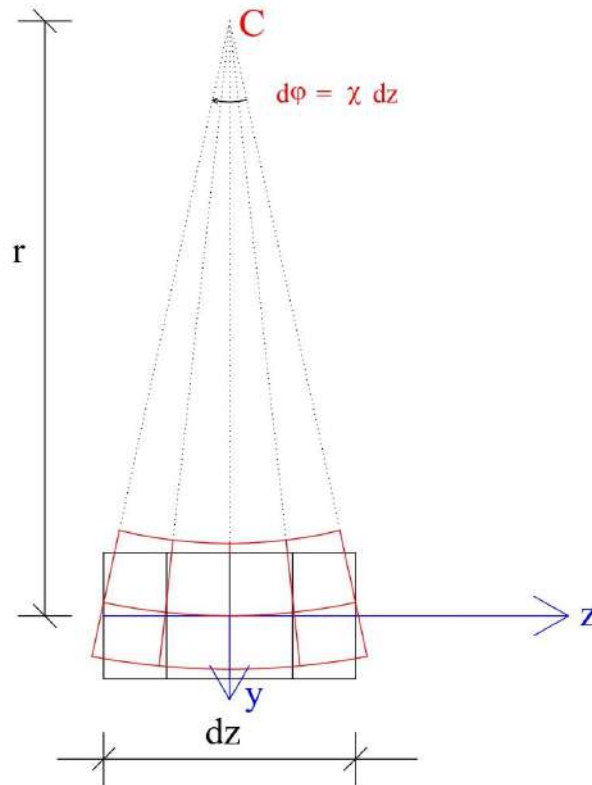


Figura 10

La rotazione relativa avviene intorno a un punto (C in Fig. 10) che dista dal baricentro di una quantità pari al raggio di curvatura r che, per le convenzioni adottate, è pari a:

$$r = r(z) = -\frac{1}{\chi(z)}$$

Il segno meno è necessario per rendere valida l'uguaglianza anche in segno. Infatti, a curvatura positiva ossia $\frac{d\varphi(z)}{dz} > 0$ (come quella in Fig. 9 dove la rotazione parte in A oraria e, procedendo lungo l'asse z , cresce fino al valore massimo antiorario in B) corrisponde un raggio di curvatura negativo (r si considera sempre orientato verso il centro di curvatura C e il suo segno è letto con riferimento all'asse y , in Fig. 9 è quindi negativo).

Tutte le sezioni del concio di dimensione dz ruotano intorno al punto C. Le fibre parallele, dovendo per ipotesi rimanere perpendicolari alla sezione, si dispongono su archi di cerchio.

Si può dimostrare che la curvatura flessionale è proporzionale al momento flettente, ossia:

$$\chi(z) = \frac{M(z)}{EI_x}$$

e quindi il raggio di curvatura vale:

$$r(z) = -\frac{EI_x}{M(z)}$$

Il prodotto EI_x è detto rigidità flessionale intorno all'asse x . La curvatura dipende quindi da come varia il momento flettente lungo l'asse della trave. Nell'esempio rappresentato in Fig. 9 il momento flettente varia parabolicamente lungo l'asse della trave, e parabolicamente varia anche la curvatura flessionale $\chi(z)$.

Per chiarire ulteriormente il concetto di curvatura flessionale può far comodo considerare un esempio in cui il momento flettente sia costante sulla trave. Si consideri quindi una mensola soggetta a una coppia antioraria nell'estremo B:

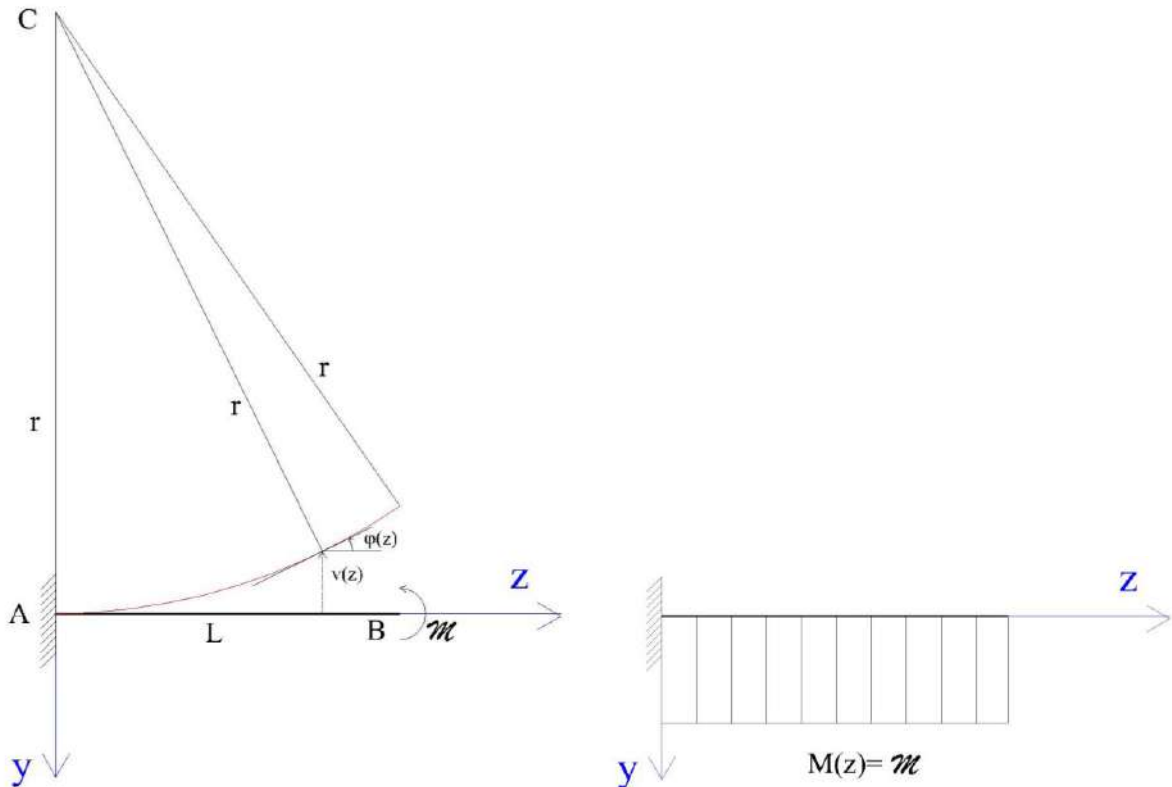


Figura 11

In tal caso, poiché il momento flettente è costante su AB, tutte le sezioni trasversali da A a B ruotano intorno al punto C. AB si deforma in un arco di cerchio e ogni sezione subisce uno spostamento verso l'alto pari a $v(z)$ (coincidente con lo spostamento del baricentro G) e una rotazione pari a $\varphi(z)$. Poiché $M(z) = \mathfrak{M}$ è costante da A a B, anche la curvatura risulta costante e quindi la rotazione relativa tra due sezioni qualsiasi H e K è pari a:

$$\Delta\varphi_{HK} = \chi(z)d_{HK} = \frac{\mathfrak{M}}{EI_x} l_{HK}$$

dove l_{HK} è la distanza tra le due sezioni. In particolare per A e B vale quindi:

$$\Delta\varphi_{AB} = \varphi_B = \chi(z)L = \frac{\mathfrak{M}L}{EI_x}$$

in quanto la sezione A è incastrata e quindi $\varphi_A = 0$.

Se invece il momento flettente è variabile lungo l'asse z , per esempio come in fig. 12, la curvatura flessionale $\chi(z)$ è anch'essa variabile, e quindi l'entità della rotazione relativa varia sezione per sezione.

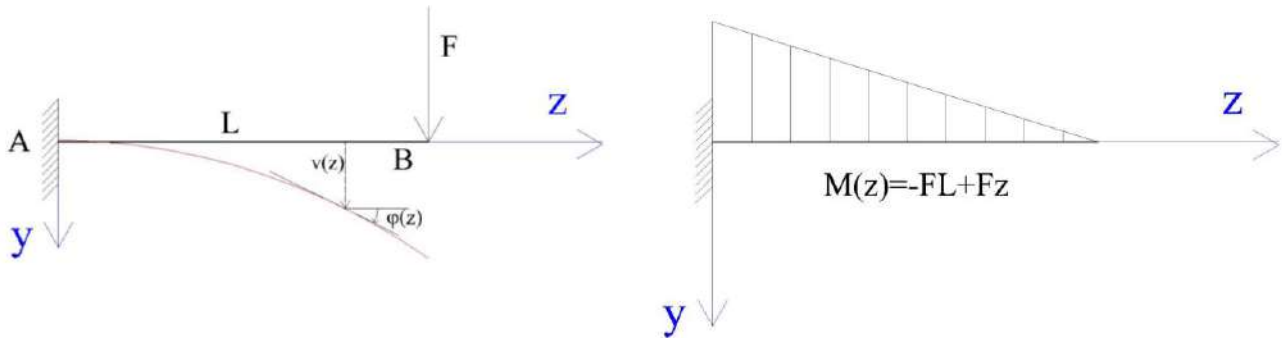


Figura 12

La rotazione relativa tra due sezioni H e K a distanza finita d_{HK} , quindi, può determinarsi solo invocando il concetto di integrale:

$$\Delta\varphi_{HK} = \int_{z_H}^{z_K} \chi(z) dz = \int_{z_H}^{z_K} \frac{M(z)}{EI_x} dz$$

Per esempio, la rotazione dell'estremità B della trave in Fig. 8quinque è data da:

$$\Delta\varphi_{AB} = \varphi_B = \int_0^L \frac{Fz - FL}{EI_x} dz = \frac{F}{EI_x} \int_0^L z dz - \frac{FL}{EI_x} \int_0^L dz = \frac{FL^2}{2EI_x} - \frac{FL^2}{EI_x} = -\frac{FL^2}{2EI_x}$$

Il segno meno sta a indicare che la rotazione è oraria.

C'è da aggiungere un'ultima riflessione sulla deformazione della sezione nel piano della sezione stessa.

In presenza di sforzo normale centrato si è accennato che una deformazione assiale è sempre accompagnata da una deformazione trasversale: una trazione restringe la sezione (si immagina ad esempio un elastico tirato agli estremi), una compressione ingrossa la sezione. Un fenomeno analogo avviene sulla sezione della trave inflessa, complicato, però, dalla variabilità lineare di $\varepsilon_z(z, y)$ rispetto a y data dalla (7.2). La parte di sezione soggetta a $\sigma_z(z, y) > 0$ ossia tesa, quindi, si restringe, la rimanente parte di sezione soggetta a compressione $\sigma_z(z, y) < 0$ si ingrossa.

Per esempio la sezione generica della trave di Fig. 9 o di Fig. 11 si deforma nel proprio piano come in Fig. 13

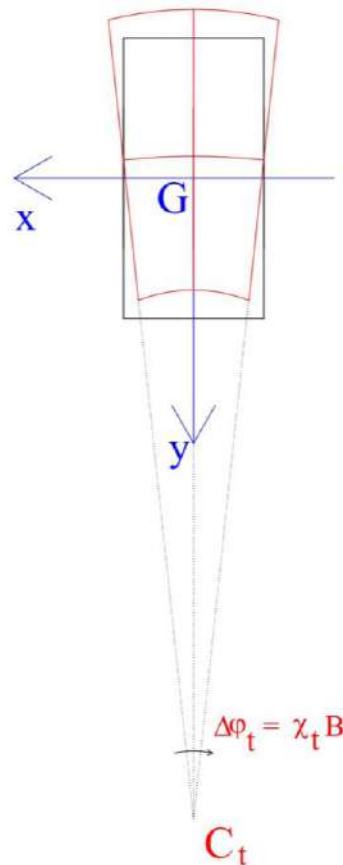


Figura 13

Le fibre inferiori tese in direzione z si contraggono nel piano xy , mentre le fibre superiori compresse lungo z si dilatano nel piano xy . Le corde parallele all'asse y ruotano intorno a un punto C_t di una quantità proporzionale a χ_t che a sua volta è legata alla curvatura flessionale $\chi = \frac{M}{EI}$ attraverso il coefficiente di Poisson ν .

Il fenomeno non è contemplato nella teoria tecnica della trave ma sarà esposto nel corso di Scienza delle Costruzioni nell'ambito della teoria del De Saint Venant.

VII.2 Flessione retta attorno a y (con x oppure y asse di simmetria)

Si ipotizzi ora di avere un momento flettente intorno all'asse y dove l'asse y (oppure il suo perpendicolare x) sia coincidente con un asse centrale d'inerzia della sezione trasversale, per esempio un asse di simmetria.

Un esempio di trave soggetta a flessione intorno all'asse y è dato in Fig. 14: La mensola sia caricata a un estremo da una forza concentrata parallela all'asse x (in Fig. 14–sin la vista assometrica). Questo significa che il piano di sollecitazione è il piano xz . In Fig. 14-dx è riportata la vista assometrica in modo che il piano di sollecitazione xz sia coincidente con il piano del foglio.

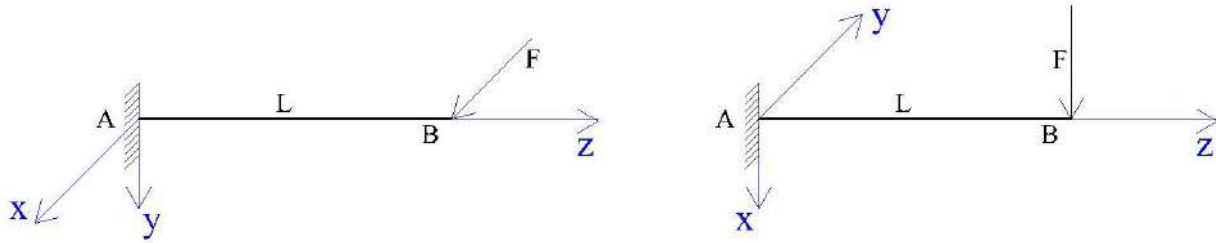


Figura 14

Le reazioni vincolari (in rosso) e il diagramma del momento flettente nel piano di sollecitazione è riportato in Figura 15-sin. A destra è riportato il momento in una sezione qualsiasi disegnata (con asse z uscente) in vista assonometrica. Il piano di sollecitazione coincide con il piano xz, l'asse di sollecitazione s coincide con l'asse x, l'asse momento coincide con l'asse y.

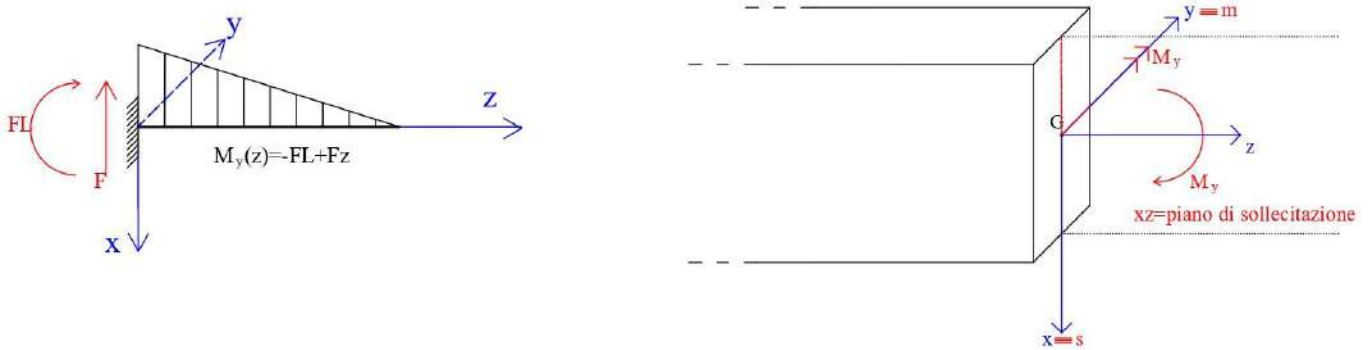


Figura 15

VII.2.1 Diagramma delle tensioni e delle deformazioni sulla sezione

Ripetendo gli stessi passaggi fatti nel paragrafo precedente si ottiene una formula di Navier analoga:

$$\sigma_z(z, x) = -\frac{M(z)}{I_y} x \quad (7.3)$$

Il segno meno è dovuto al fatto che un momento flettente steso dalla parte positiva dell'asse y genera trazione dove x è negativa. Il diagramma della tensione normale si ottiene (analogamente a quanto fatto per la flessione intorno a x) tracciando una fondamentale perpendicolare all'asse neutro e su questa un diagramma bitriangolare rappresentativo della tensione in ogni corda parallela a y (vd. Fig. 16).

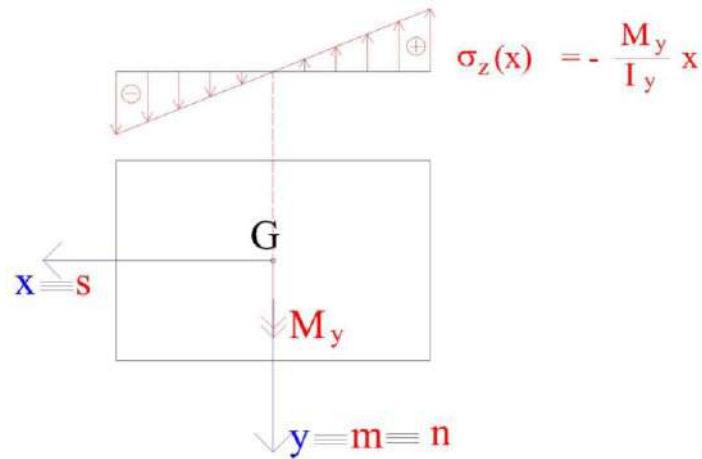


Figura 16

Analogamente la deformazione è data da:

$$\varepsilon_z(z, x) = \frac{M(z)}{EI_y} x \quad (7.4)$$

VII.2.2 Esempio

Dati:

profilo: HE140B (vd. esempio precedente per dimensioni geometriche)

$A = 31.4 \text{ cm}^2$

$I_x = 1'509 \text{ cm}^4$

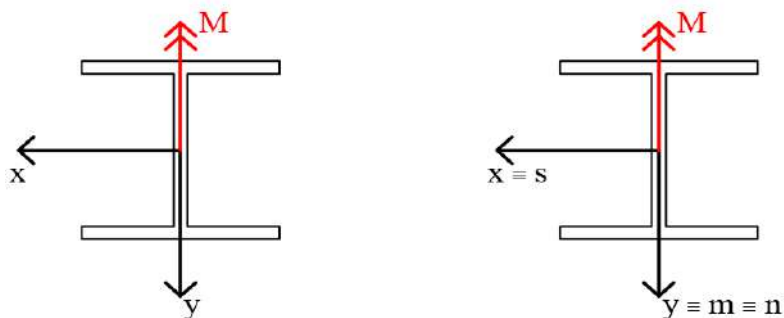
$I_y = 549.7 \text{ cm}^4$

$M_y = -5 \text{ kNm}$

Determinare: s, m, n

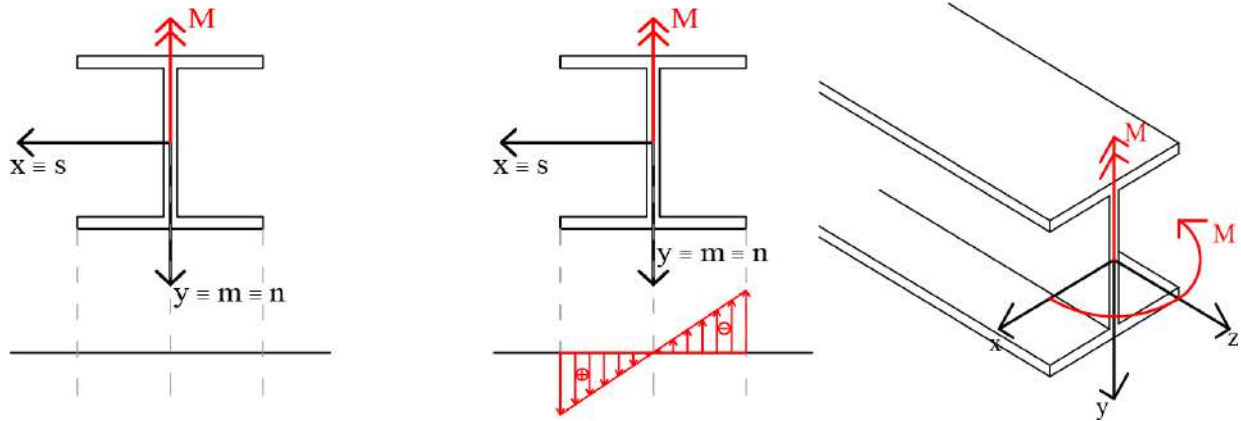
Diagramma σ_z

$|\sigma_z|_{max}$



Il vettore momento è diretto come l'asse y , quindi, l'asse di sollecitazione s (perpendicolare per definizione all'asse m) coincide con l'asse x . (vd. figura sopra)

La flessione è retta perché s e m coincidono con gli assi di simmetria, e quindi l'asse n (neutro) coincide con l'asse m , ossia y .



Per tracciare il diagramma σ_z

- si disegna la fondamentale normale all'asse n ,
- si prolunga l'asse neutro fino a intersecare la fondamentale e si tracciano le proiezioni degli estremi della sezione sulla fondamentale (vd. prima figura sopra). Nota bene che l'intersezione tra asse neutro e fondamentale individua il punto di nullo delle σ_z .
- si disegna il diagramma lineare (bitriangolare) che individua una zona tesa e una zona compressa (vd. figura centrale sopra)

Per completare il diagramma resta da capire quale parte di sezione è soggetta a trazione e quale a compressione. La formula di Navier fornisce:

$$\sigma_z(x) = -\frac{M_y}{I_y} \cdot x \Rightarrow \sigma_z(y) = -\frac{5 \cdot 10^6 \text{ N mm}}{549.7 \cdot 10^4 \text{ mm}^4} \cdot x = 0.910 x$$

quindi la tensione è positiva (trazione) nei punti a $x > 0$ ossia la parte a sinistra dell'asse neutro.

La formula di Navier fornisce i valori massimo e minimo:

$$\sigma_z^{\max} = 0.910 \frac{\text{N}}{\text{mm}^3} \cdot 70 \text{ mm} = 63.7 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\sigma_z^{\min} = 0.910 \frac{\text{N}}{\text{mm}^3} \cdot (-70 \text{ mm}) = -63.7 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Quindi:

$$|\sigma_z|_{\max} = 63.7 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

VII.2.3 Deformazione

I risultati ottenuti per la flessione retta intorno a x si ripetono in maniera del tutto equivalente a questa flessione retta. Il piano di flessione è il piano xz e l'asse di flessione è x .

La curvatura flessionale è quindi:

$$\chi(z) = \frac{M(z)}{EI_y}$$

VII.3 Verifica e progetto

La formula di Navier (7.1), (7.3) fornisce la tensione in una sezione a momento flettente noto steso sull'asse x oppure sull'asse x a patto che x, y siano assi centrali d'inerzia, per esempio assi di simmetria. La deformazione è fornita dalle relazioni (7.2), (7.4).

VII.3.1 Verifica di resistenza

Una verifica di resistenza semplificata consiste nel confrontare la tensione massima con un valore ammissibile che dipende dal materiale (vedi anche capitolo su sforzo normale centrato). La tensione massima si verifica nei punti più distanti dall'asse neutro della sezione soggetta a momento massimo sulla trave. Con riferimento alla flessione retta intorno a x , la verifica si esplicita quindi in:

$$\sigma_z^{max} \leq \sigma_{amm} \Rightarrow \frac{M_{max}}{I_x} y_{max} \leq \sigma_{amm}$$

Indicando con $W_x = \frac{I_x}{y_{max}}$ il modulo della resistenza della sezione rispetto all'asse x , la verifica si può anche scrivere:

$$\frac{M_{max}}{W_x} \leq \sigma_{amm}$$

Analogamente per la flessione intorno all'asse y si ottiene:

$$\sigma_z^{max} \leq \sigma_{amm} \Rightarrow \frac{M_{max}}{I_y} x_{max} \leq \sigma_{amm}$$

O equivalentemente, indicato con $W_y = \frac{I_y}{x_{max}}$ il modulo di resistenza della sezione rispetto all'asse y :

$$\frac{M_{max}}{W_y} \leq \sigma_{amm}$$

È facile determinare i moduli di resistenza per sezioni semplici quali il rettangolo o il cerchio. Per esempio per un rettangolo $B \times H$ si ha:

$$W_x = \frac{BH^2}{6} \quad W_y = \frac{HB^2}{6}$$

I moduli di resistenza per i profili metallici più comuni (IPE, HE, L, ecc.) sono tabellati. Per esempio un HE200B ha $W_x = 570 \text{ cm}^3$ e $W_y = 200 \text{ cm}^3$.

Vale la pena osservare che la flessione produce sempre una zona tesa e una zona compressa (separate dall'asse neutro) e che, quindi, nella generica sezione, esiste una tensione massima (massima di trazione) e una tensione minima (massima di compressione). La verifica è unica e fatta con riferimento a quella, tra le due, più grande in valore assoluto, quindi:

$$\max \left(\frac{M_{max}}{I_x} y_{max}, \left| \frac{M_{max}}{I_x} y_{min} \right| \right) \leq \sigma_{amm}$$

Dove le ordinate massime sono indicate in Fig. 17.

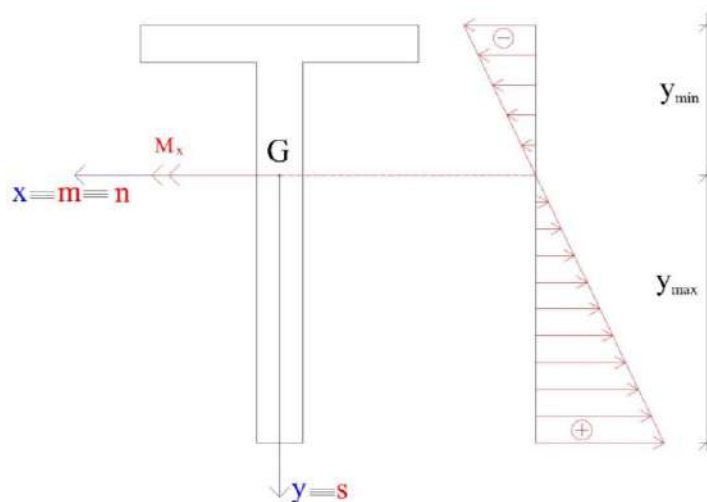


Figura 17

oppure utilizzando il modulo di resistenza:

$$\frac{M_{max}}{W_{x_{min}}} \leq \sigma_{amm}$$

per flessione retta intorno a x, e:

$$\max\left(-\frac{M_{max}}{I_y} x_{max}, \left|-\frac{M_{max}}{I_y} x_{min}\right|\right) \leq \sigma_{amm}$$

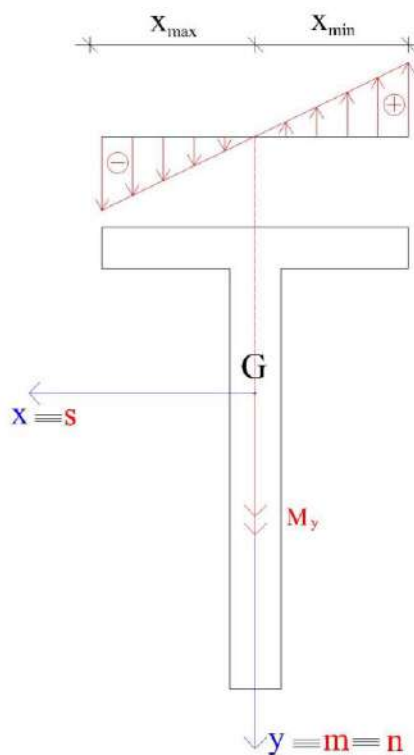


Figura 18

Oppure:

$$\frac{M_{max}}{W_{ymin}} \leq \sigma_{amm}$$

per flessione retta intorno a y (vd. Fig. 18).

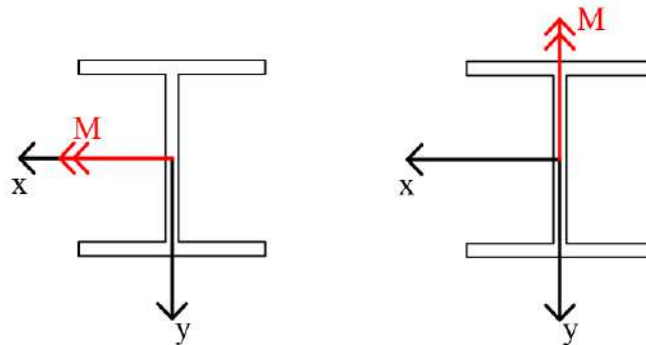
Osservando le tabelle che accompagnano i profili in acciaio si nota che è riportato un unico modulo di resistenza rispetto a x e uno rispetto a y, anche quando la sezione non è simmetrica. Questo perché l'acciaio è un materiale isoresistente.

Se invece il materiale non è isoresistente, allora vanno condotte due verifiche separate, una confrontando la tensione massima di trazione con la tensione ammissibile a trazione, e un'altra confrontando la tensione massima di compressione con la tensione ammissibile a compressione. Per esempio, per la flessione retta intorno a x si ha:

$$\sigma_{max}^t = \frac{M_{max}}{I_x} y_{max} = \frac{M_{max}}{W_{x_t}} \leq \sigma_{amm}^t$$

$$|\sigma_{max}^c| = \left| \frac{M_{max}}{I_x} y_{min} \right| = \frac{M_{max}}{W_{x_c}} \leq \sigma_{amm}^c$$

VII.3.2 Esempio



Negli esempi visti in precedenza, la tensione massima si può scrivere in funzione del modulo di resistenza, ossia:

$$\sigma_z^{max} = \frac{M_x}{W_x} \text{ per l'esempio a sinistra in figura sopra e}$$

$$\sigma_z^{max} = \frac{M_y}{W_y} \text{ per l'esempio a destra in figura sopra.}$$

Ottenendo gli stessi risultati:

$$\sigma_z^{max} = \frac{15 \cdot 10^6 \text{ N mm}}{215.60 \cdot 10^3 \text{ mm}^3} = 69.6 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\sigma_z^{max} = \frac{5 \cdot 10^6 \text{ N mm}}{78.52 \cdot 10^3 \text{ mm}^3} = 63.7 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

VII.3.3 Verifica di deformabilità

In presenza di flessione retta intorno a x oppure intorno a y, la verifica di deformabilità consiste nel controllare che la rotazione massima sia trascurabile rispetto all'unità, ossia che:

$$\varphi_{max} \ll 1$$

Usualmente si impone che tale rotazione sia inferiore a un numero variabile tra $1/500$ e $1/200$ a seconda del materiale e della destinazione d'uso. Il fine è quello di evitare di avere deformazioni eccessive che potrebbero provocare danni alle rifiniture o agli impianti oppure generare disagio negli utenti.

Nell'esempio di Fig. 11 la verifica è soddisfatta se:

$$\varphi_{max} = \varphi_B = \frac{\mathfrak{M}l}{EI_x} \ll 1$$

La verifica di deformabilità sulle rotazioni viene spesso sostituita da una più grossolana che consiste nel controllare che:

$$\frac{v_{max}}{l} \ll 1$$

Dalla conoscenza del momento flettente si può infatti ricavare l'andamento della curvatura flessionale, quindi la funzione rotazione $\varphi(z)$ e per integrazione la funzione abbassamento $v(z)$. Nel corso di Scienza delle Costruzioni si imparerà a determinare la funzione abbassamento e quindi a ricavarne il valore massimo v_{max} .

VII.3.3 Progetto

Il progetto di massima di una trave si può ottenere ricavando il modulo di resistenza minimo della sezione. Tale modulo si può ottenere imponendo che la tensione massima sia uguale a quella ammissibile. Infatti, supponendo progetto rispetto alla flessione retta intorno a x, si ha:

$$\sigma_z^{max} = \sigma_{amm} \Rightarrow \frac{M_{max}}{W_x} = \sigma_{amm} \quad \Rightarrow \quad W_x^{min} = \frac{M_{max}}{\sigma_{amm}}$$

Noto W_x^{min} , si può scegliere la sezione in modo che il suo modulo di resistenza sia superiore al minimo. Per esempio scegliendola all'interno delle tabelle dei profili metallici. Oppure, se rettangolare per esempio, fissando la base e ricavando l'altezza minima dal W_x^{min} calcolato.

VII.3.4 Esempio

Dati:

$$M_{max} = 10 \text{ kN m}$$

$$\sigma_{amm} = 120 \text{ N/mm}^2$$

Suggerire (progettare) alcuni profili metallici capaci di sopportare il momento flettente assegnato in modo che la tensione sia minore di quella ammissibile.

Sapendo che: $\sigma_{z \max} \leq \sigma_{amm}$ e che: $\frac{M_{max}}{W_x} \leq \sigma_{amm}$

La sezione minima si può ricavare con la formula:

$$W_{min} = \frac{M_{max}}{\sigma_{amm}}$$

$$W_{min} = \frac{10 \cdot 10^5 N \text{ cm}}{120 \cdot 10^2 \frac{N}{\text{cm}^2}} = 84 \text{ cm}^3$$

consultando le tabelle dei profilati metallici si possono scegliere dei profili con $W_x \geq W_{min}$ come ad

esempio: IPE 160 ($W_x = 108.7 \text{ cm}^3$)

C 140 ($W_x = 86.4 \text{ cm}^3$)

HE 100 B ($W_x = 89.91 \text{ cm}^3$)

...

VII.4 Flessione deviata

La conclusione dei paragrafi VII.1 e VII.2 è che la flessione è retta se l'asse momento oppure l'asse di sollecitazione coincide con un asse centrale d'inerzia che, non avendola ancora definita, si è anticipato coincidere con un asse di simmetria ortogonale quando presente.

Rimangono quindi due casi non risolti:

- 1) Esiste una simmetria e questa coincide con l'asse x oppure con l'asse y, ma il vettore momento è inclinato rispetto a x e y. È questo, per esempio, il caso dell'arcareccio di falda tra due capriate triangolari. In Fig. 19 è riportato un esempio di tetto in legno a due falde sostenute da arcarecci (in blu) a sezione rettangolare che poggiano su travature triangolari. L'arcareccio si comporta meccanicamente come una trave su due appoggi caricata nel piano zs (il carico q comprende il peso proprio e il carico neve per un interasse pari a i) il cui diagramma del momento è riportato in rosso. Se x,y sono assi di simmetria della sezione rettangolare, risulta che il riferimento x,y è ruotato rispetto a quello s,m.

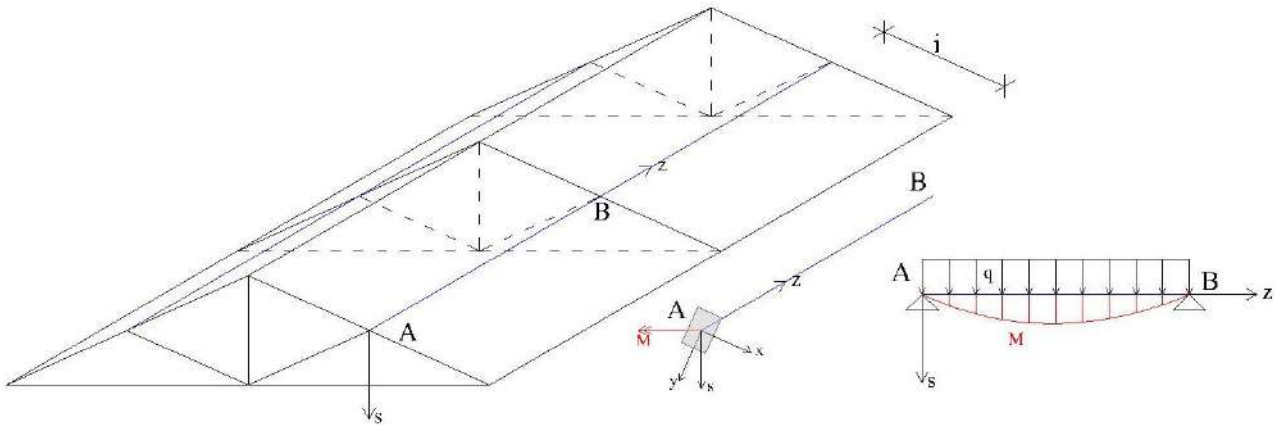


Figura 19

- 2) La sezione trasversale non presenta alcuna simmetria (Fig. 20) e quindi non è possibile determinare gli assi centrali grazie alla simmetria ortogonale e stabilire, quindi, se, assegnato M , si è in presenza o meno di flessione retta.

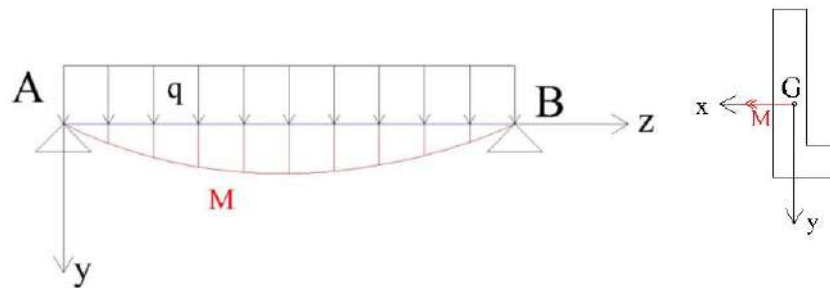


Figura 20

I due casi sopra introdotti sono esempi di flessione deviata.

VII.4.2 Stato tensionale della flessione deviata

In generale si parla di flessione deviata quando asse di sollecitazione e asse momento non coincidono con gli assi centrali d'inerzia. Se c'è almeno un asse di simmetria, questo significa che il vettore momento è inclinato rispetto all'asse di simmetria. Se non c'è alcun asse di simmetria bisogna prima determinare gli assi centrali d'inerzia (prossimo paragrafo).

Se gli assi centrali sono noti e coincidono con gli assi x e y , il diagramma tensionale corrispondente alla flessione deviata si ricava per sovrapposizione delle due flessioni rette rispettivamente intorno a x e intorno a y (vd. Fig. 21).

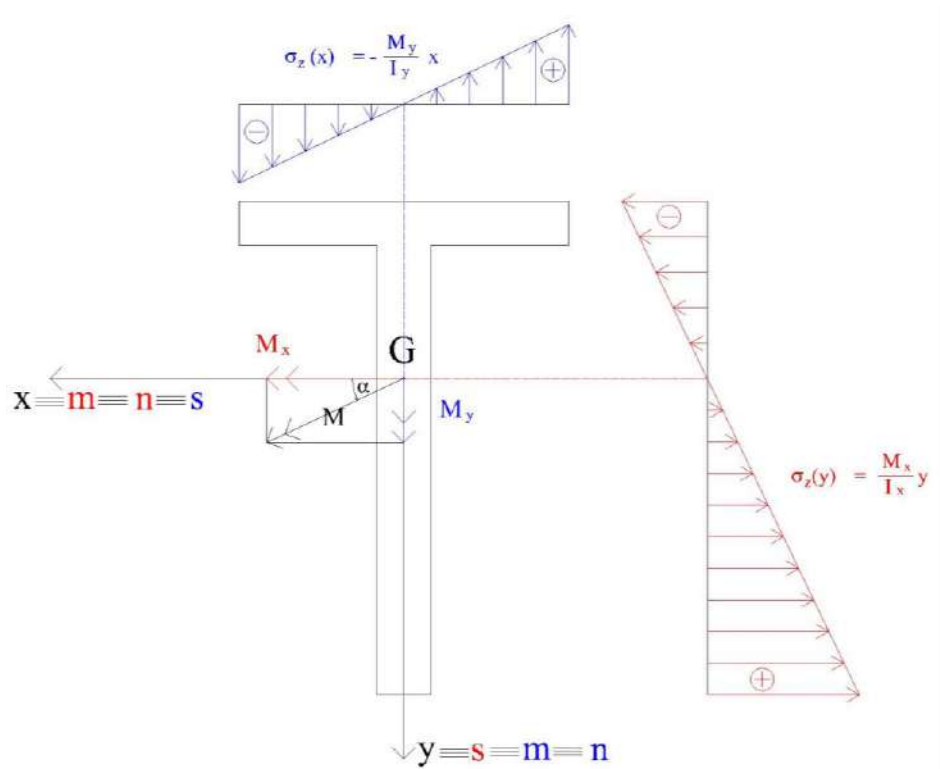


Figura 21

Si ottiene quindi:

$$\sigma_z(z, x, y) = \frac{M_x(z)}{I_x} y - \frac{M_y(z)}{I_y} x \quad (7.5)$$

dove M_x e M_y sono le componenti del vettore M e quindi (vd. Fig. 20):

$$\tan \alpha = \frac{M_y(z)}{M_x(z)}$$

L'asse neutro corrispondente alla flessione deviata si ottiene applicando la definizione di asse neutro:

$$\sigma_z(z, x, y) = 0 \text{ se } (x, y) \in n \Rightarrow \frac{M(z)}{I_x} y - \frac{M(z)}{I_y} x = 0 \Leftrightarrow \text{equazione asse neutro} \quad (7.6)$$

L'equazione ottenuta, $\frac{M(z)}{I_x} y - \frac{M(z)}{I_y} x = 0$, rappresenta, nel piano della sezione, una retta passante per l'origine (il baricentro G). Tale retta si può anche scrivere nella forma $y = \tan \beta x$ dove β fornisce l'inclinazione dell'asse neutro (vd. Fig. 21). Si ha:

$$y = \frac{M_y(z) I_x}{M_x(z) I_y} x = \tan \beta x$$

Dalla relazione si vede subito che l'asse neutro, tranne casi particolari nei quali $I_x = I_y$, non coincide con l'asse momento.

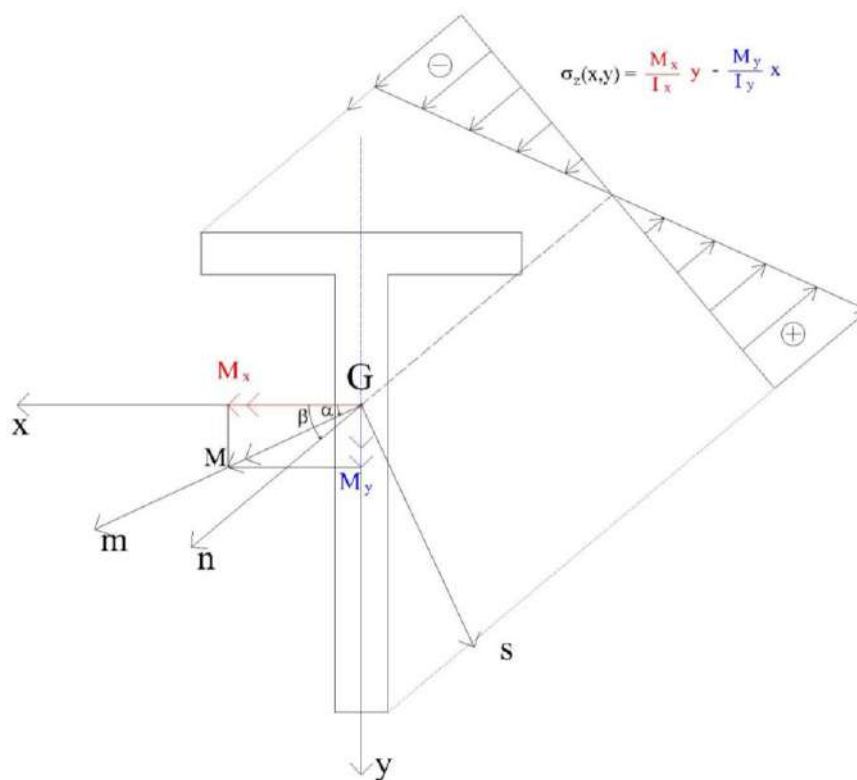


Figura 22

Disegnato l'asse neutro, il diagramma della tensione normale si ottiene sulla fondamentale perpendicolare all'asse neutro (vd. Fig. 22).

L'asse neutro divide la sezione in due zone, una compressa e una tesa. Per individuare correttamente la zona tesa è sufficiente determinare il quadrante sicuramente teso nell'equazione (7.5). Nell'esempio di Fig. 22, essendo M_x e M_y entrambi positivi, si ha sicuramente trazione nel quadrante con $x < 0$ e $y > 0$, ossia il quadrante evidenziato in giallo in Fig. 23.

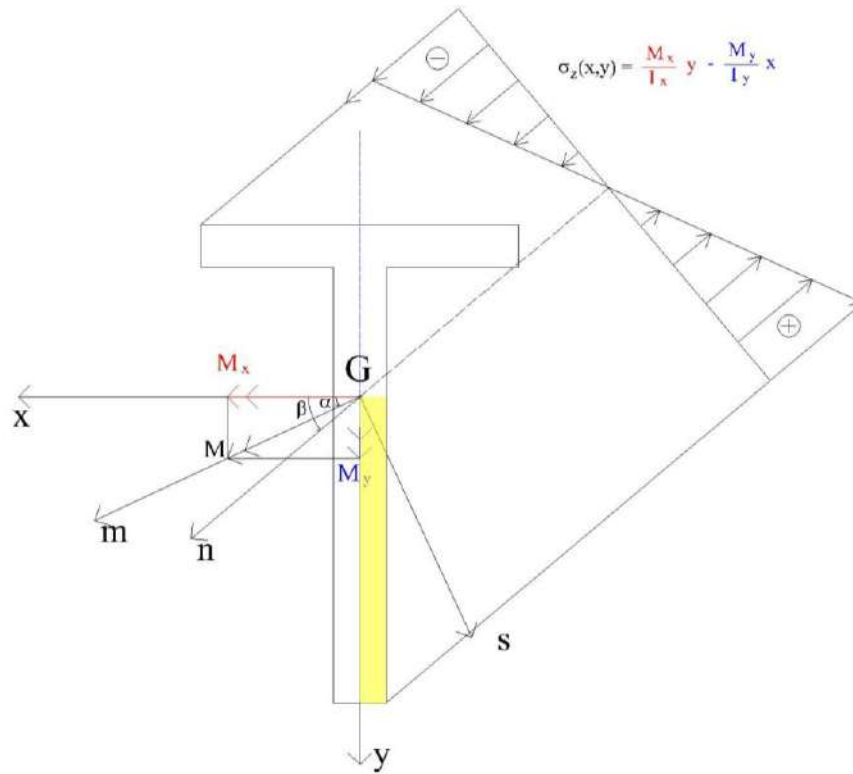


Figura 23

Esempi nei quali la flessione è sempre retta perché $I_x = I_y$ sono dati in Fig. 24

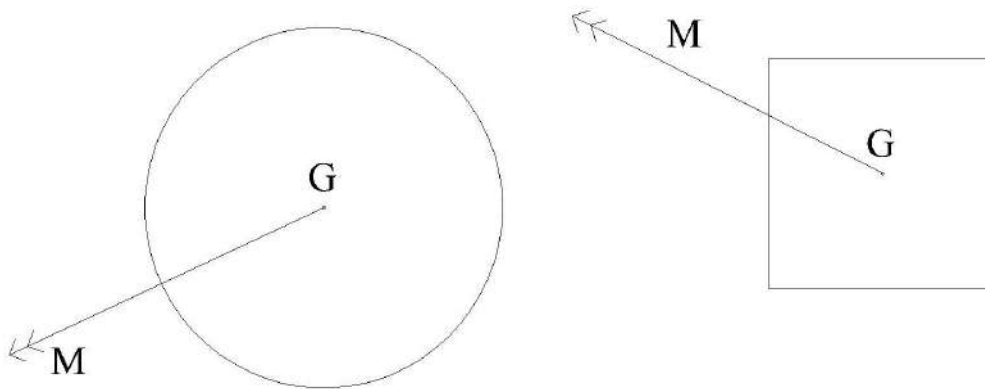


Figura 23

VII.4.2 Esempio

Dati:

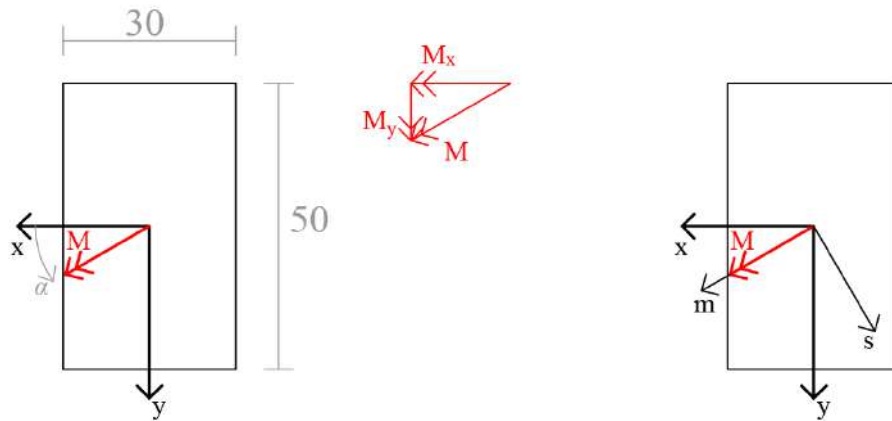
$M_{\max} = 100 \text{ kN m}$

$\alpha = 30^\circ$

Determinare: asse neutro n

Diagramma σ_z

$\sigma_{z \max}^{\text{comp}}, \sigma_{z \max}^{\text{traz}}$



Si tenga presente che gli assi x e y coincidono gli assi centrali d'inerzia perché coincidenti con assi di simmetria della sezione.

Le due componenti cartesiane di M_{\max} si ricavano con semplici relazioni trigonometriche:

$$M_x = M \cos 30^\circ = 100 \cos 30^\circ = 86.6 \text{ kN m}$$

$$M_y = M \sin 30^\circ = 100 \sin 30^\circ = 50.0 \text{ kN m}$$

Per poter applicare la formula valida per la flessione deviata, ossia $\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x$, è necessario ricavare prima i due momenti di inerzia I_x e I_y . Per la forma rettangolare esistono delle formule note (vedi capitolo successivo per dettagli), ossia:

$$I_x = \frac{B \cdot H^3}{12} = \frac{30 \cdot 50^3}{12} = 312500 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{H \cdot B^3}{12} = \frac{50 \cdot 30^3}{12} = 112500 \text{ cm}^4$$

La tensione in un punto qualsiasi della sezione è data quindi dalla seguente relazione:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x = \frac{86.6 \cdot 10^6 \text{ N mm}}{321500 \cdot 10^4 \text{ mm}^4} y - \frac{50 \cdot 10^6 \text{ N mm}}{112500 \cdot 10^4 \text{ mm}^4} x \Rightarrow$$

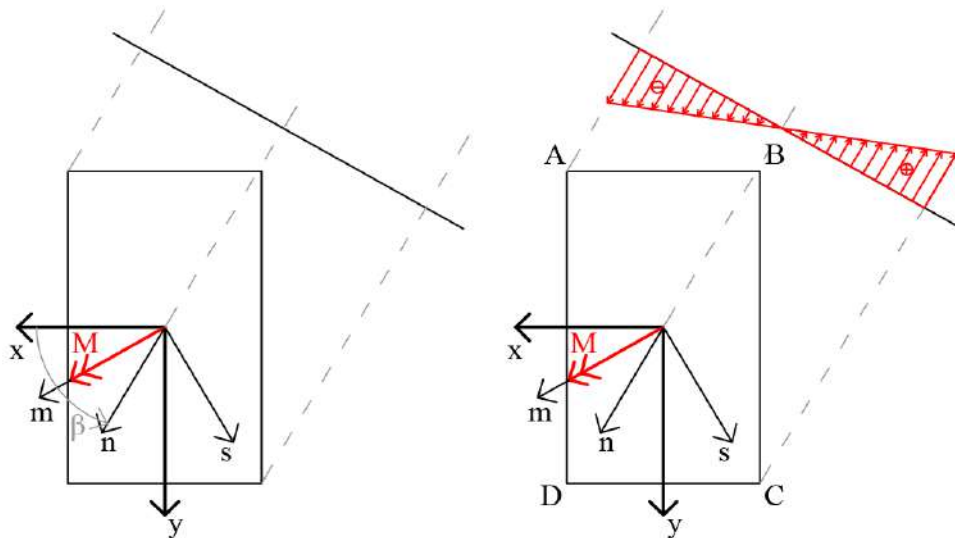
$$\Rightarrow \sigma_z = 0.0277 \frac{\text{N}}{\text{mm}^3} y - 0.0444 \frac{\text{N}}{\text{mm}^3} x \quad (7.7)$$

L'asse neutro, per definizione asse lungo il quale la tensione è nulla, si ricava imponendo che l'espressione (7.7) sia uguale a zero, quindi:

$$y = \frac{0.0444}{0.0277} x \Rightarrow y = 1.603x$$

Da cui si può ricavare l'angolo d'inclinazione rispetto all'asse x :

$$\beta = \tan^{-1}(1.603) = 1.01 \text{ rad} = 58^\circ$$



Nota l'angolo β , vedi figura a sinistra sopra, si può tracciare il diagramma delle tensioni (vedi figura a destra sopra):

- Si traccia la fondamentale perpendicolare all'asse neutro,
- Si prolunga l'asse neutro fino alla fondamentale,
- Si proiettano gli estremi della sezione sulla fondamentale,
- Si traccia il diagramma lineare che divide la sezione in una zona compressa e una tesa.

Per individuare la zona tesa è sufficiente ragionare sulla relazione (7.7). Da questa, infatti, si ricava che la tensione è positiva (trazione) quando $x < 0$ e $y > 0$, come rappresentato in figura sopra.

I valori $\sigma_{z \max}^{\text{comp}}$; $\sigma_{z \max}^{\text{traz}}$ saranno:

$$\sigma_{z \max}^{\text{comp}}(A) = 0.0277 \cdot (-250) - 0.0444 \cdot 150 = -13.6 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

$$\sigma_{z \max}^{\text{traz}}(C) = 0.0277 \cdot 250 - 0.0444 \cdot (-150) = 13.6 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

CAP. VIII – CENNI DI GEOMETRIA DELLE AREE

In questo capitolo si forniscono gli strumenti minimi di geometria delle aree necessari per determinare lo stato tensionale in presenza di flessione retta o deviata su sezioni simmetriche e non.

VIII.1 Momento statico e baricentro

VIII.1.1 Definizioni

Si definisce momento statico di una figura piana (e quindi di una sezione trasversale di trave) rispetto a una retta r il seguente integrale:

$$S_r = \int_A d_r dA$$

Dove (vd. Fig. 25) d_r rappresenta la distanza dell'area infinitesima dA dalla retta r e l'integrale è un integrale di area. Attenzione che la distanza ha un segno, positivo o negativo: in genere positivo se posto alla sinistra della retta, oppure dettato dal sistema di riferimento xOy quando definito. L'unità di misura di S_r è chiaramente L^3 (per esempio cm^3 oppure mm^3).

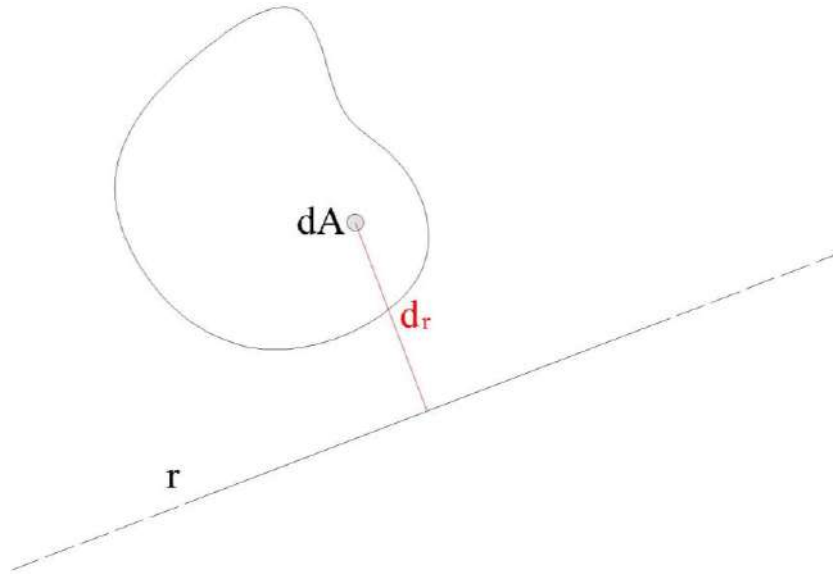


Figura 25

Può far comodo definire anche il momento statico di un'area A concentrata in un punto. In tal caso la definizione si semplifica in:

$$S_r = d_r A$$

Se chiaramente la retta r coincide con x o con y si ha:

$$S_x = \int_A y dA \quad S_y = \int_A x dA$$

dove le coordinate x e y vanno prese col proprio segno.

Per il baricentro G vale il seguente teorema fondamentale dei momenti statici:

$$S_r = A d_{G-r}$$

dove d_{G-r} rappresenta la distanza del baricentro G dalla retta r . La relazione consente quindi, nota la posizione di G , di determinare il momento statico rispetto a una retta r qualsiasi moltiplicando l'area totale per la distanza di G da r : il momento statico si riduce a quello di un'area concentrata in G .

Altra importante proprietà di G è che esso si trova sempre su un eventuale asse di simmetria. Se gli assi di simmetria sono due, G si trova nella loro intersezione. Se c'è un solo asse di simmetria, rimane da determinare solo una coordinata di G (vd. Fig. 26).

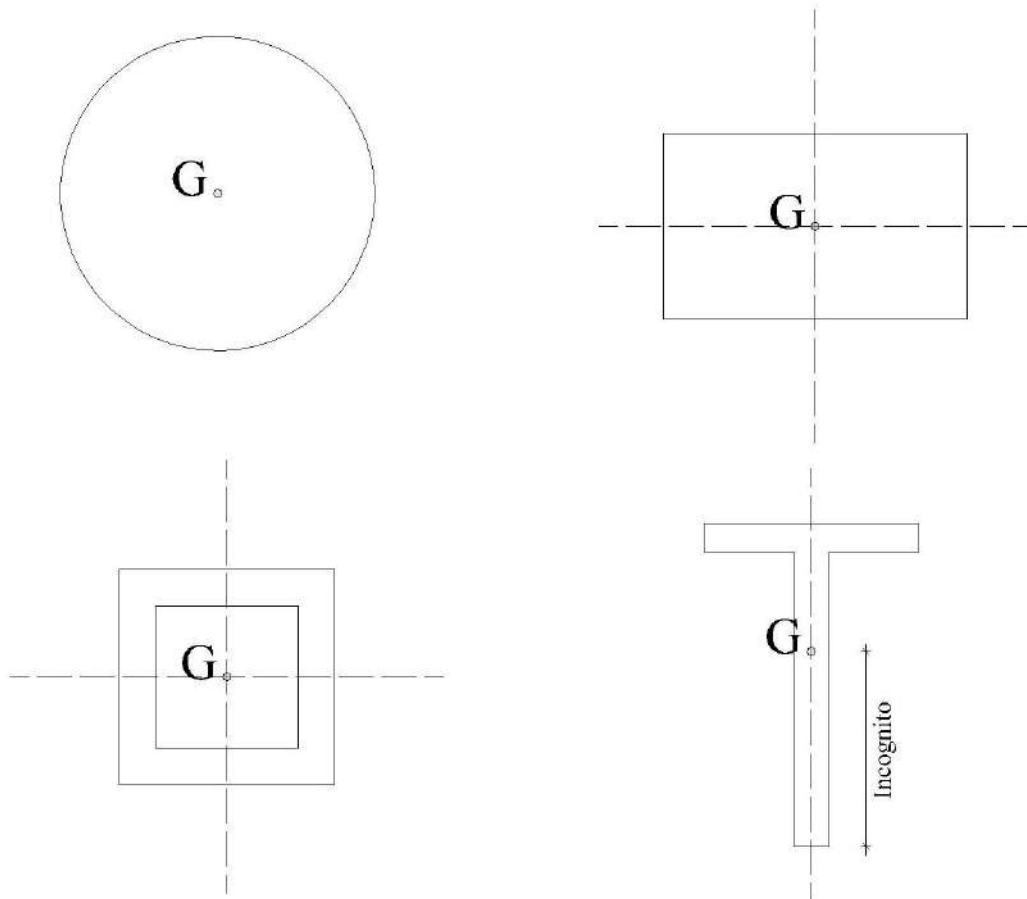


Figura 26

Le due proprietà enunciate sono utili per determinare il baricentro di figure composte da sottofigure a baricentro noto. Se, infatti, una figura di area totale A è l'unione di N figure a baricentro noto (per esempio rettangoli, cerchi, triangoli, ecc.) allora la posizione del baricentro G della figura unione è data da:

$$X_G = \frac{\sum_{i=1}^N S_Y}{A} \dots \dots Y_G = \frac{\sum_{i=1}^N S_X}{A}$$

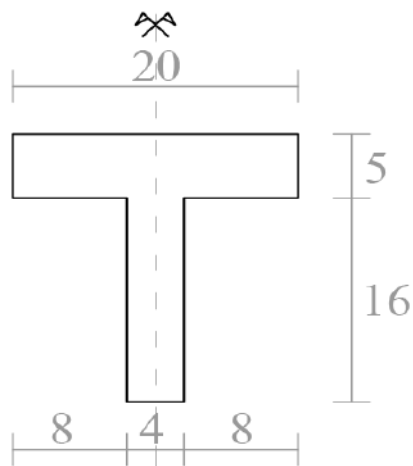
rispetto a due assi X e Y definiti arbitrariamente dall'utente. Per evitare errori di segno, si suggerisce di posizionare gli assi X, Y in modo che i baricentri delle sottofigure siano nel primo quadrante del sistema di riferimento.

N.B. La relazione sopra implica che il baricentro G di una figura composta da due sottofigure (di aree rispettivamente A_1 e A_2 e baricentri rispettivamente G_1 e G_2) si trova sulla congiungente G_1 con G_2 a una distanza da G_1 pari al rapporto $\frac{A_2}{A}$ (e viceversa).

VIII.1.1 Esempio

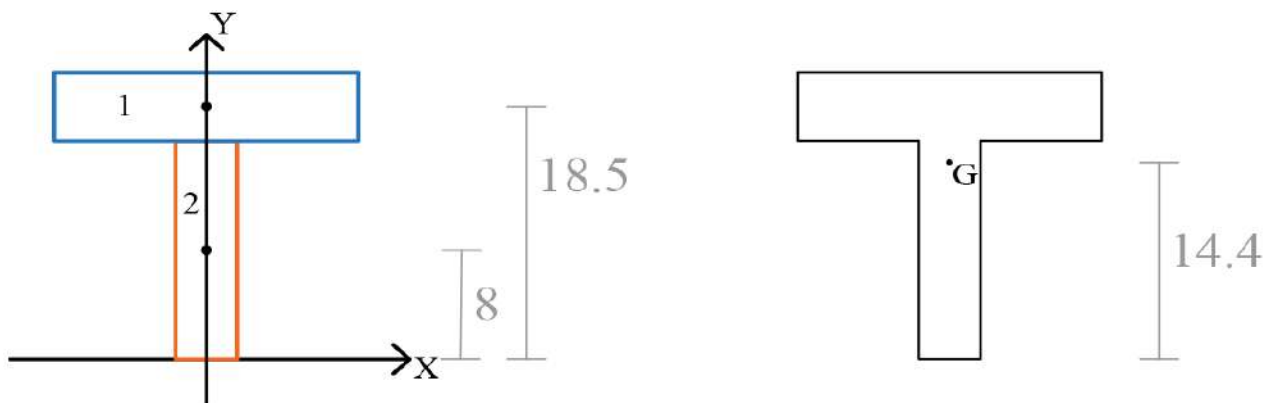
Sviluppare esempi lezione 4/12 (slide 5, 7, 8))

Esempio 1



Determinare il baricentro della figura sopra.

In questo caso è presente un asse di simmetria (in figura evidenziato con le due bandierine). È necessario quindi ricavare solo la sua posizione in verticale.



Per trovare l'incognita si procede scegliendo in maniera arbitraria un asse X (vedi figura sinistra sopra) e scegliendo l'asse Y coincidente con l'asse di simmetria. La posizione del baricentro è data quindi da Y_G . Tale coordinata può essere determinata sfruttando il teorema fondamentale dei momenti statici e la proprietà additiva del momento statico. Infatti, il teorema fondamentale fornisce:

$$S_X = A \cdot Y_G \rightarrow Y_G = \frac{S_X}{A}$$

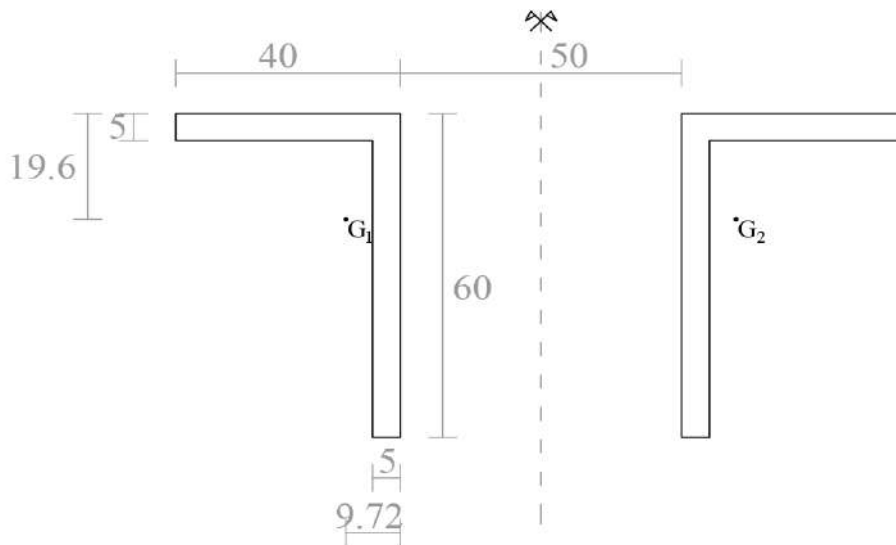
L'additività del momento statico consente di calcolarlo come somma dei momenti statici dei due rettangoli in cui si è divisa la figura (vedi figura sinistra sopra), i.e.:

$$S_X = A_1 \cdot Y_{G1} + A_2 \cdot Y_{G2} = (20 \cdot 5) \cdot 18.5 + (16 \cdot 4) \cdot 8 = 2362 \text{ cm}^3$$

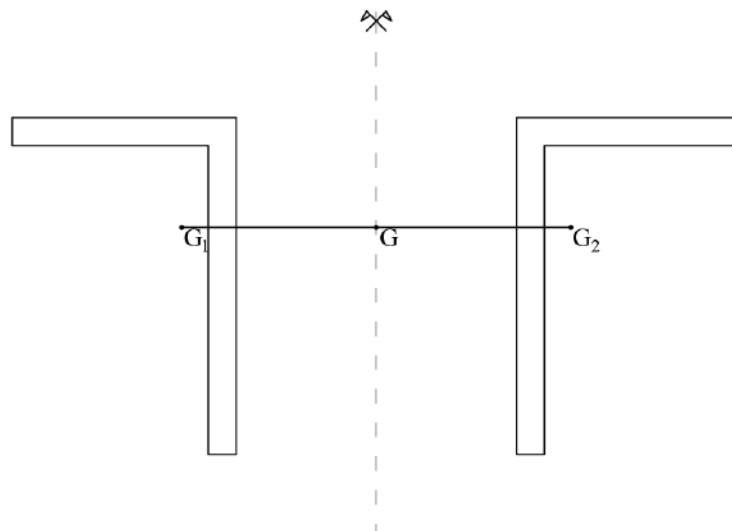
Quindi:

$$Y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{2362 \text{ cm}^3}{(20 \cdot 5) + (16 \cdot 4) \text{ cm}^2} = \frac{2362}{164} \text{ cm} = 14,4 \text{ cm}$$

Esempio 2

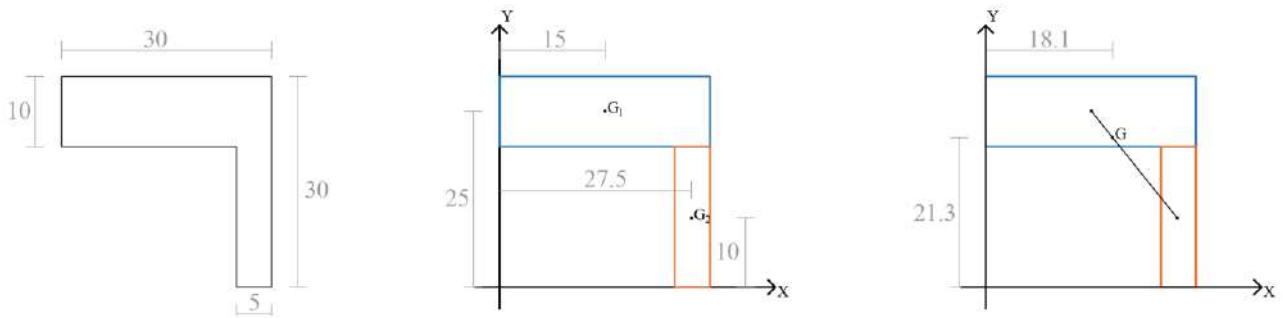


Dati i due profili metallici ad L con baricentro noto per ciascuno (vedi figura sopra), si determini il baricentro complessivo dei due profili posti a distanza di 50mm.



Il baricentro di due figure si trova sul segmento che unisce i due baricentri delle due figure rispettive. Essendo le due figure uguali sarà nel punto medio del segmento, quindi a 20 mm dai due profili e a 19.6 mm dalla linea superiore.

Esempio 3



In questo caso la figura non presenta assi di simmetria, la posizione di G è quindi incognita in entrambe le coordinate. Si avranno dunque due incognite: X_G e Y_G . Il riferimento XOY necessario per determinare la posizione di G può essere scelto in modo del tutto arbitrario. In figura in alto al centro si nota la scelta fatta: in tal modo entrambe le sottofigure presentano baricentri nel primo quadrante e ciò riduce la probabilità di errore in quanto le coordinate sono tutte positive.

Sfruttando la formula del momento statico come nell'esempio 1 si ottiene:

$$X_G = \frac{S_Y}{A} = \frac{30 \cdot 10 \cdot 15 + 20 \cdot 5 \cdot 27.5}{30 \cdot 10 + 20 \cdot 5} = 18.1 \text{ cm}$$

$$Y_G = \frac{S_X}{A} = \frac{30 \cdot 10 \cdot 25 + 20 \cdot 5 \cdot 10}{30 \cdot 10 + 20 \cdot 5} = 21.3 \text{ cm}$$

Da notare che la posizione finale di G è nel segmento che unisce G_1 con G_2 , ma non al centro perché le due aree sono diverse, bensì più vicina all'area maggiore.

VIII.2 Momento d'inerzia

Il momento d'inerzia compare nella formula di Navier della flessione retta.

VIII.2.1 Definizione

Il momento d'inerzia di una figura piana rispetto a una retta r si definisce come (vd. Fig. 25):

$$I_r = \int_A d_r^2 dA$$

Se la retta coincide con uno degli assi cartesiani si ha chiaramente:

$$I_x = \int_A y^2 dA \quad I_y = \int_A x^2 dA$$

La distanza compare al quadrato, quindi I_r è sempre positivo. L'unità di misura è L^4 (per esempio cm^4 oppure mm^4). Fisicamente il momento d'inerzia I_r misura quanto l'area sia disposta lontana dalla retta r . In Fig. 27, per esempio, $I_x^1 \gg I_x^2$.

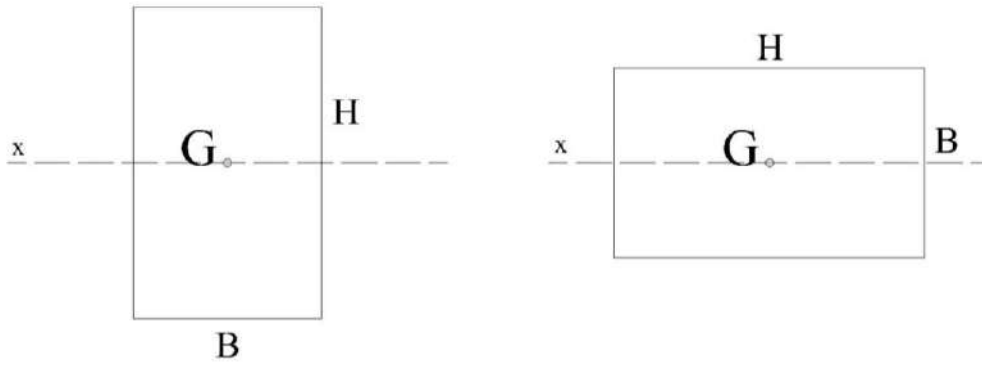


Figura 27

Per determinare il momento d'inerzia bisognerebbe applicare la definizione e risolvere un integrale. A volte, però, è possibile decomporre la figura in sottofigure a momento d'inerzia noto. A tal fine sono utili i risultati notevoli indicati in Fig. 28, ottenuti applicando la definizione.

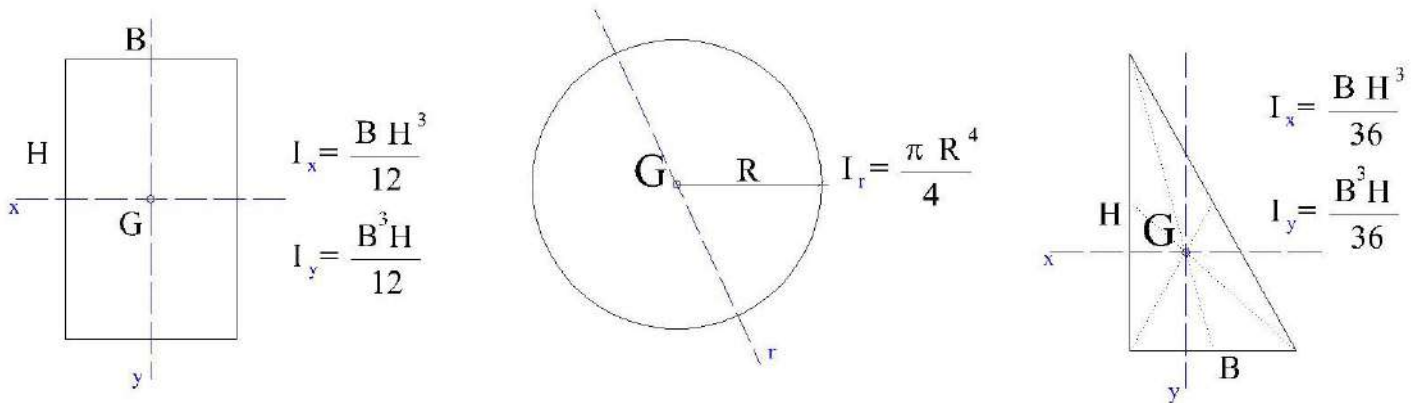


Figura 28

Per poter determinare il momento d'inerzia di una figura composta da sottofigure note, però, è necessario introdurre una relazione nota come teorema del trasporto o di Huygens.

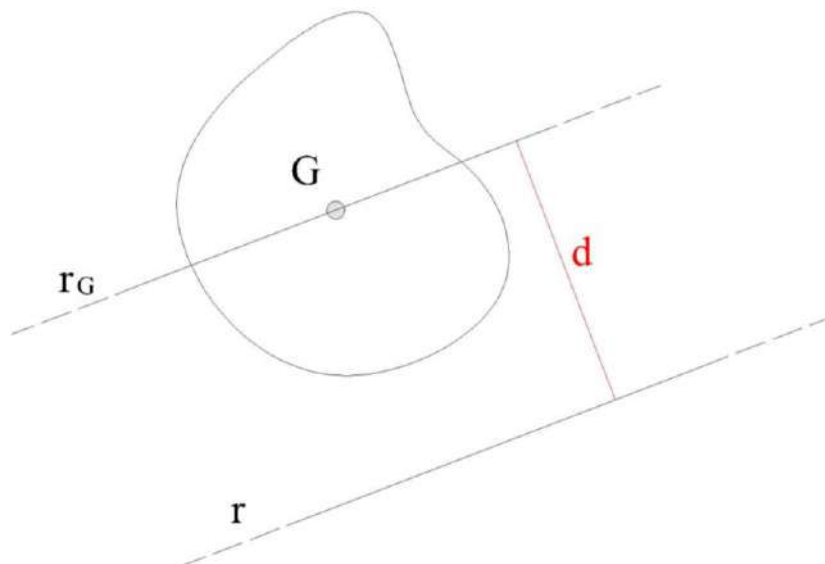


Figura 29

Con riferimento alla Fig. 29, tale teorema afferma che:

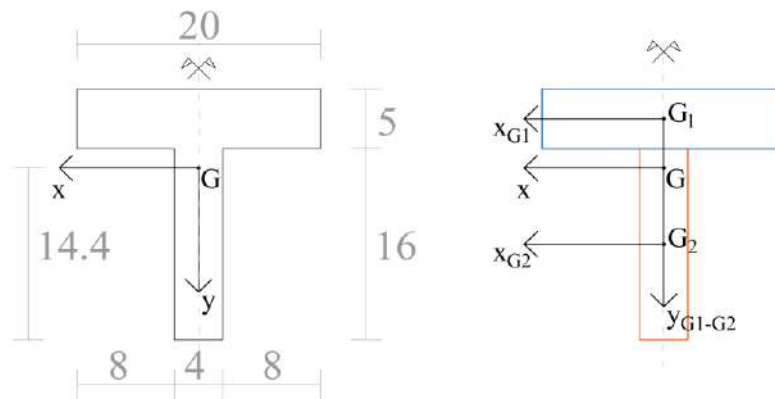
$$I_r = I_{r_G} + Ad^2$$

È detto teorema del trasporto perché consente di “trasportare” il momento d’inerzia da r a r_G e viceversa:

$$I_{r_G} = I_r - Ad^2$$

VIII.2.2 Esempio

Esempio 1



Determinare il momento d’inerzia del profilo in figura.

Si divide innanzitutto la figura in due rettangoli. Il momento d’inerzia totale è somma dei momenti d’inerzia dei due rettangoli rispetto a x e a y :

$$I_x = I_x^{ret.1} + I_x^{ret.2}$$

Dato che le inerzie note sono relative ad assi passanti per il baricentro delle figure si applica il teorema di trasporto di Huygens.

$$I_x^{ret.1} = I_{x_{G1}}^{ret.1} + A^{ret.1} \cdot d_{x-x_{G1}}^2 = \frac{20 \cdot 5^3}{12} + 20 \cdot 5 \cdot (16 + 2.5 - 14.4)^2 = 1889 \text{ cm}^4$$

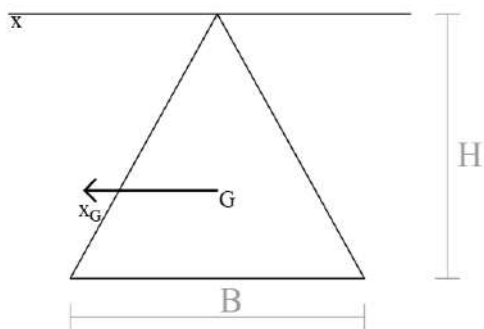
$$I_x^{ret.2} = I_{x_{G2}}^{ret.2} + A^{ret.2} \cdot d_{x-x_{G2}}^2 = \frac{4 \cdot 16^3}{12} + 4 \cdot 16 \cdot (14.4 - 8)^2 = 3986 \text{ cm}^4$$

$$I_x = I_x^{ret.1} + I_x^{ret.2} = 1889 + 3986 = 5875 \text{ cm}^4$$

Per quanto riguarda I_y non è necessario applicare il teorema di trasporto dato che i baricentri delle due figure sono allineati sull’asse y . Quindi I_y sarà semplicemente:

$$I_y = I_y^{ret.1} + I_y^{ret.2} = \frac{5 \cdot 20^3}{12} + \frac{16 \cdot 4^3}{12} = 3419 \text{ cm}^4$$

Esempio 2



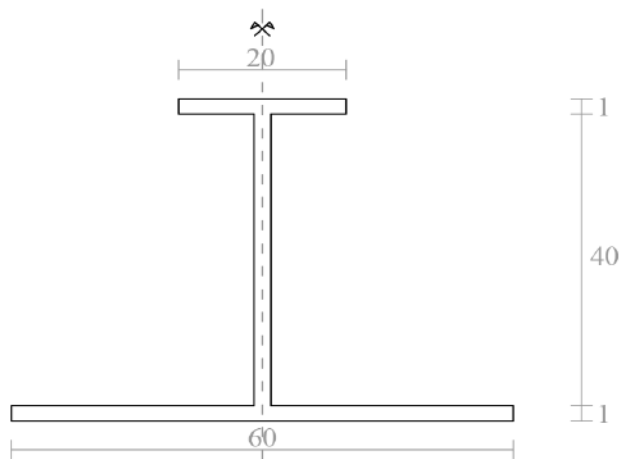
Dato il momento d'inerzia rispetto all'asse \$x\$, determinare il momento d'inerzia rispetto all'asse \$x_G\$ passante per il baricentro.

Per fare questo si sfrutta la formula inversa del teorema di trasporto di Huygens, quindi:

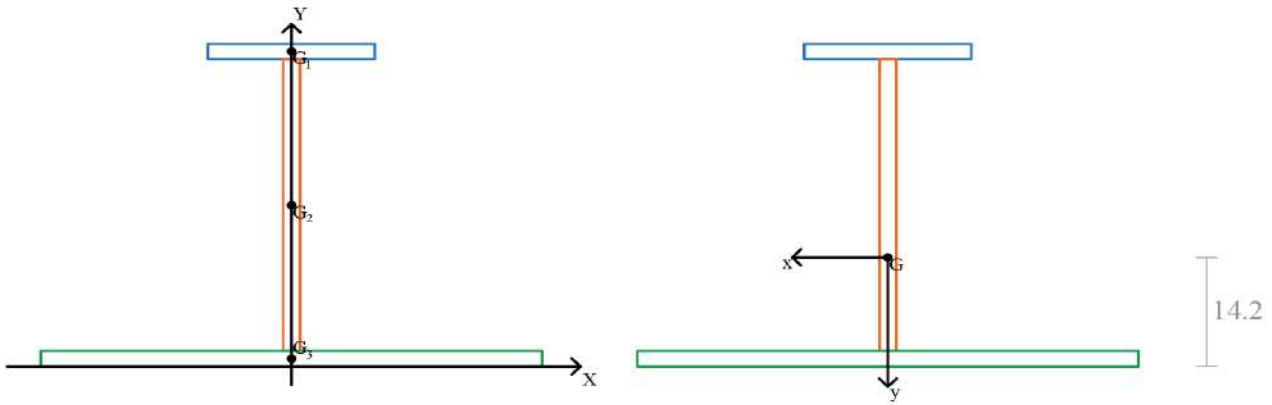
$$I_{x_G} = I_x - A \cdot d^2$$

$$I_{x_G} = \frac{B \cdot H^3}{4} - \frac{B \cdot H}{2} \cdot \left(\frac{2H}{3}\right)^2 = \frac{BH^3}{4} - \frac{2BH^3}{9} = \frac{BH^3}{36}$$

Esempio 3

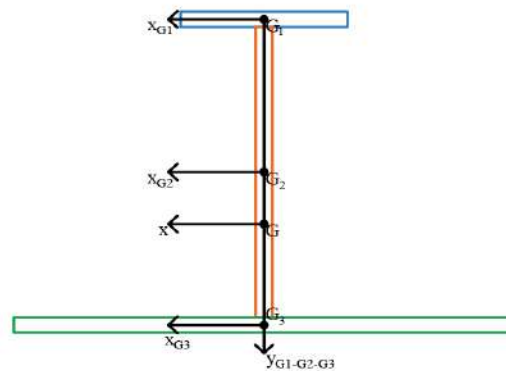


Determinare baricentro e momenti d'inerzia rispetto agli assi \$x\$ e \$y\$ baricentrici.



Avendo la figura un asse di simmetria, è necessario determinare solo una coordinata di G. Si fissi allora un sistema di riferimento XOY (arbitrario) con X coincidente con il lato inferiore (vedi figura sinistra sopra). Dividendo la figura in tre rettangoli si ottiene:

$$Y_G = \frac{S_X^{ret.1} + S_X^{ret.2} + S_X^{ret.3}}{A} = \frac{20 \cdot 41.5 + 40 \cdot 21 + 60 \cdot 0.5}{60 + 40 + 20} = 14.2 \text{ cm}^3$$



Per trovare il momento d'inerzia I_x è necessario usare il teorema di trasporto di Huygens:

$$I_x = I_x^{ret.1} + A^{ret.1} \cdot d_{x-x_{G1}}^2 + I_x^{ret.2} + A^{ret.2} \cdot d_{x-x_{G2}}^2 + I_x^{ret.3} + A^{ret.3} \cdot d_{x-x_{G3}}^2$$

$$I_x = \frac{20}{12} + 20 \cdot 27.3^2 + \frac{40^3}{12} + 40 \cdot 6.8^2 + \frac{60}{12} + 60 \cdot 13.7^2 = 33357 \text{ cm}^4$$

VIII.3 Momento centrifugo

Per poter definire gli assi centrali in assenza di simmetria, è necessario introdurre un'altra proprietà geometrica: il momento (o prodotto) centrifugo rispetto a due rette perpendicolari.

VIII.3.1 Definizione

Con riferimento alla Fig. 30, il momento centrifugo di una figura piana rispetto a due rette orientate ortogonali r e s è definito come:

$$I_{rs} = \int_A \mathbf{d}_r \mathbf{d}_s dA$$

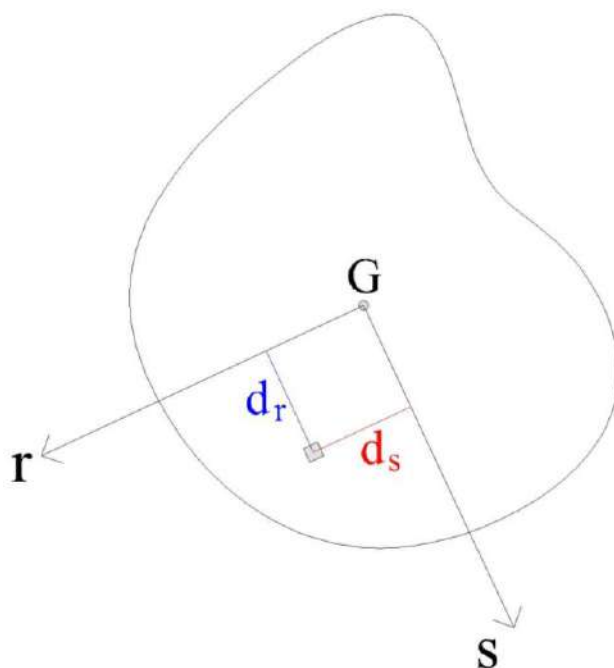


Figura 30

Se gli assi r e s coincidono con gli assi x e y si ha ovviamente:

$$I_{xy} = \int_A xy dA$$

Da notare che il momento centrifugo può essere positivo, negativo o nullo e la sua unità di misura è la stessa del momento d'inerzia (ossia L^4). Inoltre, esso gode della proprietà che:

$$I_{rs} = 0$$

se r oppure s è asse di simmetria. Quindi, per esempio, $I_{xy} = 0$ negli esempi di Fig. 31.

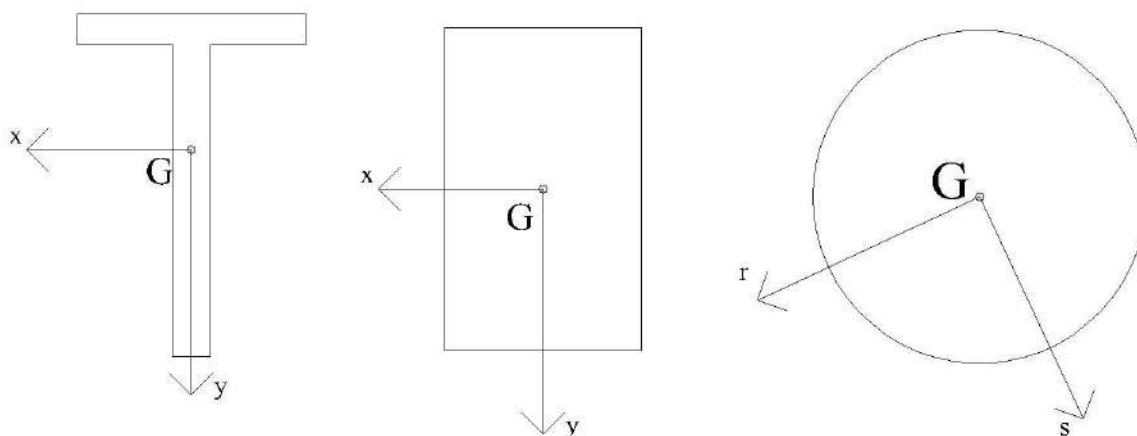


Figura 31

Mentre, per esempio, è diverso da zero nel triangolo di Fig. 32 (si noti che gli assi x, y non sono di simmetria):

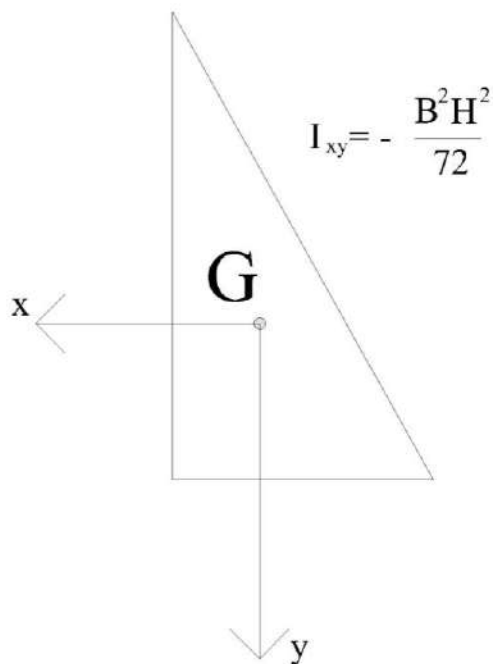


Figura 32

Vale infatti $I_{xy} = -\frac{B^2H^2}{72}$.

Anche per il momento centrifugo si può ottenere un teorema del trasporto.

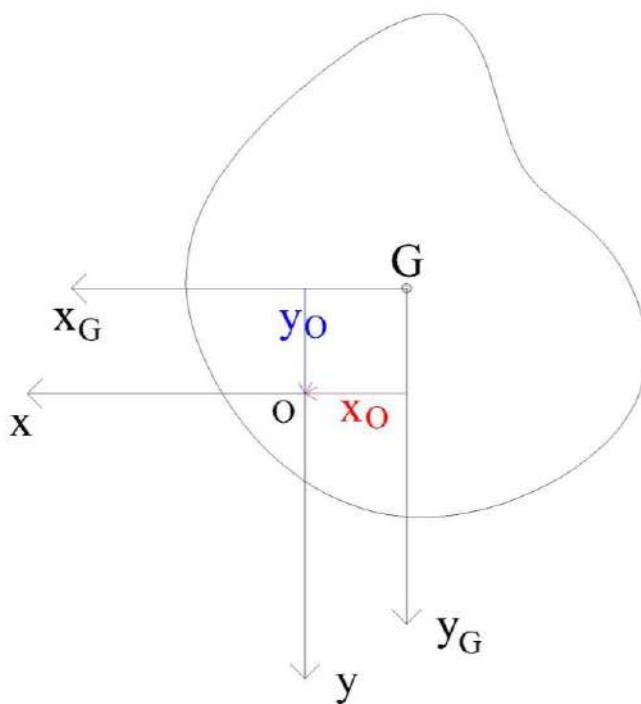


Figura 33

Vale infatti la seguente relazione (vd. Fig. 33):

$$I_{xy} = I_{x_G y_G} + A x_O y_O$$

Dove x_O, y_O sono le coordinate del punto O rispetto al sistema di riferimento baricentrico.

È chiaro che la relazione sopra vale per qualsiasi coppia di rette orientate perpendicolari r,s, anche se inclinate rispetto alle canoniche x,y.

VIII.4 Assi centrali d'inerzia

Definito il momento centrifugo, si possono introdurre gli assi centrali d'inerzia. Si è già anticipato che coincidono con l'asse di simmetria ortogonale (e la sua perpendicolare) quando esistente. Si è anche anticipato che sono gli unici due assi rispetto ai quali la flessione è sicuramente retta.

Ora se ne dà la definizione generale.

VIII.4.1 Definizione

Gli assi centrali d'inerzia di una figura piana (e quindi di una sezione trasversale) sono l'unica coppia di rette perpendicolari, normalmente indicate con le lettere greche ξ (si legge csi) ed η (si legge eta), per le quali valgono:

- 1) $I_{\xi\eta} = 0$
- 2) $I_{\xi} = I_{max}$ e $I_{\eta} = I_{min}$ al ruotare della retta r nel fascio di sostegno il baricentro G (vedi Fig. 34)

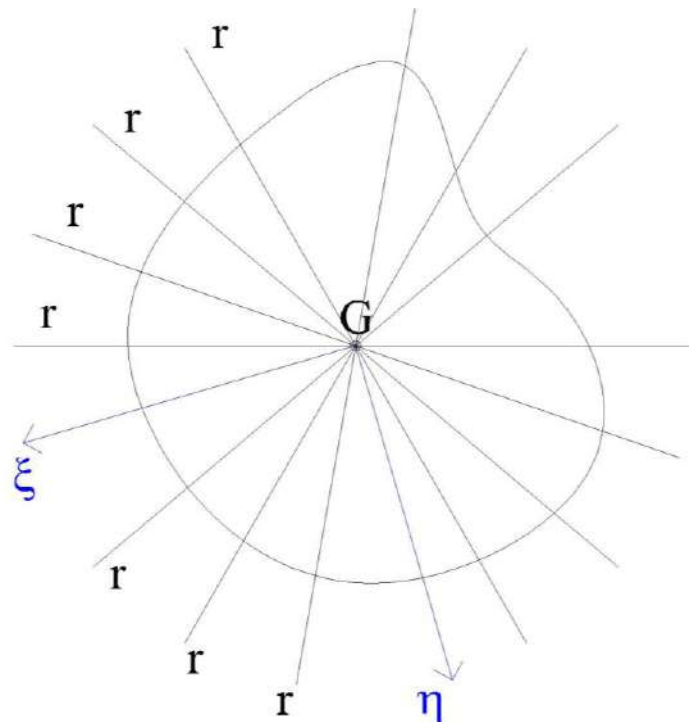


Figura 34

Al ruotare della retta nel fascio di sostegno G si può ricavare una relazione (se ne omette la

dimostrazione) che fornisce I_r in funzione di I_x , I_y , I_{xy} e dell'angolo γ (vd. Fig. 35) tra la retta r e l'asse x (antiorario se positivo):

$$I_r = I_x \cos^2 \gamma + I_y \sin^2 \gamma - 2I_{xy} \sin \gamma \cos \gamma$$

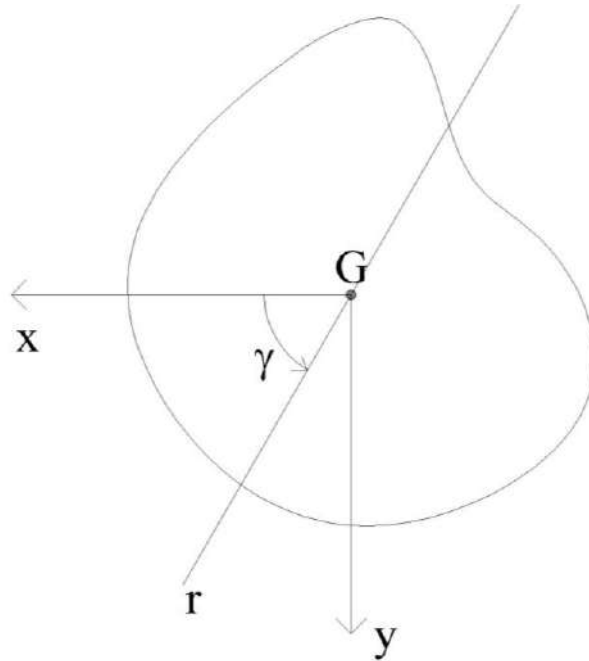


Figura 35

Se ξ ed η godono della proprietà 2), allora deve essere:

$$\left. \frac{dI_r}{d\gamma} \right|_{\gamma=\bar{\gamma}} = 0 \Rightarrow -2I_x \sin \bar{\gamma} \cos \bar{\gamma} + 2I_y \sin \bar{\gamma} \cos \bar{\gamma} - 2I_{xy}(\cos^2 \bar{\gamma} - \sin^2 \bar{\gamma}) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -I_x \sin 2\bar{\gamma} + I_y \sin 2\bar{\gamma} - 2I_{xy} \cos 2\bar{\gamma} = 0 \Rightarrow -I_x \tan 2\bar{\gamma} + I_y \tan 2\bar{\gamma} = 2I_{xy} \Rightarrow \tan 2\bar{\gamma} (I_y - I_x) = 2I_{xy}$$

$$\Rightarrow \tan 2\bar{\gamma} = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} \quad \Rightarrow \quad \bar{\gamma} = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}$$

$\bar{\gamma}$ fornisce l'angolo di inclinazione dell'asse ξ rispetto all'asse x (vd. Fig. 36).

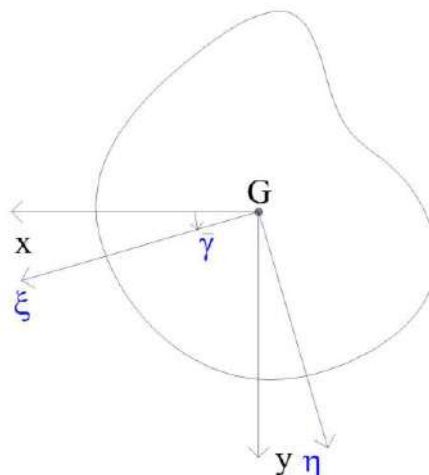


Figura 36

Noto $\bar{\gamma}$ si possono determinare i momenti d'inerzia massimo e minimo attraverso la seguente formula (se ne omette la dimostrazione):

$$\left. \begin{array}{l} I_{max} \\ I_{min} \end{array} \right\} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

Per una sezione priva di simmetria gli assi centrali di inerzia vanno individuate attraverso la determinazione dell'angolo $\bar{\gamma}$. Noto l'angolo, qualsiasi momento flettente steso sull'asse ξ oppure sull'asse η è associato a una flessione retta. In tal caso le formule di Navier (7.1) e (7.3) non cambiano ma vanno riscritte nel nuovo riferimento, ossia:

$$\sigma_z(z, \eta) = \frac{M_\xi(z)}{I_\xi} \eta$$

Per un vettore momento M_ξ steso lungo ξ , e:

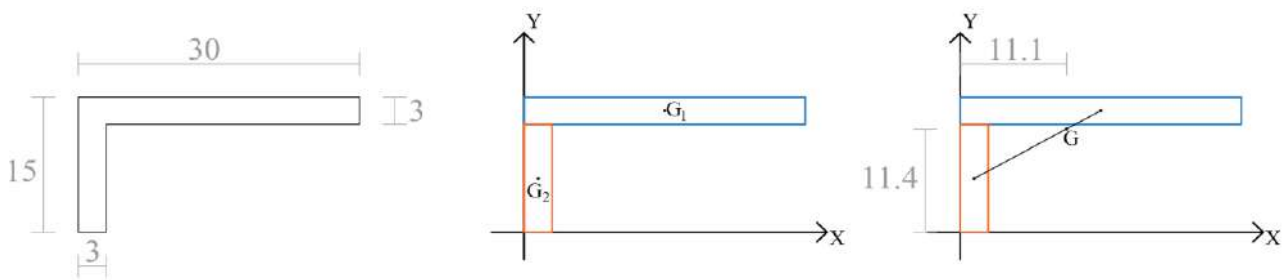
$$\sigma_z(z, \xi) = -\frac{M_\eta(z)}{I_\eta} \xi$$

Se, invece, il momento flettente applicato è inclinato rispetto a ξ e a η , allora la flessione è deviata e la formula binomia (7.5) è ancora valida ma va riscritta nel riferimento ξ, η ossia:

$$\sigma_z(z, \eta) = \frac{M_\xi(z)}{I_\xi} \eta - \frac{M_\eta(z)}{I_\eta} \xi$$

Dove M_ξ e M_η sono ora le componenti di M lungo gli assi centrali d'inerzia.

VIII.4.2 Esempio



Determinare il baricentro G, gli assi centrali d'inerzia ξ e η e i momenti d'inerzia I_ξ e I_η .

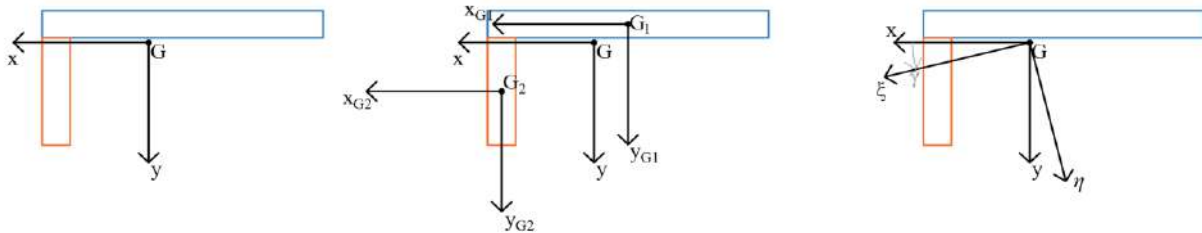
In questo caso la figura non presenta assi di simmetria, la posizione di G è quindi incognita in entrambe le coordinate. Si avranno dunque due incognite: X_G e Y_G . Il riferimento XOY necessario per determinare la posizione di G può essere scelto in modo del tutto arbitrario. In figura in alto al centro si nota la scelta fatta.

Sfruttando la formula del momento statico come nell'esempio 1 si ottiene:

$$X_G = \frac{S_Y}{A} = \frac{30 \cdot 3 \cdot 15 + 12 \cdot 3 \cdot 1.5}{30 \cdot 3 + 12 \cdot 3} = 11.1 \text{ cm}$$

$$Y_G = \frac{S_X}{A} = \frac{30 \cdot 3 \cdot 13.5 + 12 \cdot 3 \cdot 6}{30 \cdot 3 + 12 \cdot 3} = 11.4 \text{ cm}$$

Da notare che la posizione finale è nel segmento che unisce G_1 con G_2 , ma non al centro perché le due aree sono diverse. Siano ora x e y gli assi cartesiani nel baricentro G .



Per determinare gli assi centrali d'inerzia occorre ricavare l'angolo $\bar{\gamma}$ di inclinazione di ξ rispetto a x .

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}$$

Per determinare $\bar{\gamma}$ occorre ricavare I_x, I_y, I_{xy} . A tal fine si usa il teorema del trasporto:

$$I_x = I_x^{ret_1} + A^{ret_1} \cdot d_{x-x_{G1}}^2 + I_x^{ret_2} + A^{ret_2} \cdot d_{x-x_{G2}}^2$$

$$I_x = \frac{30 \cdot 3^3}{12} + 30 \cdot 3 \cdot (13.5 - 11.4)^2 + \frac{3 \cdot 12^3}{12} + 3 \cdot 12 \cdot (11.4 - 6)^2 = 1946 \text{ cm}^4$$

$$I_y = I_y^{ret_1} + A^{ret_1} \cdot d_{y-y_{G1}}^2 + I_y^{ret_2} + A^{ret_2} \cdot d_{y-y_{G2}}^2$$

$$I_y = \frac{3 \cdot 30^3}{12} + 30 \cdot 3 \cdot (11.1 - 15)^2 + \frac{12 \cdot 3^3}{12} + 3 \cdot 12 \cdot (11.1 - 1.5)^2 = 11464 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = I_{x_G y_G}^{ret_1} + A^{ret_1} \cdot x_{x_{G1}-x} \cdot y_{y_{G1}-y} + I_{x_G y_G}^{ret_2} + A^{ret_2} \cdot x_{x_{G2}-x} \cdot y_{y_{G2}-y}$$

$$I_{xy} = 0 + 30 \cdot 3 \cdot (11.1 - 15) \cdot (11.4 - 13.5) + 0 + 3 \cdot 12 \cdot (11.1 - 1.5) \cdot (11.4 - 6)$$

$$I_{xy} = 2603 \text{ cm}^4$$

Da notare che le distanze presenti nel teorema del trasporto per il momento centrifugo sono ricavate con riferimento al sistema xGy . Infatti il baricentro del rettangolo 1 ha entrambe le componenti negative mentre il baricentro del rettangolo 2 le ha entrambe positive. Si può evitare di commettere errori esplicitando tali distanze (come fatto nella relazione sopra) come differenza tra la quota di G e la quota di G_i .

Noti I_x, I_y, I_{xy} si ha:

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2 \cdot 2603}{11464 - 1946} = 0.25 \text{ rad} = 14^\circ$$

I momenti d'inerzia I_ξ e I_η si possono ricavare richiamando la formula nota:

$$\left. \begin{aligned} I_{\xi} = I_{max} \\ I_{\eta} = I_{min} \end{aligned} \right\} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

Quindi:

$$I_{\xi} = \frac{1946 + 11464}{2} + \sqrt{\left(\frac{1946 - 11464}{2}\right)^2 + 2603^2} = 12129 \text{ cm}^4$$

$$I_{\eta} = \frac{1946 + 11464}{2} - \sqrt{\left(\frac{1946 - 11464}{2}\right)^2 + 2603^2} = 1281 \text{ cm}^4$$

CAP. IX – SFORZO NORMALE ECCENTRICO

In questo capitolo si analizza il caso in cui nella sezione siano presenti sforzo normale centrato e momento flettente. Seppure con la sovrapposizione degli effetti lo stato tenso-deformativo sarebbe facilmente ricavabile, questa situazione merita qualche riflessione aggiuntiva.

IX.1 Presso/tensoflessione retta intorno a x

Lo stato di sollecitazione dovuto a sforzo normale centrato più flessione retta intorno a x si chiama pressoflessione retta o tensoflessione retta a seconda se lo sforzo normale è di trazione o di compressione.

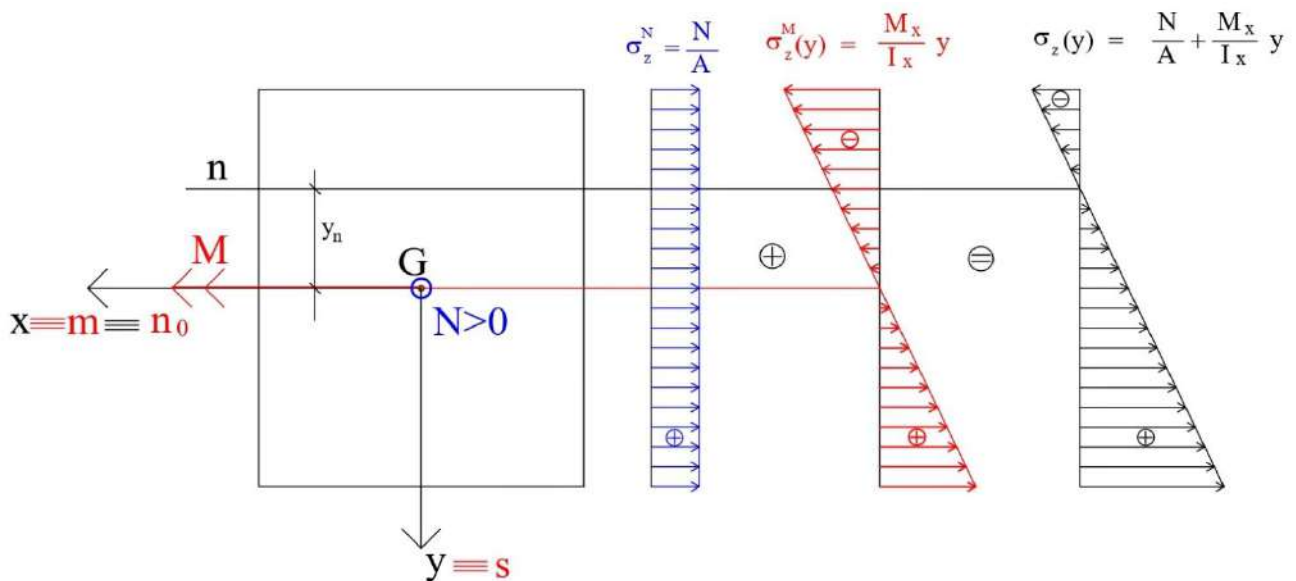


Figura 37

IX.1.1 Stato tensionale

Il diagramma delle tensioni in una sezione si può ottenere sovrapponendo (vd. Fig. 37) quello da sforzo normale centrato (costante) con quello da flessione retta (lineare):

$$\sigma_z(z, y) = \frac{N(z)}{A} + \frac{M_x(z)}{I_x} y \quad (9.1)$$

Si indichi con n_0 l'asse neutro associato alla sola flessione. In Fig. 37 si è ipotizzato uno sforzo normale positivo (trazione). Si osserva subito che l'asse neutro n della tensoflessione retta è parallelo a n_0 ma non passa più per il baricentro. A seconda del rapporto tra N e M , l'asse neutro n potrà tagliare la sezione o essere esterno. Al crescere di N (con M costante) l'asse neutro si sposta verso l'esterno, mentre al crescere di M (con N costante) l'asse neutro si avvicina a G .

La posizione di n (i.e. y_n , vd. Fig. 37) si può determinare come insieme di punti a tensione nulla:

$$\sigma_z(y) = 0 \Rightarrow \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y_n = 0 \Rightarrow y_n = -\frac{N}{A} \frac{I_x}{M_x} \quad (9.2)$$

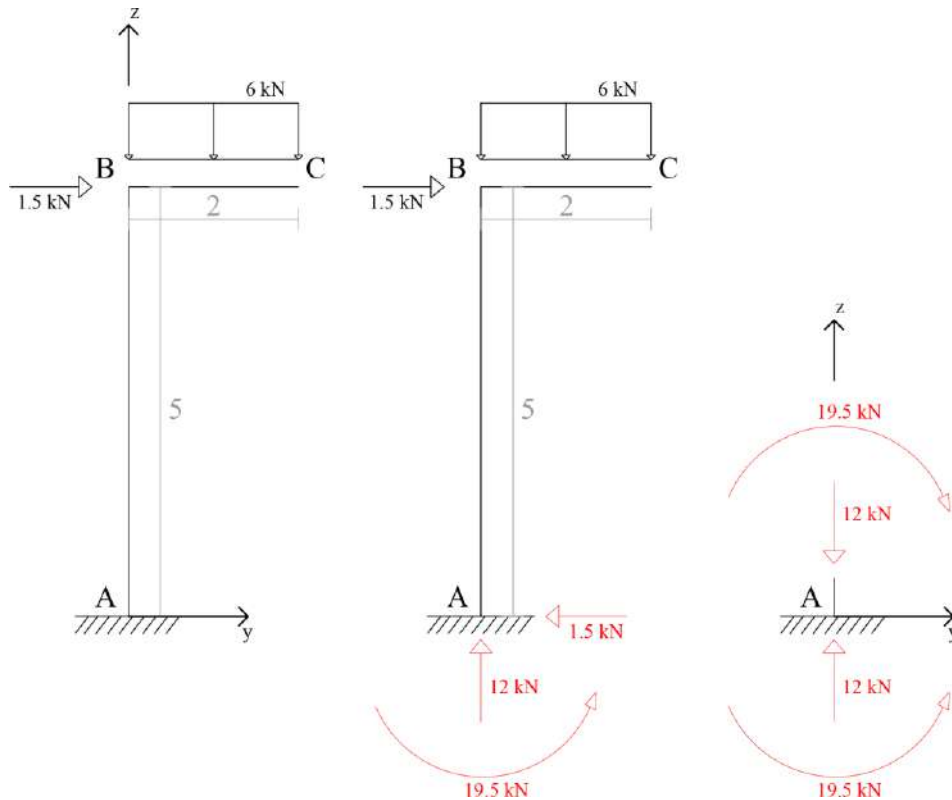
ritrovando così una retta parallela all'asse x e spostata dal baricentro della quantità $-\frac{N}{A} \frac{I_x}{M_x}$. I valori massimo e minimo (ossia massimo a trazione e massimo a compressione) nella generica sezione z si ottengono sostituendo nella (9.1) l'ordinata y (attenzione, misurata rispetto al baricentro G) dei punti più distanti dall'asse neutro.

$$\sigma_{z_{max,min}}(z) = \frac{N(z)}{A} + \frac{M_x(z)}{I_x} y_{max,min} \quad (9.3)$$

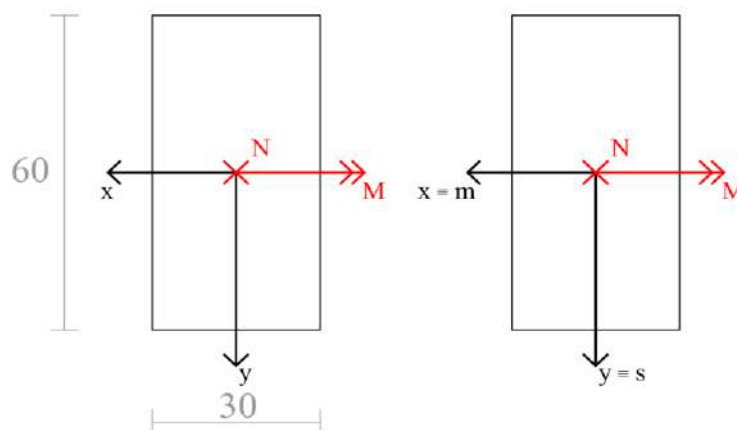
IX.1.2 Esempio

Determinare (vedi figura sinistra in basso, carico in kN/m, forza in kN, distanze in metri):

- M_A e N_A ;
- s, m, n_0, n
- I_x ,
- diagramma σ_z e
- Valore di σ_z^{max} e σ_z^{min}



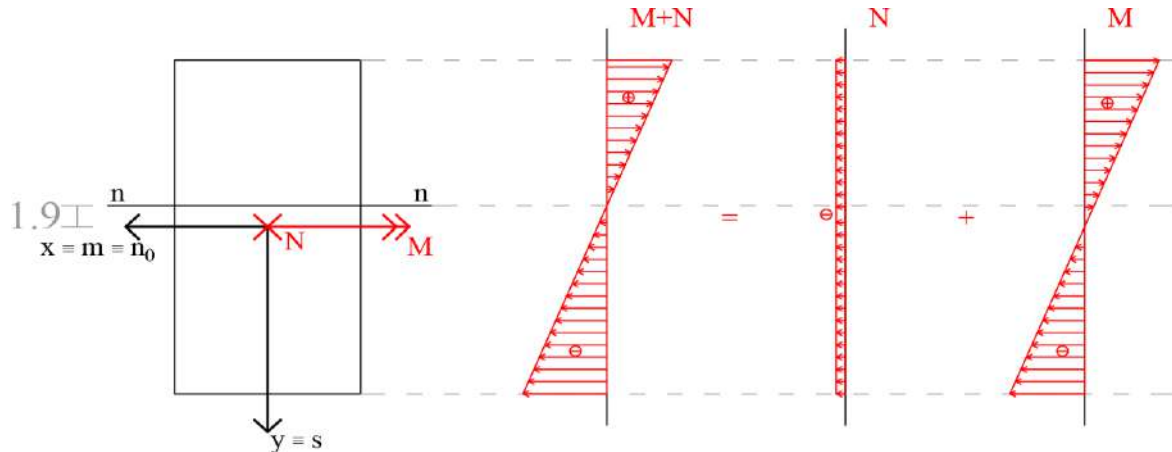
Si determinano prima le reazioni vincolari (vedi figura centro sopra). Le caratteristiche della sollecitazione in A sono disegnate sopra a destra con riferimento alla sezione a z uscente. Lo sforzo normale in A vale 12 kN ed è di compressione, mentre il momento flettente vale 19.5 kNm e tende le fibre a sinistra nel disegno, ossia le fibre a y negativo. La corretta rappresentazione di N_A e M_A sulla sezione a z uscente è data nella figura sotto (misure in centimetri).



Data la doppia simmetria, gli assi x e y in figura sono anche assi centrali d'inerzia.

Il vettore momento è diretto come l'asse x , quindi, l'asse di sollecitazione s (perpendicolare per definizione all'asse m) coincide con l'asse y .

In presenza del solo M_A , la flessione sarebbe retta (infatti s e m coincidono con gli assi centrali d'inerzia), e quindi l'asse n_0 (asse neutro della sola flessione) coincide con l'asse m , ossia x .



Quindi, $N_A + M_A$ è una pressoflessione retta. L'asse neutro n si ottiene uguagliando a zero la formula binomia valida per la pressoflessione:

$$\sigma = 0 = \frac{M_x}{I_x} y_n - \frac{N}{A} \Rightarrow y_n = -\frac{N}{A} \cdot \frac{I_x}{M_x} = \frac{12 \cdot 10^3 N}{30 \cdot 60 \cdot 10^2 \text{ mm}^2} \cdot \frac{540 \cdot 10^7 \text{ mm}^4}{-19.5 \cdot 10^6 N \text{ mm}} = -19 \text{ mm}$$

Il grafico σ è la somma del grafico dovuto a sforzo normale e a quello dovuto a momento, ossia:

$$\sigma_z(y) = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y = \frac{12 \cdot 10^3 N}{30 \cdot 60 \cdot 10^2 \text{ mm}^2} + \frac{-19.5 \cdot 10^6 N \text{ mm}}{540 \cdot 10^7 \text{ mm}^4} y = -0.067 - 0.00361 y \left[\frac{N}{\text{mm}^2} \right]$$

Quindi, i valori massimo e minimo si ottengono sostituendo a y i valori dei punti estremali della sezione, ossia:

$$\sigma_z^{\min} = -0.067 - 0.00361 (300) = -1.15 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

$$\sigma_z^{\max} = -0.067 - 0.00361 (-300) = 1.016 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

IX.1.3 Centro di pressione e relazione di coniugio

Si può dimostrare facilmente che lo stato di sollecitazione sopra descritto è equivalente a uno sforzo normale eccentrico, ossia a uno sforzo normale applicato in un punto C diverso dal baricentro G. Tale punto è detto centro di pressione. La congiungente il centro di pressione C con il baricentro G coincide con l'asse di sollecitazione.

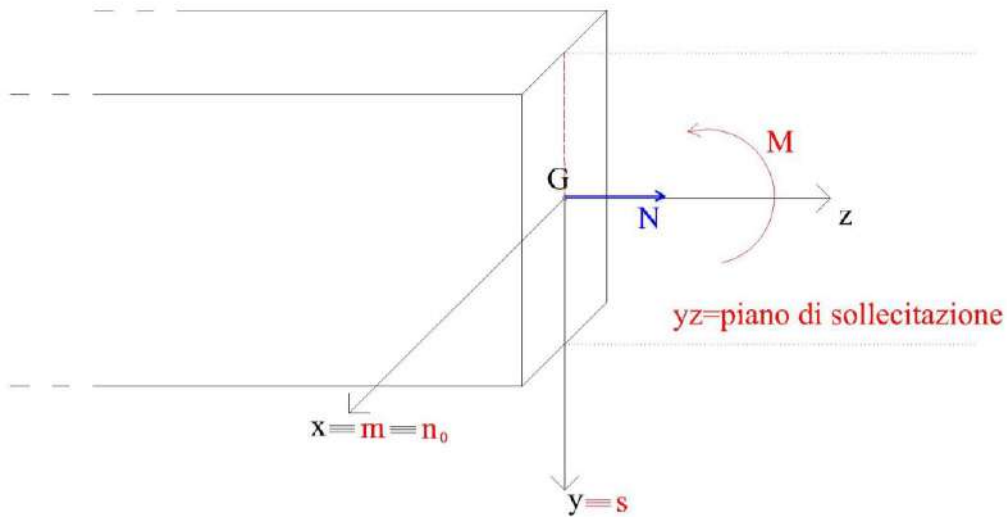


Figura 38

Infatti, dalla teoria dei vettori si sa che un sistema formato da un vettore applicato in punto G più una coppia (ossia sforzo normale centrato più momento flettente intorno a x, vd. Fig. 38) è equivalente a un vettore applicato in un punto C diverso da G e appartenente all'asse di sollecitazione.

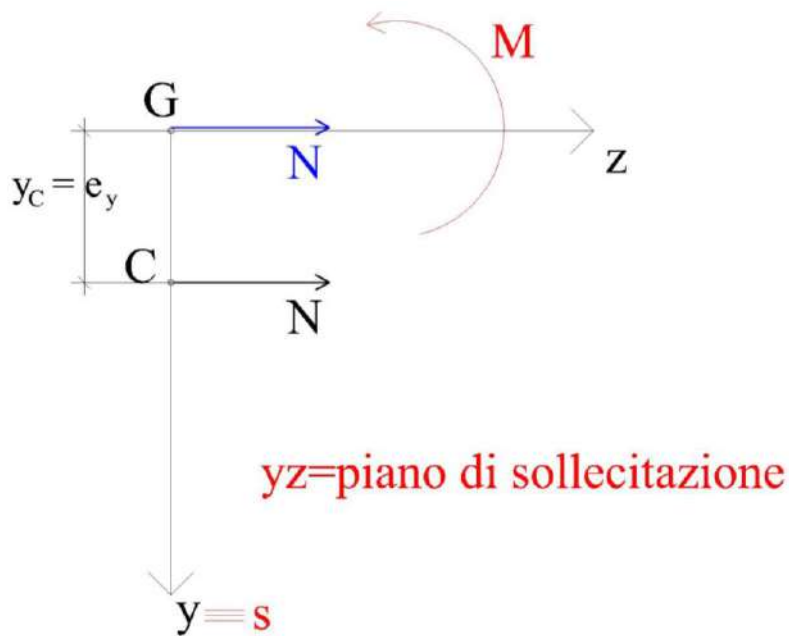


Figura 39

Focalizzando l'attenzione sul piano di sollecitazione, si nota quindi che $N_G + M_x$ è equivalente a un vettore N_C (vd. Fig. 39), dove

$$y_C = e_y = \frac{M_x}{N} \quad (9.4)$$

La distanza di C da G è detta anche eccentricità e_y .

Attenzione che la formula (9.4) è comprensiva di segno, ossia y_C può essere positivo o negativo in funzione dei segni di M_x e N . Mettendo in evidenza N/A nella (9.1) si ottiene un'espressione della

tensione in funzione dell'eccentricità:

$$\sigma_z(z, y) = \frac{N(z)}{A} \left(1 + \frac{A}{N(z)} \frac{M_x(z)}{I_x} y \right) \Rightarrow \sigma_z(z, y) = \frac{N(z)}{A} \left(1 + \frac{e_y(z)}{\rho_x^2} y \right) \quad (9.5)$$

dove:

$$\rho_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

è detto raggio d'inerzia della sezione trasversale rispetto all'asse x. I valori massimo e minimo di tensione si possono quindi ottenere dalla (9.5) sostituendovi i valori estremali della coordinata y.

Si può dimostrare l'esistenza di una relazione tra la posizione del centro di pressione C e la posizione dell'asse neutro y_C . Tale relazione si chiama relazione di coniugio e si scrive:

$$-y_C * y_n = \rho_x^2 \quad (9.6)$$

Il segno meno sta a indicare che centro di pressione C e asse neutro n si trovano su parti opposte rispetto al baricentro G. La relazione (9.6) rappresenta un modo, alternativo alla (9.2), per determinare la posizione dell'asse neutro.

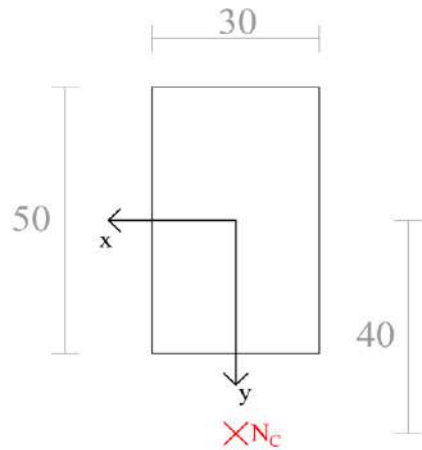
In definitiva:

- Se le caratteristiche della sollecitazione nella sezione sono note come N (nel baricentro) e M_x , allora la posizione dell'asse neutro può essere ricavata tramite la (9.2) e i valori massimo e minimo attraverso la (9.3).
- Se le caratteristiche della sollecitazione nella sezione sono note come N_C (ossia nel centro di pressione), allora la posizione dell'asse neutro può essere ricavata tramite la (9.6) e i valori massimo e minimo attraverso la (9.5).

Attenzione, nulla vieta di usare le (9.2-9.3) e (9.5-9.6) in maniera incrociata.

IX.1.4 Esempio

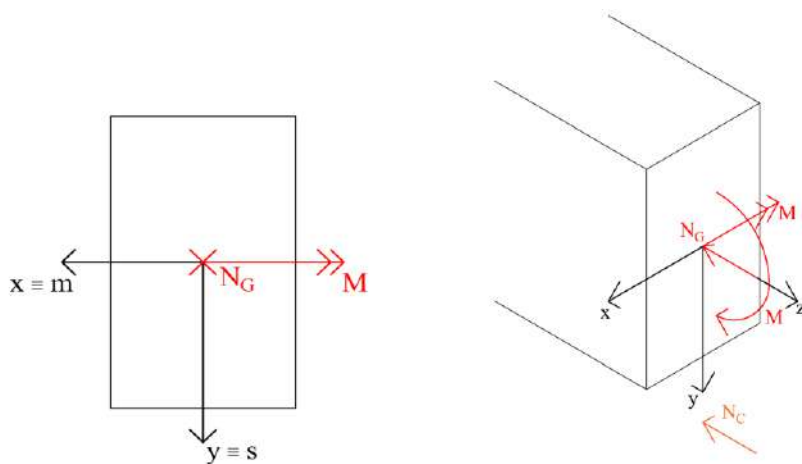
Si supponga che le caratteristiche della sollecitazione nella sezione in figura sotto siano equivalenti a una forza normale eccentrica $N_C = -200 \text{ kN}$, applicata in un punto C di coordinate $x_C = 0, y_C = 40 \text{ cm}$.



Determinare A ; I_x , $N_G + M$, s , m , n

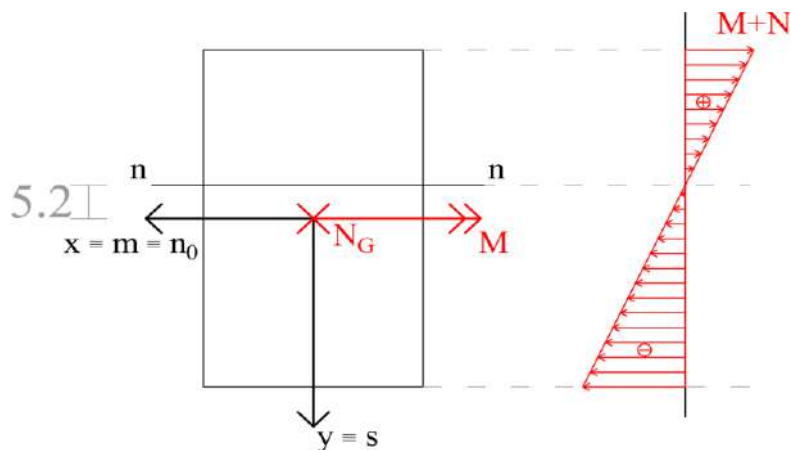
$$A = 30 \cdot 50 = 1500 \text{cm}^2$$

$$I_x = \frac{30 \cdot 50^3}{12} = 312500 \text{cm}^4$$



Sapendo che $N_C = N_G$ resta da calcolare $M = N_C \cdot y_C = -200 \cdot 0.4 = -80 \text{ kN m}$.

L'asse di sollecitazione s è la retta che congiunge C e G , è quindi coincidente con y , di conseguenza m e n_0 coincidono con x .



Per determinare l'asse neutro n si può porre $\sigma = 0$ oppure si può sfruttare la relazione di coniugio.

Usando il secondo metodo si ha:

$$-y_c \cdot y_n = \rho_x^2 \Rightarrow y_n = \frac{I_x}{A \cdot y_c} = \frac{312500 \text{ cm}^4}{1500 \cdot (-40) \text{ cm}^3} = -5.2 \text{ cm}$$

IX.2 Presso/tensoflessione retta intorno a y

In maniera del tutto analoga a quanto fatto in IX.1 si può sviluppare la presso/tenso flessione retta intorno a y, con l'assunto che y coincida con un asse centrale d'inerzia.

Si ipotizzi quindi uno stato di sollecitazione nella sezione somma di uno sforzo normale centrato in G e di un momento flettente intorno a y (vd. Fig. 40).

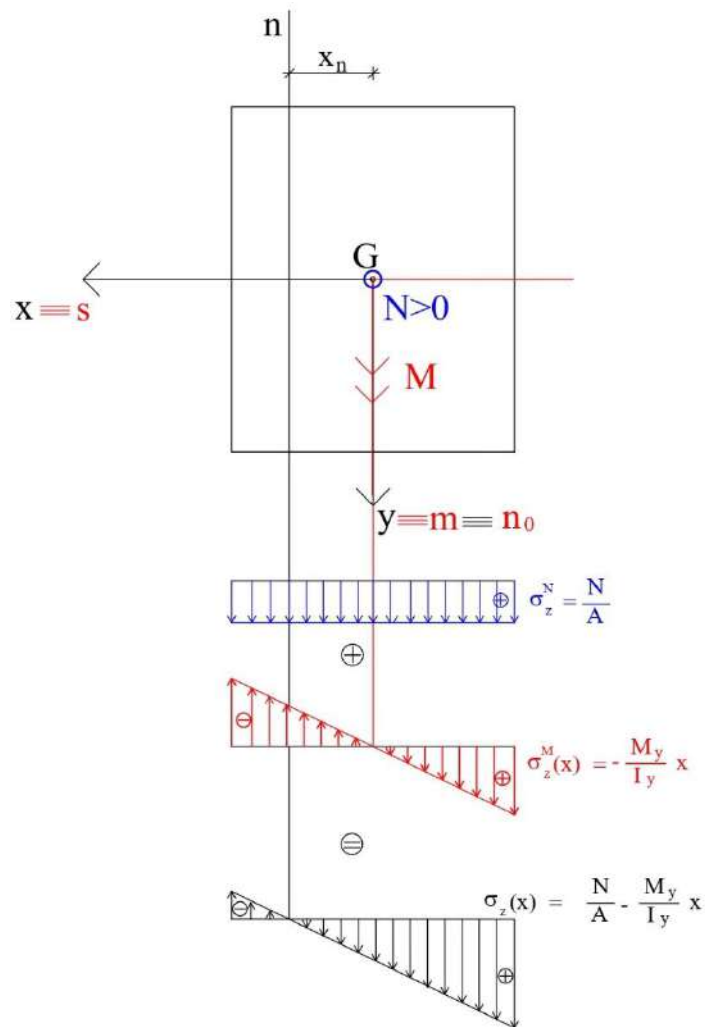


Figura 40

La tensione totale è somma dei due contributi, quindi:

$$\sigma_z(z, x) = \frac{N(z)}{A} - \frac{M_y(z)}{I_y} x \quad (9.7)$$

L'asse neutro è una retta parallela all'asse n_0 (ossia all'asse neutro che si avrebbe in presenza della

sola flessione M_y) e la sua posizione è data da:

$$\sigma_z(x) = 0 \Rightarrow \frac{N}{A} - \frac{M_y}{I_y} x_n = 0 \Rightarrow x_n = \frac{N}{A} \frac{I_y}{M_y}$$

I valori massimo e minimo nella generica sezione z si ottengono sostituendo l'ascissa x dei punti più distanti dall'asse neutro nella (9.7):

$$\sigma_{z_{max,min}}(z) = \frac{N(z)}{A} - \frac{M_y(z)}{I_y} x_{max,min}$$

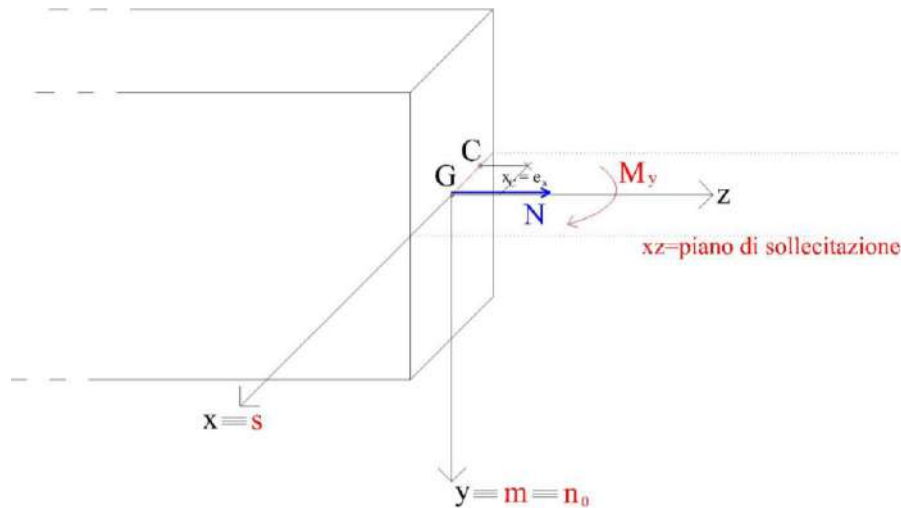


Figura 41

Analogamente allo sforzo normale eccentrico retto intorno a x , si può dimostrare che lo stato di sollecitazione sopra descritto è equivalente a uno sforzo normale eccentrico applicato in un centro di pressione C giacente sull'asse di sollecitazione con (vd. Fig. 41):

$$x_C = e_x = -\frac{M_y}{N} \quad (9.8)$$

Nota bene: c'è un segno meno che distingue questa relazione dalla (9.4).

Analogamente si può ottenere un'espressione della tensione in funzione dell'eccentricità e_x :

$$\sigma_z(z, x) = \frac{N(z)}{A} \left(1 - \frac{A}{N(z)} \frac{M_y(z)}{I_y} x \right) \Rightarrow \sigma_z(z, x) = \frac{N(z)}{A} \left(1 + \frac{e_x(z)}{\rho_y^2} x \right)$$

dove:

$$\rho_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

è il raggio d'inerzia della sezione trasversale rispetto all'asse y .

La relazione di coniugio si particularizza in:

$$-x_C * x_n = \rho_y^2 \quad (9.9)$$

e rappresenta un modo alternativo per determinare la posizione dell'asse neutro (ossia x_n) noti la posizione del centro di pressione C e la geometria della sezione.

X.3 Nocciolo centrale d'inerzia e materiali non resistenti a trazione pressoinflessi

Le relazioni (9.6) e (9.9) dimostrano che (vd. Fig. 42):

- Al crescere di N rispetto a M (ossia al diminuire di e_y o e_x a seconda se flessione intorno a x oppure intorno a y), il centro di pressione C si avvicina al baricentro e quindi l'asse neutro si allontana. Del resto è intuibile che al crescere di N rispetto a M il digramma delle tensioni tende verso un diagramma costante (e quindi l'asse neutro si allontana dalla sezione).
- Al crescere di M rispetto a N (ossia all'aumentare di e_y o e_x), il centro di pressione C si allontana dal baricentro e quindi l'asse neutro si avvicina al baricentro. Infatti, se M è molto grande rispetto a N il diagramma tensionale tende a quello bitriangolare del solo momento flettente, con asse neutro tendente a quello baricentrico.

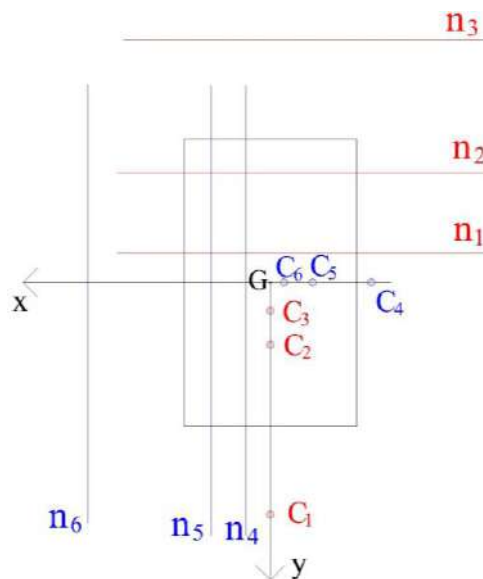


Figura 42

X.3.1 Definizione di Nocciolo Centrale d'Inerzia

Risulta interessante capire quali sono le posizioni di C corrispondenti ad assi neutri esterni alla sezione trasversale. Si definisce allora Nocciolo Centrale d'Inerzia (NCI) il luogo dei punti centri di pressione i cui assi neutri sono esterni alla sezione. Il perimetro del NCI è quindi il luogo dei centri di pressione associati ad assi neutri tangenti alla sezione.

Si provi a determinare il perimetro del NCI della sezione rettangolare ABCD. I centri di pressione C_1 e C_2 associati alle rette AD e BC (si indichino con i simboli n_1 e n_2) si trovano su parti opposte sulla

retta y (vd. Fig. 43). Infatti se n è parallelo a x (e x è asse centrale d'inerzia), allora l'asse di sollecitazione s coincide con l'asse y su cui deve trovarsi il centro di pressione C . La posizione dei punti C_1 e C_2 è nota se è nota la quantità a in figura.

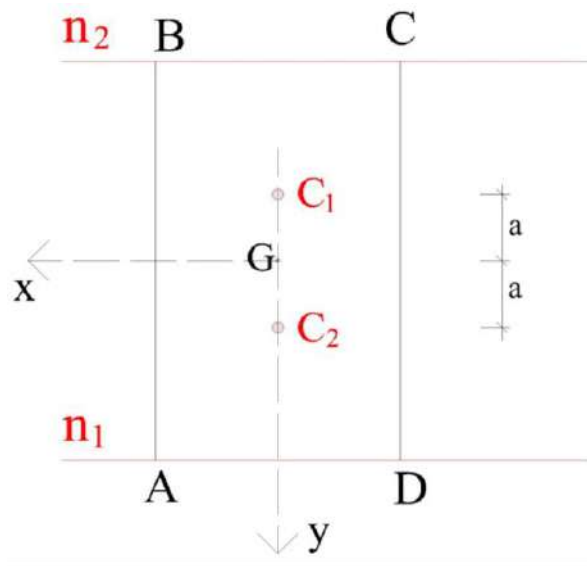


Figura 43

Analogamente i centri di pressione C_3 e C_4 associati alle rette AB (n_3) e CD (n_4) si trovano sulla retta x a una distanza b dal baricentro G (vd. Fig. 44).

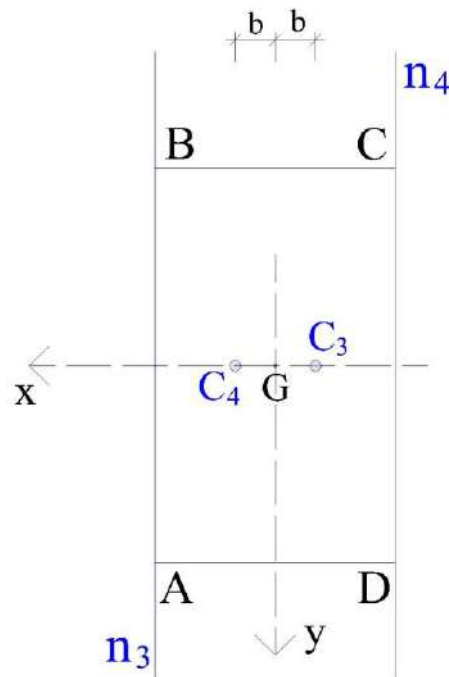


Figura 44

Questi quattro punti C_1, C_2, C_3, C_4 rappresentano dei vertici del perimetro del NCI, essendo associati a rette che sono tangenti in più punti alla sezione ABCD. Altri punti del perimetro si ottengono come centri di pressione associati alle rette tangenti nel solo punto A (in rosso assi e centri corrispondenti

in Fig. 45), alle rette tangenti in B (in magenta in Fig. 45), alle rette tangenti in C (in blu in Fig. 45) e alle rette tangenti in D (in verde in Fig. 45).

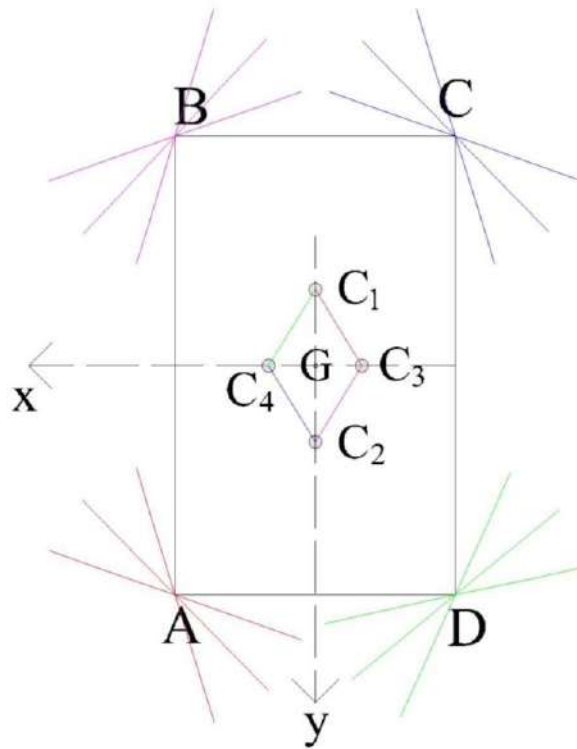


Figura 45

In generale, le rette tangenti a una sezione in più punti corrispondono a vertici del perimetro del NCI, le rette tangenti in un solo punto corrispondono a centri di pressione sui lati del perimetro del NCI.

Il NCI del rettangolo è quindi un rombo. Le sue diagonali (ossia le quantità a e b) si possono determinare attraverso la relazione di coniugio. Infatti:

$$-y_{C_1} * y_{n_1} = \rho_x^2 \Rightarrow -y_{C_1} * \frac{H}{2} = \frac{BH^3}{12BH} \Rightarrow y_{C_1} * \frac{H}{2} = -\frac{H^2}{12} \Rightarrow y_{C_1} = -\frac{H}{6}$$

$$N. B. \quad a = |y_{C_1}|$$

Per simmetria si ha:

$$y_{C_2} = -y_{C_1}$$

Analogamente per b si ha:

$$-x_{C_3} * x_{n_3} = \rho_y^2 \Rightarrow -x_{C_3} * \frac{B}{2} = \frac{HB^3}{12BH} \Rightarrow x_{C_3} * \frac{B}{2} = -\frac{B^2}{12} \Rightarrow x_{C_3} = -\frac{B}{6}$$

$$N. B. \quad b = |x_{C_3}|$$

In definitiva il NCI del rettangolo è un rombo di diagonali lunghe $\frac{h}{3}$ (su y) e $\frac{b}{3}$ (su x), vd. Fig. 46.

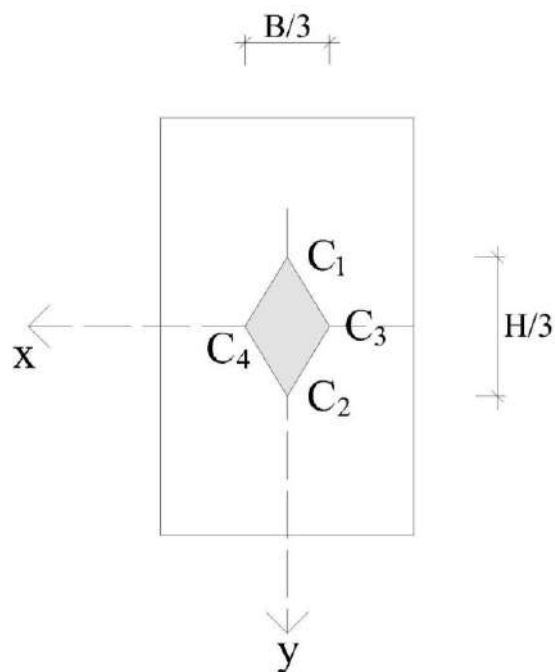
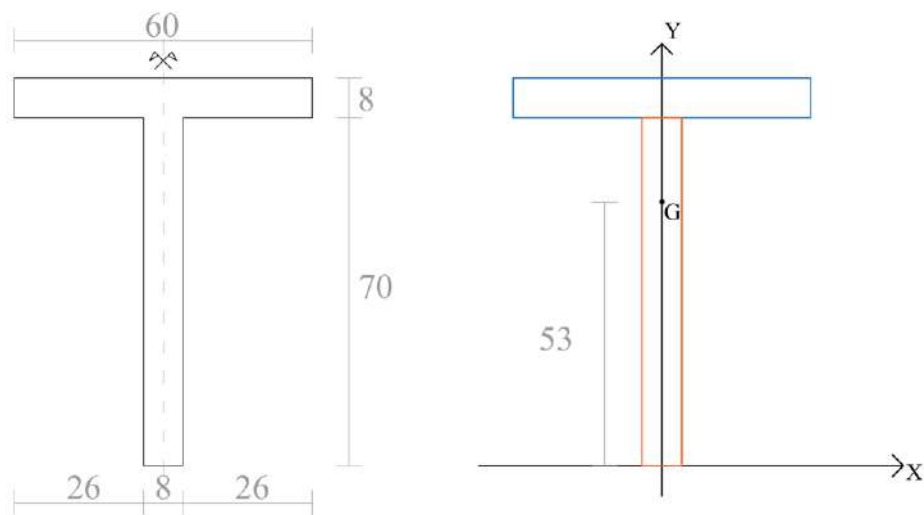


Figura 46

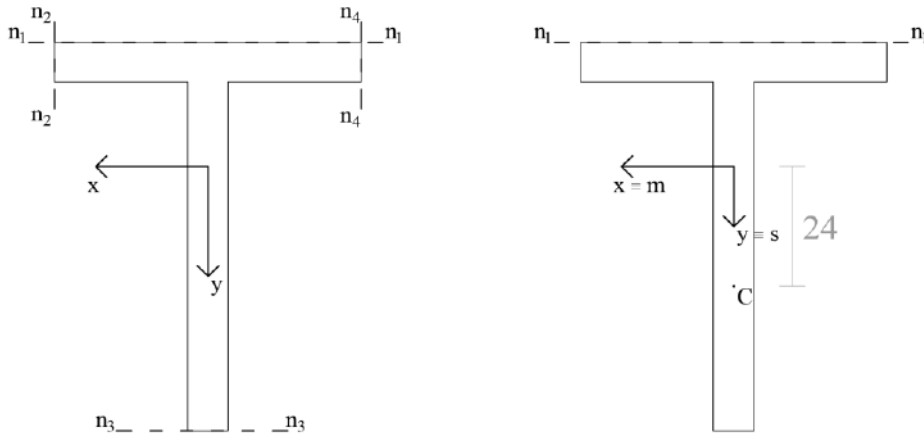
X.3.2 Esempio



Determinare G e un punto del nocciolo centrale d'inerzia.

Avendo la figura un asse di simmetria, è necessario determinare solo una coordinata di G. Si fissi allora un sistema di riferimento XOY (arbitrario) con X coincidente con il lato inferiore (vedi figura sinistra sopra). Dividendo la figura in due rettangoli si ottiene:

$$Y_G = \frac{S_X^{ret.1} + S_X^{ret.2}}{A} = \frac{60 \cdot 8 \cdot 74 + 70 \cdot 8 \cdot 35}{60 \cdot 8 + 70 \cdot 8} = 53 \text{ cm}$$



Per trovare un punto del nocciolo centrale d'inerzia si fissa prima di tutto un asse neutro tangente alla sezione. Poichè, data la simmetria, gli assi centrali d'inerzia coincidono con gli assi x e y , conviene scegliere un asse neutro parallelo a x oppure a y , in modo che la presso/tenso flessione corrispondente sia retta e quindi l'asse di sollecitazione sia perpendicolare all'asse neutro. Un asse neutro scelto non parallelo agli assi centrali d'inerzia, invece, corrisponderebbe a una presso/tenso flessione deviata.

In questo caso scelto n_1 l'asse s coincide con y e m con x (vedi figura destra sopra).

Si procede quindi con la relazione di coniugio per determinare la posizione di C e quindi il punto di nocciolo richiesto:

$$-y_c \cdot y_n = \rho_x^2 \Rightarrow y_c = -\frac{I_x}{A \cdot y_n}$$

Sapendo che:

$$I_x = I_x^{ret_1} + A^{ret_1} \cdot d_{x-x_{G1}}^2 + I_x^{ret_2} + A^{ret_2} \cdot d_{x-x_{G2}}^2$$

$$I_x = \frac{60 \cdot 8^3}{12} + 60 \cdot 8 \cdot (24 - 53)^2 + \frac{8 \cdot 70^3}{12} + 8 \cdot 70 \cdot (35 - 53)^2 = 624347 \text{ cm}^4$$

e che:

$$A = 60 \cdot 8 + 70 \cdot 8 = 1040 \text{ cm}^2$$

si ha:

$$y_c = -\frac{I_x}{A \cdot y_n} = -\frac{624347}{1040 \cdot (-25)} = 24 \text{ cm}$$

X.3.3 Il caso di sezioni pressoinflesse non resistenti a trazione

La conoscenza preventiva del NCI risulta particolarmente utile nei materiali non resistenti a trazione, ossia in presenza di sezioni trasversali che non sono in grado di trasmettere sforzi di trazione.

La muratura, per esempio, ha la resistenza a trazione funzione dell'aderenza tra mattone e malta e quindi sicuramente trascurabile. L'interfaccia fondazione terreno è in grado di trasmettere sforzi di compressione ma sicuramente nessuno sforzo di trazione.

Elementi strutturali fatti di tali materiali possono sopportare momenti flettenti solo se accompagnati da sforzo normale centrato, possono cioè sopportare, in linea di principio, solo pressoflessione (e non pura flessione).

Si è dimostrato che la pressoflessione è equivalente allo sforzo normale eccentrico in un centro di pressione C . La sezione risulta quindi sicuramente compressa se C è interno al nocciolo centrale d'inerzia, valendo le relazioni introdotte nei paragrafi IX.1 e IX.2. È buona regola, per esempio, "sagomare" l'arco in modo che la sua curva delle pressioni sia interna al suo NCI, ossia interna al terzo medio (come si dice in gergo ricordando le dimensioni delle diagonali del NCI del rettangolo).

Se al contrario C è esterno al NCI allora la sezione risulta parzializzata; in tal caso non si possono applicare le relazioni introdotte nei paragrafi IX.1 e IX.2 in quanto il materiale non è in grado di trasmettere la trazione prevista da un lato dell'asse neutro. In questo caso, la posizione dell'asse neutro non è di facile determinazione in quanto soluzione di un problema non lineare in cui l'area compressa non è nota a priori ma funzione della soluzione. Tale problema ammette una soluzione semplice nel caso del rettangolo in cui C appartiene a uno degli assi di simmetria. In tal caso infatti vale la cosiddetta regola del $3u$ (vd. Fig. 47 per C su asse y), ossia, detta u la distanza di C dal lembo compresso, l'asse neutro della sezione parzializzata si trova a $3u$ dal lembo compresso.

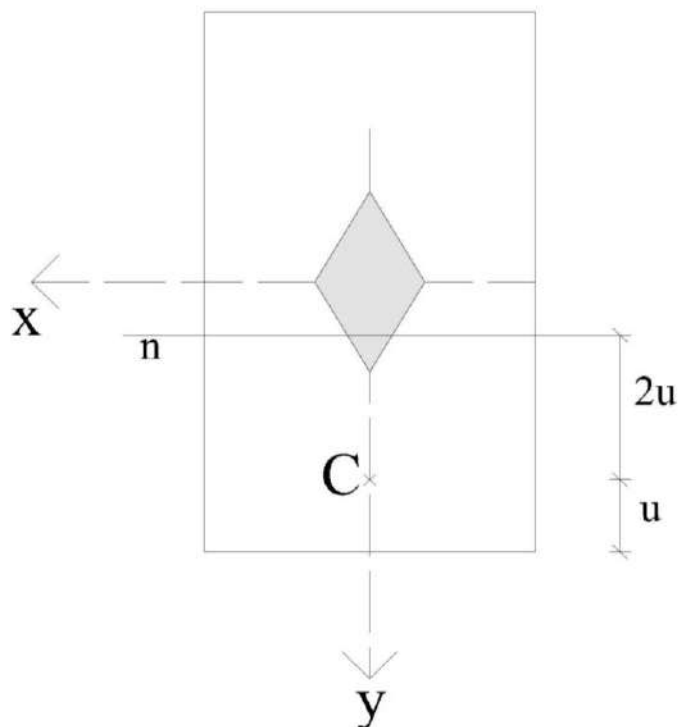


Figura 47

Il diagramma delle tensioni (solo compresse) si ottiene sulla fondamentale perpendicolare all'asse neutro (vd. Fig. 48) e il valore massimo vale:

$$\sigma_z^{max} = 2 \frac{N}{3Bu}$$

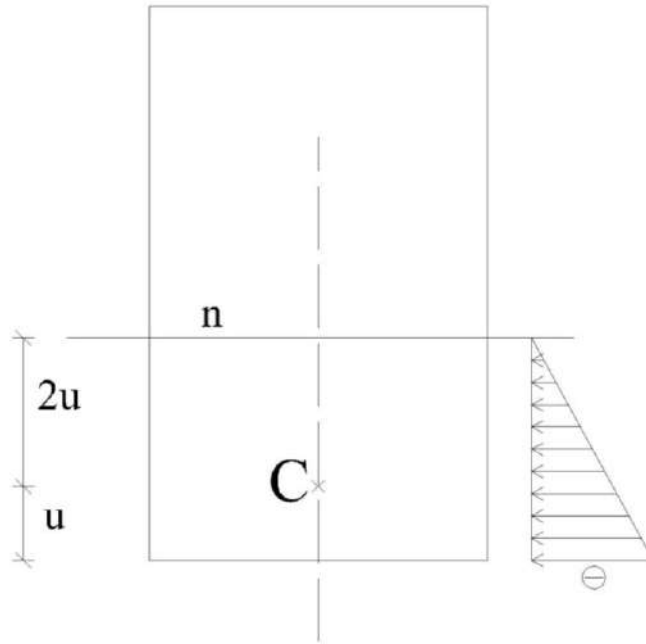


Figura 48

dove B è la base del rettangolo.

Analogamente, se C si trova sull'asse x si ha (vd. Fig. 49):

$$\sigma_z^{max} = 2 \frac{N}{3Hu}$$

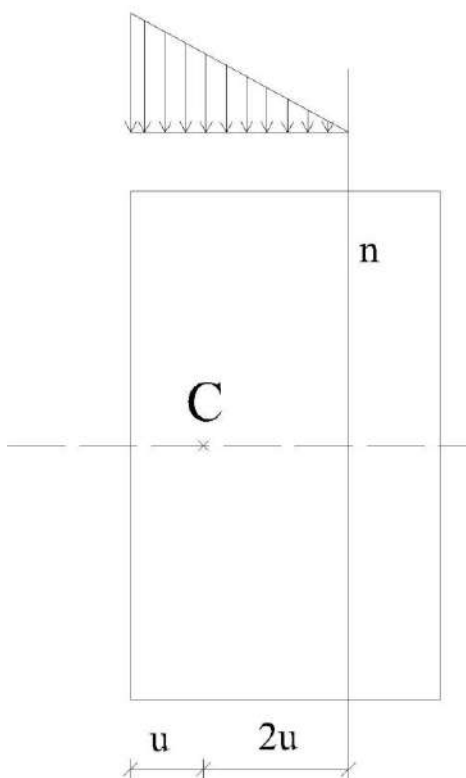


Figura 49

dove H è l'altezza del rettangolo.

X.4 Cenni su presso/tensoflessione deviata (o sforzo normale eccentrico deviato)

Un cenno merita il caso in cui la flessione che accompagna lo sforzo normale centrato non sia intorno a un asse centrale d'inerzia ξ oppure η , per esempio nei casi di Fig. 50 (sinistra e centro):

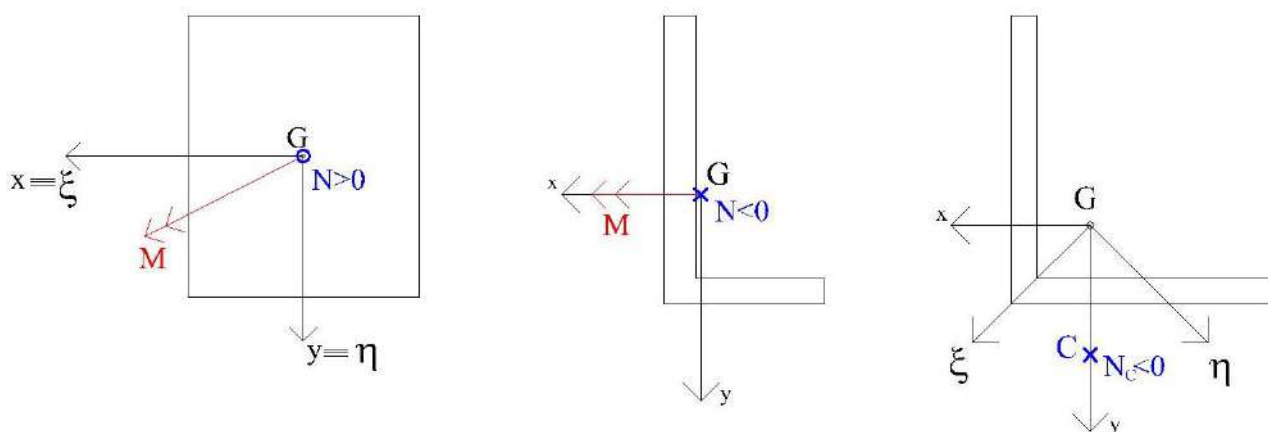


Figura 50

O, equivalentemente, se lo sforzo normale eccentrico in sezione sia applicato in un punto C che non si trova su uno degli assi centrali d'inerzia, vd. per esempio Fig. 50 (destra).

In tali casi si parla di presso/tensoflessione deviata oppure di sforzo normale eccentrico deviato. La

tensione in un punto è data dalla formula trinomia che, nel caso in cui gli assi centrali ξ, η non coincidano con gli assi x, y , si scrive:

$$\sigma_z(z, \xi, \eta) = \frac{N(z)}{A} + \frac{M_\xi(z)}{I_\xi} \eta - \frac{M_\eta(z)}{I_\eta} \xi$$

Dove M_ξ e M_η sono le componenti di M rispetto agli assi centrali d'inerzia.

Nel caso in cui ξ, η coincidano con gli assi x, y , vale chiaramente:

$$\sigma_z(z, x, y) = \frac{N(z)}{A} + \frac{M_x(z)}{I_x} y - \frac{M_y(z)}{I_y} x$$

Da osservare che una presso/tensoflessione deviata è equivalente a uno sforzo normale eccentrico applicato in un punto C che non si trova su uno degli assi centrali d'inerzia. Infatti (vd. Fig. 51) sforzo normale centrato più flessione attorno a una retta m equivalgono a uno sforzo normale eccentrico in un centro di pressione C posizionato sull'asse di sollecitazione con coordinate fornite dalle (9.8) e (9.4), ossia:

$$e_\xi = -\frac{M_\eta}{N} \qquad e_\eta = \frac{M_\xi}{N}$$

dove M_ξ e M_η sono le componenti di M rispetto agli assi centrali d'inerzia.

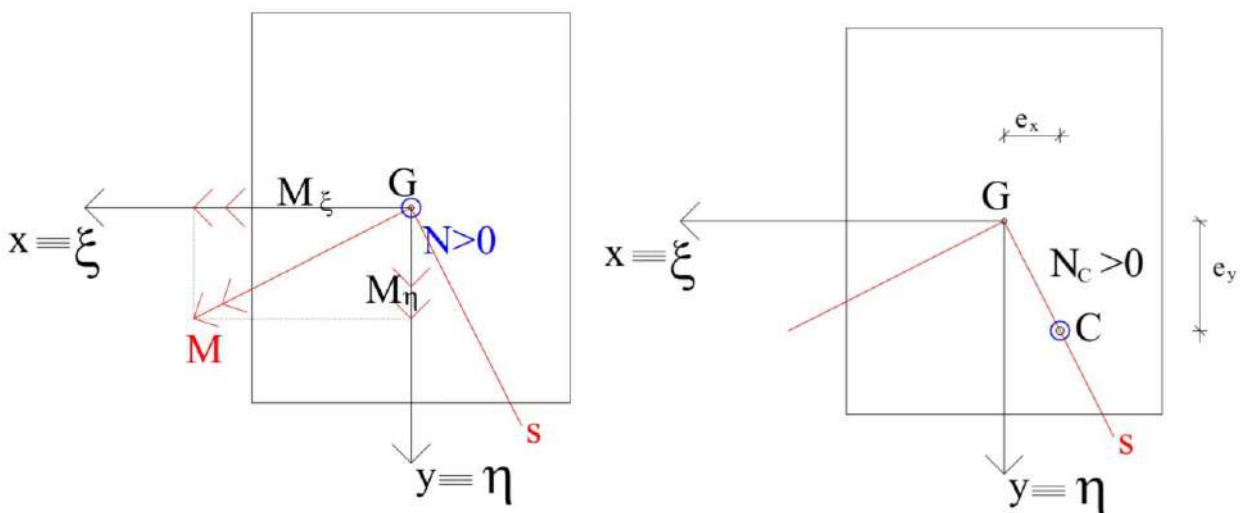


Figura 51