

### III.13 Reazioni vincolari e CdS sugli archi. Curva delle pressioni e diagramma delle distanze. Cenni sugli archi murari.

#### III.13.1 Alcuni cenni sulla determinazione delle CdS su travi curve

Si consideri lo schema di trave appoggio-appoggio con forza centrale concentrata di 15 kN e asse curvo come indicato in Fig. 16. La quota  $f$  è chiamata freccia dell'arco ABC.

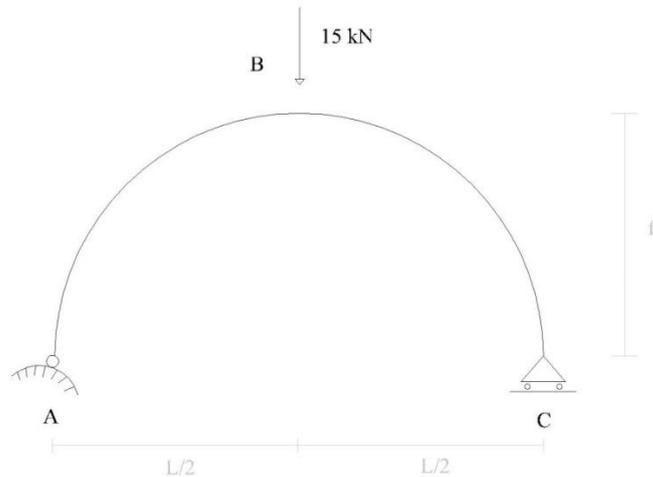


Figura 16

Si consideri la stessa luce coperta anche da uno schema AC di trave rettilinea.

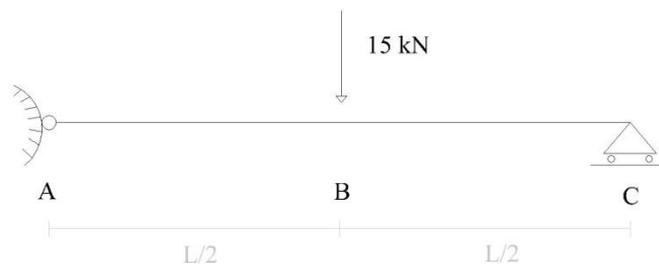


Figura 17

Si determinino le reazioni vincolari in entrambi i casi. Per quanto riguarda l'arco di Fig. 16, per simmetria, la soluzione è la seguente:

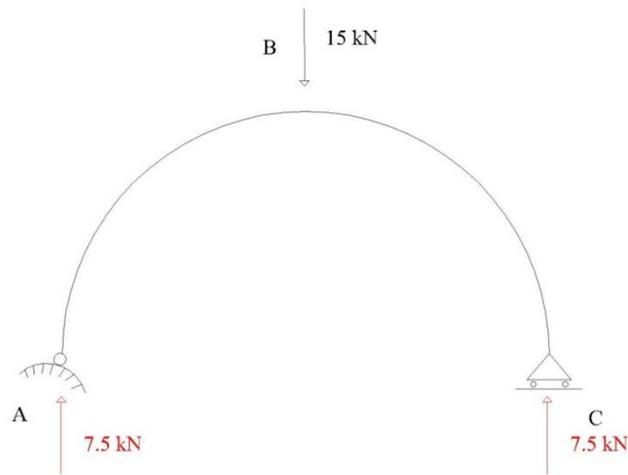


Figura 18

Analogamente, le reazioni vincolari della trave rettilinea in Fig. 17 possono determinarsi per simmetria (Fig. 19).

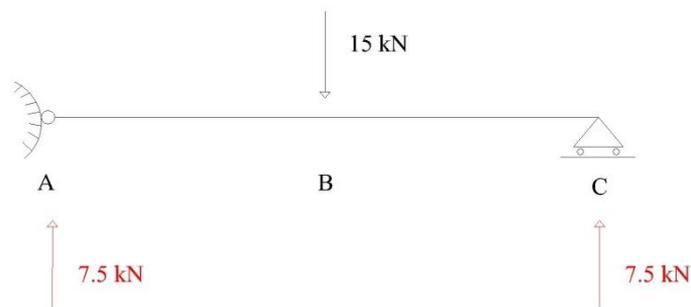


Figura 19

Si consideri una sezione S qualsiasi, per esempio a distanza  $L/4$  dal punto A, come mostrato in Fig. 20 (la posizione non è importante per quello che si dirà nel seguito di questo esempio).

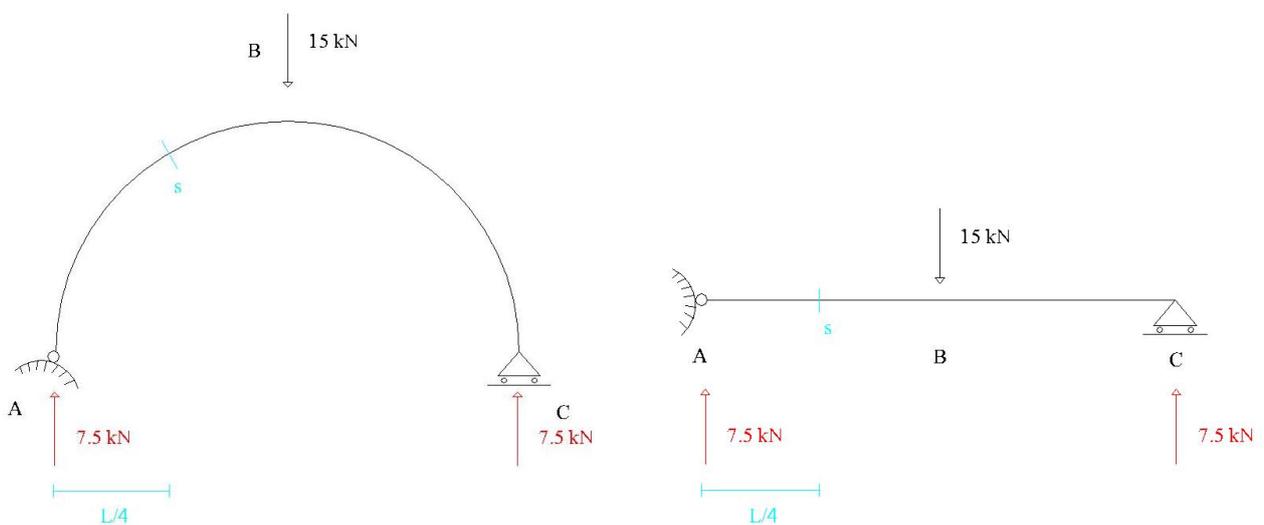


Figura 20

Nel caso di asse rettilineo, l'equilibrio del tratto A-S fornisce le caratteristiche della sollecitazione:

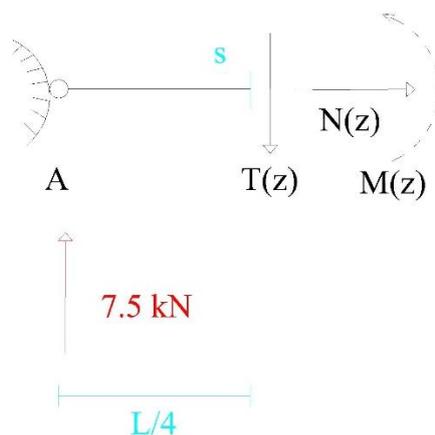


Figura 21

Si ottengono quindi (vd. Fig. 21):

$$N(z) = 0$$

$$T(z) = 7,5$$

$$M(z) = 7,5 * L/4 = 15$$

Nel caso di asse curvilineo, il metodo è il medesimo. Taglio quindi la trave in S e impongo l'equilibrio del tratto a sinistra A-S (o a destra). In Fig. 22 è rappresentato l'equilibrio di A-S:

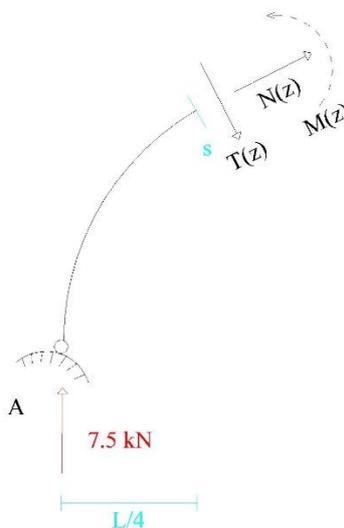


Figura 22

Per definizione, la sollecitazione  $N(s)$  è assiale, quindi deve essere tangente all'asse curvilineo della trave in quella particolare sezione S considerata. Lo sforzo normale avrà quindi una certa inclinazione rispetto all'orizzontale (angolo  $\alpha$ ) e verrà tracciato come 'prolungamento' della tangente. Lo sforzo

di taglio  $T(s)$ , dovendo essere perpendicolare alla direzione dello sforzo normale, sarà quindi posizionato come mostrato in Fig. 22.

Le CdS ( $N(s)$  e  $T(s)$ ) si possono quindi determinare solo conoscendo la tangente alla sezione considerata. Infatti, variando la sezione considerata, varia anche il relativo angolo  $\alpha$ . Quindi le CdS possono essere determinate solo conoscendo la curva descrittiva dell'asse dell'arco, per esempio come funzione  $f(x)$  (dove  $x$  è la proiezione dell'arco sull'orizzontale e  $f(x)$  la corrispondente ordinata della sezione dell'arco).

Per ricavare le CdS  $N(s)$  e  $T(s)$  si può lavorare graficamente andando ad equilibrare la reazione vincolare verticale pari a 7,5. Per fare questo, si considera il vettore 7,5 e si tracciano le parallele ad  $N(s)$  e  $T(s)$ , creando il poligono di vettori come mostrato in Fig. 23.

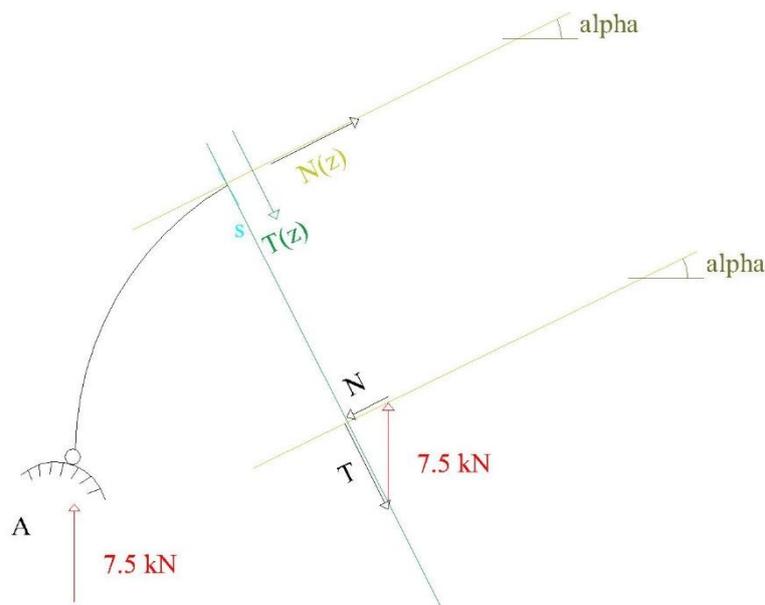


Figura 23

I moduli dei vettori  $N$  e  $T$  saranno quindi, per geometria:

$$|N| = 7,5 * \sin(\alpha)$$

$$|T| = 7,5 * \cos(\alpha)$$

Si osserva quindi che l'arco, sollecitato da azioni verticali, è soggetto anche a sforzo normale. Inoltre, le caratteristiche  $N$  e  $T$  dipendono dalla geometria dell'angolo, essendo funzione di  $\alpha$ . È chiara quindi la difficoltà nel tracciare i diagrammi delle CdS.

La costruzione grafica può essere un ausilio anche per condizioni di carico diverse da quella verticale. Ad esempio, si consideri il medesimo arco ma con forza orizzontale (Fig. 24).

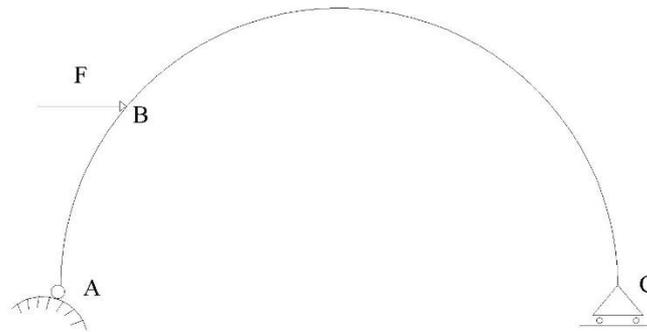


Figura 24

$R_A$ ,  $R_C$  e il vettore forza  $F$  formano un sistema di tre forze in equilibrio (equilibrio dell'arco ABC). Condizione necessaria di equilibrio tra tre forze è che si intersechino in un punto e formino un poligono dei vettori chiuso. Essendo note direzione (verticale) e posizione (passante per C) di  $R_C$  come anche direzione (orizzontale) e posizione (in B) della forza esterna, è sufficiente intersecare queste due rette per ottenere il punto di passaggio della retta su cui giace  $R_A$ , come mostrato in Fig. 25.

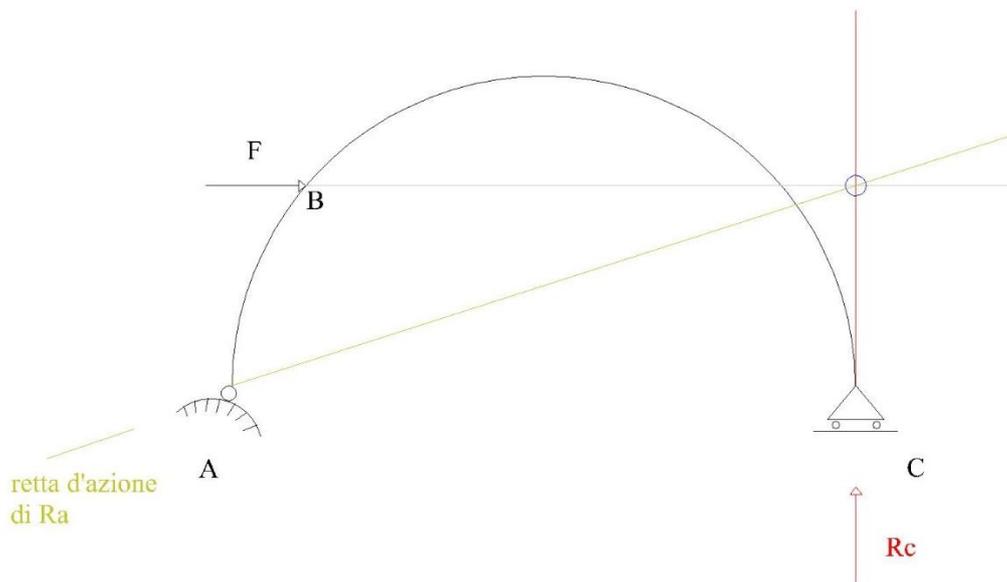


Figura 25

Nota quindi la direzione di  $R_A$ , imponendo la chiusura del triangolo dei vettori  $F$ ,  $R_A$  e  $R_C$  (vedi Fig. 26) si ottengono graficamente i moduli e i versi di  $R_A$  e  $R_C$ . Se il disegno è eseguito rispettando sia una predefinita scala delle lunghezze (per rappresentare in scala la geometria dell'arco) sia una predefinita scala delle forze (per rappresentare in scala la lunghezza di  $F$ ), il risultato grafico restituisce in scala i valori corretti dei moduli delle reazioni vincolari incognite  $R_A$  e  $R_C$ .

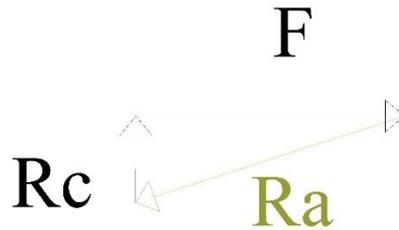


Figura 26

### III.13.2 Cenni su curva delle pressioni e diagramma delle distanze

La curva delle pressioni può essere determinata sia per via grafica che per via numerica. Nel seguito sarà seguita principalmente la via grafica in quanto più semplice didatticamente per fornire definizione e proprietà. La curva delle pressioni (CdP) è utile per spiegare alcune caratteristiche del comportamento degli archi in muratura sotto carico.

#### *III.13.2.1 Arco appoggio-appoggio con forza $F$ orizzontale*

Si consideri l'arco appoggio-appoggio con forza  $F$  orizzontale in Fig. 24.

Le reazioni vincolari incognite ( $R_A$  ed  $R_C$ ) sono state determinate graficamente nel paragrafo precedente (vd. Figg. 25-26).

Si definisce curva delle pressioni (CdP) quella curva (potrebbe anche degenerare in una spezzata) luogo delle successive risultanti. Per 'luogo delle successive risultanti' si intende che, sezione per sezione, la risultante delle forze (esterne e vincolari) prima (o dopo) della sezione in esame, è tangente alla curva delle pressioni.

Vediamo come determinare la CdP nell'esempio di Fig. 24. Si consideri una sezione generica  $S$  nel tratto  $AB$ . La risultante delle forze prima di  $S$  è data dalla sola forza  $R_A$ . Quindi, nel tratto  $AB$  la curva delle pressioni è la retta  $a$  (vd. Fig. 27). Analogamente, se si considera una generica sezione del tratto  $BC$  (vd. Fig. 27), la risultante è data dalla somma di  $R_A$  ed  $F$  guardando a sinistra, mentre coincide con  $R_C$  considerando la parte destra. La curva delle pressioni in  $BC$  quindi coincide con la retta  $c$ . In conclusione la CdP coincide con la retta  $a$  nel tratto  $AB$ , con la retta  $c$  nel tratto  $BC$ .

Si vuole ora rappresentare una misura del momento flettente in una sezione generica del tratto  $AB$  sfruttando la CdP disegnata.

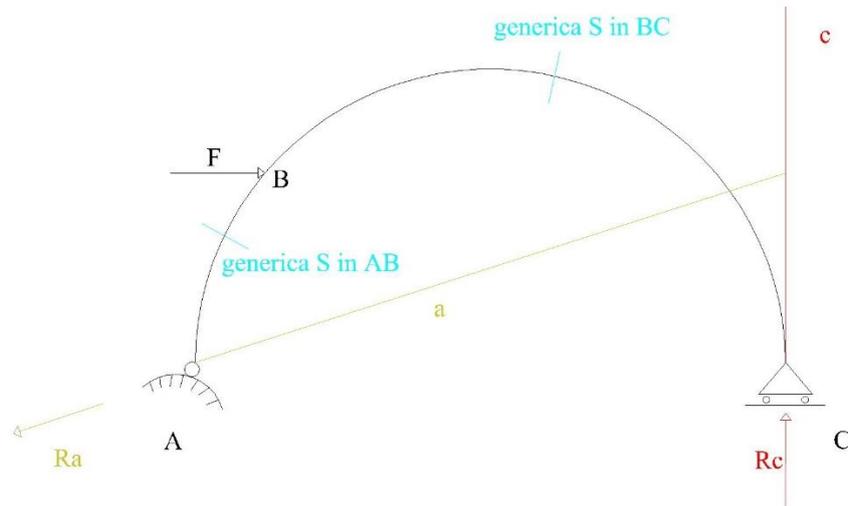


Figura 27

Il momento flettente si può esprimere come prodotto del modulo di  $R_A$  per la distanza della sezione dalla retta a (Fig. 28).

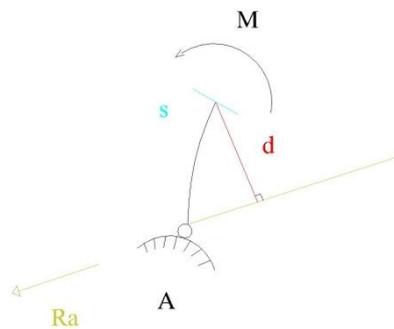


Figura 28

Nota quindi la curva delle pressioni, nel tratto AB coincidente con la retta a, il momento flettente è proporzionale (dove la costante di proporzionalità è il modulo di  $R_A$ ) alla distanza della sezione S dalla curva delle pressioni.

Analogamente, nel tratto BC il momento flettente è dato dal prodotto tra il modulo di  $R_C$  e la distanza tra sezione S e retta c.

Nota la curva delle pressioni posso quindi costruire un diagramma delle distanze che, tratto per tratto, fornisca una misura del momento flettente. Per l'esempio in esame, tale diagramma delle distanze è raffigurato in Fig. 29 con colore azzurro in riferimento al tratto AB, con colore verde per il tratto BC. Questo diagramma delle distanze fornisce una misura proporzionale al momento flettente sezione per sezione. Poiché la costante di proporzionalità è diversa tra i tratti AB e BC, non è possibile affermare

che a segmento massimo sull'arco corrisponda momento massimo. All'interno dei singoli tratti, invece sì, a distanza maggiore corrisponde momento maggiore.

Un'altra importante riflessione che si può fare è la seguente. La curva delle pressioni rappresenta la geometria ideale dell'arco sotto quel particolare carico, ossia la geometria che restituisce momento flettente nullo in tutte le sezioni. Tale riflessione risulta particolarmente utile per gli archi murari che presentano resistenza solo nei confronti degli sforzi di compressione (e non di trazione o pura flessione).

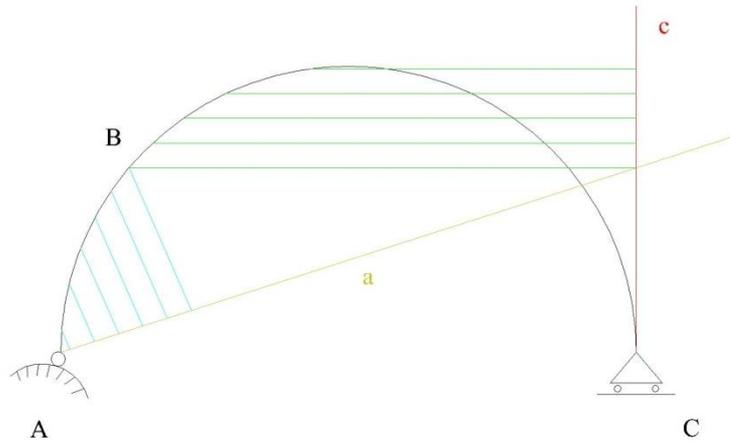


Figura 29

### III.13.2.2 Arco a tre cerniere con carico distribuito su un tratto

Si consideri ora un arco a tre cerniere con carico uniformemente distribuito verticale, da B a C (Fig. 30).

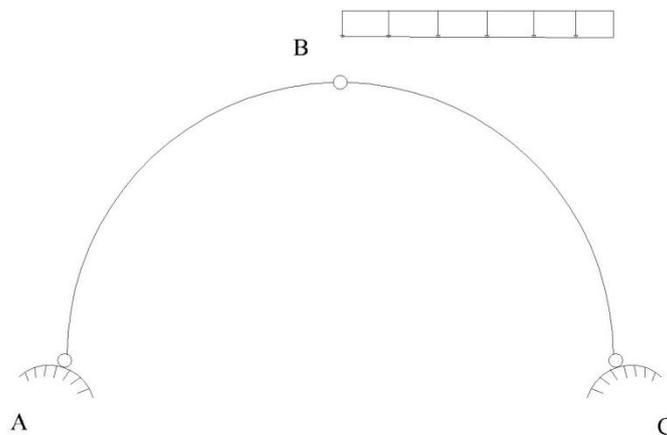


Figura 30

Si calcolino le reazioni vincolari per via grafica.

$R_A$  e  $R_C$  sono note in punto di applicazione (A e C rispettivamente) ma incognite in direzione e

modulo; la risultante del carico (si indichi con  $\mathbf{F}$ ) ha invece modulo, direzione e posizione noti (vd. Fig. 31-sin).

Per l'equilibrio di AB (equilibrio di due forze applicate rispettivamente in A e in B),  $\mathbf{R}_A$  ed  $\mathbf{R}_B$  (dove per  $\mathbf{R}_B$  si intende la reazione vincolare interna, ossia sia l'azione della cerniera B su AB sia l'azione della cerniera B su BC, uguali e opposte perché la cerniera è scarica) devono giacere sulla medesima retta d'azione ed essere uguali ed opposte. Le possibilità sono due: 1) entrambe nulle, 2) entrambe giacenti sulla retta congiungente A con B. Se diverse da zero, la direzione di  $\mathbf{R}_A$  e  $\mathbf{R}_B$  è quindi nota (vd. Fig. 31-dx).

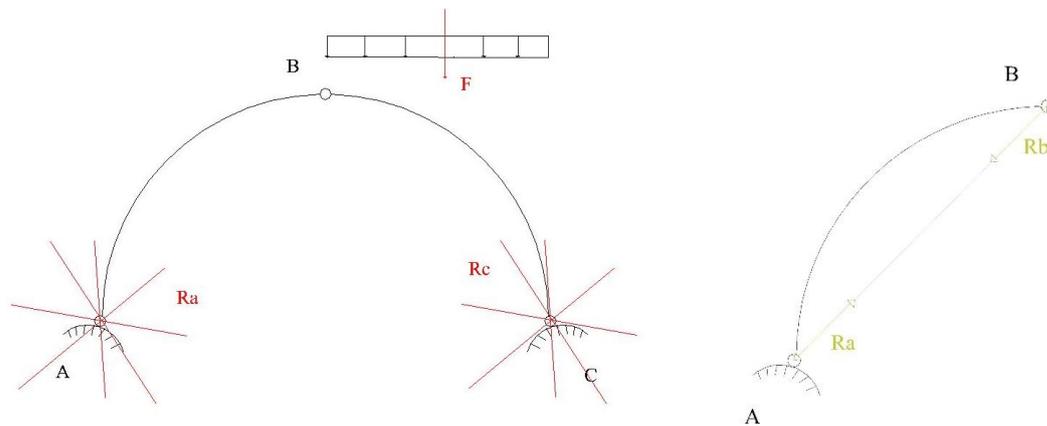


Figura 31

Nota  $\mathbf{R}_A$ , per l'equilibrio globale (ABC) – ossia equilibrio di tre forze -  $\mathbf{R}_C$  (applicata in C) deve passare per il punto di intersezione di  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{R}_A$ . (vd. Fig. 32-sin) Le direzioni delle reazioni vincolari esterne è quindi determinata.

Note le direzioni di  $\mathbf{R}_A$  ed  $\mathbf{R}_C$ , si possono determinare graficamente i moduli imponendo che il poligono dei tre vettori sia chiuso (Fig. 32-dx).

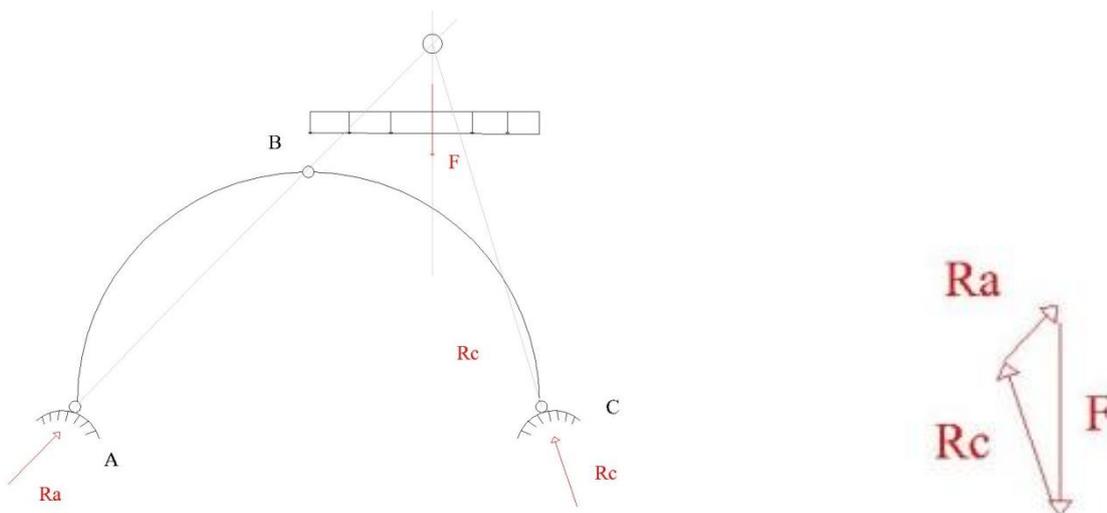


Figura 32

La curva delle pressioni del tratto AB coincide con la retta di appartenenza di  $R_A$  (risultante delle forze a sinistra di una generica sezione S in AB). Il diagramma delle distanze è rappresentato in colore azzurro in Fig. 33.

Nel tratto BC la curva delle pressioni è una vera e propria curva. Passa per B e C con tangenti coincidenti con i lati che si avrebbero se ci fosse la risultante al posto del carico distribuito (vd. curva viola in Fig. 33). Il rispettivo diagramma delle distanze è nella medesima figura in colore verde.

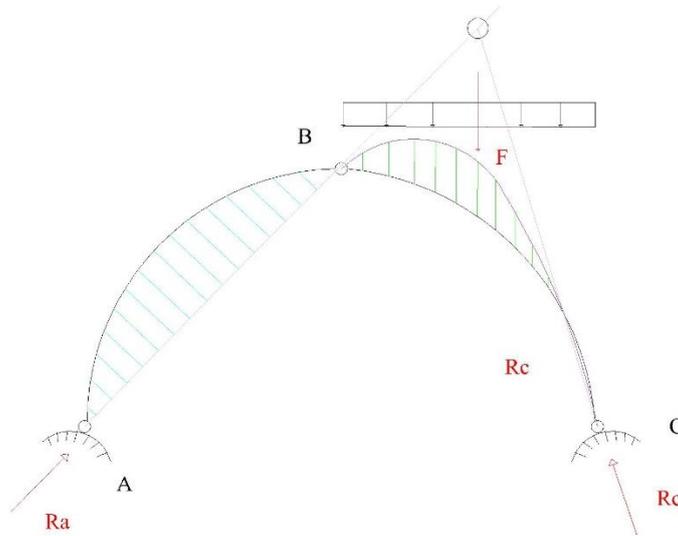


Figura 33

### III.13.2.3 Arco a tre cerniere con carico distribuito orizzontale

Si vuole determinare la curva delle pressioni della struttura rappresentata in Fig. 34.

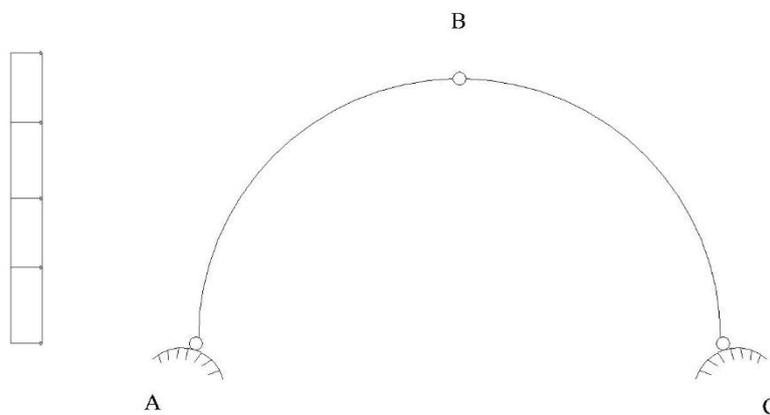


Figura 34

Si determinino le reazioni vincolari graficamente. Per l'equilibrio esterno (i.e. di ABC) la risultante  $Q$  del carico distribuito,  $R_A$  ed  $R_C$  sono in equilibrio tra loro.  $R_A$  ed  $R_C$  sono incognite in modulo, direzione e verso ma note in punto di applicazione (rispettivamente A e C, vd. Fig. 35).

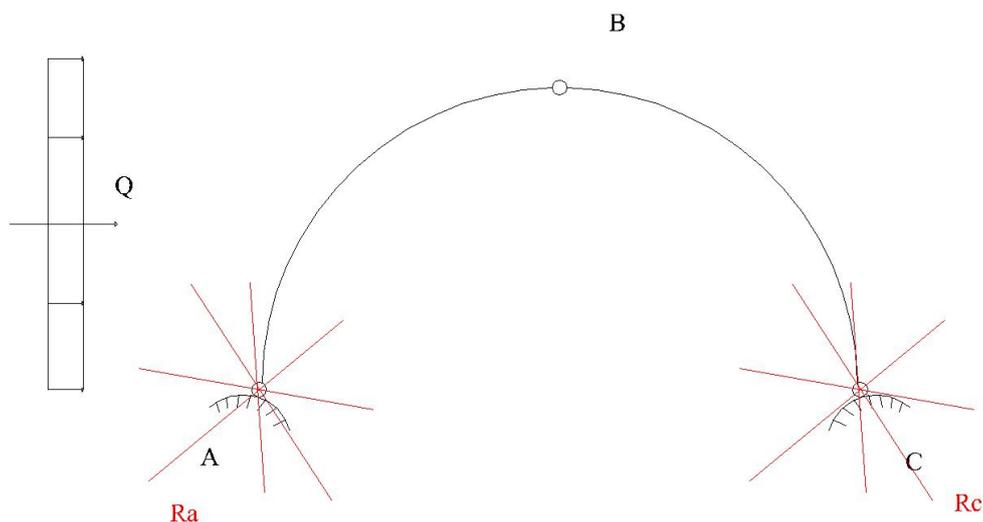


Figura 35

Con l'equilibrio esterno non si riesce a determinare le incognite.

Si prendano quindi in esame gli equilibri dei due sottotratti AB e BC (vd. Fig. 36). Il tratto AB è equilibrio di tre forze (vd. Fig. 36-sin) ma due sono incognite in direzione, e quindi non può essere risolto graficamente. L'equilibrio del tratto BC, invece, è equilibrio tra due forze applicate in B e C rispettivamente. Le opzioni possibili sono due: 1) le due forze sono entrambe nulle, 2) le due forze sono allineate sulla stessa retta (e uguali ed opposte) che può essere solo la retta congiungente B e C (vd. Fig. 36-dx).

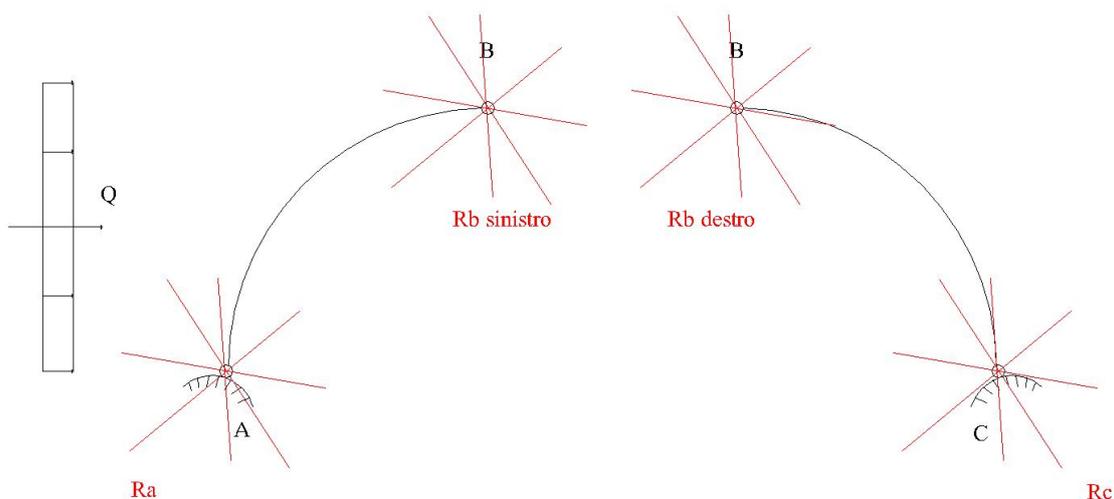


Figura 36

$R_B$  e  $R_C$ , quindi, se diverse da zero, sono stese lungo BC. Nota la direzione di  $R_C$ , si può tornare sull'equilibrio globale (oppure quello del tratto AB, è equivalente) e determinare, attraverso la condizione necessaria di equilibrio tra tre forze, la direzione di  $R_A$  (vd. Fig. 37-sin) e, con la chiusura

del triangolo dei vettori  $Q, R_A, R_C$  (oppure di  $Q, R_A, R_B$  se si è proceduti su AB), moduli e versi di  $R_A$  e  $R_C$  (vd. Fig. 37-dx).

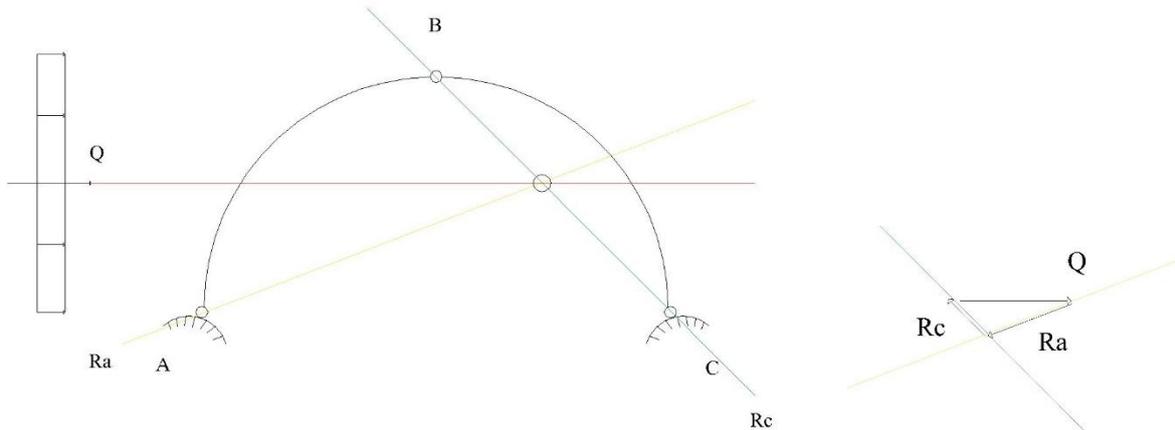


Figura 37

La reazione  $R_B$  a destra è uguale e opposta a  $R_C$ , mentre la  $R_B$  sinistra è chiaramente uguale e opposta a  $R_B$  destra, ossia concorde a  $R_C$ . (vd. Fig. 38).

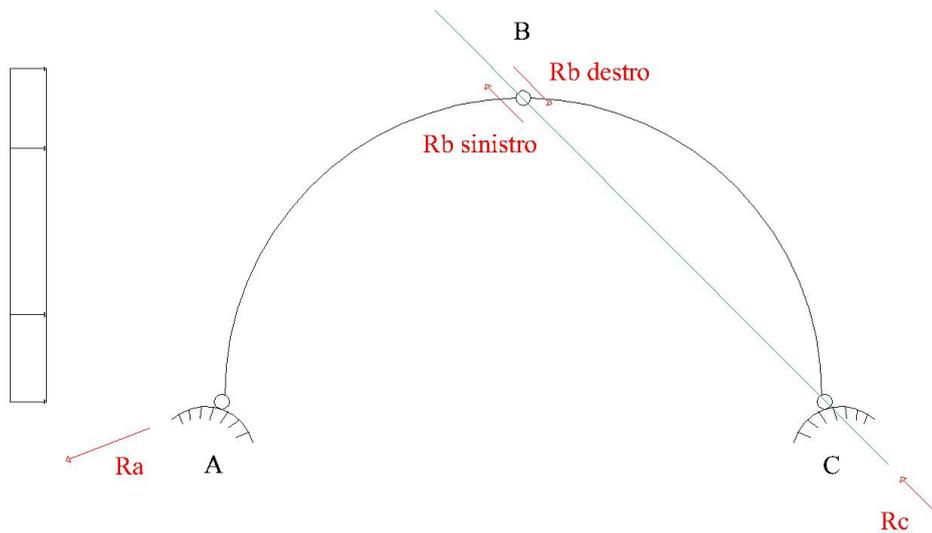


Figura 38

La curva delle successive risultanti ossia la curva delle pressioni è campita di azzurro in Fig. 39 per il tratto BC ed un arco di parabola in AB campito giallo avente le tangenti agli estremi indicate in figura.

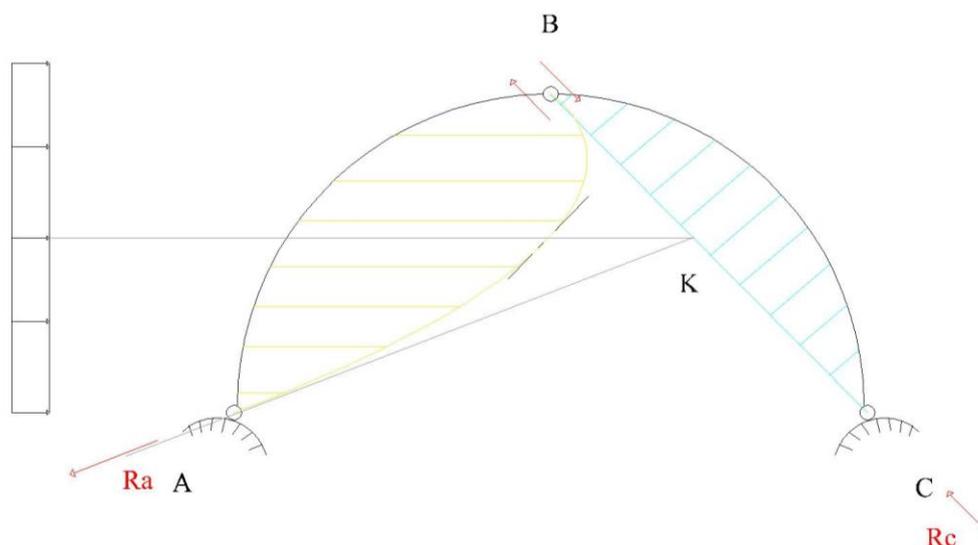


Figura 39

### III.13.3 Cenni sull'importanza della curva delle pressioni per gli archi murari

Le CdP tracciate negli esempi precedenti forniscono la sagomatura ideale di un arco murario sotto quella condizione di carico.

La muratura, infatti, per come è composta (alternanza di mattoni e malta), ha una resistenza a trazione molto bassa in qualsiasi direzione, tanto che si ipotizza essere nulla. Il momento flettente in una sezione produce sforzi di compressione e sforzi di trazione. Questi ultimi non possono quindi essere equilibrati in una sezione muraria. Gli unici sforzi equilibrabili sono quelli di compressione centrata (sforzo normale  $N$  centrato) oppure di pressoflessione ( $N$  di compressione + lieve flessione  $M$ ).

Sagomare l'arco in una forma quanto più vicina possibile alla curva delle pressioni riduce gli effetti del momento flettente, rendendo lo stato tensionale da sforzo normale centrato predominante.

È chiaro che un arco nella sua vita è soggetto a diverse condizioni di carico. Normalmente il peso proprio e il riempimento sovrastante ne rappresentano l'aliquota dominante. Si progetta quindi l'arco murario in modo da essere CdP per questi carichi. I carichi accidentali, rappresentando per gli archi normalmente una percentuale minima rispetto a quelli propri e permanenti, discostano di poco la curva delle pressioni dall'asse sagomato come detto.

È quindi intuitivo che l'azione sismica rappresenti una perturbazione pericolosa in quanto produce una curva delle pressioni completamente diversa da quella con la quale si sagoma normalmente l'arco murario.

### III.13.4 Il poligono funicolare come alternativa per tracciare la curva delle pressioni

Non sempre è possibile determinare rapidamente la curva delle pressioni col metodo grafico. Ad esempio, nella struttura in Fig. 40 sarebbe necessario passare attraverso il poligono funicolare.

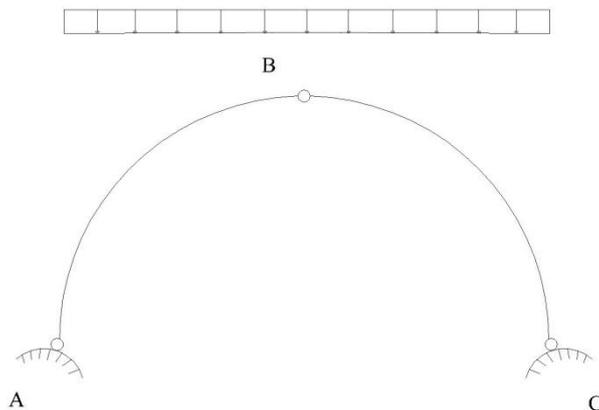


Figura 40

La costruzione del poligono funicolare passa attraverso un procedimento grafico. Si suddivide il carico distribuito in porzioni uguali (maggiori sono le suddivisioni, migliore è la qualità della soluzione). Per ciascuna di queste porzioni va calcolata la risultante e il poligono dei vettori rappresentativo delle risultanti di ciascuna suddivisione (Fig. 41).

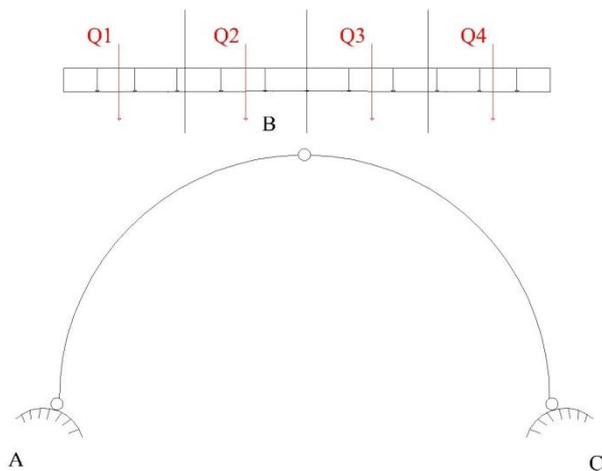


Figura 41

Si prende poi un punto P qualsiasi denominato polo e si tracciano i cosiddetti raggi proiettanti (vd. Fig. 42), ossia i segmenti che uniscono P con gli estremi dei vettori (opportunamente numerati).

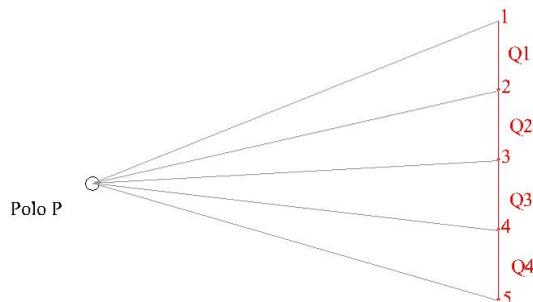


Figura 42

Le parallele ai raggi proiettanti condotte sul foglio dell'arco fornisce uno degli infiniti poligoni funicolari possibili (Fig. 43) supponendo il carico sostituito con tante piccole risultanti. Il poligono funicolare deve poi essere corretto in modo che tali lati rappresentino delle tangenti.

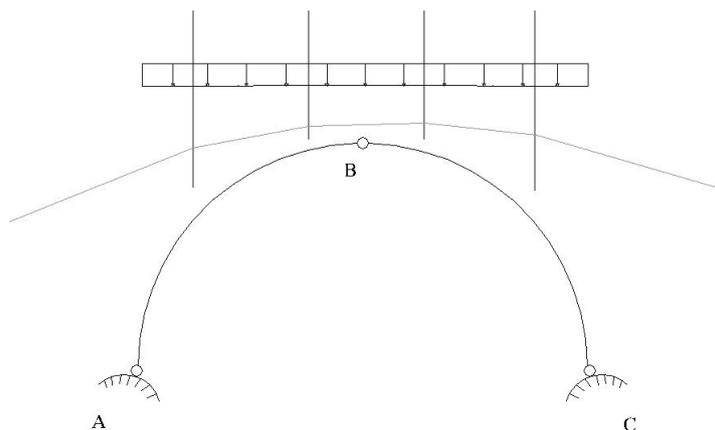


Figura 43

Tra gli infiniti possibili, il poligono funicolare corretto è quello che passa per A e per C. Tale poligono va trovato per tentativi.

### III.13.5 Determinazione numerica della curva delle pressioni. Un esempio

Si consideri l'arco a due cerniere caricato come in Fig. 44. Si voglia determinare la curva delle pressioni.

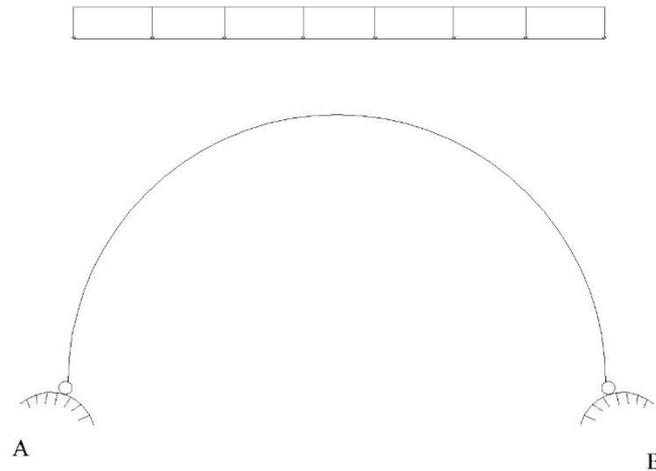


Figura 44

È interessante osservare che una fune pesante sospesa tra due punti fissi A e B si dispone secondo una configurazione di equilibrio che si chiama funicolare dei carichi (per esempio la forma indicata in Fig. 45).

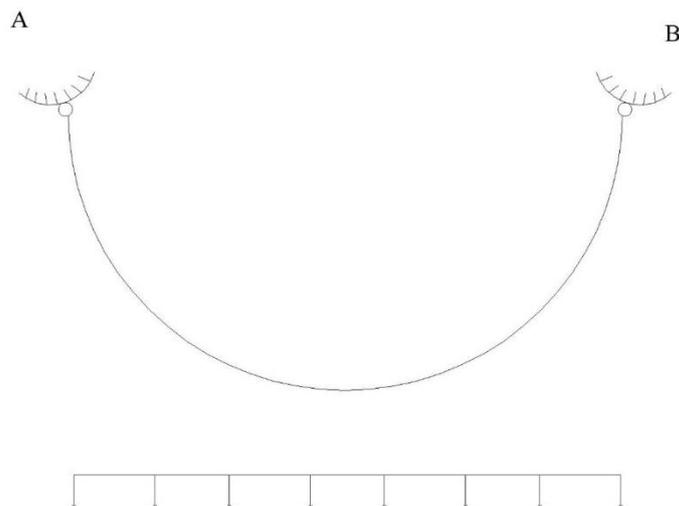


Figura 45

La fune infatti è un elemento strutturale che assume una forma dipendente dal carico applicato. Ad esempio, una fune orizzontale sospesa tra due punti A e B, priva di peso e soggetta a una forza concentrata in mezzeria assume la configurazione di equilibrio rappresentata in Fig. 46.

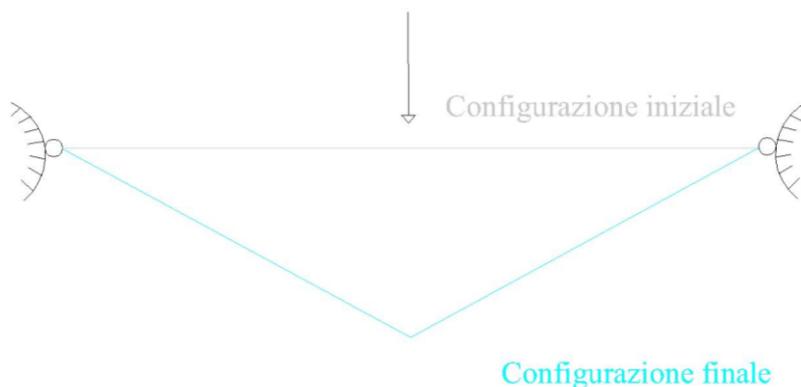


Figura 46

Se soggetta al solo peso proprio, la fune assume una forma definita catenaria. La configurazione in Fig. 46 è quindi la simmetrica della catenaria.

Considerando il sistema di riferimento di Fig. 78, si può dimostrare che l'equazione della catenaria non è una quella di una parabola ma::

$$y = \frac{H}{q} * \cosh\left(\frac{q}{H}x - 1\right)$$

dove q rappresenta il peso unitario e H il massimo abbassamento in mezzeria.

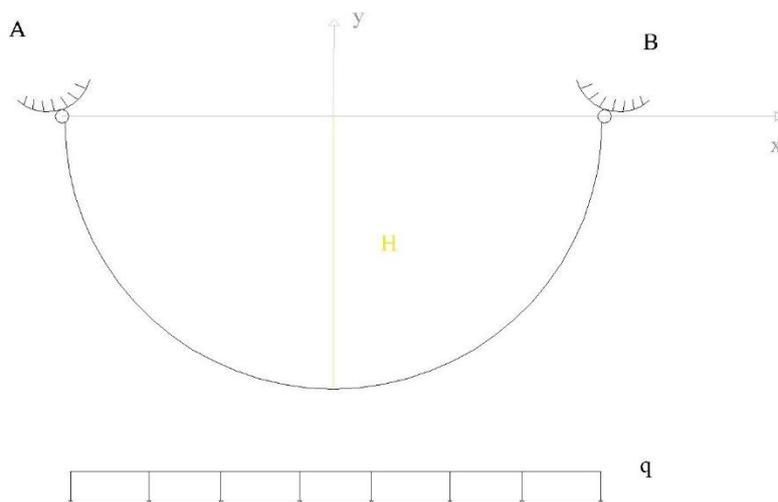


Figura 47

La curva delle pressioni per un arco a due cerniere soggetto a peso proprio è il simmetrico di una catenaria.

Si consideri invece l'arco a tre cerniere soggetto a peso proprio (semplificato come carico distribuito) in Fig. 48. Si può determinare la CdP analiticamente.

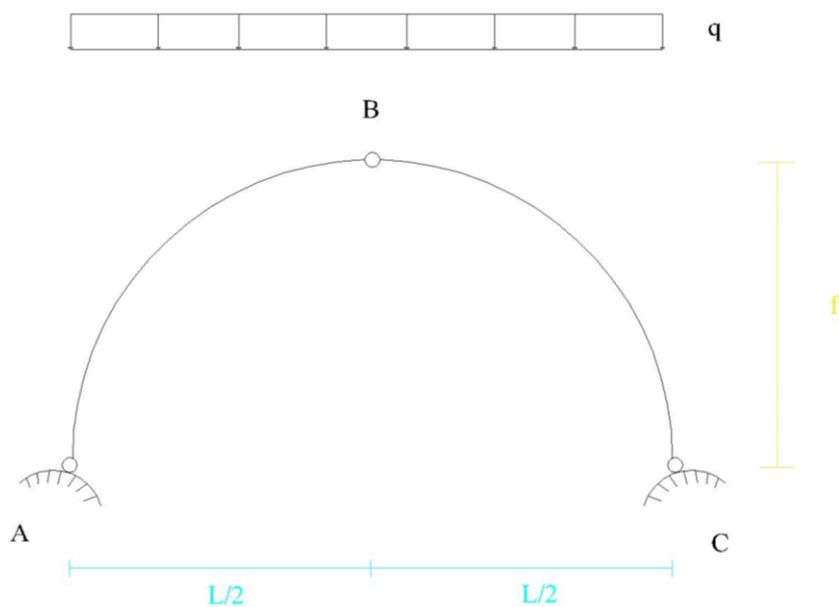


Figura 48

Per l'equilibrio verticale e per simmetria, le componenti reattive verticali in A e C sono pari a:

$$R_A = \frac{q * l}{2} = R_C$$

La componente orizzontale delle reazioni esterne in A e C (detta anche spinta) si può determinare imponendo l'equilibrio alla rotazione della parte AB (oppure della parte BC) rispetto al polo B (vd. Fig. 49):

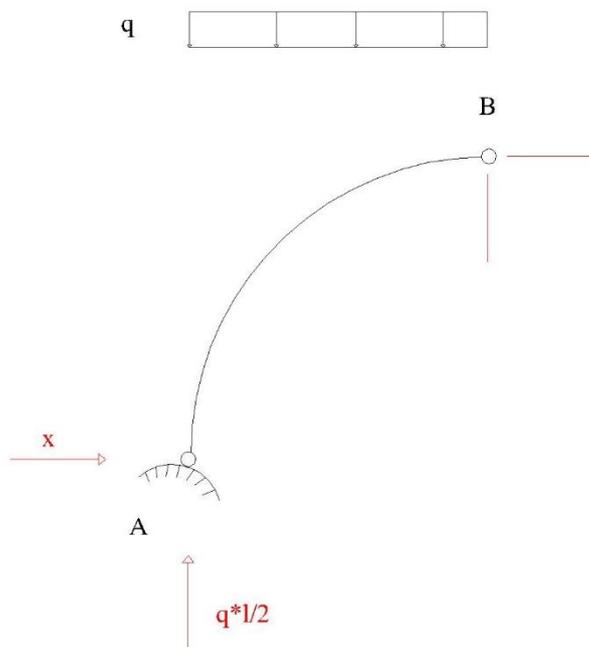


Figura 49

Indicando con X la componente reattiva orizzontale incognita in A (uguale a quella in C per simmetria) tale equazione si scrive:

$$Xf - \frac{ql}{2} \frac{l}{2} + \frac{ql}{2} \frac{l}{4} = 0$$

da cui si ricava:

$$X = \frac{ql^2}{8f}$$

Questa reazione è anche denominata ‘spinta dell’arco’. Se in presenza di arco murario, tale spinta viene assorbita o da contrafforti o da catene appositamente montate.

Nota la spinta, si fissi ora un sistema di riferimento come quello indicato in Fig. 50.

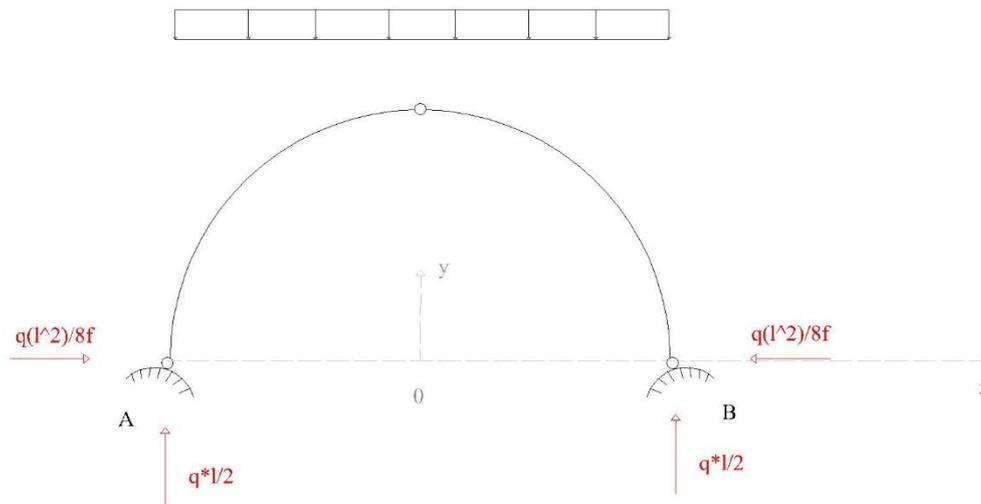


Figura 50

Per definizione la CdP è quella curva rispetto alla quale il momento risultante è nullo in ogni sezione.

Quindi la sua equazione può essere ottenuta imponendo:

$$M(x) = 0 \text{ per ogni } x$$

In riferimento alla parte destra, considerando una sezione qualsiasi a distanza \$x\$ dall’asse \$y\$ si ottiene:

$$q \cdot \frac{l}{2} \cdot \left(\frac{l}{2} - x\right) - \frac{ql^2}{8f} y(x) - \frac{q}{2} \left(\frac{l}{2} - x\right)^2 = 0$$

dove \$y(x)\$ è la posizione della sezione dell’arco di ascissa \$x\$ tale da garantire momento nullo nella sezione stessa. Sviluppando l’equazione si ottiene:

$$y(x) = \frac{4f}{l^2} \left(-x^2 + \frac{l^2}{4}\right)$$

L’equazione ottenuta è una parabola del tipo \$y(x) = -ax^2 + b\$