

CAP. I – RICHIAMI SUI VETTORI

I. 1 Definizione e rappresentazione

Esistono grandezze in natura per le quali non è sufficiente un numero per caratterizzarle. Per rappresentare forze, spostamenti, velocità, oltre al valore nelle rispettive unità di misura (KN, cm, Km/h per esempio) è necessario definire una direzione e un verso. Ecco che nasce l'esigenza di introdurre i vettori.

I vettori, infatti, sono entità matematiche caratterizzate da un modulo una direzione e un verso. D'ora in poi verranno disegnati come in figura 1. Il modulo del vettore è proporzionale alla dimensione del segmento rappresentativo attraverso un'opportuna scala scelta in maniera discrezionale (vedi a esempio Figura 1)

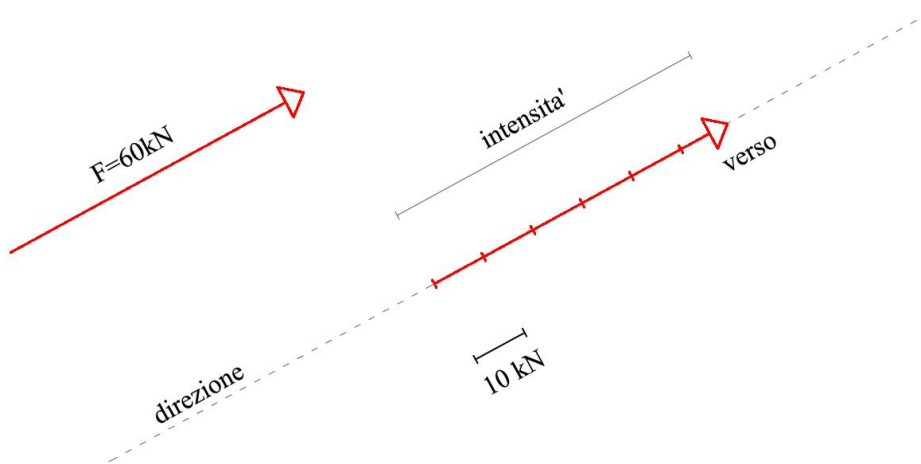


Figura 1. Il vettore geometrico è caratterizzato da modulo, direzione e verso

I vettori liberi non hanno punto di applicazione, ma sono liberi di muoversi nello spazio. Un vettore libero è quindi un insieme di vettori tutti uguali in modulo, direzione e verso ovunque posizionati nello spazio.

Un vettore applicato (Figura 2) è un vettore libero con punto di applicazione. La sua posizione è quindi definita univocamente dal suo punto di applicazione. Per convenzione, il punto di applicazione può coincidere sia col punto finale sia col punto iniziale del vettore.

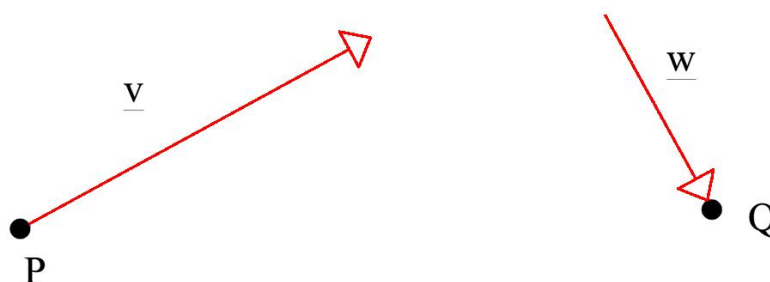


Figura 2. Rappresentazione di vettori applicati

Il peso di un essere umano è equivalente a un vettore applicato approssimativamente all'altezza dell'ombelico (posizione del baricentro), la velocità di un'auto può essere rappresentata da un vettore applicato nel baricentro dell'auto stessa.

Sia i vettori liberi che i vettori applicati sono definiti se sono noti modulo, direzione e verso o, in alternativa, le componenti cartesiane rispetto a un riferimento fisso nello spazio $Oxyz$.

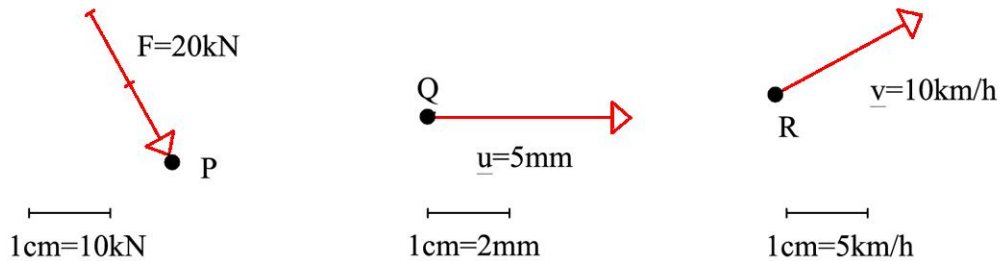


Figura 3. Esempi di scale per vettori rappresentativi di diverse grandezze fisiche.

Il modulo di un vettore è dato dalla dimensione del suo vettore rappresentativo (Figura 3) in una certa scala; la direzione è data dall'angolo tra vettore e retta di riferimento (per esempio la retta orizzontale) nel bi-dimensionale (o 2D), da due angoli rispetto a due piani cartesiani nel tri-dimensionale (3D). Il verso è dato dal verso della freccia associata al vettore. Le componenti cartesiane di un vettore sono le componenti rispetto a un riferimento cartesiano scelto (vedi Figura 4). Possono essere interpretati come vettori \mathbf{v}_x , \mathbf{v}_y , \mathbf{v}_z oppure come scalari v_x , v_y , v_z (positivi o negativi a seconda se concordi o discordi al verso dell'asse di riferimento)

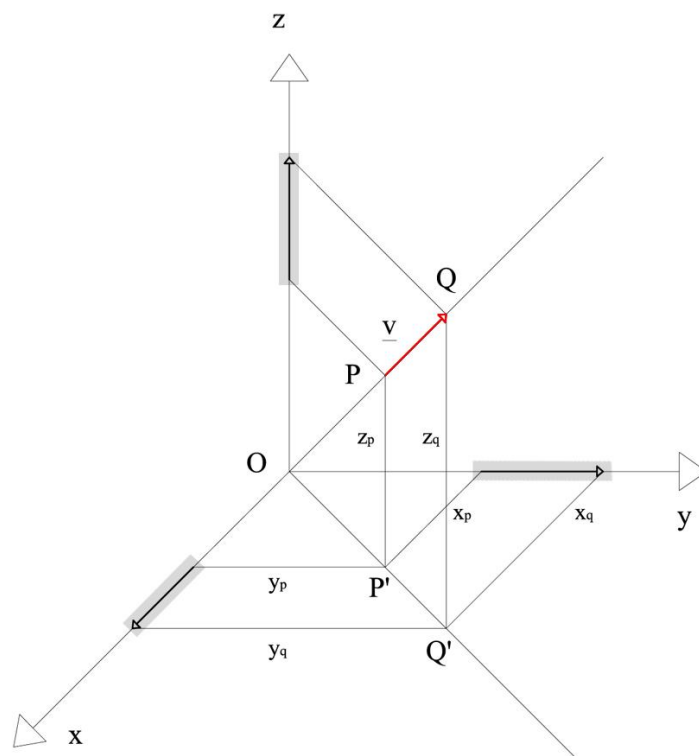


Figura 4. Vettore $\mathbf{v} = \mathbf{PQ}$ nello spazio con le sue componenti cartesiane

Un vettore che unisce due punti P e Q con componenti cartesiane note (Figura 4 in 3D, Figura 5 in 2D) ha per componenti:

$$v_x = x_q - x_p$$

$$v_y = y_q - y_p$$

$$v_z = z_q - z_p$$

(1)

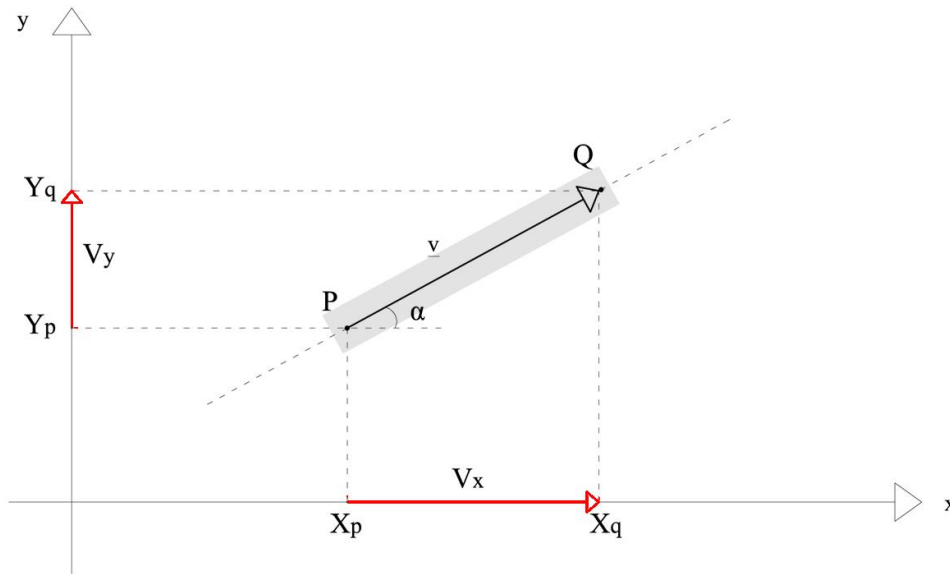


Figura 5. Vettore $v=PQ$ nel piano con le sue componenti cartesiane.

Si può passare dalle componenti cartesiane (Eq. 1) a modulo e direzione e viceversa attraverso delle semplici operazioni algebriche.

Il modulo di v (si rappresenta con $|v|$ oppure con $\|v\|$) si può ottenere attraverso il teorema di Pitagora:

$$|v| = \|v\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

La direzione si può ottenere con l'ausilio di alcune relazioni trigonometriche che legano lati e angoli di un triangolo rettangolo. Per un vettore piano (appartenente al piano xy) si ha (vedi Figura 5):

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{|v|}$$

$$\sin \alpha = \frac{v_y}{|v|}$$

Viceversa, le componenti cartesiane si ricavano dalle relazioni trigonometriche:

nel piano $|\mathbf{v}_x| = |\mathbf{v}| \cdot \cos \alpha$ e $|\mathbf{v}_y| = |\mathbf{v}| \cdot \sin \alpha$

Può risultare utile saper determinare la componente di un vettore rispetto a una retta r non parallela a una direzione cartesiana. Tale componente si indica con v_r se si fa riferimento al modulo, con \mathbf{v}_r se si fa riferimento al vettore. Graficamente, tale operazione si traduce nel proiettare i punti estremi del vettore perpendicolarmente alla retta r (vedi Figura 6)

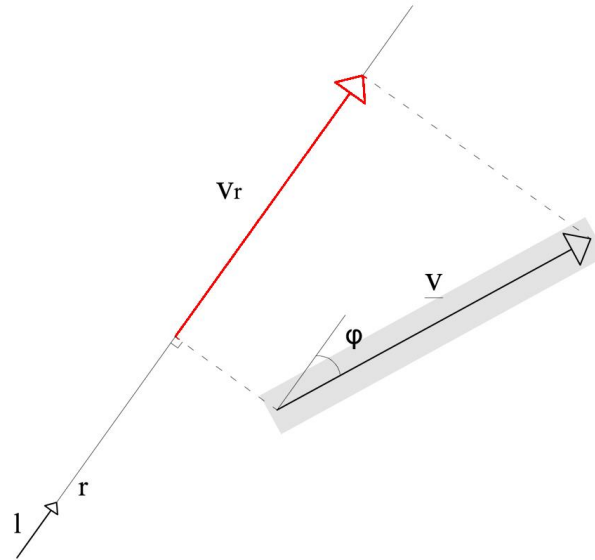


Figura 6. Vettore \mathbf{v} e sua proiezione sulla retta r .

Il modulo di tale componente si può ricavare utilizzando le relazioni trigonometriche:

$$|\mathbf{v}_r| = |\mathbf{v}| \cdot \cos \varphi$$

I.2 Operazioni tra i vettori

Come tra i numeri (somma, sottrazione, prodotto, divisione, radice quadrata, ecc.), esistono alcune operazioni tra vettori estremamente utili. Tali operazioni sono definite per i vettori liberi. Rimangono però valide anche per i vettori applicati purchè si tenga presente che il risultato dell'operazione è un vettore libero.

I.2.1 Somma tra vettori

La somma tra vettori NON si effettua sommando i moduli.

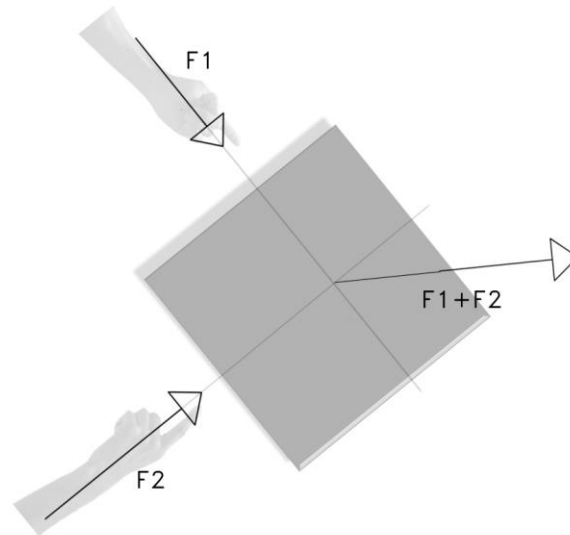


Figura 7. Somma di due forze

La somma delle forze in Figura 7 non è la somma dei moduli. La somma di due o più vettori (liberi o applicati) è un vettore libero che si chiama risultante e che si può ottenere sia graficamente sia attraverso le sue componenti cartesiane.

Graficamente, la somma di due o più vettori si ottiene ridisegnando tutti i vettori di seguito come in Figura 8. La risultante è data dal vettore che unisce il primo e l'ultimo punto di tale spezzata.

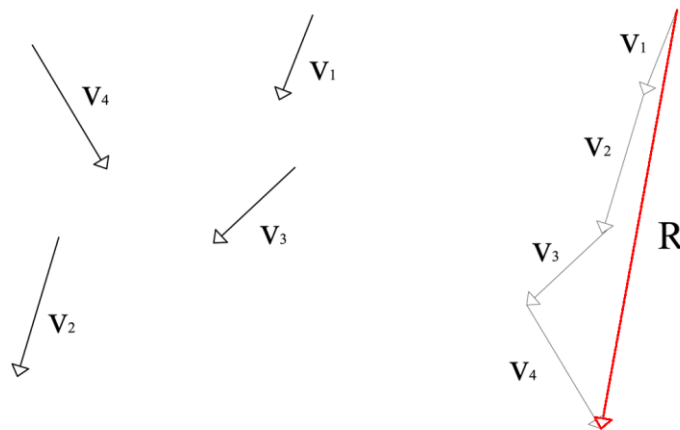


Figura 8. Somma di vettori. Costruzione grafica.

La successione con cui si disegnano i vettori non influenza il risultato finale.

La somma di due vettori si può ottenere anche con la cosiddetta regola del parallelogrammo (vedi Figura 9). La somma coincide con la diagonale del parallelogrammo di costruzione.

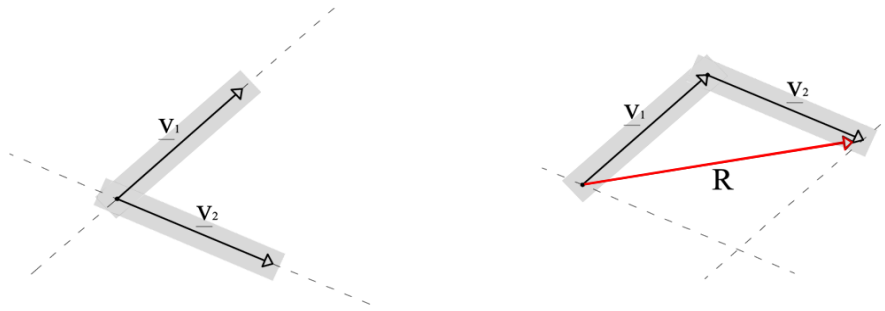


Figura 9. Somma di due vettori con la regola del parallelogrammo

Se di N vettori sono note le componenti cartesiane, le componenti della risultante sono date dalle somme delle rispettive componenti:

$$R_x = v_{1_x} + v_{2_x} + \dots + v_{N_x} = \sum_{i=1}^N v_{i_x}$$

$$R_y = v_{1_y} + v_{2_y} + \dots + v_{N_y} = \sum_{i=1}^N v_{i_y}$$

$$R_z = v_{1_z} + v_{2_z} + \dots + v_{N_z} = \sum_{i=1}^N v_{i_z}$$

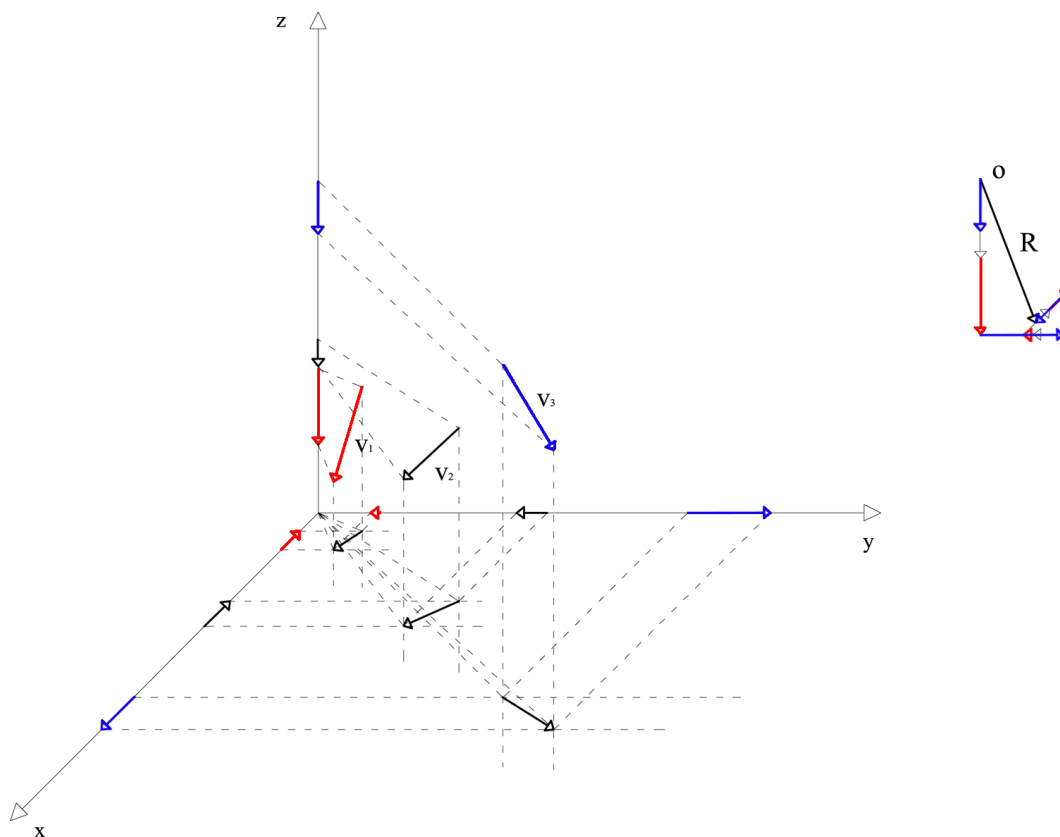


Figura 10. Risultante come somma delle componenti cartesiane.

Nel piano vedi Figura 11.

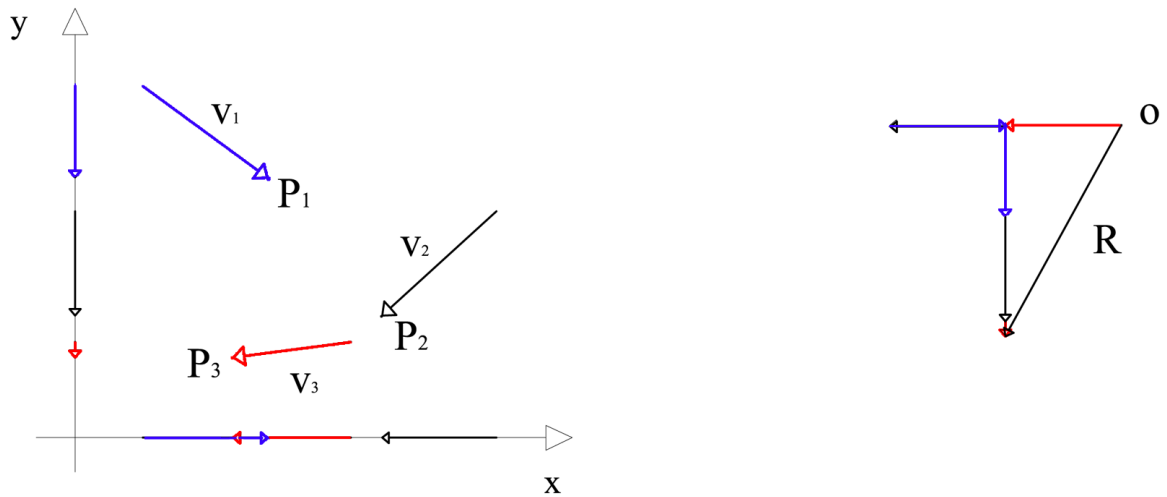


Figura 11. Risultante di un sistema piano di vettori come somma delle componenti cartesiane.

I.2.2 Differenza tra due vettori

Assegnato un vettore applicato \underline{v} , il suo opposto si indica con $-\underline{v}$ ed è dato da un vettore libero di uguale modulo e direzione, ma di verso opposto (Figura 12).

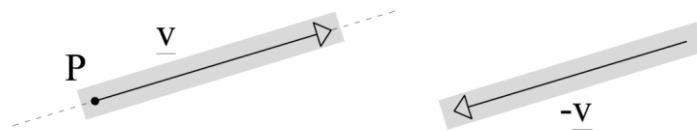


Figura 12. Vettore \underline{v} e suo opposto $-\underline{v}$

La differenza tra due vettori diventa, quindi, la somma tra il primo e l'opposto del secondo (vedi Figura 13).

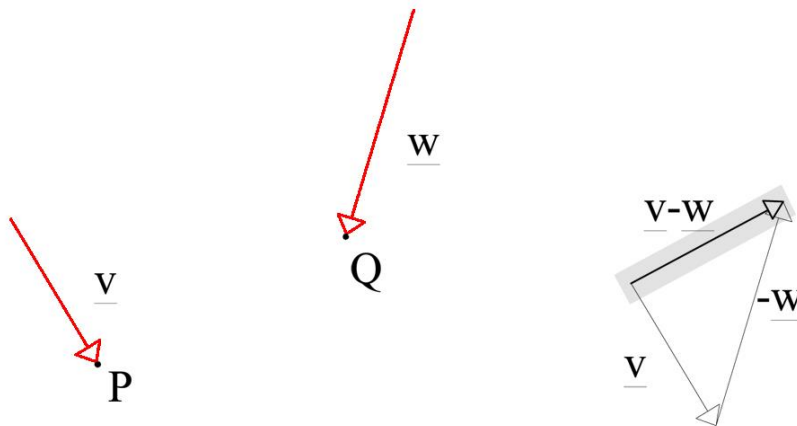


Figura 13. Differenza $\underline{v-w}$.

I.2.3 Prodotto di un vettore per uno scalare

Il prodotto di un numero per un vettore (libero o applicato) fornisce per risultato un vettore libero:

(0) $\mathbf{w} = k\mathbf{v}$

Tale vettore ha la stessa direzione di \mathbf{v} , modulo pari a $k|\mathbf{v}|$ e verso concorde se $k > 0$, discorde se $k < 0$. Le componenti cartesiane sono $k\mathbf{v} = (kv_x, kv_y, kv_z)$

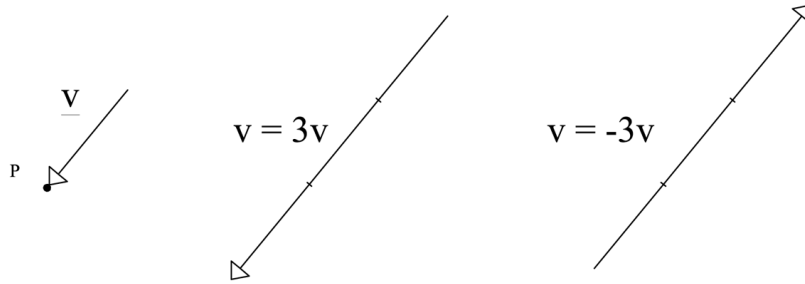


Figura 14. Prodotto di un vettore per uno scalare. Alcuni esempi.

I. 2.4 Prodotto scalare

Il prodotto scalare tra due vettori (liberi o applicati) si indica:

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

E' un'operazione che può risultare utile:

- per determinare la componente v_r di un vettore \mathbf{v} rispetto a una retta r
- per determinare l'inclinazione α di un vettore \mathbf{v} rispetto a una retta r

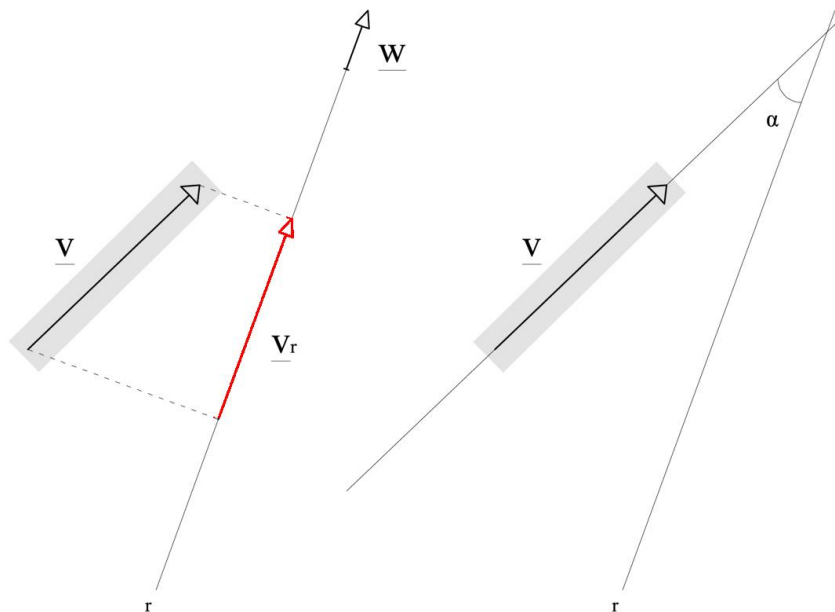


Figura 15. Componente di un vettore rispetto a una retta. Angolo di inclinazione di un vettore rispetto a una retta.

Il risultato del prodotto scalare è un numero che può essere determinato in due modi:

primo modo: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos(\mathbf{uv})$ (2)

dove $\cos(\mathbf{u}\mathbf{v})$ è il coseno dell'angolo formato dai due vettori (Figura 16);

secondo modo: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$ (3)

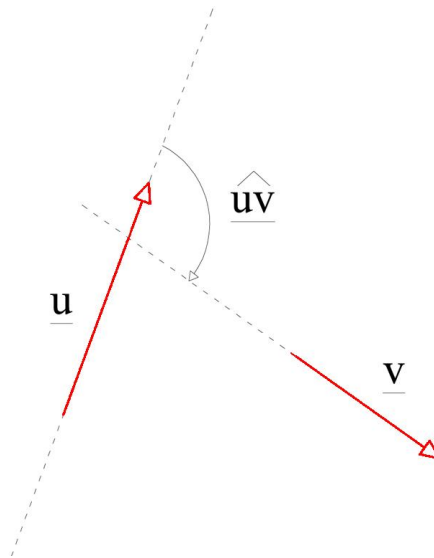


Figura 16. Angolo tra due vettori.

Dal confronto delle due relazioni (2) (3) si possono ricavare le seguenti relazioni:

- $v_r = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}$ dove \mathbf{w} è un vettore generico steso sulla retta r

- $\alpha = \arccos \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{v}| |\mathbf{w}|} \right)$

Da notare che se due vettori sono perpendicolari, il loro prodotto scalare è nullo.

I. 2.5 Prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale tra due vettori (liberi o applicati) si indica:

$\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ (4)

e dà per risultato un vettore. E' un'operazione che servirà per definire il *momento di un vettore rispetto a un punto*, concetto fondamentale per stabilire l'equilibrio di travi sotto l'azione di forze.

Il vettore fornito dalla (4) può essere determinato in due modi:

- primo modo (dove è necessario avere i moduli e le inclinazioni dei vettori)

$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{w}$

dove $|\mathbf{w}| = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \sin(\mathbf{u}\mathbf{v})$

direzione di \mathbf{w} = direzione perpendicolare al piano formato da \mathbf{u} e \mathbf{v}

verso di \mathbf{w} = il verso che consente di vedere \mathbf{u} sovrapporsi su \mathbf{v} percorrendo l'angolo minore in senso antiorario (vedi Figura 17).

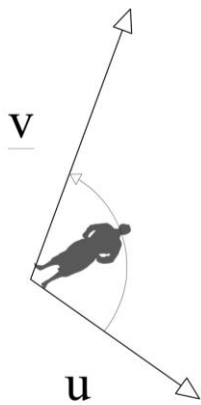


Figura 17. Il verso del prodotto vettoriale $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ coincide con il vettore che inizia ai piedi dell'osservatore e va verso la testa dell'osservatore.

- secondo modo (dove è necessario avere le componenti cartesiane dei vettori)

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

dove \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} sono i versori degli assi cartesiani

e il simbolo $\begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$ indica il determinante della matrice.

Da notare che se due vettori sono paralleli, il loro prodotto vettoriale è nullo.

I. 3 Momento polare

Il momento polare è un'operazione che si introduce solo per i vettori applicati.

La Figura 18 è un esempio nel quale entra in gioco tale concetto. Le due persone in figura sono di ugual peso, eppure l'altalena non si mantiene in equilibrio in posizione orizzontale, ma pende verso la persona che dista maggiormente da K.

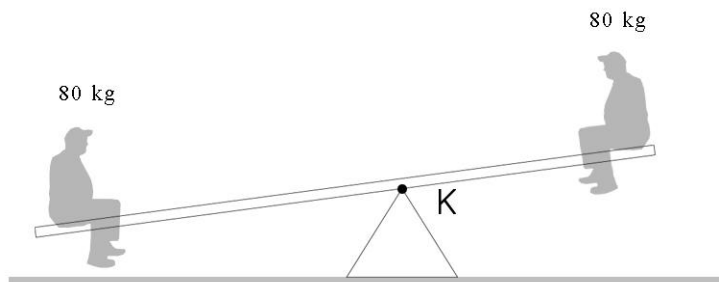


Figura 18. Altalena a bracci diversi. Con due persone di ugual peso pende verso la persona più distante da P

In Figura 19, ancora, se non si introduce il concetto di momento polare di una forza non si può valutare se la base d'appoggio del cartellone è sufficiente per non ribaltare in presenza di vento forte.

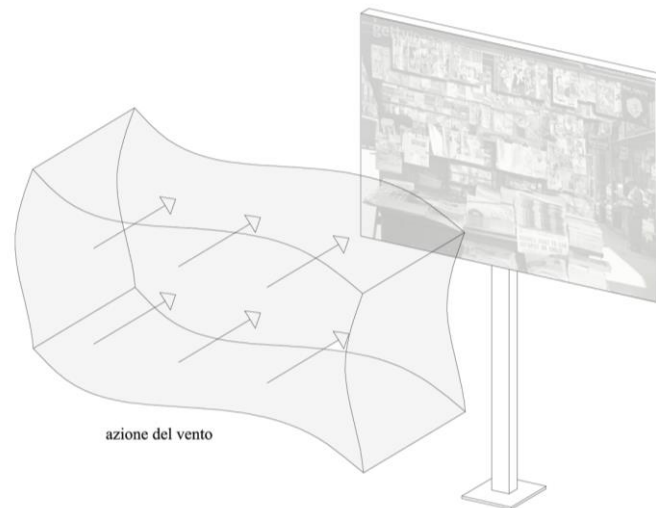


Figura 19. Cartellone pubblicitario investito dal vento. Non ribalta se il momento stabilizzante supera quello instabilizzante.

Il momento polare, o momento rispetto a un polo Q, è per definizione un vettore e si indica con \mathbf{M}_Q oppure $\mathbf{M}(Q)$.

Si introduca prima una definizione semplificata. Tale semplificazione è applicabile per un solo vettore o per un gruppo di vettori che però appartengano a un piano (vettori piani)

$$|\mathbf{M}_Q| = |\mathbf{v}|b \tag{5}$$

dove b è la distanza del polo Q dal vettore (vedi Figura 20).

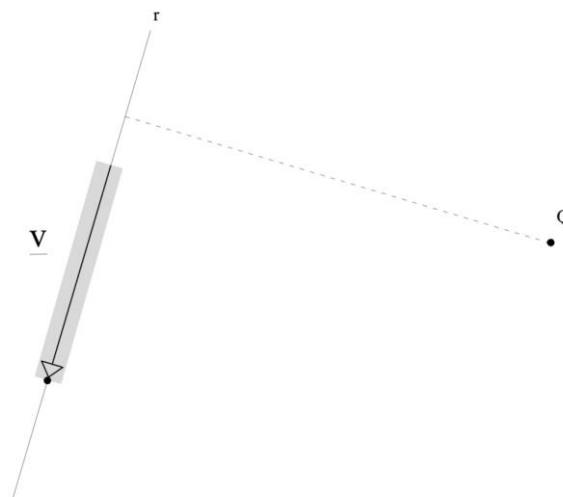


Figura 20. Momento di un vettore come modulo per braccio.

Se si hanno più vettori piani, il modulo del momento totale rispetto al polo Q si calcola come somma dei singoli contributi.

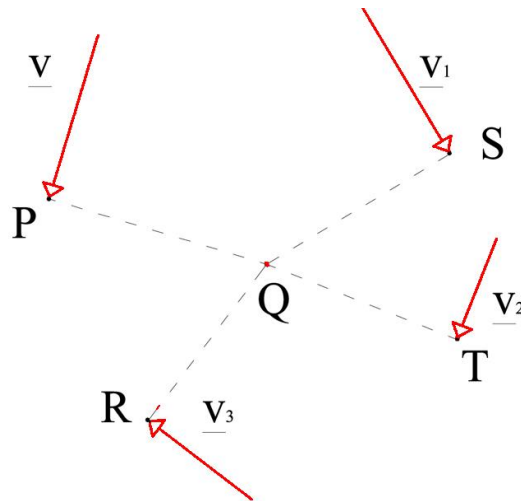


Figura 21. Vettori e bracci per il calcolo del momento rispetto al polo Q.

In tal caso, però, a ciascun contributo si associa un segno. Il segno è, per convenzione, preso positivo se il vettore ruota intorno al polo in verso antiorario.

Se i vettori non sono piani, bisogna dare una definizione più generale.

Il momento di un vettore \mathbf{v} applicato in P rispetto a un punto, detto polo, Q si definisce come (Figura 22):

$$\mathbf{M}_Q = \mathbf{QP} \times \mathbf{v}$$

Ricordando la definizione di prodotto vettoriale, quindi, si ritrova che il modulo del momento risulta:

$$|\mathbf{M}_Q| = |\mathbf{QP}| |\mathbf{v}| \sin(\angle \mathbf{QP}-\mathbf{v}) = |\mathbf{v}| |\mathbf{QP}| \sin(\angle \mathbf{QP}-\mathbf{v}) = |\mathbf{v}| b$$

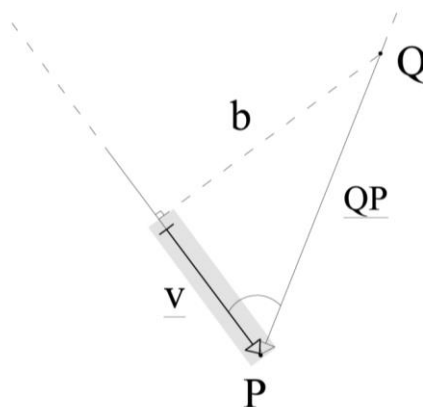


Figura 22. Vettore \mathbf{v} applicato in P e braccio del vettore rispetto a Q

La quantità vettoriale introdotta rappresenta la chiave di volta per spiegare l'esempio di Figura 18. L'equilibrio non è possibile perché il momento rispetto al polo K del vettore rappresentativo del

peso della persona a sinistra di K è maggiore del momento (rispetto allo stesso polo K) del vettore rappresentativo del peso della persona a destra di K.

Analogamente in Figura 19 la base e il peso del cartellone pubblicitario devono essere tali da garantire che il momento del vento rispetto al punto L (linea di probabile ribaltamento) sia inferiore al momento della forza peso del cartellone rispetto allo stesso punto. I due momenti sono di segno opposto, si può dire che il momento generato dal vento è instabilizzante mentre il momento generato dal peso del cartellone è stabilizzante.

Un fenomeno simile si verifica, in occasione di un sisma, sulle pareti murarie che si affacciano sulle strade: l'azione sismica dà un momento instabilizzante (il momento generato dalle forze in rosso di Figura 23 per esempio rispetto al punto O), lo scarico dei solai e il peso della muratura forniscono invece un momento stabilizzante (le forze in blu e in nero della stessa figura).

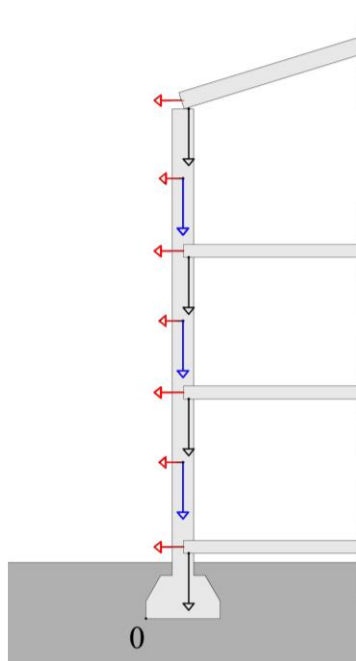


Figura 23. Sezione trasversale di un edificio murario. Pesì (in blu e nero) e azioni sismiche (in rosso).

I. 3.1 Operazioni invarianti

Risulta utile stabilire se è possibile spostare un vettore dal suo punto di applicazione senza modificarne il momento rispetto al generico polo. Nel piano, la risposta è semplice se si richiama la definizione (5) del modulo del momento.

Lo spostamento non ne modifica il risultato se il braccio non cambia.

Muovere un vettore lungo la propria retta d'azione non modifica il suo momento polare: infatti, non cambia il braccio rappresentativo della distanza del polo dal vettore (vedi Figura 24)

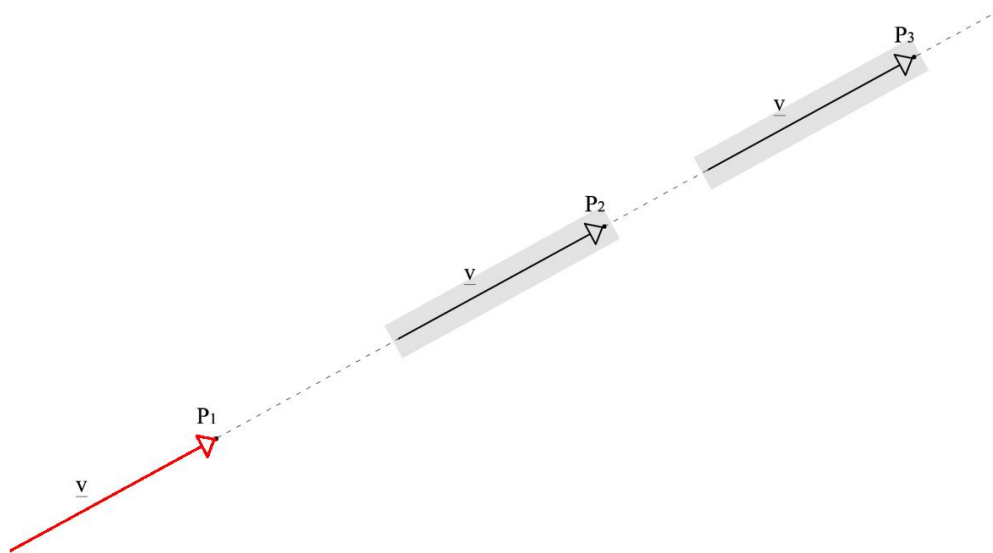


Figura 24. Muovere v lungo la propria retta d'azione non ne modifica il momento polare

Analogamente, muovere il polo Q lungo la retta passante per Q stesso e parallela al vettore non cambia il valore del momento (Figura 25).

Spostare, invece, un vettore applicato in un altro punto senza muoverlo lungo la propria retta d'azione modifica il suo momento rispetto al polo generico.

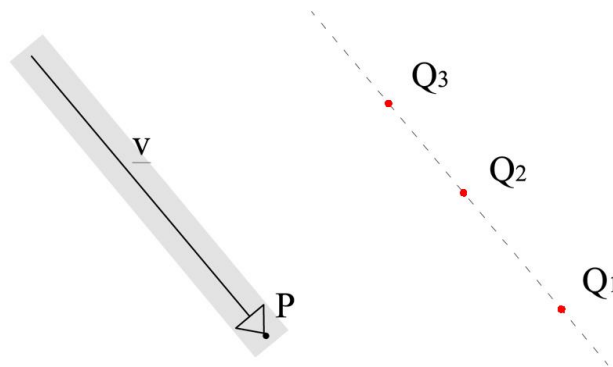


Figura 25. Muovere il polo lungo la parallela al vettore non ne modifica il momento polare.

I. 4 Sistemi di vettori equivalenti

In particolare in presenza di forze applicate, risulta estremamente utile stabilire se è possibile, assegnato un sistema di N vettori, estrarre sistemi di vettori più semplici che abbiano la stessa risultante e lo stesso momento rispetto a un polo qualsiasi.

Due sistemi di vettori si dicono equivalenti se hanno la stessa risultante e lo stesso momento risultante rispetto a un polo qualsiasi.

Se due sistemi di vettori hanno la stessa risultante e lo stesso momento rispetto a un polo, si può facilmente dimostrare che tali sistemi hanno lo stesso momento rispetto a un polo qualsiasi.

Per far ciò bisogna prima ricavare una relazione che esprime come varia il momento al variare del polo. Si supponga noto il momento rispetto a Q e si voglia determinare il momento rispetto a S. Si ha:

$$\mathbf{M}_S = \mathbf{SP} \times \mathbf{v}$$

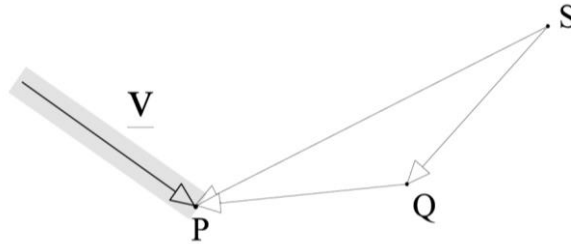


Figura 26. Variazione del momento al variare del polo (da Q a S).

Dalla Figura 26 si evince che:

$$\mathbf{M}_S = \mathbf{SP} \times \mathbf{v} = (\mathbf{SQ} + \mathbf{QP}) \times \mathbf{v} = \mathbf{SQ} \times \mathbf{v} + \mathbf{QP} \times \mathbf{v} = \mathbf{SQ} \times \mathbf{v} + \mathbf{M}_Q \quad (6)$$

In definitiva, la legge di variazione del momento al variare del polo per un solo vettore si può scrivere:

$$\mathbf{M}_S = \mathbf{M}_Q + \mathbf{SQ} \times \mathbf{v} \quad (7)$$

Nel caso di più vettori si può dimostrare che la (7)

si modifica in:

$$\mathbf{M}_S = \mathbf{M}_Q + \mathbf{SQ} \times \mathbf{R} \quad (8)$$

Siano ora S e S' i due sistemi di vettori indicati in Figura 27.

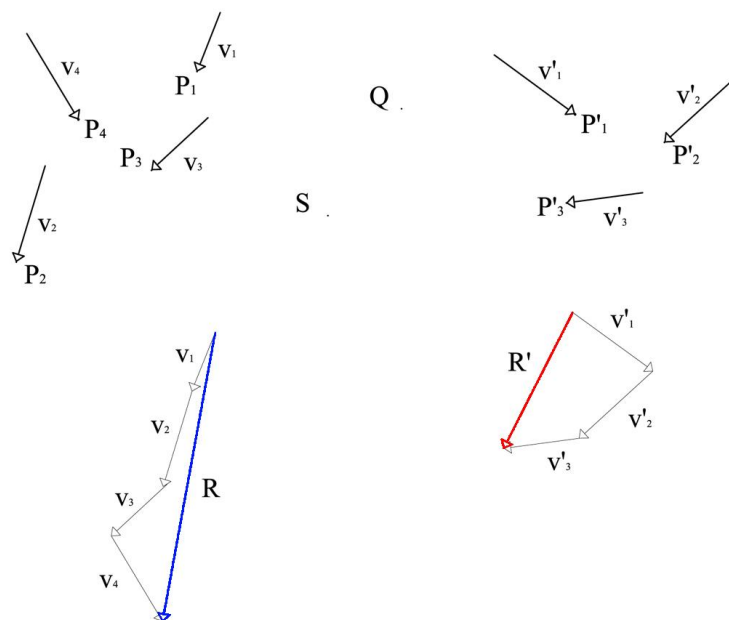


Figura 27. Due sistemi di vettori: $\{ \mathbf{v}_i \}$ con risultante in blu e $\{ \mathbf{v}'_i \}$ con risultante in rosso.

Se:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}' \text{ e } M_Q = M'_Q \quad (9)$$

dalle relazioni (7) e (9) si ricava che:

$$M_S = M_Q + \mathbf{SQ} \times \mathbf{R} = M'_Q + \mathbf{SQ} \times \mathbf{R}' = M'_S \Rightarrow M_S = M'_S \quad (10)$$

Cioè, anche se cambia il polo i due momenti rimangono uguali tra loro.

Si è così dimostrato che se due sistemi di vettori hanno uguale risultante e uguale momento rispetto a un polo, essi hanno uguale momento rispetto a qualsiasi polo.

I. 4.1 Sistema di vettori equivalente a zero

Un gruppo di vettori si dice *equivalente a zero* se risultante e momento risultante rispetto a un polo qualsiasi sono nulli.

E' immediato dimostrare che se:

$$\mathbf{R} = \mathbf{0} \text{ e } \mathbf{M}_Q = \mathbf{0} \quad (11)$$

rispetto a un punto Q, sarà zero il momento rispetto a un qualsiasi altro punto L.

I. 4.2 Sistema di vettori equilibrante di un altro

Dati due sistemi di vettori, si dice che uno è equilibrante dell'altro se insieme formano un sistema equivalente a zero. Se, cioè, uno ha risultante \mathbf{R} e momento risultante \mathbf{M}_Q rispetto a un punto Q uguali e opposti rispettivamente a risultante \mathbf{R}' e momento risultante \mathbf{M}'_Q rispetto a Q dell'altro sistema di vettori. Deve valere, quindi:

$$\mathbf{R} + \mathbf{R}' = \mathbf{0} \text{ e } \mathbf{M}_Q + \mathbf{M}'_Q = \mathbf{0} \quad (12)$$

Anche in questo caso, se vale la (12) significa che i momenti dei due sistemi di vettori saranno uguali e opposti con riferimento a un qualsiasi polo.

I. 5 La coppia

La coppia è, per definizione, un insieme di due vettori uguali, di verso opposto, e non allineati.

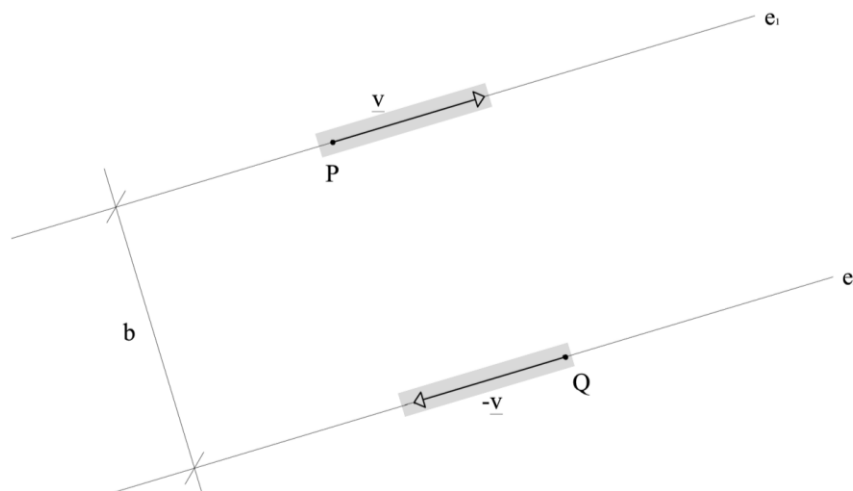


Figura 28. Due vettori paralleli, uguali in modulo e opposti in verso formano una coppia.

Partendo dalla (8) è facile dimostrare che il momento di una coppia non varia al variare del polo. La sua risultante, infatti, è nulla. Il momento di una coppia (non è necessario specificare rispetto a quale polo visto che è costante) si indica usualmente:



Figura 29. Simbolo usato per convenzione per indicare una coppia

dove M indica il modulo della coppia ed è pari a:

$$M = |\mathbf{v}|b$$

Un qualsiasi sistema di vettori a risultante nulla ma a momento rispetto a un polo qualsiasi non nullo è equivalente a una coppia, può essere ciò semplificato in una coppia di modulo pari al momento del sistema assegnato rispetto a un punto qualsiasi.

I. 6 Spostamento del punto di applicazione di un vettore

Spostare un vettore applicato in un altro punto di applicazione coinvolge la definizione di sistemi equivalenti introdotta in I. 4.

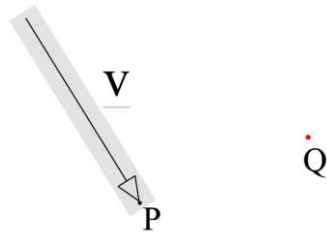


Figura 30. Come spostare \mathbf{v} in P da P a Q senza alterarne risultante e momento rispetto a un polo qualsiasi?

Spostare un vettore applicato in P da P a Q modifica il momento del vettore rispetto al generico polo. Basti sottolineare che \mathbf{v} in P ha momento nullo rispetto a P stesso, mentre \mathbf{v} in Q (senza la coppia) ha momento rispetto a P diverso da zero.

Affinché il momento non cambi, affinché cioè il nuovo sistema sia equivalente al precedente, è necessario aggiungere al vettore in Q una coppia.

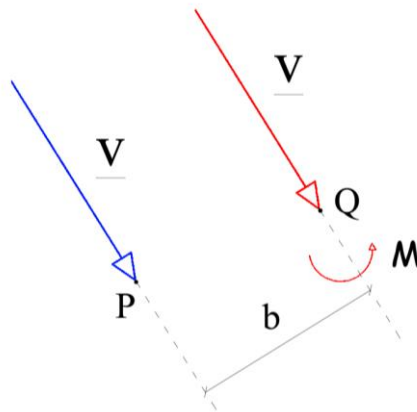


Figura 31. Spostare \mathbf{v} applicato in P da P a Q richiede l'aggiunta di un momento. Viceversa, un vettore e una coppia applicati in Q sono equivalenti al solo vettore applicato in un particolare punto P.

Tale coppia deve avere modulo tale da garantire l'equivalenza tra i due sistemi, da garantire, cioè, che il momento rispetto a un polo qualsiasi dei due sistemi sia lo stesso. Prendendo il punto Q come polo, l'uguaglianza dei momenti **(10)** fornisce:

$$\mathbf{M} = M_Q^{\mathbf{v} \text{ in } P} = |\mathbf{v}|b \text{ antiorario}$$

Dove b è la distanza di Q dal vettore in P.

I. 7 Asse centrale

Dalla definizione di sistemi equivalenti è facile dimostrare che un qualsiasi insieme di vettori applicati è equivalente a un vettore più una coppia in un punto qualsiasi Q: il vettore coincide con la risultante e la coppia è di momento pari al momento totale del sistema rispetto al punto Q.

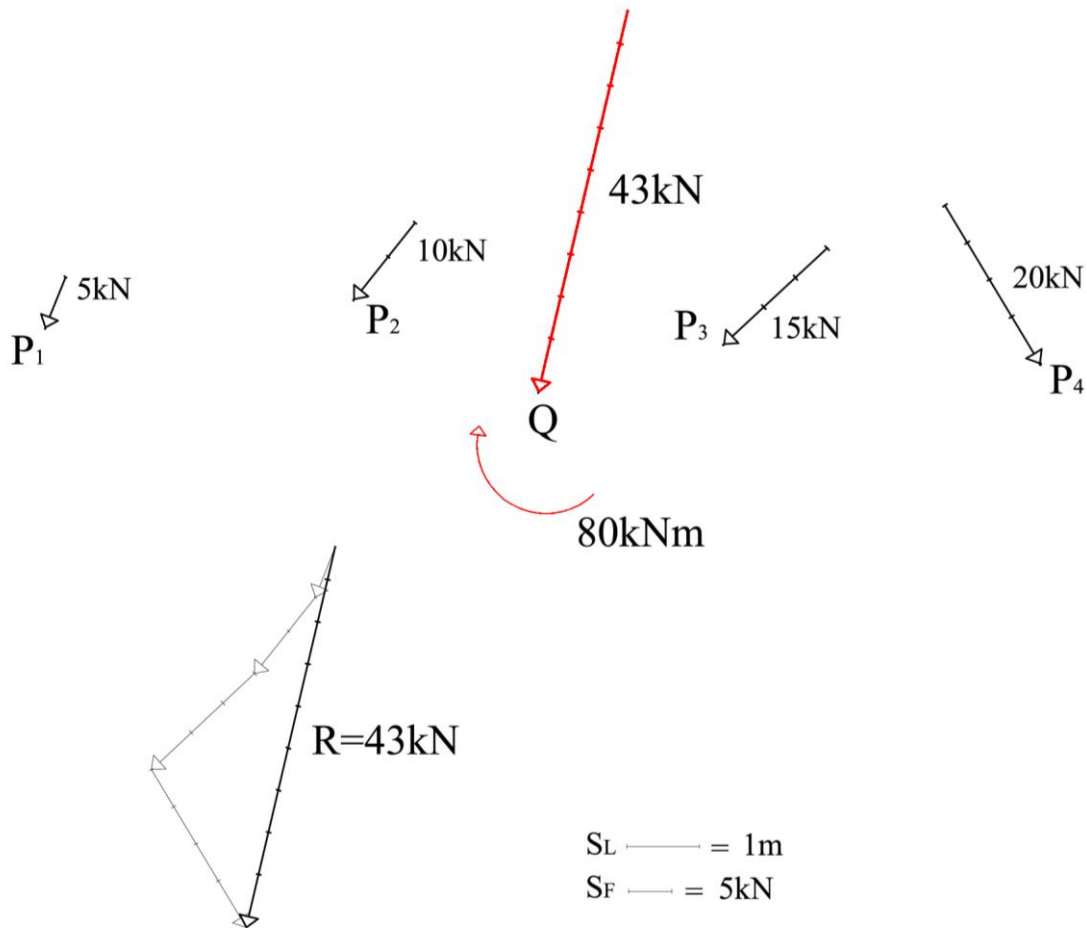


Figura 32. Sistema di forze equivalenti a risultante e momento risultante applicati in Q.

E' possibile trovare dei punti del piano nei quali la sola risultante è equivalente al sistema di vettori assegnati, nei quali cioè non sia necessario affiancare anche una coppia?

La risposta è sì, se i vettori sono tutti appartenenti a un piano (sistema piano di vettori). Ci sono, infatti, più punti, sono allineati su una retta e tale retta è detta asse centrale.

L'asse centrale si definisce come il luogo dei punti rispetto ai quali il momento totale del sistema di vettori è nullo. Esso può essere determinato graficamente oppure analiticamente.

Per un sistema di due vettori applicati (vedi Figura 33) si ha:

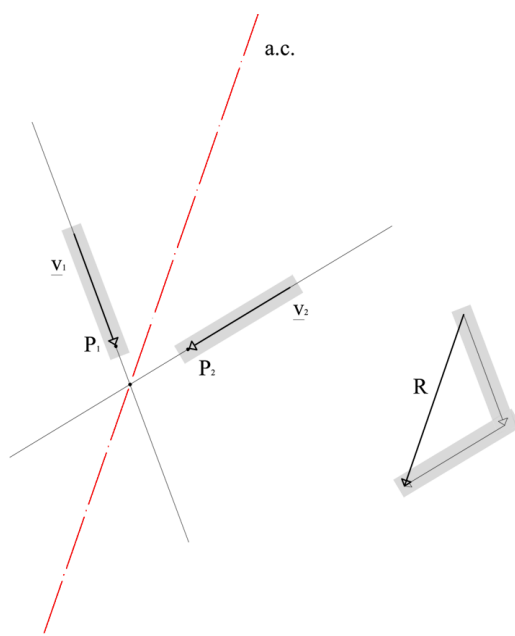


Figura 33. Ricerca grafica dell'asse centrale per due vettori applicati

L'asse centrale risulta parallelo alla risultante e passante per il punto di intersezione delle rette dei due vettori. Se i vettori sono più di due, è sufficiente ripetere tale costruzione per coppie di vettori (vedi Figura 34) fino a giungere alla sola risultante sull'asse centrale.

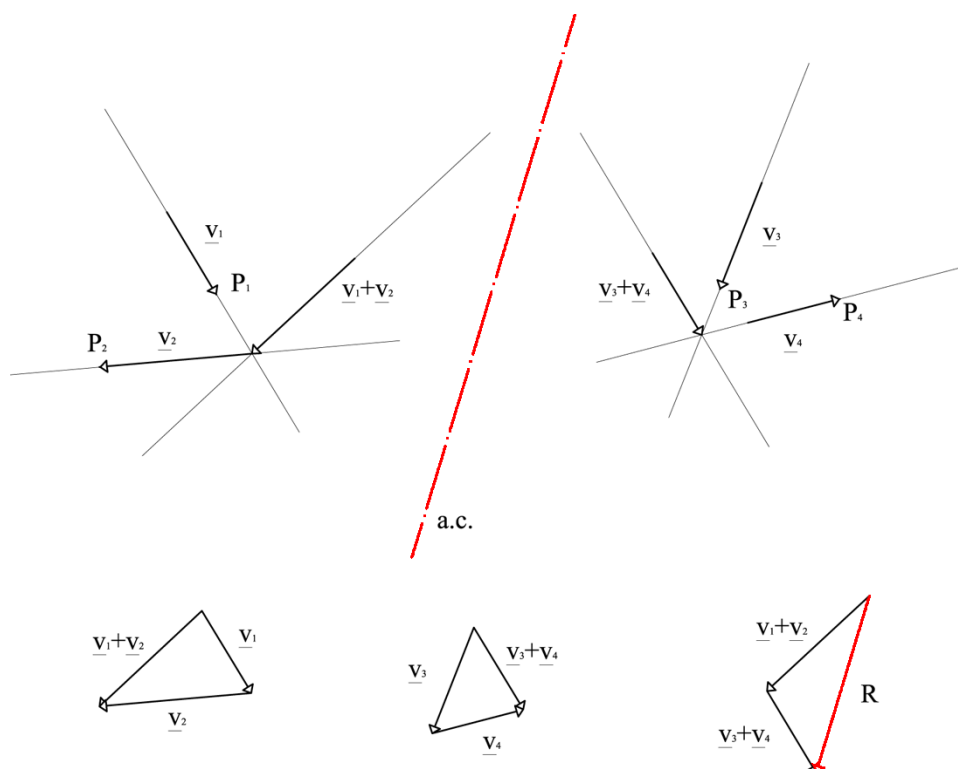


Figura 34. Costruzione grafica dell'asse centrale per più vettori.

Analiticamente l'asse centrale può essere determinato come equazione di una retta in un sistema di riferimento. Si fissa allora un sistema di riferimento sul piano dei vettori applicati e si impone che:

$$\mathbf{M}_P = \mathbf{0} \quad (13)$$

dove $P(x,y)$ è un punto dell'asse centrale.

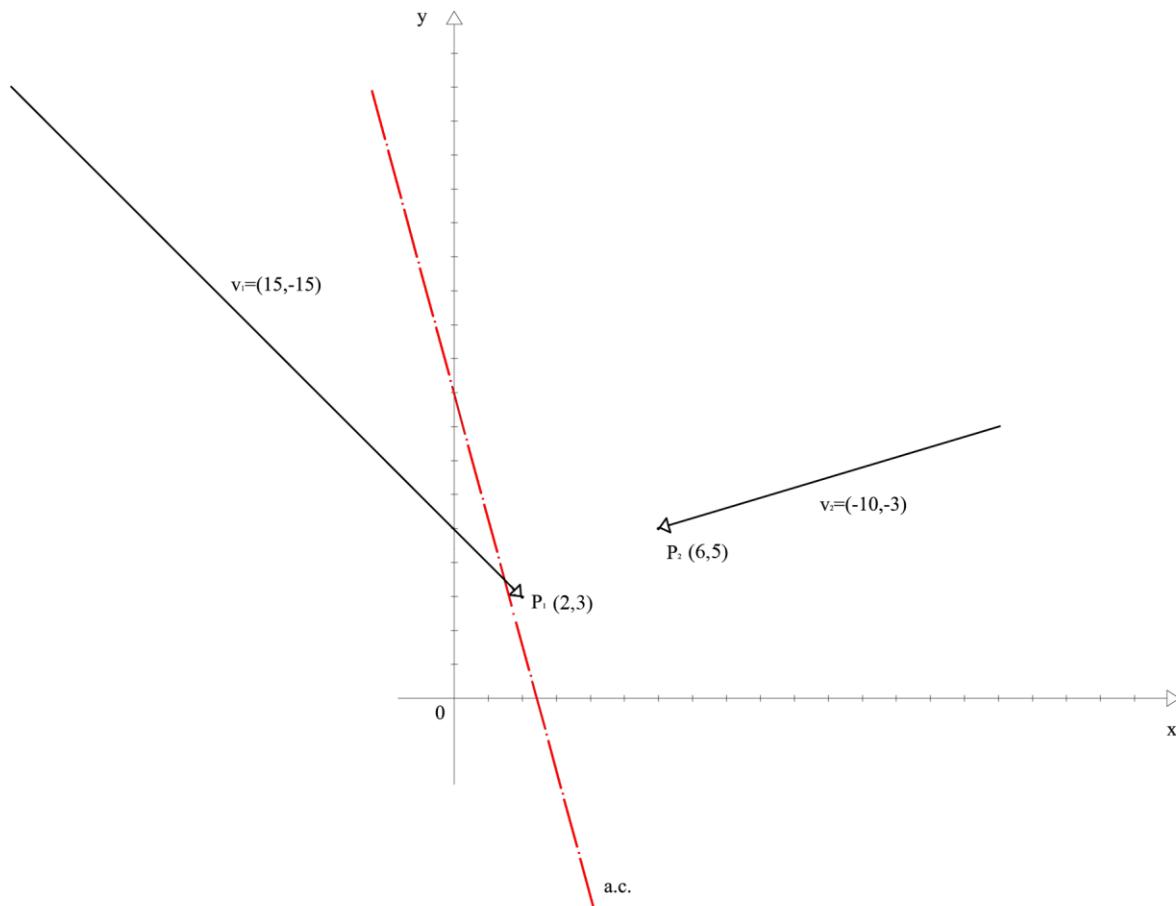


Figura 35. Asse centrale ottenuto analiticamente per un sistema di più vettori.

Sviluppando l'equazione (13) per l'esempio in Figura 35 si ottiene

$$\mathbf{M}_P = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2-x & 3-y & 0 \\ 15 & -15 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 6-x & 5-y & 0 \\ -10 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow [-15(2-x) - 15(3-y)]\mathbf{k} + [-3(6-x) + 10(5-y)]\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow -15(2-x) - 15(3-y) - 3(6-x) + 10(5-y) = 0$$

$$\text{equazione asse centrale} \quad 18x + 5y - 43 = 0 \quad (14)$$

In definitiva, un qualsiasi sistema piano di vettori è equivalente alla risultante applicata in un punto qualsiasi dell'asse centrale. La risultante applicata in un punto non appartenente all'asse centrale deve essere accompagnata da una coppia per essere equivalente ai vettori iniziali. Tale coppia

coincide con il momento del sistema di vettori iniziali rispetto al nuovo punto di applicazione della risultante.

Un sistema di vettori diversamente orientati nello spazio non può essere semplificato nella sola risultante applicata opportunamente. In tal caso, l'asse centrale diventa la retta rispetto alla quale il momento del sistema di vettori assegnato risulta minimo (ma non zero).

I. 8 Centro di vettori paralleli

Siano assegnati vettori tutti paralleli tra loro, anche non appartenenti allo stesso piano. Si ricordi che l'asse centrale rappresenta il luogo dei punti rispetto ai quali il momento è nullo. In tal caso è parallelo alla direzione comune dei vettori. Ciascun vettore può essere rappresentato col modulo accompagnato da un segno positivo o negativo, visto che la direzione è uguale per tutti. Il segno sarà positivo se il vettore risulta concorde alla direzione assunta (convenzionalmente) come positiva (vedi Figura 36).

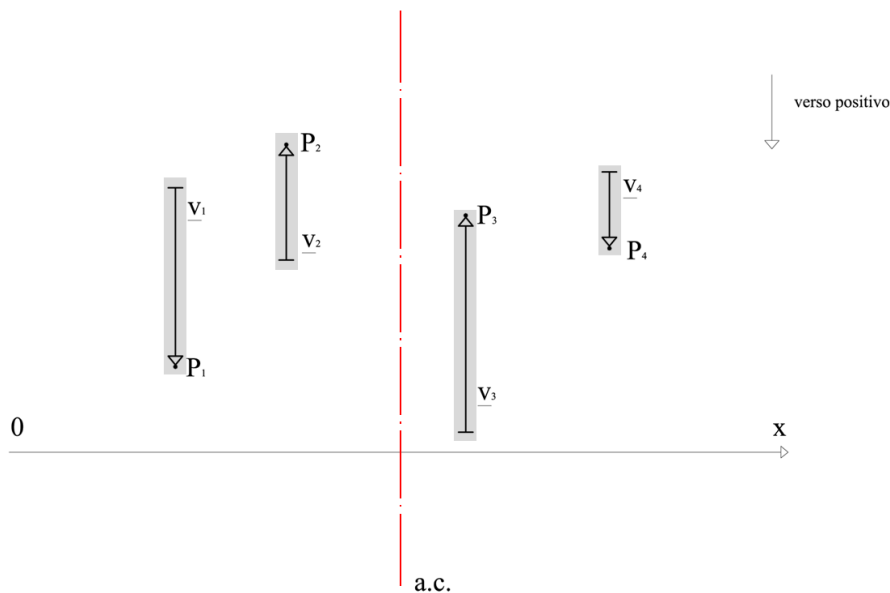


Figura 36. Asse centrale di un sistema di vettori paralleli

L'asse centrale risulta individuato dalla sua distanza x da un'origine O anch'esso scelto in maniera del tutto arbitraria, obbedendo solo a indicazioni di convenienza grafica.

Se i vettori vengono tutti ruotati intorno al proprio punto di applicazione dello stesso angolo α , l'asse centrale ruoterà anch'esso di α . Ebbene, al ruotare dei vettori l'asse centrale ruota, ma tutti gli assi centrali ruotati si intersecano in un punto detto centro dei vettori paralleli

Tale punto coincide con il baricentro se i vettori sono rappresentativi di pesi di oggetti. Il centro diventa allora il baricentro degli oggetti.

I. 9 Vettori distribuiti

I vettori applicati sono uno strumento utilissimo per gestire enti quali, a esempio, forze concentrate, spostamenti, velocità. Le azioni esterne che agiscono sulle costruzioni non sempre possono ricondursi a forze concentrate. Anzi, si può affermare che la forza concentrata in un punto non esiste in natura. Le azioni si esplicano sempre come forze distribuite su aree di contatto. Se, però, queste aree di contatto sono molto piccole rispetto alle dimensioni rappresentative dell'elemento strutturale in esame, l'azione distribuita può essere semplificata, con buona approssimazione, in una forza concentrata.

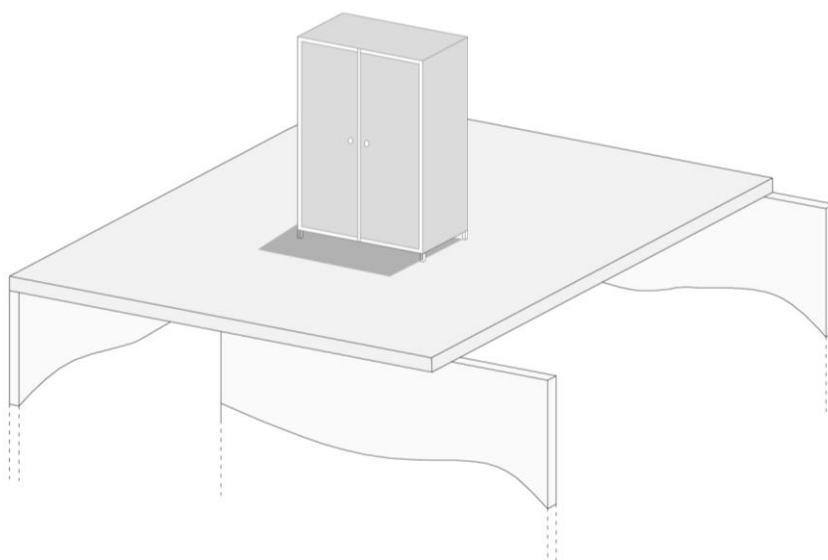


Figura 37. Armadio su solaio.

L'armadio in Figura 37, per esempio, poggia sul solaio in quattro zone. Il peso dell'armadio si trasmette al solaio attraverso i suoi piedi, i quali hanno un'area di appoggio. Ciascuna azione, quindi, (uguale a un quarto del peso totale) si esplica attraverso una forza distribuita e non concentrata in un punto. Se, però, l'area di appoggio b^2 di ogni piede è molto piccola rispetto alla luce del solaio, se cioè:

$$\frac{b}{l} \ll 1 \quad \left(\frac{b}{l} = 0.01 - 0.05 \right)$$

l'azione di ogni piede può essere schematizzata come una forza concentrata di modulo pari a un quarto del peso dell'armadio.

Ci sono, però, tante situazioni in cui tale approssimazione non è lecita. Per esempio nel considerare l'azione esercitata dal peso del pavimento sui travetti del solaio (vedi Figura 38).

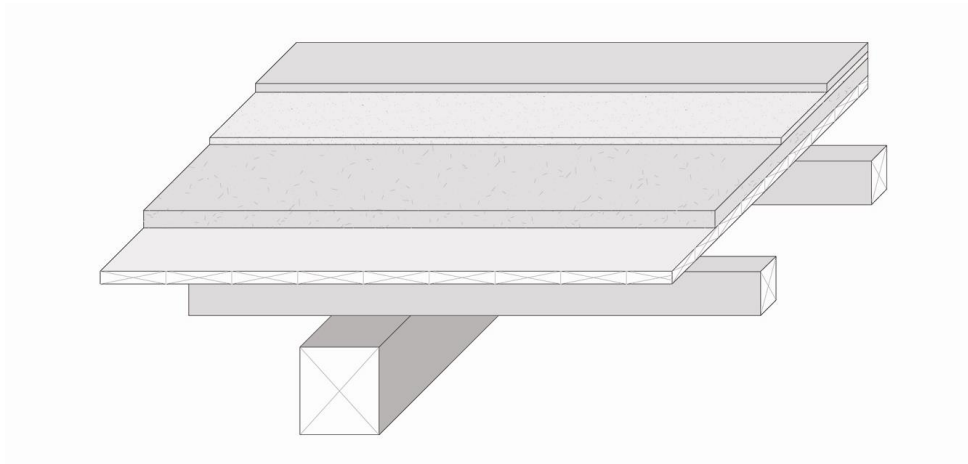


Figura 38. Solaio ligneo con tavolato, massetto e pavimento. Il peso proprio è equivalente a un carico distribuito sui travetti.

Oppure nel considerare l'azione esercitata dall'acqua sulla parete di una piscina (Figura 39).

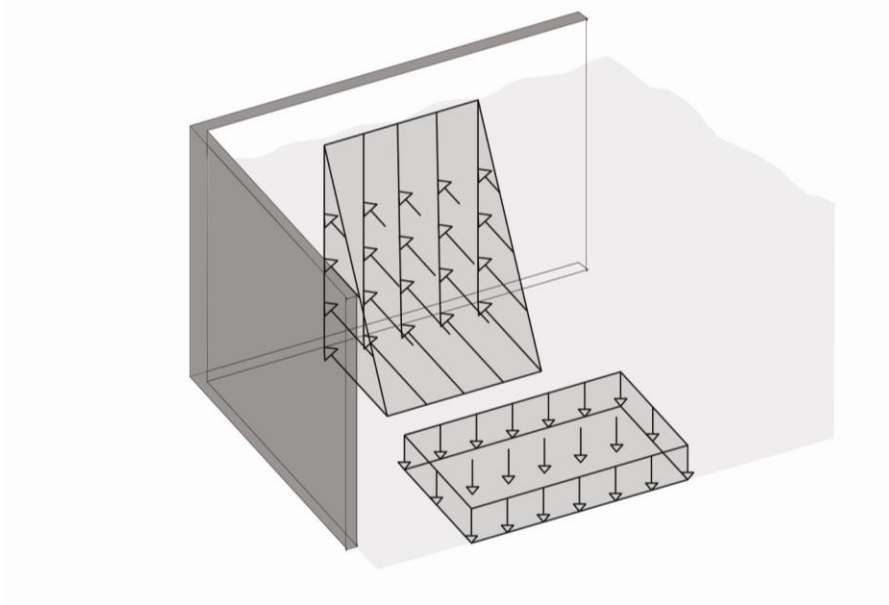


Figura 39. Azione dell'acqua sul fondo e sulle pareti di una piscina.

I carichi distribuiti rappresentano un esempio di vettori applicati su linee o su aree e non più in singoli punti. L'esempio più semplice è il carico distribuito con legge costante:

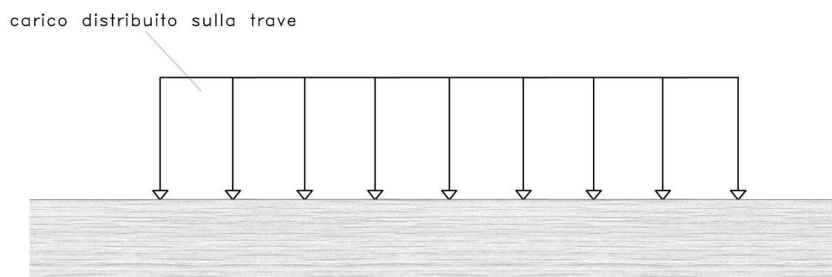


Figura 40 Trave con sopra rappresentato un carico distribuito con legge costante.

Spesso il carico viene disegnato staccato dalla linea di applicazione per convenienza grafica (Figura 41):

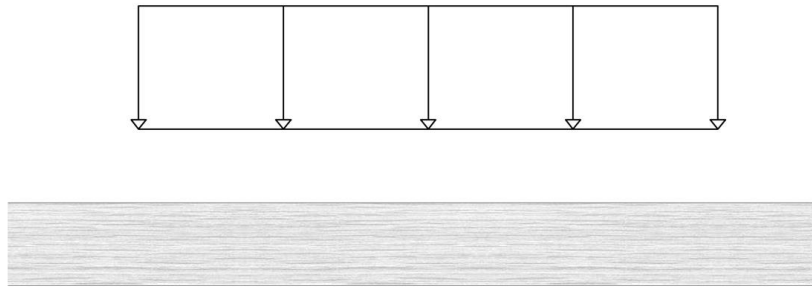


Figura 41. Carico applicato sulla trave.

Gli elementi fondamentali da determinare per un carico distribuito sono la sua risultante e il suo asse centrale, ovvero la posizione della risultante che dà lo stesso momento rispetto a un polo qualsiasi.

Se il carico è distribuito con legge costante, la risultante va applicata sulla retta passante per il punto medio della linea di carico.

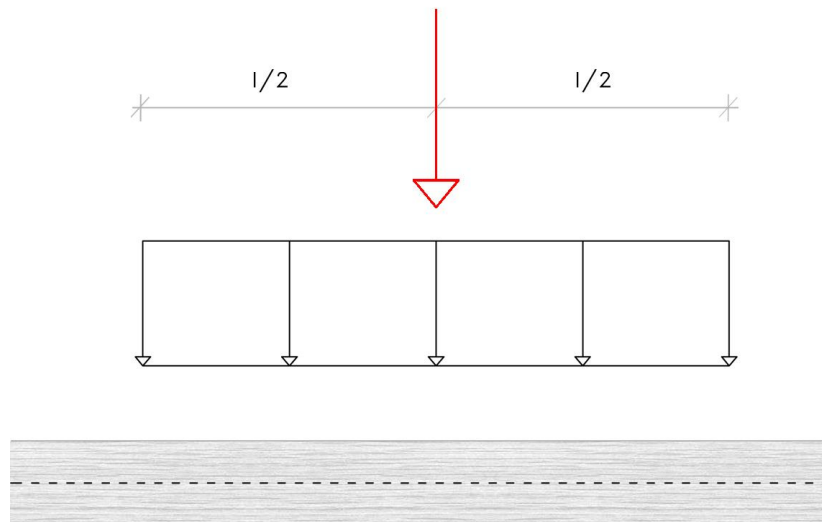


Figura 42. Carico costante con la sua risultante

Per un carico applicato con legge qualsiasi, risultante e asse centrale possono determinarsi con l'ausilio del concetto di integrale.

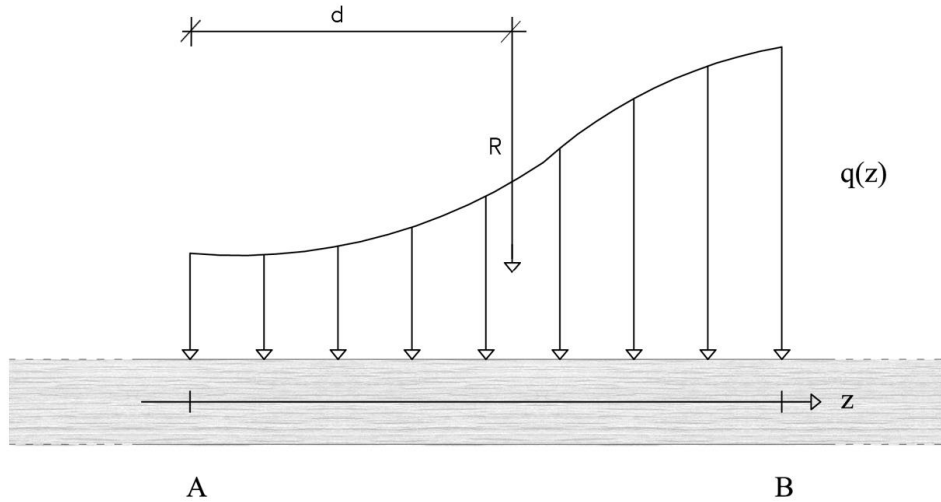


Figura 43. Carico distribuito con legge qualsiasi applicato sul segmento AB.

Se con z si indica l'asse della trave sulla quale è applicato il carico, risultante e momento del carico rispetto al polo A sono dati da:

$$|\mathbf{R}| = \int_A^B q(z) dz$$

$$|\mathbf{M}_A| = \int_A^B q(z - z_A) dz \quad (15)$$

Il modulo del momento così determinato sarà accompagnato da un segno meno se orario rispetto al polo A, da un segno più se antiorario rispetto allo stesso punto.

La relazione (15) che fornisce il momento diventa:

$$|\mathbf{M}_A| = \int_A^B q(z) z dz \quad (16)$$

se l'origine della retta z viene scelta coincidente con A.

Il momento determinato (16) consente di posizionare l'asse centrale. Per un carico diretto come in figura, l'asse centrale risulta verticale e la sua distanza d dal punto A è data da:

$$d = \frac{|\mathbf{M}_A|}{|\mathbf{R}|} \quad (17)$$

Infatti, l'asse centrale ha la proprietà che la risultante disposta su di esso è equivalente al carico distribuito. Deve fornire quindi lo stesso momento rispetto a un punto qualsiasi. Imponendo tale uguaglianza scegliendo come polo il punto A si ottiene la relazione (17).

Si tenga presente che a volte, per comodità grafica, il carico applicato non viene disegnato come in Figura 43, ma leggermente staccato rispetto alla linea d'asse della trave (vedi Figura 44). Resta inteso che la linea di applicazione del carico coincide con il tratto A-B.

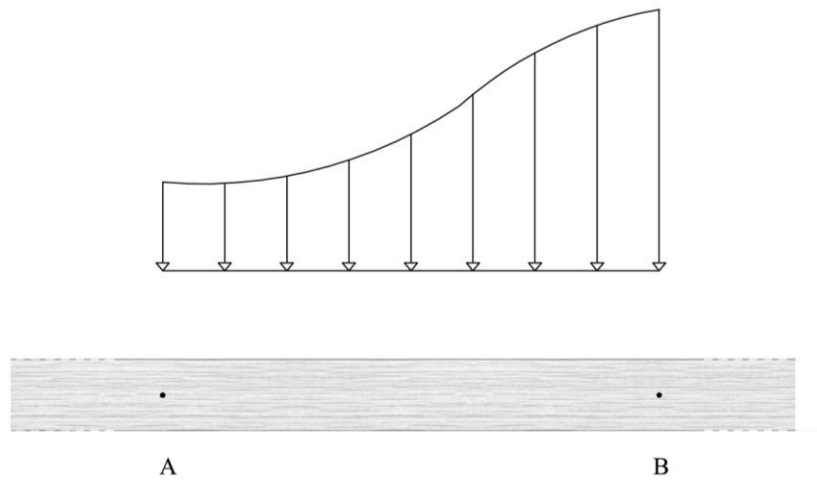


Figura 44. Carico applicato sul tratto AB.

Non è detto che le forze distribuite su elementi strutturali abbiano sempre la direzione perpendicolare alla linea d'asse della trave, così come illustrato finora.

Il carico distribuito può avere direzione parallela alla linea d'asse come in Figura 45.

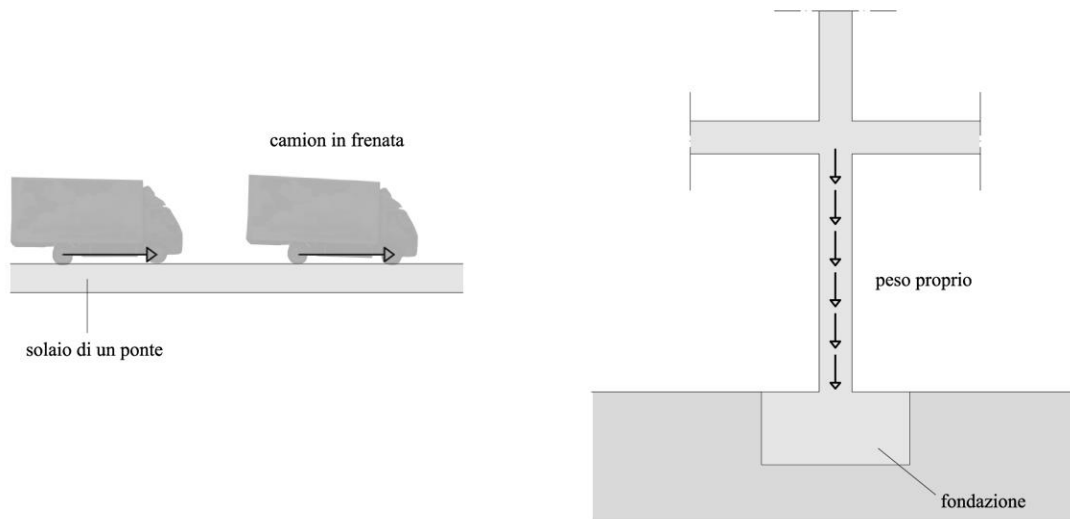


Figura 45. Esempi di carichi assiali: camion in frenata su un ponte (sin.), peso proprio del pilastro (dx).

Oppure essere inclinato rispetto alla linea d'asse, come in Figura 46.

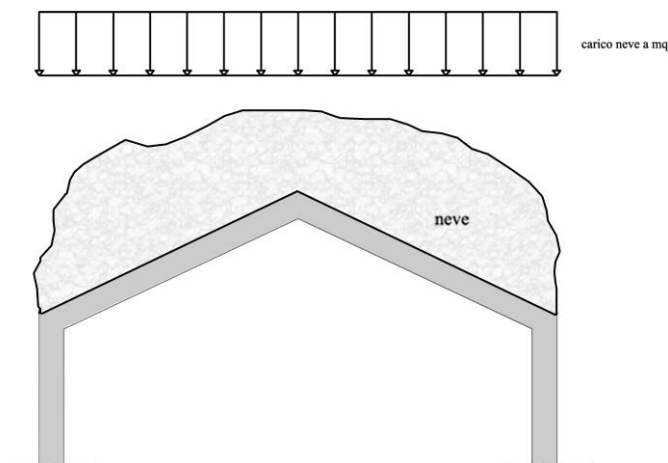


Figura 46. Carico neve

In entrambi i casi il carico applicato si disegna come vettori distribuiti su una linea di applicazione. A esempio in Figura 47 il carico distribuito orizzontale va interpretato come carico applicato sul tratto AB della trave; la sua risultante è pari al valore del carico per la lunghezza del tratto AB. Il suo punto di applicazione è al centro di AB. Nella stessa figura il carico inclinato ha risultante inclinata applicata al centro del segmento AB. Noto l'angolo α è possibile determinare le componenti orizzontale e verticale di tale risultante.

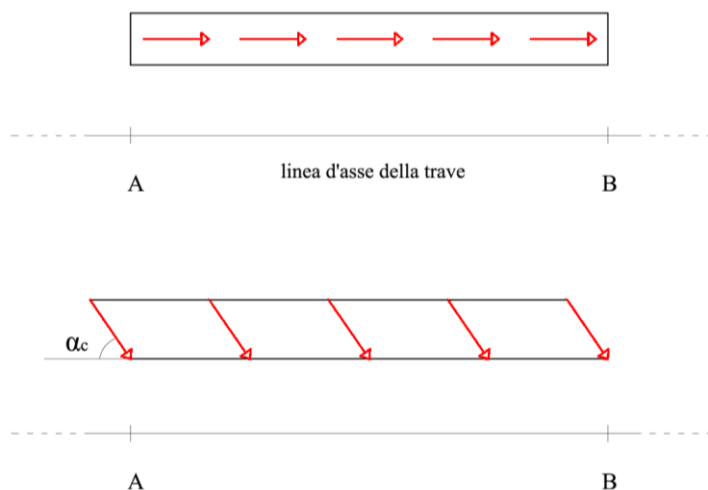


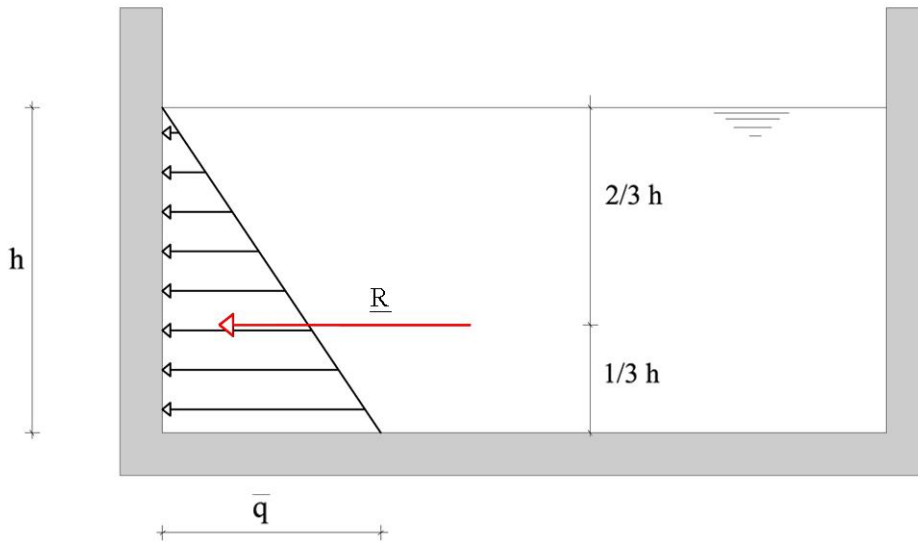
Figura 47. Simbologia adottata per carico assiale e per carico inclinato, entrambi applicati sul tratto di trave AB.

I.9.1 Carico triangolare e carico trapezoidale

Risultante e posizione dell'asse centrale di un carico triangolare (vedi Figura 48) sono rispettivamente pari a:

$$|R| = \text{area triangolo} = \frac{qh}{2} \tag{18}$$

Posizione $R = a \frac{h}{3}$ da \bar{q} e a $\frac{2}{3}h$ dall'altro estremo.



$\gamma =$ peso specifico dell'acqua

$q = \gamma h$ (nell'esempio in figura)

Figura 48. La spinta dell'acqua sulla parete della piscina è equivalente a un carico distribuito triangolare.

Per una legge di variazione del carico trapezoidale (come in Figura 49), risultante e punto di applicazione si possono determinare scomponendo il carico come somma di un carico costante di modulo q_1 e un carico triangolare (18) di modulo $(q_2 - q_1)$:

$$Q^C = q_1 h \quad Q^T = (q_2 - q_1) \frac{h}{2} \quad (19)$$

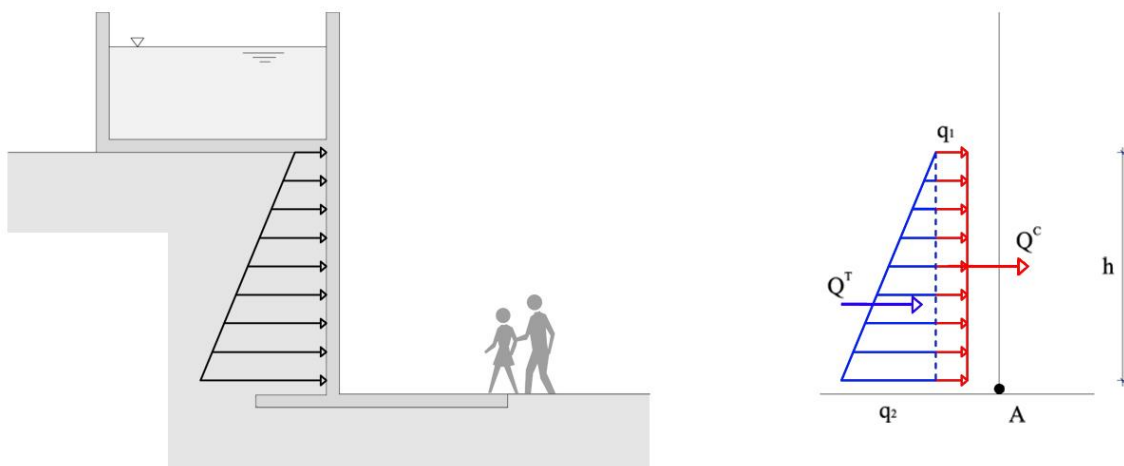


Figura 49. La spinta di un terreno su cui poggia un altro carico (una piscina o un fabbricato) su un muro di sostegno è equivalente a un carico trapezoidale.

La risultante totale sarà la somma delle due risultanti (19), il punto di applicazione si determinerà imponendo l'uguaglianza dei due momenti rispetto a un punto, ad esempio il punto A:

$$R = Q^C + Q^T$$

$$Q^C \frac{h}{2} + Q^T \frac{h}{3} = R \cdot d \Rightarrow d .$$