

## CAP. III – EQUILIBRIO DEI SISTEMI DI TRAVI

### III.1 Introduzione

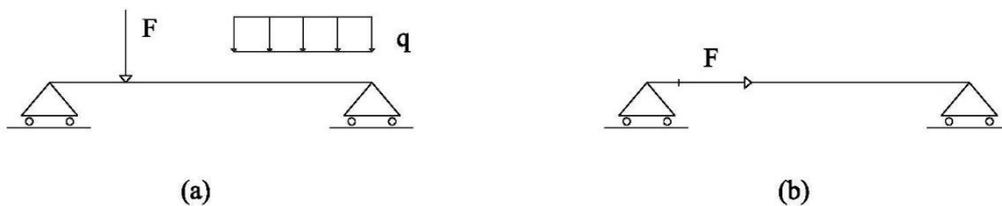
L'analisi cinematica dei sistemi di travi consente di stabilire se una struttura è sufficientemente vincolata. La struttura è isostatica o iperstatica se i vincoli esterni e interni introdotti sono in numero sufficiente e disposti correttamente da bloccare tutti i possibili atti di moto rigido.

I sistemi di travi isostatici e iperstatici sono in grado di equilibrare qualsiasi condizione di carico. Questo non significa che le strutture isostatiche e iperstatiche siano in grado di resistere a qualsiasi condizione di carico. Ciò dipende anche dai materiali che costituiscono la struttura. La verifica della resistenza delle travi fa parte di un capitolo del corso che verrà affrontato successivamente. Le strutture labili possono equilibrare solo particolari condizioni di carico. La differenza fondamentale con le iso-iper statiche è che queste ultime possono equilibrare qualsiasi condizione di carico.



**Figura 1.** Esempio di trave una volta labile

La trave di Figura 1 è una volta labile. I vincoli, infatti, non bloccano il moto rigido di traslazione orizzontale. Nonostante ciò è intuibile che la condizione di carico di Figura 2(a) può essere equilibrata da due forze verticali verso l'alto esercitate dai due carrelli, mentre il carico di Figura 2(b) spinge la trave verso destra senza che i vincoli si possano opporre.



**Figura 2.** Trave labile. (a) Carico in equilibrio con i vincoli. (b) Carico non equilibrato dai vincoli

Nel corso di Statica si imparerà a gestire l'equilibrio di sistemi isostatici di travi e di sistemi labili soggetti a quelle condizioni di carico *possibili*. L'analisi statica consiste, infatti, nel determinare le forze vincolari e le azioni interne che tengono in equilibrio una struttura e ogni sua parte caricata.

Su sistemi iperstatici soggetti a forze esterne il solo concetto di *equilibrio* non è sufficiente a determinare le forze esercitate dai vincoli (esterni e interni). Per questi ultimi sarà necessario aggiungere, nel corso di Scienza delle Costruzioni, il concetto della congruenza.

Per meglio comprendere quanto detto è ora necessario stabilire cosa significa equilibrio di una struttura sotto carico e quali siano le forze che si immagina i vincoli esplicano in presenza di forze esterne.

### III.2 Equilibrio di una trave priva di vincoli

Prima di procedere all'analisi statica di strutture vincolate è bene introdurre il concetto di equilibrio con riferimento a un corpo di geometria qualsiasi soggetto a forze esterne.

L'equilibrio di un corpo caricato è garantito se sono soddisfatte le cosiddette Equazioni Cardinali della Statica. Se, cioè, sono nulli sia la risultante sia il momento risultante rispetto a un polo qualsiasi  $Q$  di tutte le forze (esterne e vincolari dette anche attive e reattive) applicate.

Il sistema di vettori rappresentativi delle forze applicate deve essere in equilibrio.

Vettorialmente ciò si esprime imponendo:

$$\mathbf{R} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{M}_Q = \mathbf{0}$$

Per un sistema tridimensionale le suddette equazioni si esplicitano in sei equazioni scalari. Nell'ipotesi che il corpo sia piano e sia caricato da un sistema piano di forze le equazioni scalari di equilibrio diventano tre:

$$R_x = \sum_{i=1}^N F_{i_x} = 0$$

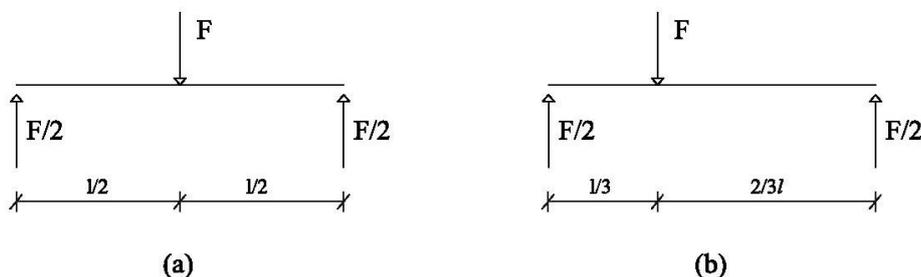
$$R_y = \sum_{i=1}^N F_{i_y} = 0$$

$$M_Q = \sum_{i=1}^N M_{i_Q}$$

$F_{i_x}$ ,  $F_{i_y}$  rappresentano le componenti cartesiane della generica forza (attiva o reattiva) applicata  $\mathbf{F}_i$  e  $M_{i_Q}$  rappresenta il modulo del momento rispetto al polo  $Q$  della stessa forza (preso per convenzione col segno positivo se antiorario, negativo se orario).  $N$  sia il numero delle forze applicate.

Le prime due equazioni si chiamano equazioni di equilibrio alla traslazione, l'ultima di equilibrio alla rotazione. Le prime due, infatti, impongono che la somma delle componenti rispettivamente orizzontali e verticali siano nulle. L'ultima equazione impone che la struttura non ruoti intorno al polo  $Q$  per effetto delle forze.

A esempio in Figura 3(a) le equazioni di equilibrio sono soddisfatte, mentre in Figura 3(b) l'equilibrio alla rotazione non è verificato.

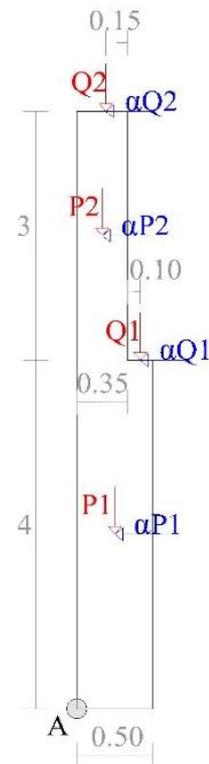
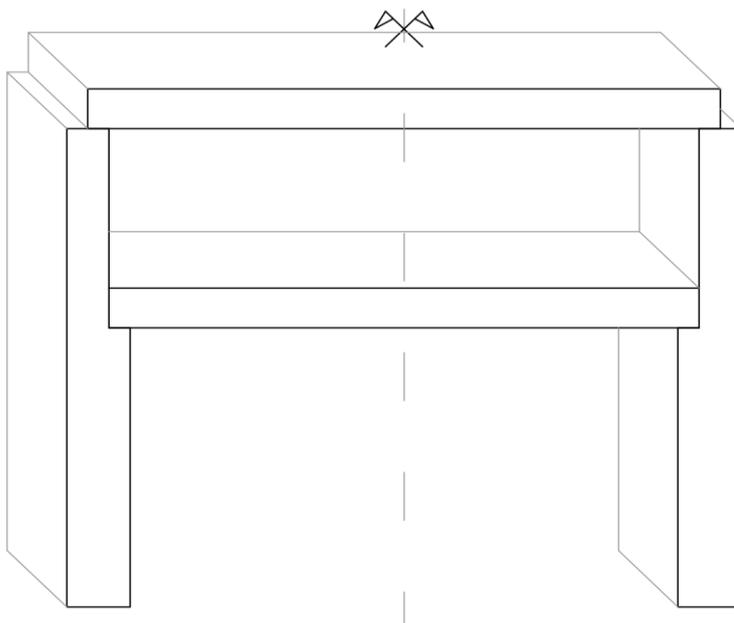


**Figura 3.** (a) Trave in equilibrio. (b) Trave non in equilibrio

Il polo Q rispetto al quale scrivere l'equazione di equilibrio alla rotazione può essere qualsiasi. È bene sottolineare sin d'ora che conviene scegliere il polo in modo da ridurre al minimo i contributi (e quindi i calcoli) da esplicitare nell'equazione. È utile scegliere il polo, quindi, come quel punto per il quale passa il maggior numero di forze applicate (braccio nullo  $\Rightarrow$  momento nullo).

### III.2.1 Applicazione su parete muraria

Sia presa in esame una parete muraria (di larghezza un metro) estratta da una delle due pareti in figura in basso (sezione in basso a destra). Si voglia determinare il coefficiente  $\alpha$  che garantisca l'equilibrio alla rotazione intorno al punto A.



Dati:

$$\gamma = 18 \text{ kN/m}^3$$

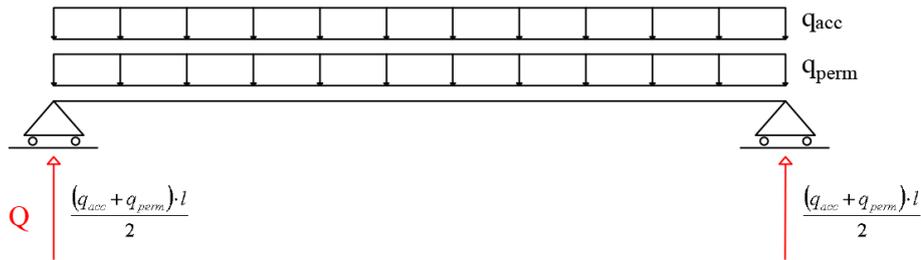
$$q_{acc}^{1piano} = 6 \text{ kN/m}$$

$$q_{perm}^{1piano} = 2 \text{ kN/m}$$

$$q_{acc}^{2piano} = 2 \text{ kN/m}$$

$$q_{perm}^{2piano} = 2 \text{ kN/m}$$

$$l = 6 \text{ m}$$



Analizzando una sezione di muratura unitaria (1m), i carichi agenti sulla muratura sono: il peso del solaio, diviso in accidentale e permanente, e il peso proprio della muratura.

Il carico dovuto al solaio si calcola considerandolo una trave appoggiata appoggiata, con due carichi uniformemente distribuiti sull'intera lunghezza del solaio. Il peso portato sulla muratura sarà quindi pari alle reazioni degli appoggi, quindi:

$$Q = \frac{(q_{acc} + q_{perm}) \cdot l}{2}$$

$$Q2 = \frac{(2 + 2) \cdot 6}{2} = 12kN$$

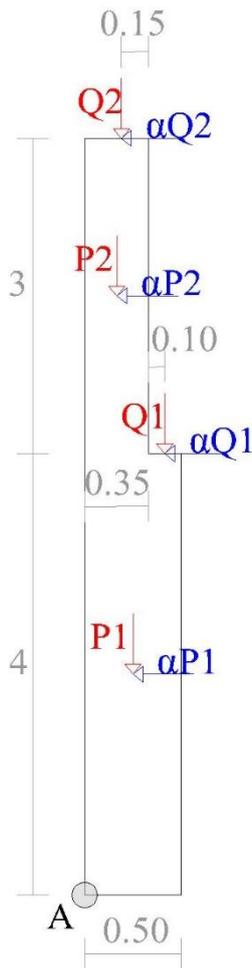
$$Q1 = \frac{(6 + 2) \cdot 6}{2} = 24kN$$

Il carico dovuto al peso proprio della muratura sarà il peso specifico ( $\gamma$ ) per il volume.

$$P = \gamma \cdot V$$

$$P2 = 18 \cdot 1 \cdot 0.35 \cdot 3 = 18.9kN$$

$$P1 = 18 \cdot 1 \cdot 0.50 \cdot 4 = 36kN$$



Spessore muro piano superiore =  $s_2 = 0.35$  m

Spessore muro piano inferiore =  $s_2 = 0.50$  m

Le forze orizzontali sono assegnate proporzionali ai corrispondenti carichi verticali attraverso un coefficiente  $\alpha$ . Le reazioni vincolari sono applicate all'interfaccia tra la parete muraria e il terreno. L'equilibrio alla rotazione è garantito per valori di  $\alpha$  inferiori a un certo valore limite  $\bar{\alpha}$ . Tale valore limite si determina imponendo l'equilibrio alla rotazione intorno al punto A delle forze peso (verticali, in figura rosse) e delle forze orizzontali (in figura blu). Il momento generato dalle forze verticali è anche detto momento stabilizzante, quello generato dalle forze orizzontali, invece, momento instabilizzante. In questo esempio, infatti, le forze orizzontali (blu) simulano l'azione sismica e spingono il muro al ribaltamento, antiorario in figura (quindi forze instabilizzanti), mentre le forze peso (rosse) trattengono il ribaltamento (quindi forze stabilizzanti) agendo in verso orario rispetto ad A.

L'equilibrio alla rotazione intorno ad A fornisce il valore limite  $\bar{\alpha}$ :

$$Q_2 \cdot (0.35 - 0.15) + P_2 \cdot \frac{0.35}{2} + Q_1 \cdot (0.10 + 0.35) + P_1 \cdot \frac{0.5}{2} = \alpha(Q_2 \cdot 7 + P_2 \cdot 5.5 + Q_1 \cdot 4 + P_1 \cdot 2)$$

$$12 \cdot 0.20 + 18.9 \cdot 0.175 + 24 \cdot 0.45 + 36 \cdot 0.25 = \alpha(12 \cdot 7 + 18.9 \cdot 5.5 + 24 \cdot 4 + 36 \cdot 2)$$

$$2.4 + 3.3 + 10.8 + 9 = \alpha(84 + 103.95 + 96 + 72)$$

$$25.5 = \alpha 355.95 \rightarrow \alpha = \frac{25.5}{355.95} = 0.072$$

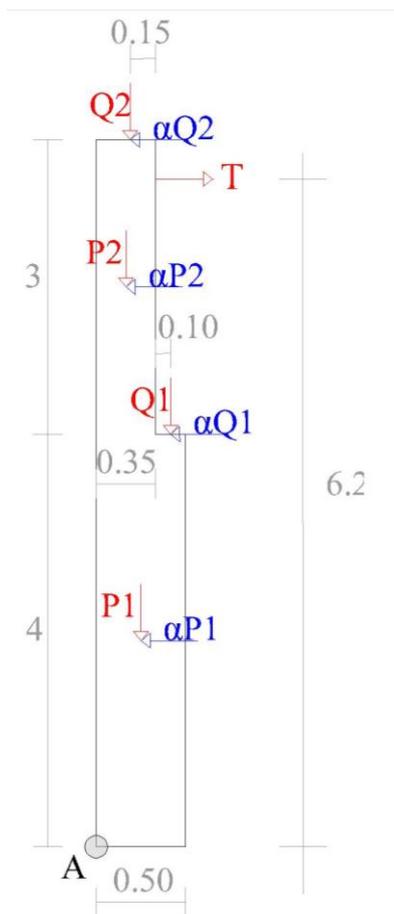
Un problema analogo si ottiene assegnando il valore di  $\alpha$ , per esempio  $\alpha=0.1$ , e determinando l'intensità della forza T in figura sotto. Tale forza rappresenta l'azione che un ipotetico tirante deve esercitare per garantire l'equilibrio sotto l'azione di un assegnato sisma  $\alpha$ . Si ha quindi:

$$Q2 \cdot (0.35 - 0.15) + P2 \cdot \frac{0.35}{2} + Q1 \cdot (0.10 + 0.35) + P1 \cdot \frac{0.5}{2} + T \cdot 6.2 = 0.1(Q2 \cdot 7 + P2 \cdot 5.5 + Q1 \cdot 4 + P1 \cdot 2)$$

$$12 \cdot 0.20 + 18.9 \cdot 0.175 + 24 \cdot 0.45 + 36 \cdot 0.25 + T \cdot 6.2 = 0.1(12 \cdot 7 + 18.9 \cdot 5.5 + 24 \cdot 4 + 36 \cdot 2)$$

$$25.51 + T \cdot 6.2 = 35.60$$

$$T = \frac{35.60 - 25.51}{6.2} = 1.63 \text{ kN}$$



### III.3 Equilibrio di una trave vincolata

La presenza di vincoli non modifica la struttura delle equazioni di equilibrio introdotte. Bisogna solo tener presente che nelle equazioni vanno conteggiate sia le forze esterne applicate (attive) sia le forze esercitate dai vincoli (reattive). Tali forze, dette reazioni vincolari, sono inizialmente incognite, ma sono tali da garantire l'equilibrio qualsiasi sia il carico (a patto ovviamente la struttura sia isostatica o iperstatica).

Usando una diversa simbologia, si può scrivere:

$$\mathbf{F}^{ext} + \mathbf{F}^{vinc} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{M}_Q^{ext} + \mathbf{M}_Q^{vinc} = \mathbf{0}$$

o in termini scalari (in 2D):

$$\sum_{i=1}^{N_e} F_{i_x}^{ext} + \sum_{i=1}^{N_v} F_{i_x}^{vinc} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N_e} F_{i_y}^{ext} + \sum_{i=1}^{N_v} F_{i_y}^{vinc} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N_e} M_{i_Q}^{ext} + \sum_{i=1}^{N_v} M_{i_Q}^{vinc} = 0$$

dove  $N_e$  = numero forze esterne applicate,  $N_v$  = numero reazioni vincolari.

La differenza tra isostaticità e iperstaticità sta nel fatto che le equazioni di equilibrio sono sufficienti a determinare le incognite reazioni vincolari solo nel caso isostatico (o labile ma isostatico sotto quella particolare condizione di carico).

L'equilibrio consente il calcolo delle reazioni dei due appoggi per le due condizioni di carico di Figura 4.

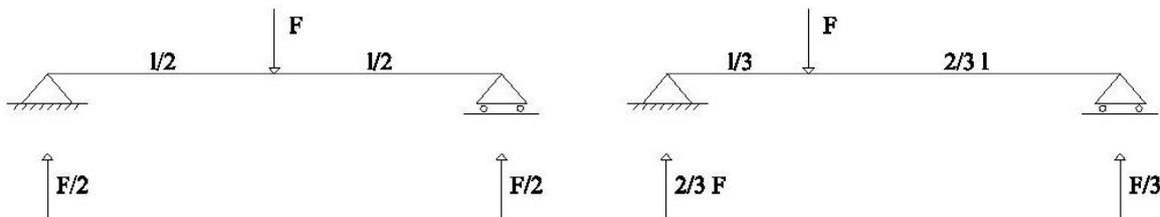


Figura 4. Reazioni vincolari su una trave isostatica.

### III.4 Caratteristiche statiche dei vincoli esterni.

Per poter imporre l'equilibrio di strutture vincolate è necessario sapere quali sono le forze che potenzialmente i vincoli sono in grado di esercitare. L'ipotesi che si fa è che un vincolo sia equivalente a una o più forze che esso esercita sulla struttura per tenerla in equilibrio sotto forze esterne.

La generica reazione vincolare è rappresentabile attraverso due forze ortogonali (usualmente orizzontale e verticale) e una coppia. A seconda del vincolo una o più di queste tre può essere nulla. I vincoli semplici hanno una solo componente diversa da zero, i doppi due e i tripli tre.

È facile intuire che le componenti vincolari sono diverse da zero nella direzione dello spostamento impedito. Se, per esempio, un vincolo impedisce la traslazione in una direzione, la sua reazione vincolare sarà costituita da una forza in quella direzione.

La valutazione delle reazioni vincolari è fondamentale per proporzionare i collegamenti di una struttura a terra e le connessioni tra le varie parti strutturali. Fondazioni, collegamenti solai-

muratura, trave-pilastro, ecc., possono essere dimensionati solo a valle di una valutazione delle forze che devono esercitare per mantenere la struttura in equilibrio sotto le azioni esterne.

Le azioni esterne sono rappresentate dal peso dei materiali, dai pesi dei carichi accidentali (persone, mobilio, ecc.), dal peso della neve, dall'azione del vento, dall'azione del sisma, da tutte quelle azioni, cioè, a cui una costruzione può essere sottoposta nella sua vita.

### III.4.1 Il carrello

Il carrello è un vincolo che impedisce l'atto di moto traslatorio del punto A nella direzione perpendicolare al piano di scorrimento del carrello stesso. La reazione vincolare allora è una forza nella direzione r.

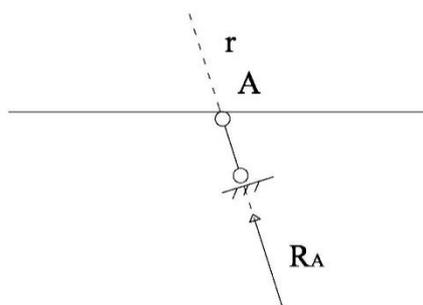
Modulo e verso sono determinati imponendo le sole leggi dell'equilibrio nel caso isostatico, equilibrio e congruenza nel caso iperstatico.



**Figura 5.** Reazione vincolare esercitata da un carrello.

### III.4.1 Il pendolo

Dal punto di vista statico il pendolo è equivalente al carrello. La sua reazione è costituita da un'unica forza nella direzione r.



**Figura 6.** Reazione vincolare esercitata dal pendolo esterno.

III.4.3 Il doppio-doppio pendolo

Il doppio-doppio pendolo vincola la trave a non poter avere atti di moto rotatori. La sua reazione è

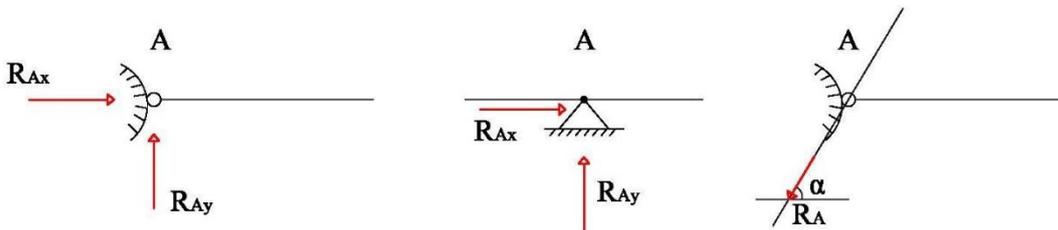


quindi una coppia.

**Figura 7.** Il vincolo doppio-doppio pendolo reagisce con una coppia

III.4.4 La cerniera

La cerniera a terra impedisce l'atto di moto traslatorio del punto P in una direzione qualsiasi. E' equivalente a due carrelli (o due pendoli) ortogonali. La sua reazione è quindi una forza incognita in direzione (angolo  $\alpha$ ) e modulo  $R_A$ , oppure incognita nelle sue componenti cartesiane  $R_{Ax}$  e  $R_{Ay}$



**Figura 8.** Il vincolo cerniera esterna

III.4.5 Doppio pendolo

Il doppio pendolo impedisce gli atti di moto rotatorio e traslatorio lungo la direzione r. Reagisce quindi con una forza di modulo  $R_A$  a direzione nota (coincidente con la retta r) e una coppia di

modulo  $M_A$  oppure, equivalentemente, con una forza  $R_A$  a distanza  $d = \frac{M_A}{R_A}$  da A.



**Figura 9.** Il vincolo doppio pendolo

Essendo, infatti, la reazione vincolare in esame costituita da una forza più una coppia, essa è equivalente a una forza applicata in un punto diverso da A. La posizione di tale punto dipende dai valori di forza e coppia reattive.

#### III.4.6 Incastro

L'incastro è un vincolo triplo. Reagisce quindi con una forza a direzione incognita e una coppia. Le incognite statiche sono tre e possono coincidere con le componenti cartesiane della forza più il valore della coppia oppure con modulo della forza  $R_A$ , sua inclinazione  $\alpha$  e sua distanza  $d$  (presa ortogonalmente alla retta d'azione di  $R_A$ ) dal punto A.

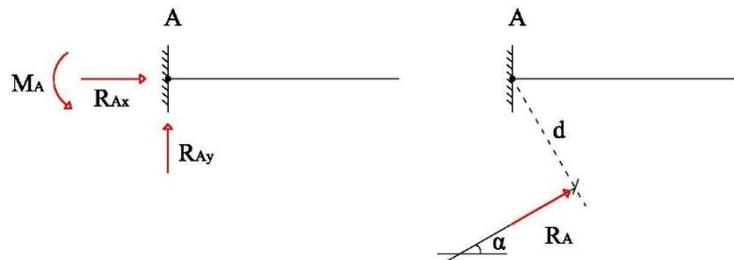


Figura 10. Reazioni vincolari esercitate dall'incastro

### **III.5 Analisi statica della trave**

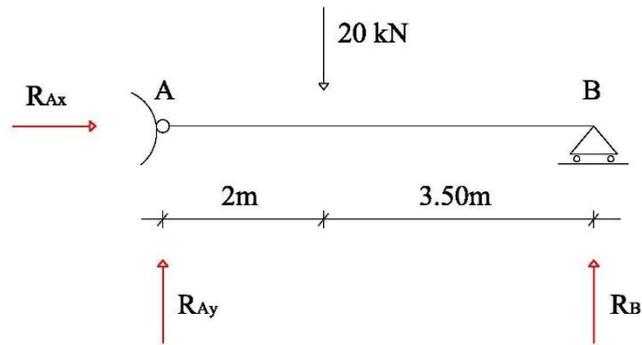
Note quindi le possibili forze (reazioni vincolari) esercitate dai vincoli esterni è possibile esplicitare le tre equazioni di equilibrio nelle incognite reazioni vincolari.

Le tre equazioni danno una soluzione unica se la struttura è isostatica o è labile ma staticamente determinata per la condizione di carico a cui è soggetta. In tali casi si avrà sempre un sistema di equazioni con un'unica soluzione (il determinante della matrice dei coefficienti risulta diverso da zero).

Le soluzioni equilibrate saranno invece infinite se la struttura caricata è iperstatica. In tal caso le incognite saranno superiori alle equazioni di equilibrio disponibili. Sarà necessario aggiungere delle equazioni di congruenza (nel corso di Scienza delle Costruzioni) per ottenere la soluzione.

Prima di scrivere le equazioni è necessario rappresentare le incognite reazioni vincolari e assegnare loro un verso di tentativo. Le equazioni sono scritte assegnando un verso positivo in modo da avere segni opposti per contributi opposti (a esempio due forze orizzontali una verso sinistra l'altra verso destra devono avere segni opposti nell'equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale).

Quando possibile evitare di risolvere il sistema di equazioni di equilibrio. E' consigliabile invece cercare di scrivere equazioni contenenti meno incognite possibile (l'optimum sarebbe una equazione - una incognita) e di espressione il più semplice possibile.



**Figura 11.** Versi ipotizzati delle reazioni vincolari.

In Figura 11 si è prima di tutto assegnato un verso di tentativo alle reazioni vincolari.

$R_{Ax}$  è nulla per l'equilibrio alla traslazione orizzontale. È possibile determinare  $R_{Ay}$  imponendo l'equilibrio alla rotazione intorno a B:

$$-R_{Ay} * 5.50 + 20 * 3.50 = 0 \Rightarrow R_{Ay} = \frac{20 * 3.50}{5.50} = 12.73 \text{ KN}$$

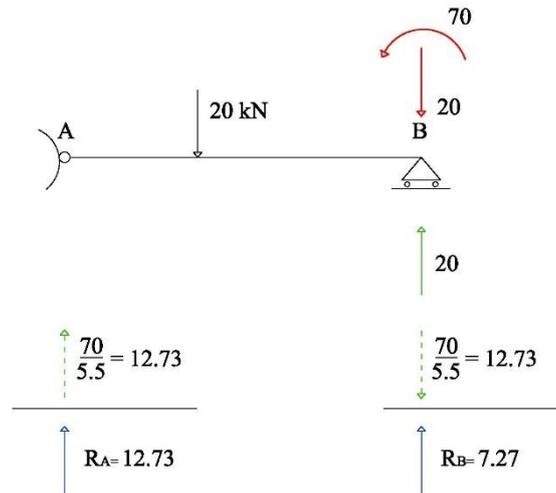
avendo assegnato il segno + ai momenti antiorari. La reazione  $R_B$  si può ricavare scrivendo l'equilibrio alla rotazione intorno ad A, oppure, essendo  $R_{Ay}$  nota, imponendo l'equilibrio alla traslazione verticale:

$$R_{Ay} + R_B - 20 = 0 \Rightarrow 12.73 + R_B - 20 = 0 \Rightarrow R_B = 20 - 12.73 = 7.27 \text{ KN}$$

Il segno positivo significa che il verso ipotizzato è corretto. Da sottolineare che i versi da assegnare alle reazioni vincolari sono del tutto arbitrari. Il loro contributo nell'equazione, poi, potrà essere positivo o negativo.

È possibile determinare le reazioni vincolari su una trave caricata seguendo una strada equivalente alla scrittura delle equazioni di equilibrio (vedi Figura 12).

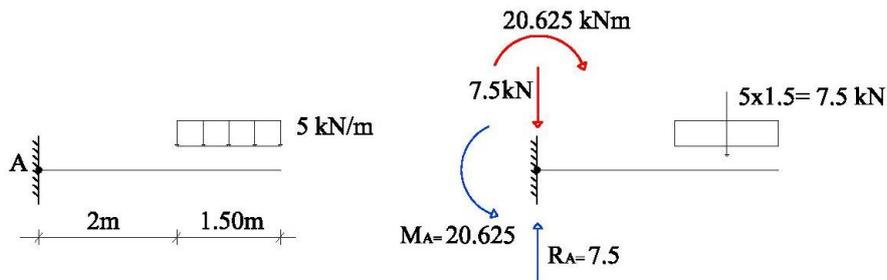
La forza applicata può essere spostata in A o in B (in rosso in figura) mantenendo l'equivalenza vettoriale. Lo spostamento del vettore genera una coppia di trasporto. La forza traslata è equilibrata direttamente dal vincolo (in verde), la coppia da due forze parallele che, data la disposizione del carrello, non possono che essere verticali (in verde tratteggiato). La reazione in B è la somma dei due contributi:  $R_B = 20 - 12.73 = 7.27 \text{ KN}$  verso l'alto.



**Figura 12.** Equilibrio attraverso il trasporto dell'azione esterna.

Sommando i contributi di forza traslata e coppia di trasporto si è implicitamente applicato il principio di sovrapposizione degli effetti che sarà introdotto più dettagliatamente nel paragrafo successivo: molto semplicemente il principio afferma che gli effetti (nell'esempio le reazioni vincolari) di due cause (nell'esempio forza e coppia) si possono sommare come se applicati da soli.

Seguendo la procedura di Figura 12 in Figura 13 si intuisce che la reazione in A è costituita da una forza di 7.5 kN verso l'alto e da una coppia antioraria di 20.63 kNm.

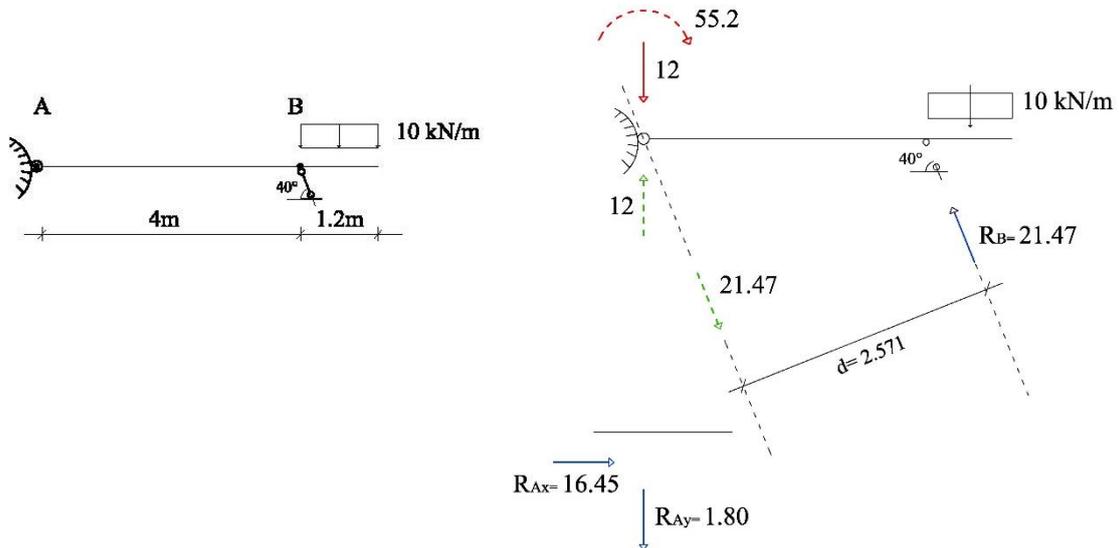


**Figura 13.** Equilibrio di una mensola caricata.

In Figura 14 la coppia di trasporto è equilibrata da due forze parallele a distanza  $d = 4.0 \cdot \sin 40^\circ = 2.571$  m. Quindi:

$$\text{Reazione inclinata} = \frac{55.2}{2.571} = 21.47 \text{ KN}$$

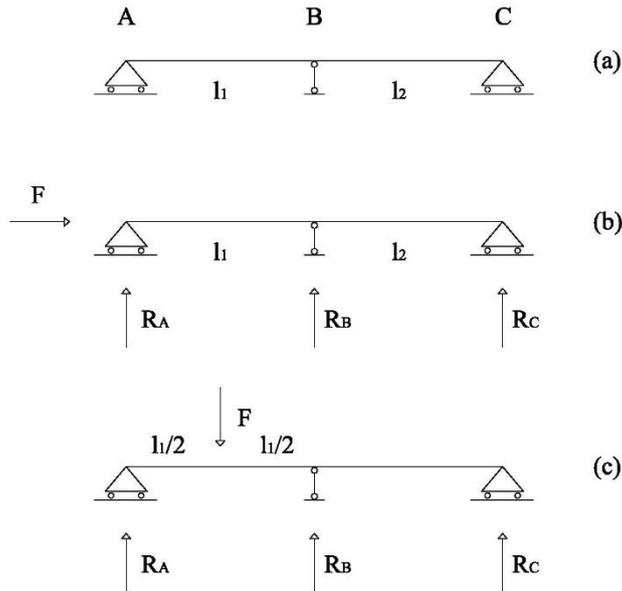
Le reazioni vincolari finali si ottengono sommando vettorialmente i due contributi in A.



**Figura 14.** Esempio di coppia di trasporto equilibrata da forze inclinate.

Nell'applicare tale procedura bisogna fare attenzione a dove si sposta la forza esterna e a come si equilibra la coppia di trasporto. Nell'esempio di Figura 14 la forza esterna va spostata in A e non in B.

Cosa succede se si cerca di determinare le reazioni vincolari su una trave "apparentemente isostatica", ma in realtà labile e iperstatica per errata disposizione dei vincoli?



**Figura 15.** Trave con vincoli mal disposti.

Si prenda in esame la trave di Figura 15(a). Essa è labile perché può avere un atto di moto rigido traslatorio orizzontale, ma è anche iperstatica nei confronti dei carichi verticali.

Per forze orizzontali, infatti, vedi Figura 15(b), le reazioni vincolari non sono in grado di garantire l'equilibrio. L'equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale può essere soddisfatta solo da  $F = 0$ .

Per forze verticali, invece, vedi Figura 15(c), l'equilibrio è soddisfatto, ma non consente il calcolo delle reazioni vincolari. L'equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale si riduce a un'identità, mentre le equazioni di equilibrio alla traslazione verticale e l'equazione di equilibrio alla rotazione (intorno al polo A) si esplicitano:

$$R_A + R_B + R_C - F = 0$$

$$-F * \frac{l_1}{2} + R_B * l_1 + R_C * (l_1 + l_2) = 0$$

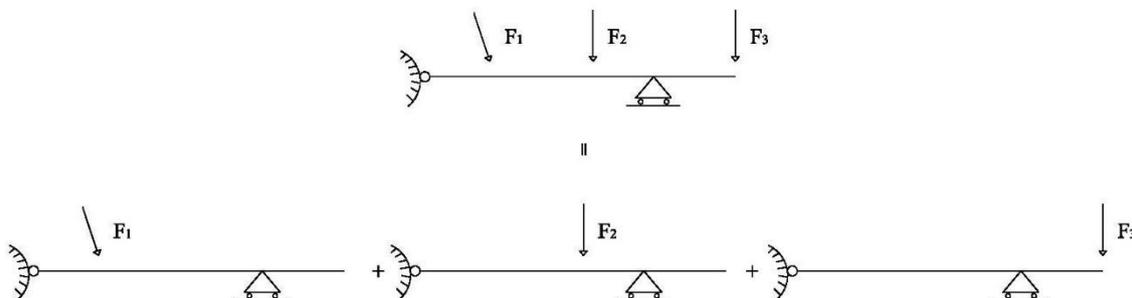
Due equazioni in tre incognite  $\Rightarrow$  infinite soluzioni.

Tale situazione è tipica nei casi in cui c'è un'errata disposizione dei vincoli: se questi sono in numero sufficiente a garantire l'isostaticità (quindi tre per la singola trave), la trave non è in equilibrio per alcune condizioni di carico (labilità) mentre per altre condizioni di carico il solo equilibrio non è sufficiente a determinare le reazioni vincolari incognite (iperstaticità).

In definitiva, l'equilibrio di una trave isostatica caricata si riduce alla determinazione di al massimo tre incognite (forze o coppie reattive). Nel caso di più carichi esterni applicati può risultare utile invocare il principio di sovrapposizione degli effetti.

### III. 6 Principio di sovrapposizione degli effetti

Tale principio stabilisce che sotto certe ipotesi gli effetti di più carichi applicati si possono valutare sommando gli effetti relativi ai carichi applicati singolarmente (Figura 16).



**Figura 16.** Sovrapposizione degli effetti

Per effetti si intendono reazioni vincolari, sforzi interni (o caratteristiche della sollecitazione nel caso di travi) e deformazioni (spostamenti e rotazioni delle sezioni nel caso di travi).

Le ipotesi che devono essere soddisfatte sono:

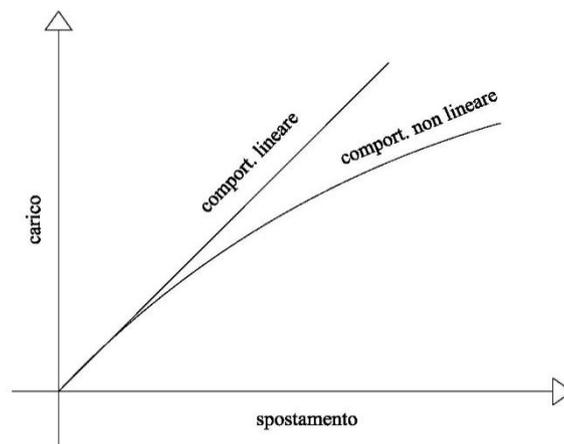
- spostamenti infinitesimi

- materiali a comportamento elastico lineare
- vincoli lisci e bilateri

La prima ipotesi significa supporre che gli spostamenti delle sezioni della trave (o anche dei baricentri di tali sezioni uniti con la linea d'asse) abbiano tutte le derivate prime trascurabili rispetto all'unità. In maniera approssimata tale ipotesi si considera soddisfatta se lo spostamento massimo rapportato alla luce libera è molto piccolo rispetto all'unità:

$$\frac{s_{\max}}{l} \ll 1$$

Sulla seconda ipotesi si discuterà in dettaglio in un capitolo successivo. Si può anticipare in maniera semplicistica che un materiale ha un comportamento elastico lineare (Figura 17) se mantiene una proporzionalità lineare tra carico e spostamento (a carico doppio corrisponde spostamento doppio per esempio) e se rimosso il carico recupera tutta la deformazione (assenza di deformazioni plastiche e/o di fessurazioni fragili).



**Figura 17.** Comportamento lineare e comportamento non lineare sotto carico.

L'acciaio, a esempio, ha un comportamento elastico lineare fino al 70-80% del suo carico di rottura. In base al principio di sovrapposizione degli effetti quindi, le reazioni vincolari della trave in Figura 18 sono:

$$R_A = \frac{ql_1}{2} - \frac{Fl_2}{l_1}$$

$$R_B = \frac{ql_1}{2} + F\left(1 + \frac{l_2}{l_1}\right)$$

dove si è indicato col segno + le forze verso l'alto.

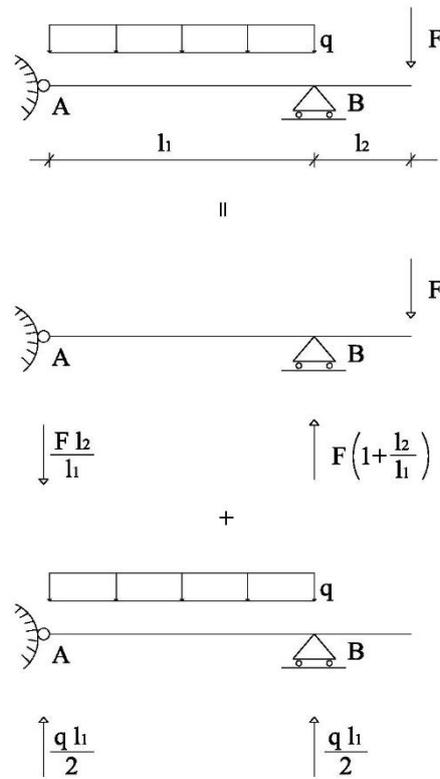


Figura 18. Sovrapposizione delle reazioni vincolari.

### III.7 Vincoli interni

I vincoli interni sono elementi di collegamento tra le varie parti della struttura. Reagiscono, in maniera mutua, con forze e/o coppie. Se tra due travi, tali azioni interne risultano uguali e opposte. Le azioni esercitate dal vincolo interno sulle travi collegate sono “duali” allo spostamento relativo impedito. Se, per esempio, il vincolo impedisce la traslazione relativa nella direzione  $x$ , esso eserciterà sulle travi che collega due forze uguali e opposte aventi direzione  $x$ .

#### III.7.1 Il pendolo interno

Il pendolo interno tra due travi reagisce con due forze uguali e opposte parallele alla direzione del pendolo (Figura 19).

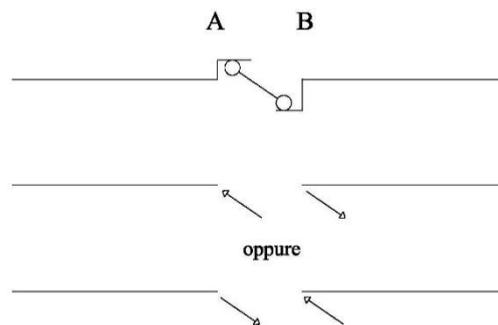


Figura 19. Reazioni vincolari del pendolo interno

Le azioni esercitate dal pendolo sulle due travi che collega sono uguali in modulo, ma opposte in verso.

$$\mathbf{R}_A = -\mathbf{R}_B$$

$$|\mathbf{R}_A| = |\mathbf{R}_B|$$

Nella scrittura delle equazioni di equilibrio conviene prendere come incognito il modulo di tale azione interna.

### III.7.2 Il doppio-doppio pendolo interno

Il doppio-doppio pendolo interno tra due travi reagisce con due coppie uguali e opposte.

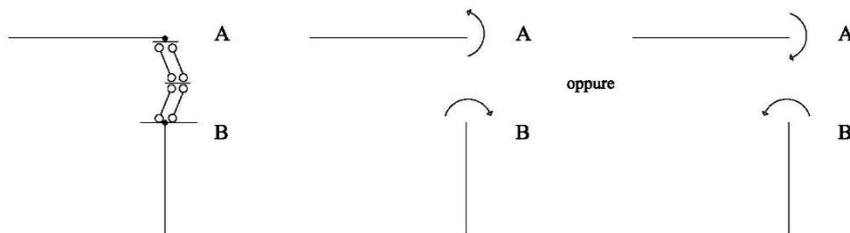


Figura 20. Reazioni vincolari del doppio-doppio pendolo interno

$$\mathbf{M}_A = -\mathbf{M}_B$$

$$|\mathbf{M}_A| = |\mathbf{M}_B|$$

### III.7.3 La cerniera interna

La cerniera interna tra due travi reagisce con due forze uguali e opposte. A differenza del pendolo dove la direzione della forza è nota ed è incognito il solo suo modulo, tali forze sono incognite sia in direzione che in modulo (Figura 21).

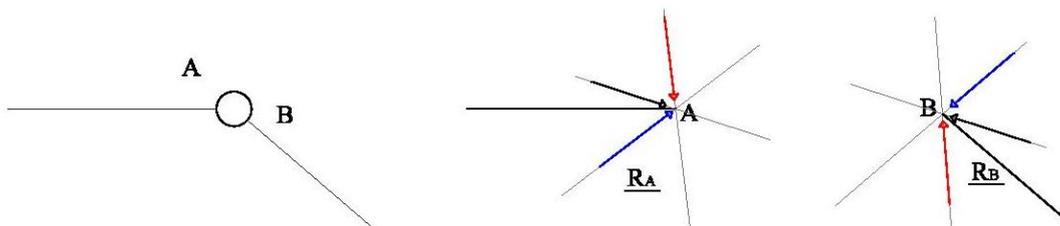
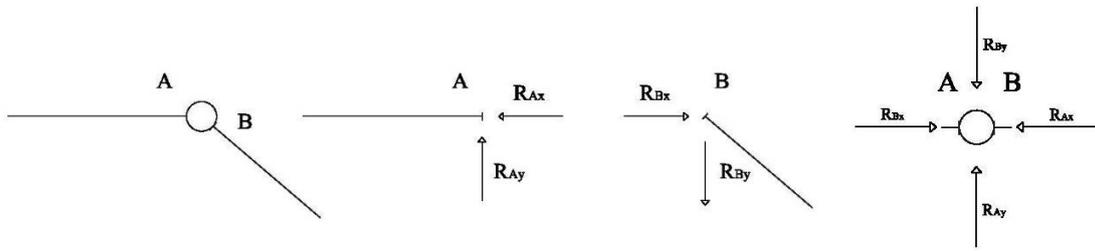


Figura 21. Reazioni vincolari della cerniera interna tra due travi

e vale  $\mathbf{R}_A = -\mathbf{R}_B$ .

Equivalentemente si può affermare che dell'azione esercitata dalla cerniera sulle due travi sono incognite le due componenti (Figura 22) secondo due direzioni ortogonali (a esempio orizzontale e verticale).



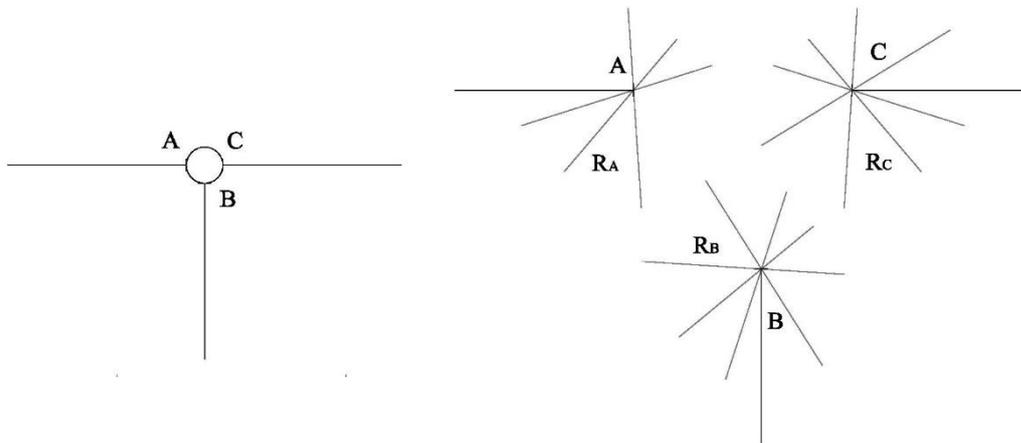
**Figura 22.** Azione esercitata dalla cerniera interna sulle due travi collegate

dove

$$\begin{aligned} R_{A_x} &= -R_{B_x} \\ R_{A_y} &= -R_{B_y} \end{aligned}$$

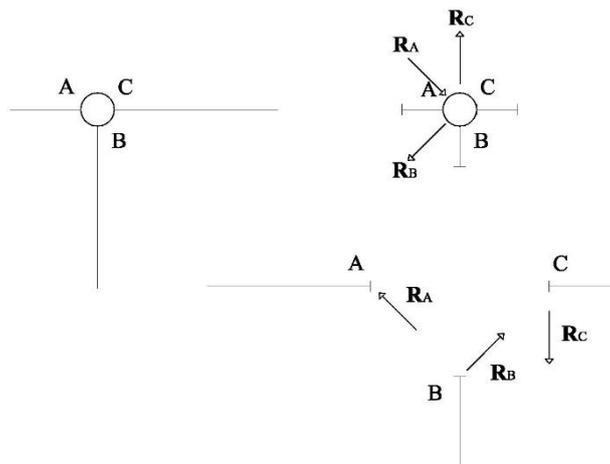
Nella scrittura delle equazioni di equilibrio conviene prendere come incogniti i moduli delle due componenti.

Una cerniera interna può collegare anche più di due travi. In tal caso la cerniera esercita una forza incognita in modulo e direzione su ogni trave.



**Figura 23.** Su ogni trave agisce l'azione esercitata dalla cerniera

Per l'equilibrio della cerniera la somma delle azioni esercitate dalla cerniera sulle travi deve essere uguale a zero:  $\mathbf{R}_A + \mathbf{R}_B + \mathbf{R}_C = \mathbf{0}$



**Figura 24.** Azioni esercitate dalla cerniera sulle travi e dalle travi sulla cerniera.

E le azioni esercitate dalle travi sulla cerniera sono uguali e opposte a quelle esercitate dalla cerniera sulle travi.

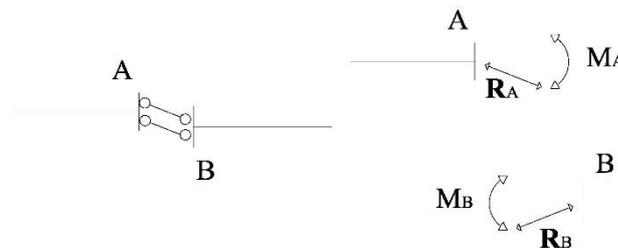
### III.7.4 Doppio pendolo interno

Il doppio pendolo tra due travi reagisce con due forze e due coppie rispettivamente uguali e opposte:

$$\mathbf{R}_A = -\mathbf{R}_B$$

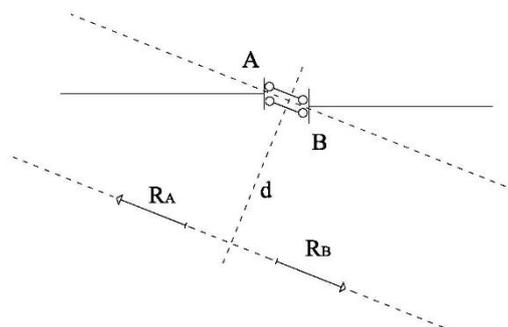
$$M_A = -M_B$$

Le forze hanno la direzione del doppio-pendolo mentre sono incognite, al pari delle coppie, in modulo (Figura 25).



**Figura 25.** Reazioni vincolari del doppio pendolo interno

La reazione vincolare del doppio pendolo interno è equivalente a due forze incognite in posizione ( $d$  incognito) e modulo ( $|\mathbf{R}_A| = |\mathbf{R}_B|$ ) - vedi Figura 26. Tale considerazione risulterà particolarmente utile quando si imporrà l'equilibrio in maniera grafica.



**Figura 26.** Il doppio pendolo interno reagisce con due forze uguali e opposte applicate a distanza  $d$

### III.7.5 Incastro interno

L'incastro interno esercita sulle due travi che collega un'azione equivalente a una forza (incognita in direzione e modulo) e a una coppia (incognita in modulo).

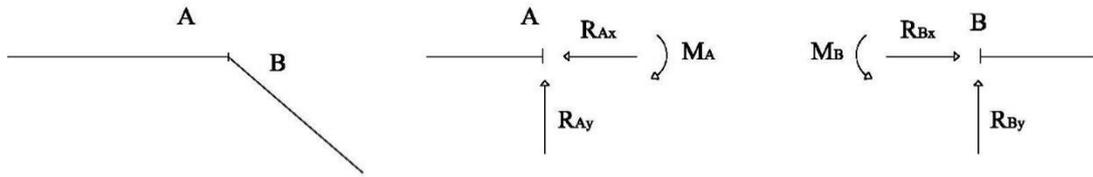


Figura 27. Reazioni vincolari dell'incastro tra due travi

Tale reazione può essere rappresentata dalle due componenti della forza e dal modulo della coppia (Figura 27), dove:

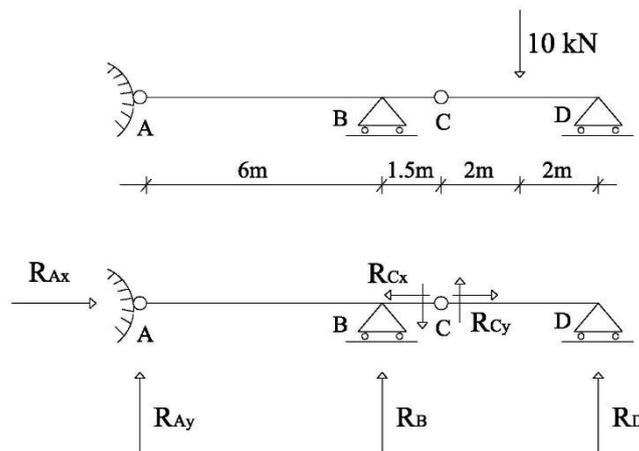
$$\left. \begin{array}{l} R_{Ax} = -R_{Bx} \\ R_{Ay} = -R_{By} \\ M_A = -M_B \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \mathbf{R}_A = -\mathbf{R}_B \\ M_A = -M_B \end{array} \right.$$

### III.8 Analisi statica di sistemi di travi

Un sistema strutturale costituito da più travi collegate tra loro e vincolate a terra è in grado di equilibrare qualsiasi condizione di carico purché staticamente determinato o iperstatico. Nel caso isostatico le equazioni di equilibrio sono sufficienti per determinare univocamente le reazioni vincolari. Nel caso iperstatico, invece, le equazioni di equilibrio non sono sufficienti.

Nel corso di Statica si focalizza l'attenzione solo ai sistemi isostatici lasciando la risoluzione dei sistemi iperstatici al corso di Scienza delle Costruzioni.

Le equazioni di equilibrio a disposizione sono tre per ogni trave componente il sistema e tre per l'equilibrio globale (l'equilibrio cioè dell'intera struttura). Tali equazioni vanno scritte in numero pari alle incognite reazioni vincolari. Si ipotizza il verso e si assegna un nome a ciascuna componente reattiva. Si scrivono poi le equazioni stabilendo a priori un verso positivo delle forze e una rotazione positiva per i momenti.

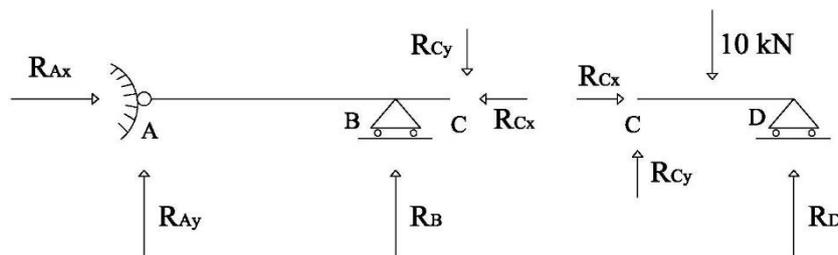


**Figura 28.** Struttura isostatica caricata e reazioni vincolari incognite

Nel sistema di Figura 28 le incognite sono sei. Con  $R_{C_x}$  e  $R_{C_y}$  si sono indicati i moduli delle componenti rispettivamente orizzontale e verticale delle due reazioni interne in C.

Le equazioni di equilibrio sono tre per ogni tratto (Figura 29):

$$\begin{array}{l} \text{tratto } AC \left[ \begin{array}{l} R_{A_x} - R_{C_x} = 0 \\ R_{A_y} + R_B - R_{C_y} = 0 \\ A) R_B * 6 - R_{C_y} * 7.5 = 0 \end{array} \right. \\ \text{tratto } CD \left[ \begin{array}{l} R_{C_x} = 0 \\ R_{C_y} - 10 + R_D = 0 \\ C) -10 * 2 + R_D * 4 = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

**Figura 29.** Equilibrio di ciascuna trave del sistema

Si è scelto di prendere col segno più le forze orizzontali verso destra, le forze verticali verso l'alto e i momenti antiorari. La scelta è del tutto arbitraria, può essere cambiata senza modificare il risultato finale.

E' consigliabile scegliere il polo di ciascuna equazione di equilibrio alla rotazione in modo da annullare il contributo del maggior numero di incognite. A e C nel primo tratto e C nel secondo tratto sono scelte opportune.

Scrivere le tre equazioni di equilibrio per ogni trave di un sistema di più travi, però, comporta la risoluzione di un sistema di equazioni. Tale strada è matematicamente corretta ma poco formativa e piena di insidie perché può richiedere parecchi calcoli numerici. Il sistema di equazioni relativo alla struttura di Figura 28 ammette la soluzione:

$$R_{A_x} = 0$$

$$R_{A_y} = -1.25$$

$$R_B = 6.25$$

$$R_{C_x} = 0$$

$$R_{C_y} = 5$$

$$R_D = 5$$

Le incognite con valore (nell'esempio in esame in KN) negativo hanno segno opposto a quello ipotizzato. La soluzione è rappresentata in Figura 30 come azione dei vincoli sulle travi.

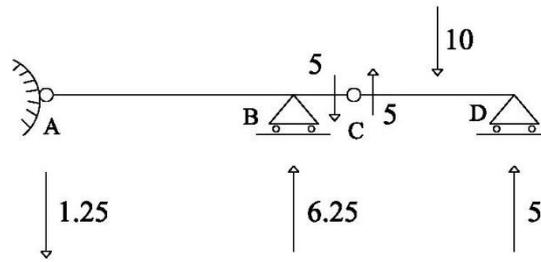


Figura 30. Valori finali delle reazioni vincolari

Il procedimento esposto è del tutto generale.

In alternativa si può scrivere un sistema di equazioni che coinvolga le sole incognite vincolari esterne (ovvero  $\mathbf{R}_A$ ,  $\mathbf{R}_B$  e  $\mathbf{R}_D$ ) determinando le reazioni vincolari interne ( $\mathbf{R}_C$  nell'esempio di Figura 28) in un secondo momento. Per fare ciò si scrivono le tre equazioni di equilibrio globale:

$$\text{struttura AD} \begin{cases} R_{Ax} = 0 \\ R_{Ay} + R_B - 10 + R_D = 0 \\ A) R_B * 6 - 10 * 9.5 + R_D * 11.5 = 0 \end{cases}$$

e si affiancano tante equazioni (dette ausiliarie) quante necessarie per quadrare il sistema. In tal caso le incognite reazioni vincolari esterne sono quattro e quindi è necessario aggiungere un'equazione ausiliaria.

Tale equazione va scritta con riferimento a un singolo tratto di struttura (AC o CD nell'esempio) e deve essere scelta in funzione del vincolo interno. Il criterio guida è scrivere l'equazione di equilibrio (tra equilibrio alla traslazione ed equilibrio alla rotazione) in modo che la reazione vincolare interna non compaia.

Se il vincolo interno è una cerniera, ciò significa scrivere l'equazione di equilibrio (del tratto AC o equivalentemente del tratto CD) intorno alla cerniera stessa. Se il vincolo interno è un doppio pendolo, l'equazione ausiliaria è un'equazione di equilibrio alla traslazione nella direzione perpendicolare alla direzione del doppio pendolo. Se il vincolo interno è un pendolo, le equazioni ausiliarie sono due: equilibrio alla rotazione intorno al punto posizione del pendolo ed equilibrio alla traslazione nella direzione perpendicolare al pendolo. Così via per gli altri vincoli interni.

Nell'esempio in esame l'equazione ausiliaria si scrive:

$$\text{tratto AC)} \quad -R_{Ay} * 7.5 - R_B * 1.5 = 0$$

o equivalentemente:

$$\text{tratto CD)} \quad -10 * 2 + R_D * 4 = 0$$

Entrambe le scelte sono valide. È banale sottolineare che è preferibile prendere tra le due o quella che contiene meno incognite o più semplice dal punto di vista numerico, in tal caso sicuramente quella relativa al tratto CD.

Le quattro equazioni così scritte formano un sistema nelle incognite reazioni vincolari esterne la cui soluzione è:

$$R_{A_x} = 0$$

$$R_{A_y} = -1.25$$

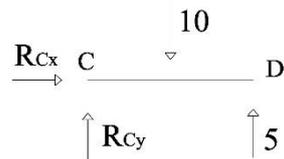
$$R_B = 6.25$$

$$R_D = 5$$

Successivamente si può tornare sull'equilibrio di uno dei due tratti (in tal caso è più semplice l'equilibrio del tratto CD) e determinare la reazione vincolare interna, unica incognita vettoriale rimasta (vedi Figura 31):

$$R_{C_x} = 0$$

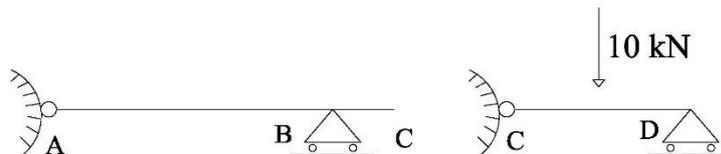
$$D) -R_{C_y} * 4 + 10 * 2 = 0 \Rightarrow R_{C_y} = 5$$



**Figura 31.** Determinazione delle reazioni vincolari interne dopo aver ottenuto le reazioni vincolari esterne.

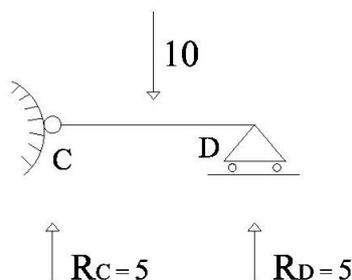
Seppure in misura minore, anche questa procedura comporta la risoluzione di un sistema di equazioni. Esiste un'ulteriore alternativa che si può definire sintetica.

La struttura viene divisa in sottostrutture semplici isostatiche facendo tesoro di quanto già detto nell'analisi cinematica dei sistemi di travi. Laddove un tratto è collegato attraverso un vincolo interno a un altro tratto privo di labilità (quindi isostatico o iperstatico), tale collegamento viene schematizzato come un vincolo a terra.



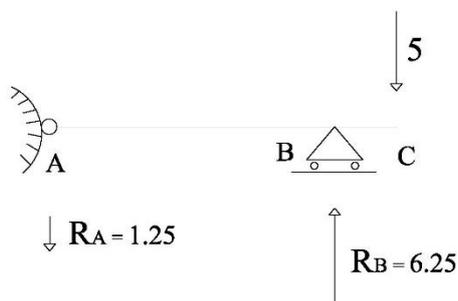
**Figura 32.** Semplificazione di una struttura di due travi in due sottostrutture a una trave.

Per l'esempio in esame tale semplificazione è rappresentata in Figura 32. Le reazioni vincolari della trave CD sono quelle di una trave su due appoggi con forza in mezzeria:



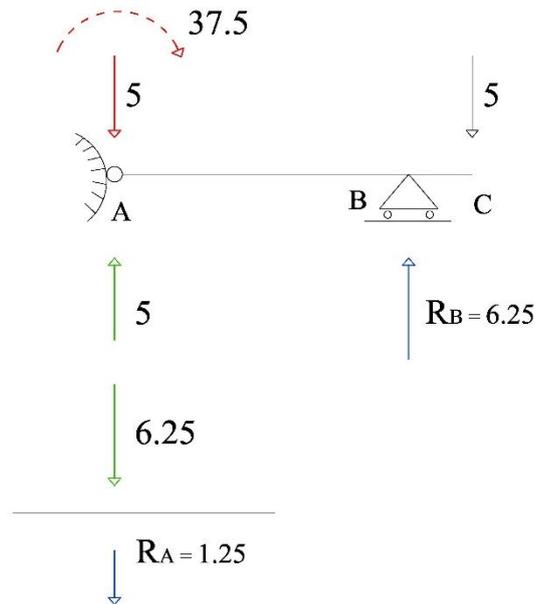
**Figura 33.** Risoluzione della trave CD

Mentre le reazioni vincolari della trave AC si determinano applicando l'azione interna in C nota:  
 Da notare che l'azione in C sulla trave AC non è altri che la reazione in C, cambiata di segno, calcolata sullo schema CD. Quella determinata sullo schema CD rappresenta infatti l'azione del vincolo interno C sulla trave di destra.



**Figura 34.** Risoluzione della trave AC

Le reazioni vincolari su schemi semplificati (quali quelli della mensola, della trave su due appoggi, ecc.) potrebbero essere determinate evitando di esplicitare le equazioni di equilibrio. Può essere seguita, infatti, la procedura semplificata già introdotta nel paragrafo III.5, del tutto equivalente alla scrittura delle equazioni di equilibrio.



**Figura 35.** Reazioni vincolari con spostamento della forza esterna

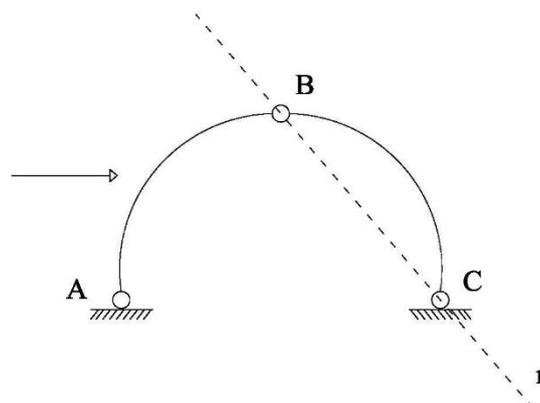
Sia per la trave che per sistemi di più travi è possibile dedurre le reazioni vincolari seguendo una strada grafica. La procedura è del tutto equivalente alla scrittura delle equazioni di equilibrio. Ha il pregio di fornire rapidamente le reazioni vincolari anche se in una veste grafica. È possibile anche accoppiarla alla strada analitica: ottenere graficamente le direzioni e i versi delle reazioni vincolari per semplificare il calcolo dei moduli attraverso poche e semplici equazioni di equilibrio.

L'equilibrio su strutture isostatiche caricate può essere ricondotto a:

- equilibrio tra due forze
- equilibrio tra tre forze
- equilibrio tra quattro forze.

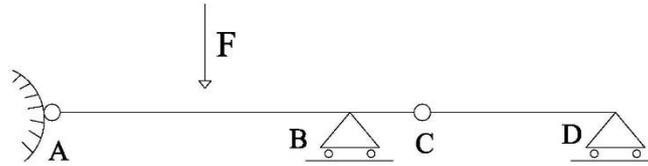
L'equilibrio tra due forze impone che le due forze abbiano la stessa retta d'azione, stesso modulo e versi opposti. Quando ciò non è possibile, le due forze devono essere nulle.

Nell'esempio di Figura 36 l'equilibrio del tratto BC è equilibrio tra due forze, la reazione della cerniera C sul tratto CD e la reazione esterna in D. Tale equilibrio impone che le due reazioni siano stese sulla retta  $r$ .



**Figura 36.** Equilibrio tra due forze sul tratto BC

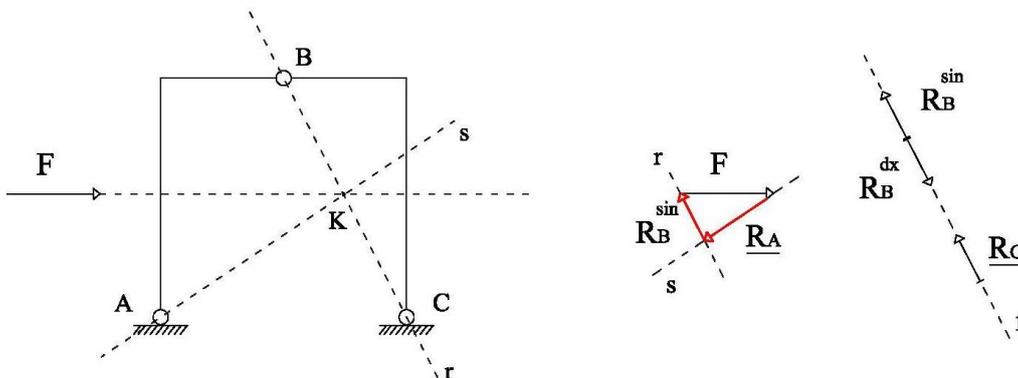
Nell'esempio di Figura 37 l'equilibrio del tratto CD è equilibrio tra la reazione interna in C e la reazione esterna in D. Data la direzione del carrello in D, affinché ci sia equilibrio le due forze devono essere nulle.



**Figura 37.** Equilibrio tra due forze sul tratto CD: il tratto deve essere scarico

Condizione necessaria affinché tre forze siano in equilibrio è che le tre forze giacciono su rette che si incontrano in un punto. La condizione è anche sufficiente se le tre forze formano un poligono dei vettori chiuso, se cioè disegnate una dopo l'altra sono tali da avere primo e ultimo estremo coincidenti. Per l'equilibrio del tratto BC dell'esempio di Figura 38 le reazioni  $\mathbf{R}_B^{dx}$  e  $\mathbf{R}_C$  giacciono sulla retta  $r$ . L'equilibrio del tratto AB è equilibrio di tre forze ( $\mathbf{R}_A, \mathbf{F}$  e  $\mathbf{R}_B^{\sin}$ ) di due delle quali ( $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{R}_B^{\sin}$ ) sono noti direzione e punto di applicazione. Queste due forze si incontrano nel punto K per il quale dovrà passare la terza forza incognita  $\mathbf{R}_A$  (retta  $s$ ). I moduli, nella scala grafica del disegno, si ricavano imponendo la chiusura del poligono dei vettori.

$\mathbf{R}_B^{dx}$  e  $\mathbf{R}_C$ , infine, si ricavano tenendo presente che la reazione della cerniera C a sinistra è uguale e opposta alla reazione della stessa cerniera a destra e che vale l'equilibrio del tratto BC. Una volta determinata la retta  $r$  si può in alternativa sfruttare l'equilibrio dell'intera struttura AC per arrivare allo stesso equilibrio tra tre forze.



**Figura 38.** L'equilibrio del tratto AB è equilibrio tra tre forze.

L'equilibrio tra quattro forze si può trasformare in un equivalente equilibrio tra due forze: ciascuna forza è la risultante di due delle quattro forze. La retta sulla quale si trovano le due risultanti è detta anche retta ausiliaria.

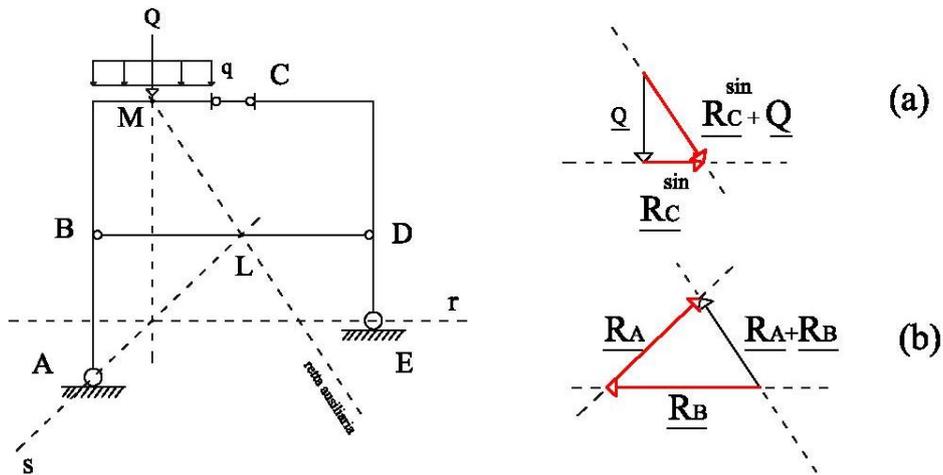


Figura 39. L'equilibrio del tratto AC è equilibrio tra quattro forze

Nell'esempio di Figura 39 l'equilibrio del tratto CE è equilibrio tra tre forze e implica che la reazione in E sia orizzontale ( $R_E$  deve giacere sulla retta  $r$ ). L'equilibrio esterno è ancora equilibrio tra tre forze e implica che  $R_A$  si trovi sulla retta  $s$ . L'equilibrio del tratto AC è equilibrio tra quattro forze.

La somma  $R_A + R_B$  deve passare per il punto L e la somma  $Q + R_C^{\sin}$  (dove si è indicato con  $Q$  la risultante del carico distribuito) deve passare per M. Le due somme devono essere in equilibrio, devono essere quindi due forze giacenti sulla stessa retta, uguali in modulo e opposte in verso. Tali somme devono quindi stare sulla retta ausiliaria indicata in figura. Individuata la retta ausiliaria è possibile poi determinare graficamente i moduli di  $R_C^{\sin} + Q$  e  $R_C^{\sin}$  (vedi (a)) e poi i moduli di  $R_A$  e  $R_B$  (vedi (b)).

### III.9 Caratteristiche della sollecitazione interna

Il calcolo delle reazioni vincolari esterne consente di proporzionare elementi quali fondazioni, murature, pilastri, ecc... La conoscenza delle reazioni vincolari interne aiuta nel proporzionamento di elementi quali nodi di travature reticolari, incroci tra travi, ecc.

Per verificare, però, elementi strutturali (travi, pilastri, ecc.) esistenti o per progettarne di nuovi è necessario determinare le azioni interne. Tali azioni rappresentano le interazioni che si scambiano due sezioni contigue di trave (vedi a esempio Figura 40).

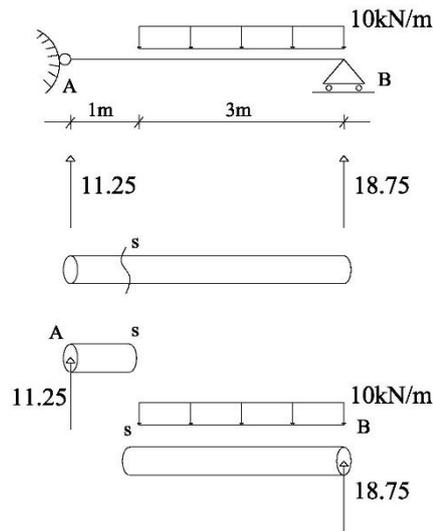


Figura 40. Azioni interne nella sezione S

La presenza di tali azioni è necessaria per garantire l’equilibrio della parte AS di trave e l’equilibrio della parte SB di trave. Ciascuna parte è sottoposta ai propri carichi e vincoli.

Nella sezione S della trave di Figura 40 l’azione esercitata dalla parte SB sulla parte AS è uguale e opposta all’azione esercitata dalla parte AS sulla parte SB. Entrambe le azioni si trasmettono punto per punto e sono rappresentabili con vettori applicati distribuiti su S.

Come tutti i sistemi di vettori, tale sistema è equivalente a una risultante e a un momento risultante entrambi applicati nel baricentro G della sezione (Figura 41).

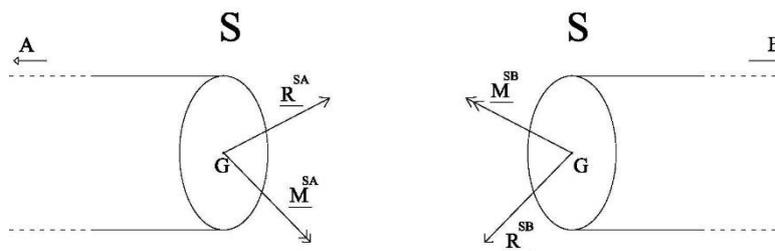


Figura 41. L’azione interna in S è equivalente a una forza e a una coppia

Vale:

$$\mathbf{R}^{SA} = -\mathbf{R}^{SB}$$

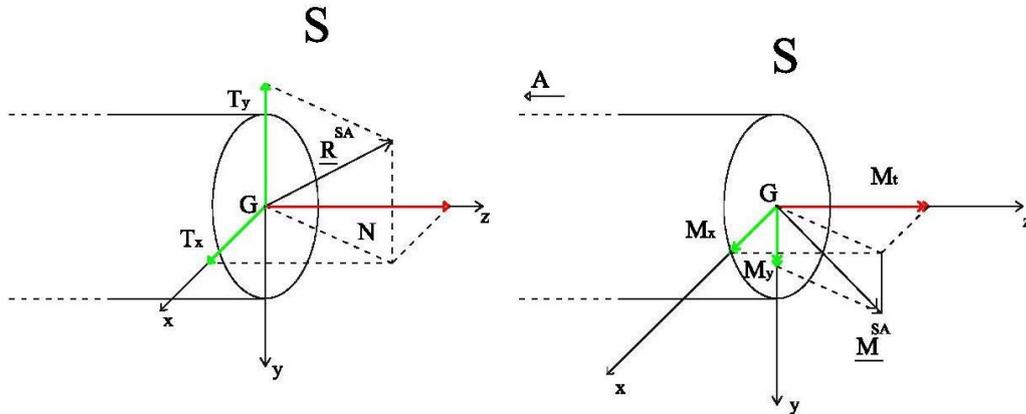
$$\mathbf{M}^{SA} = -\mathbf{M}^{SB}$$

Risultante e momento risultante degli sforzi interni nella sezione S si possono determinare imponendo l’equilibrio o della parte AS o della parte SB di trave. Ciascuna parte deve essere in equilibrio sotto l’azione di carichi e reazioni vincolari su di essa applicati e sotto l’azione dell’azione mutua. In tale equilibrio le uniche incognite vettoriali sono date da  $\mathbf{R}$  e da  $\mathbf{M}$ .

Per sistemi di travi comunque disposti e caricati nello spazio, risultante e momento risultante sono orientati secondo direzioni qualsiasi e sono, ciascuno, scomponibili in tre direzioni, una assiale e due

taglianti. Le componenti di  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{M}$  secondo queste tre direzioni prendono il nome di **caratteristiche della sollecitazione interna** (di seguito anche indicate con CdS).

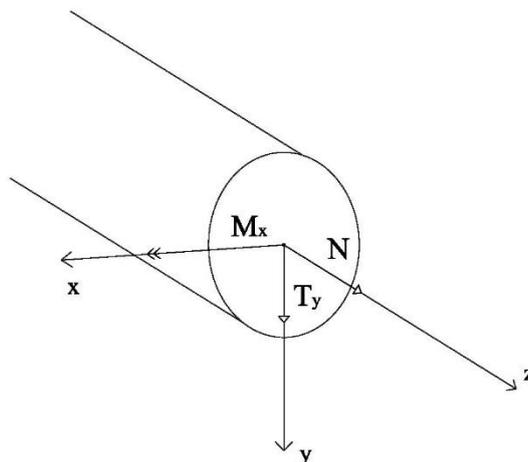
In genere la direzione  $z$  si fa coincidere con la direzione assiale,  $x$  e  $y$  con le direzioni taglianti (vedi Figura 42).



**Figura 42.** Scomposizione di risultante e momento risultante secondo direzione assiale e taglianti.

Con il sistema di riferimento in Figura 42, la componente della risultante degli sforzi interni lungo la direzione assiale prende il nome di **SFORZO NORMALE**, la componente secondo la direzione tagliante  $x$  **TAGLIO SECONDO X** e la componente secondo la direzione tagliante  $y$  **TAGLIO SECONDO Y**. La componente del momento risultante degli sforzi interni lungo la direzione assiale prende il nome di **MOMENTO TORCENTE**, la componente secondo la direzione  $x$  **MOMENTO FLETTENTE INTORNO A X** e la componente secondo la direzione  $y$  **MOMENTO FLETTENTE INTORNO A Y**.

Se travi, carichi applicati e vincoli appartengono a un piano, il sistema strutturale si dice piano e le caratteristiche della sollecitazione si riducono a tre: sforzo normale, uno dei due tagli e uno dei due momento flettenti, risultando le altre nulle. Se il piano coincide con il piano  $yz$ , allora le CdS diverse da zero sono sforzo normale, taglio secondo  $y$  e momento flettente intorno a  $x$  (vedi Figura 43). Si ricordi che un vettore momento del tipo  $\mathbf{M}_x$  rappresenta una coppia agente nel piano  $yz$ .

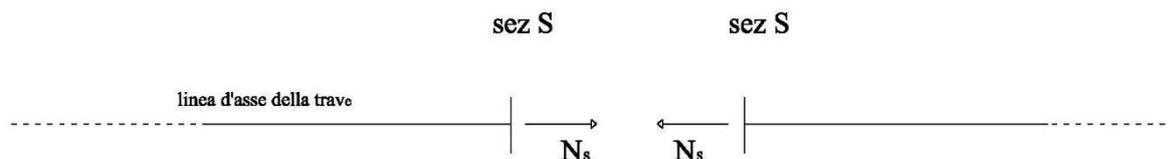


**Figura 43.** Caratteristiche della sollecitazione se trave, carichi e vincoli appartengono al piano yz.

### III.8.1 Convenzione positiva

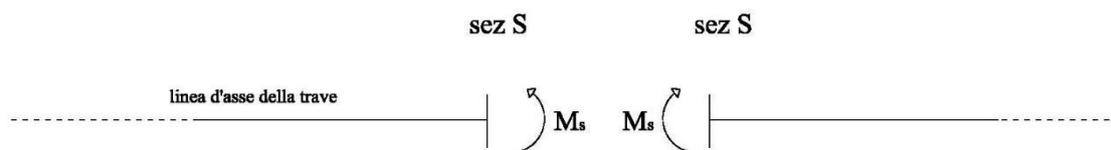
Esiste una convenzione positiva delle caratteristiche della sollecitazione la cui origine storica è legata a vari motivi.

Lo sforzo normale è considerato positivo se di trazione (uscente dalla sezione) se, cioè, l'azione esercitata dalla parte di struttura rimossa su quella in esame tende ad allungare quest'ultima (vedi Figura 44). Il motivo di tale scelta è forse legato al fatto che uno sforzo normale di compressione è più "pericoloso" di uno di trazione. La questione risulterà più chiara nel corso di Scienza delle Costruzioni, ma è qui utile sollecitare l'intuito dello studente nel rendersi conto che una compressione può dar vita a fenomeni di instabilità che la trazione non genera (un'asta compressa "tende" ad abbandonare la geometria rettilinea al crescere della compressione).



**Figura 44.** Sforzo normale positivo per convenzione

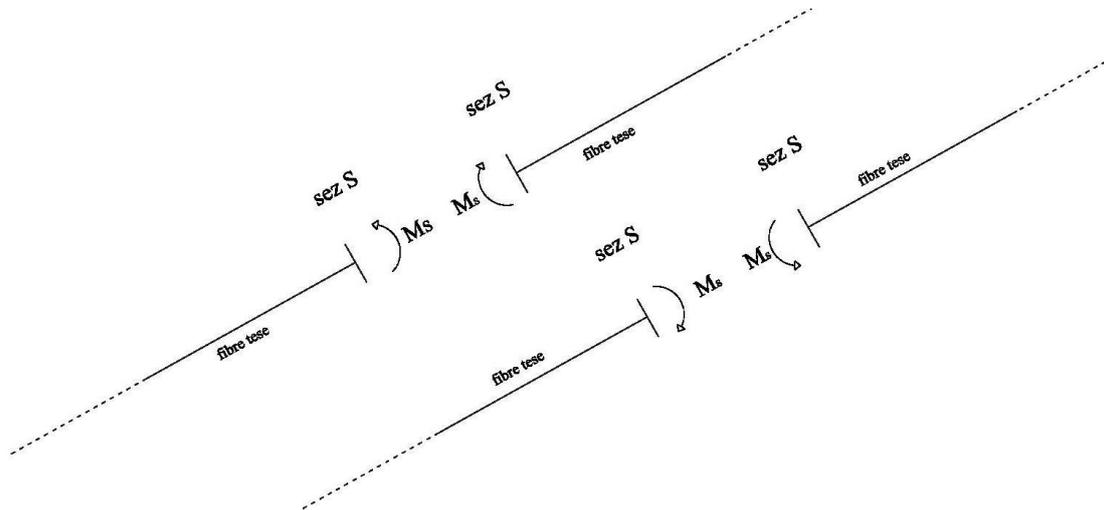
Il momento flettente è considerato positivo se tende le fibre inferiori.



**Figura 45.** Momento flettente positivo

Tale convenzione ha senso solo per travi orizzontali, perde di significato per travi verticali. Qualsiasi è l'inclinazione della trave, però, risulta fondamentale saper riconoscere le fibre tese per un assegnato momento flettente.

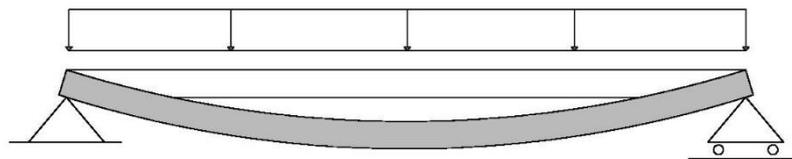
In Figura 46 sono riportati due esempi.



**Figura 46.** Momento flettente e fibre tese corrispondenti

La convenzione del momento flettente è legata al fatto che lo schema strutturale più diffuso nelle costruzioni edili è la trave su più appoggi (vedi solaio in edifici in muratura, solaio e travi in edifici in c.a. e acciaio) caricata dai pesi di cose e persone. Questa condizione di carico sulla trave continua genera fibre tese inferiori per gran parte di essa.

La trave su due appoggi, per esempio, sotto il peso proprio e i carichi accidentali si comporta come in Figura 47.

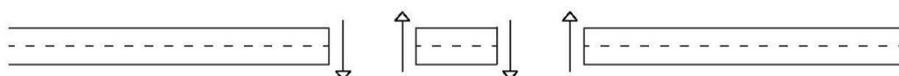


**Figura 47.** La trave su due appoggi sotto i comuni carichi verticali ha fibre tese inferiori

E' risultato quindi naturale in passato assegnare al momento flettente segno positivo se tale da tendere le fibre inferiori.

Per quanto riguarda il taglio non esiste alcuna motivazione particolare associata alla scelta della convenzione positiva. Ne è dimostrazione il fatto che si possono trovare diverse convenzioni positive nei testi di Scienza delle Costruzioni.

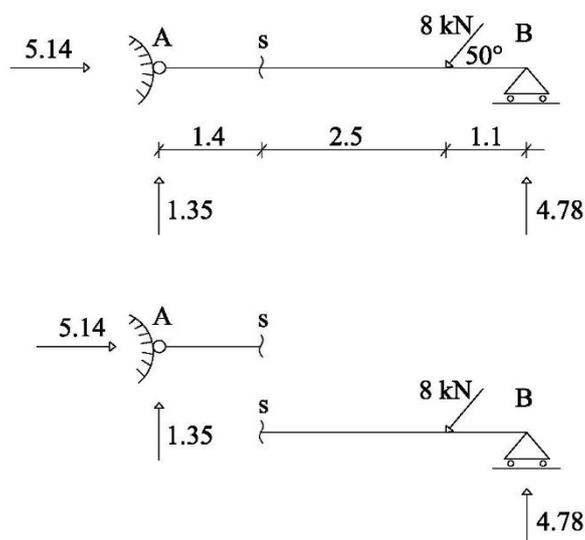
In questo Corso il taglio è assunto positivo nella sezione S di trave se, come azione di una parte di trave sull'altra gira in verso orario rispetto alla parte di trave su cui è applicato. O, equivalentemente, prendendo in esame un concio di trave a cavallo della sezione S isolato dal resto della struttura, le azioni taglianti esercitate dalla struttura sul concio sono due forze che girano in senso orario rispetto al centro del concio.



**Figura 48.** Taglio positivo.III.8.2 Determinazione di una caratteristica della sollecitazione in una sezione di trave

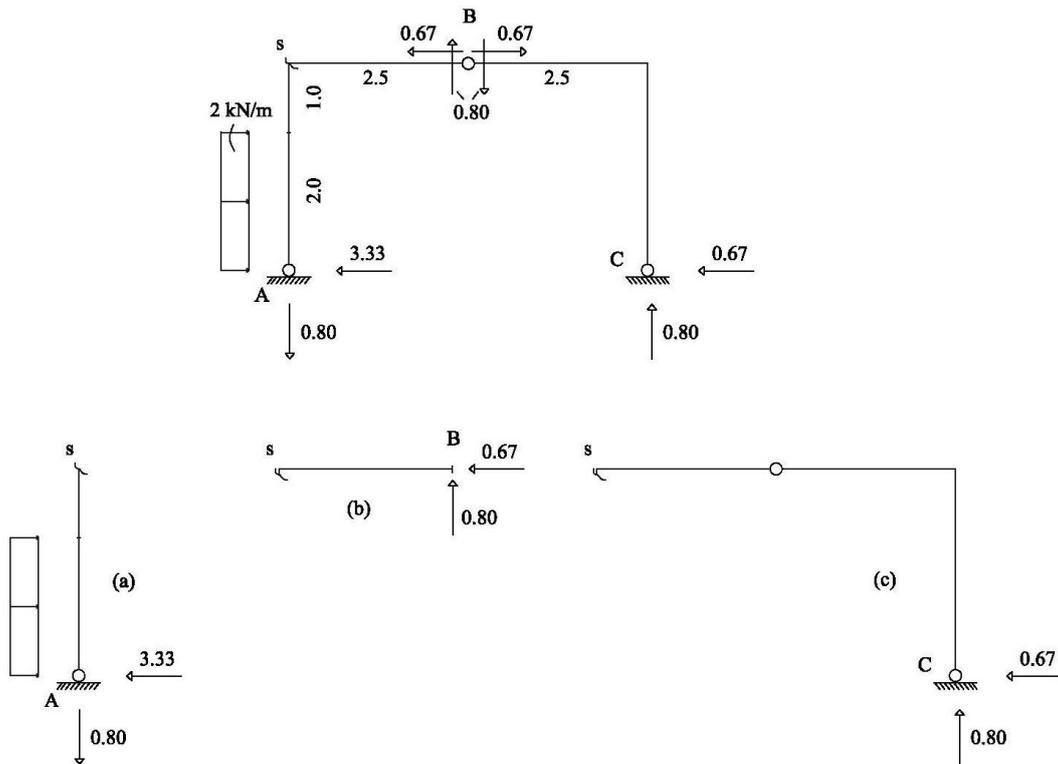
Per determinare il valore di una o più caratteristiche della sollecitazione in una sezione S di un sistema strutturale è sufficiente applicare la definizione stessa di CdS. È necessario determinare preventivamente le reazioni vincolari.

Si isola (indifferentemente) o la parte di struttura a sinistra della sezione S o la parte di struttura a destra della sezione S (Figura 49).

**Figura 49.** Determinazione delle CdS in una sezione: sottostrutture da esaminare.

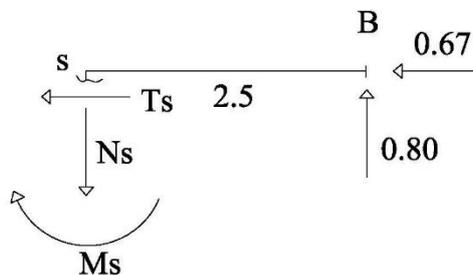
Nel caso di sistemi costituiti da più elementi collegati tra loro da vincoli interni è possibile isolare la parte di struttura che va dalla sezione al primo vincolo interno - Figura 50(b) - o tutta la struttura fino ai vincoli esterni - Figura 50(a,c).

Ai fini della determinazione delle CdS è del tutto indifferente se considerare la parte di struttura da un lato o dall'altro della sezione S. Entrambe le strade portano allo stesso risultato. E' però consigliabile scegliere la parte più semplice per ridurre i rischi di errore, dove per parte più semplice va intesa la parte soggetta a meno forze esterne e vincolari. Nell'esempio di Figura 50 le opzioni (b) e (c) sono più semplici rispetto all'opzione (a).



**Figura 50.** Determinazione delle CdS in una sezione nel caso di più travi con vincoli interni

Una volta isolata la sottostruttura,  $N$ ,  $T$  e  $M$  in  $S$  sono rispettivamente la forza assiale applicata nel baricentro  $G$  di  $S$  necessaria per avere l'equilibrio alla traslazione assiale, la forza tagliante applicata in  $G$  per avere l'equilibrio nella direzione tagliante, la coppia in  $G$  necessaria per avere l'equilibrio alla rotazione intorno al polo  $G$ . Con riferimento all'esempio di Figura 50 si ha:



**Figura 51.** Determinazione delle CdS in  $S$  come equilibrio della sotto-struttura di riferimento

Per determinare  $T$ ,  $N$ ,  $M$  la maniera più semplice consiste nell'ipotizzarli con un certo verso (di solito positivo nella convenzione di riferimento delle CdS) e nello scrivere le tre equazioni di equilibrio.

Dalla Figura 51 si ha:

$$0.8 - N_S = 0 \Rightarrow N_S = 0.8$$

$$-0.67 - T_S = 0 \Rightarrow T_S = -0.67$$

$$0.8 * 2.5 - M_S = 0 \Rightarrow M_S = 2.0$$

L'eventuale segno meno finale indica che la corrispondente CdS è opposta a quella ipotizzata.

Oltre al calcolo in una sezione di trave, però, risulta necessario tracciare dei diagrammi in grado di

visualizzare le CdS per tutte le sezioni di tutti gli elementi strutturali del sistema. Ciò al fine di individuare le zone più sollecitate e operare così il dimensionamento degli elementi resistenti.

I diagrammi delle CdS sono di norma disegnati prendendo come fondamentale l'asse stesso della trave.

Un esempio diagramma del momento flettente è riportato in Figura 52. Il segmento perpendicolare all'asse condotto dalla generica sezione S fornisce il valore in scala del momento flettente in S.

Al fine di tracciare i diagrammi delle CdS sulle travi è opportuno introdurre delle relazioni differenziali che forniscono dei legami tra le CdS e i carichi applicati.

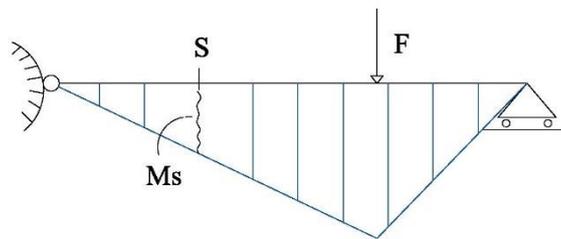


Figura 52. Esempio di diagramma del momento flettente

### III.10 Equazioni indefinite dell'equilibrio per la trave rettilinea.

Le equazioni indefinite dell'equilibrio per la trave rettilinea sono equazioni differenziali che mettono in relazione sforzo normale  $N$ , taglio  $T$  e momento flettente  $M$ , nella generica sezione  $S$  di una trave rettilinea, con i carichi applicati.

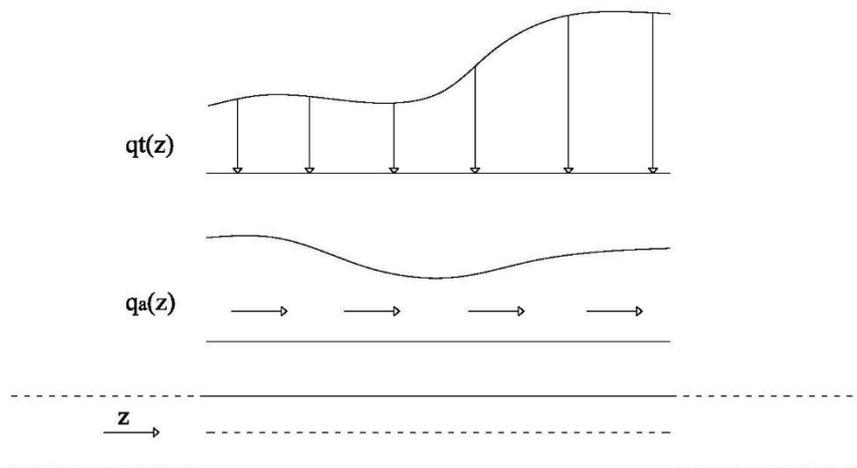
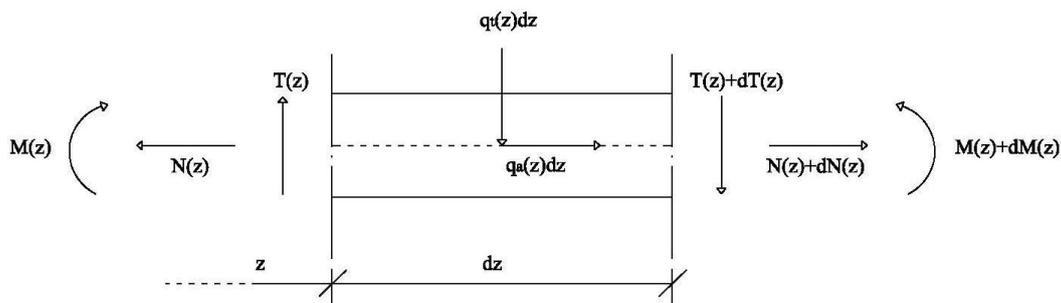


Figura 53. Elemento di trave rettilinea soggetto a carichi generici.

Se con  $q_t(z)$  e  $q_a(z)$  si indicano i carichi applicati (variabili con la coordinata  $z$ ) rispettivamente nella direzione tagliante e assiale (Figura 53), le equazioni indefinite dell'equilibrio per la trave rettilinea si scrivono:

$$\begin{aligned}\frac{dN(z)}{dz} &= -q_a(z) \\ \frac{dT(z)}{dz} &= -q_t(z) \\ \frac{dM(z)}{dz} &= T(z)\end{aligned}\quad (1)$$

La dimostrazione è semplice e si basa sulla scrittura delle equazioni cardinali della statica sul concio di trave di lunghezza  $dz$  soggetto ai carichi esterni e alle caratteristiche della sollecitazione sulle due sezioni estreme (vedi Figura 54).



**Figura 54.** Concio di trave estratto dalla struttura caricata in maniera generica

I carichi tagliante e assiale compaiono attraverso le rispettive risultanti.  $dN(z)$ ,  $dT(z)$  e  $dM(z)$  forniscono la variazione passando dalla sezione di sinistra di posizione  $z$  alla sezione di destra di posizione  $z+dz$ . Le equazioni di equilibrio si esplicitano:

$$-N(z)+q_a(z)dz+N(z)+dN(z) = 0$$

$$T(z)-q_t(z)dz-(T(z)+dT(z)) = 0$$

$$-M(z)-T(z)dz+q_t(z)\frac{dz^2}{2} + M(z)+dM(z) = 0$$

dove l'equilibrio alla rotazione è imposto prendendo come polo il baricentro della sezione di destra.

Data la piccolezza del concio  $dz$  il termine  $q_t(z)\frac{dz^2}{2}$  risulta un infinitesimo di ordine superiore rispetto agli altri termini e quindi il passaggio al limite per  $dz \rightarrow 0$  fornisce la forma finale (1).

Le relazioni differenziali (1) sono utili per stabilire la legge di variazione delle CdS attraverso il solo esame dei carichi applicati: il taglio ha una variazione di un ordine superiore al carico tagliante applicato (così come tra sforzo normale e carico assiale) e il momento flettente due ordini rispetto al carico tagliante e un ordine rispetto al taglio.

A esempio, a carico tagliante costante corrisponde taglio variabile con legge lineare e momento variabile con legge quadratica.

E' facile dedurre il seguente specchietto:

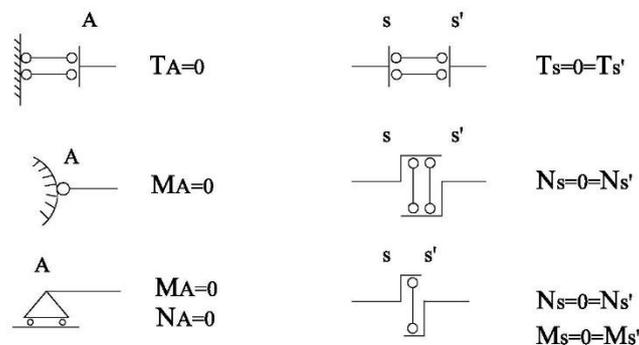
$q_a(z)$	$N(z)$		$q_t(z)$	$T(z)$	$M(z)$
0	cost		0	cost	lin
cost	lin		cost	lin	parab
lin	parab		lin	parab	cub
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

### III.11 Tracciamento dei diagrammi delle CdS.

I diagrammi delle CdS si tracciano dividendo le travi in tratti e determinando i valori in alcune sezioni significative essendo nota la variabilità lungo la trave stessa.

Se, per esempio, si sa dai carichi applicati che su un certo tratto di trave il taglio deve essere costante, si determinerà quel valore costante in una sezione generica di quel tratto. Se invece il diagramma deve essere lineare, si determinerà la CdS in due sezioni.

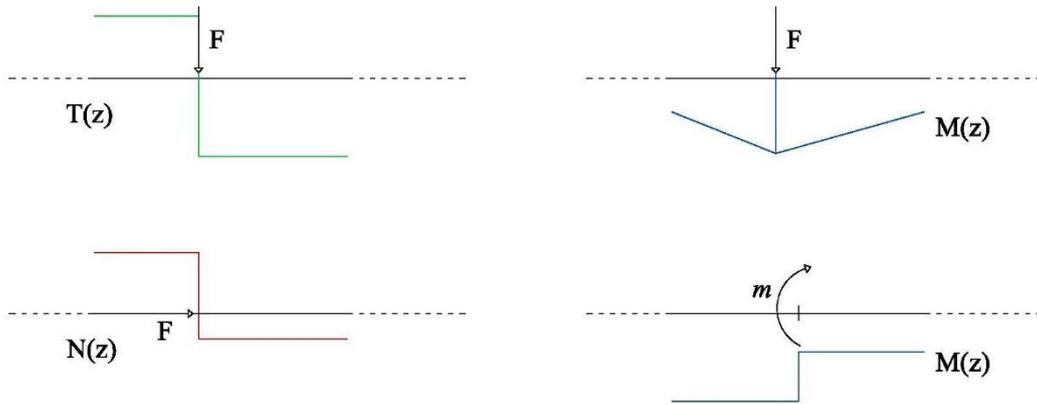
È utile fare alcune considerazioni.



**Figura 55.** Esempi di vincoli (esterni e interni) in cui una CdS può essere zero

1. Una CdS deve essere zero in corrispondenza dei vincoli, esterni e interni, incapaci di reagire in quella direzione. Alcuni esempi sono riportati in Figura 55.
2. Nel punto di applicazione di una forza tagliante il taglio non è definito e presenta un salto di discontinuità, e il momento presenta un punto angoloso. Il taglio infatti cambia bruscamente passando dalla sezione prima del punto di applicazione della forza a quella dopo, il momento cambia bruscamente pendenza perché la sua pendenza coincide con il valore del taglio (Figura 56).

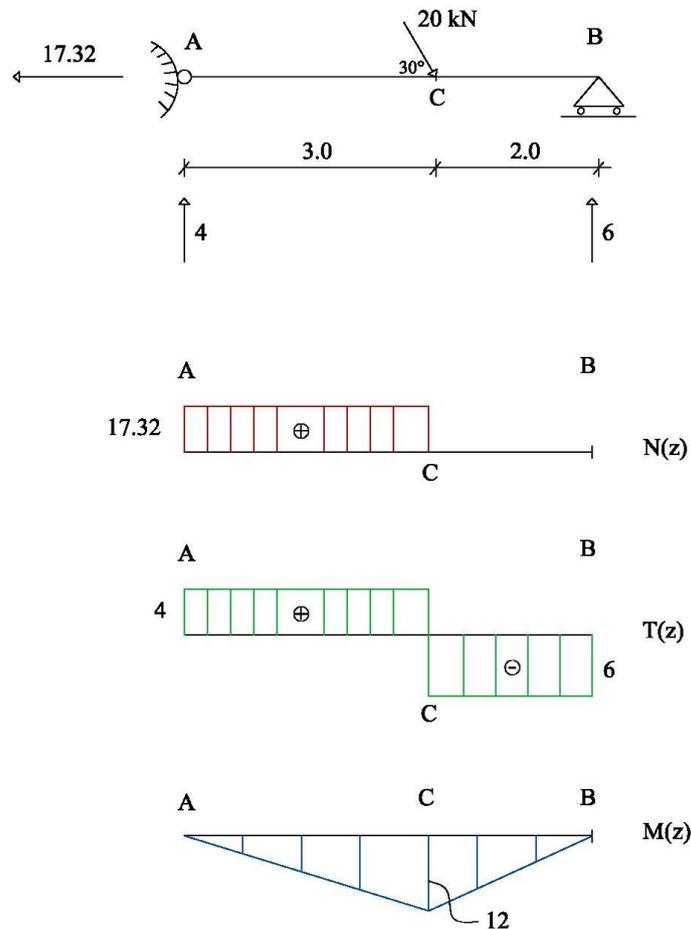
Analoghe considerazioni si possono fare nei punti di applicazione di forza assiale e coppia concentrata.



**Figura 56.** Discontinuità e cambi di pendenza in sezioni caricate da forze o coppie.

Per tracciare il diagramma di una CdS su un sistema strutturale è opportuno suddividere il sistema in tratti nei quali la caratteristica in esame non abbia discontinuità o cambi di pendenza.

Nell'esempio di Figura 57, una volta determinate le reazioni vincolari, si procede al tracciamento dei diagrammi nei tratti AC e CB.



**Figura 57.** Diagrammi di N, T e M per una trave su due appoggi soggetta a una forza inclinata

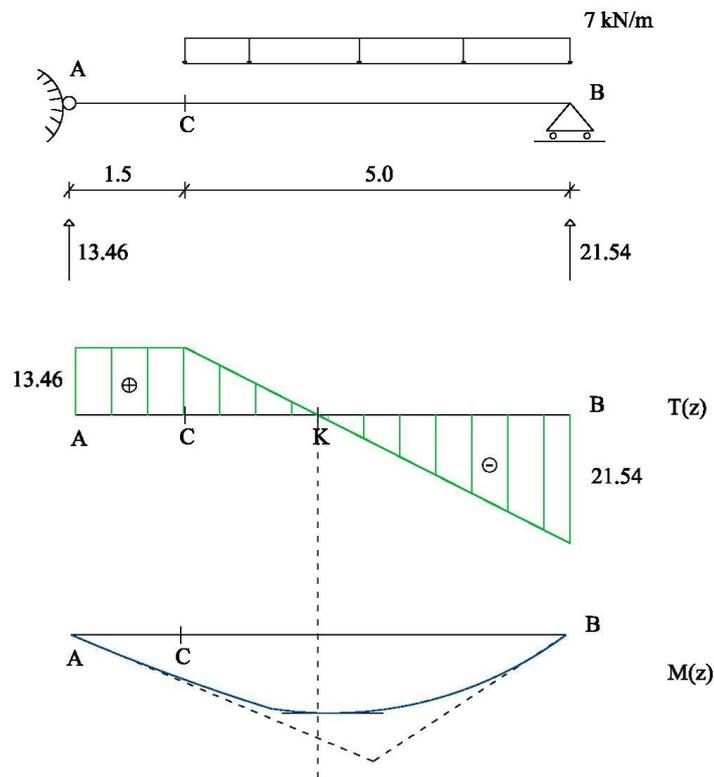
Data l'assenza di carichi distribuiti assiali e taglianti, N e T risultano costanti nei tratti AC e CB. Le costanti nei due tratti, però, non sono uguali in quanto la forza applicata ha sia una componente assiale

(e quindi salto nel diagramma di  $N$ ) sia una componente tagliante (e quindi salto nel diagramma di  $T$ ). Le due costanti vanno determinate calcolando  $N$  e  $T$  in due sezioni qualsiasi rispettivamente nel tratto  $AC$  e nel tratto  $CB$ .

Il diagramma di  $M$  è lineare in entrambi i tratti. Le due linee però hanno pendenza diversa. I valori di  $M$  in  $A$  e  $B$  sono nulli. È sufficiente, quindi, determinare il valore di  $M$  in  $C$  per completare il diagramma. Attenzione a tracciare il diagramma di  $M$  dalla parte delle fibre tese, dalla parte inferiore per questo esempio.

Se il carico tagliante è costante, nasce la necessità di tracciare un diagramma del momento flettente parabolico.

Nell'esempio di Figura 58 determinate le reazioni vincolari, il diagramma del taglio lineare nel tratto  $CB$  si completa collegando i valori di  $T$  in  $C$  e  $B$ .



**Figura 58.** Esempio di diagramma parabolico del momento

Il diagramma del momento si traccia ricavando prima il diagramma (sbagliato) che si avrebbe se il carico si sostituisse con la sua risultante (tratteggiato in Figura 58). Tale diagramma risulta essere una bilineare la cui parte relativa ad  $AC$  è corretta, mentre la rimanente tratteggiata fornisce di vero solo le tangenti alla parabola agli estremi. Il diagramma corretto si completa nel tratto  $CB$ , quindi, tracciando la parabola come in Figura 58.

Da notare che quando il diagramma del taglio cambia segno, come avviene nel tratto  $CB$ , il diagramma del momento cambia monotonia. Tale considerazione può risultare utile per determinare

la posizione della sezione in cui il momento risulta massimo. Per l'esempio in figura, se con  $x$  si indica la distanza di  $K$  da  $C$  si ha:

$$T_K = 0 \Leftrightarrow 13.46 - 7 * x = 0 \Rightarrow x = CK = 1.92 \text{ m}$$

Nell'esempio di Figura 59 il diagramma del momento presenta un punto angoloso nella sezione B. Non è possibile quindi tracciare il diagramma nel tratto DC come un'unica parabola: le parabole sono due separate da un cambio di pendenza della tangente nel punto B.

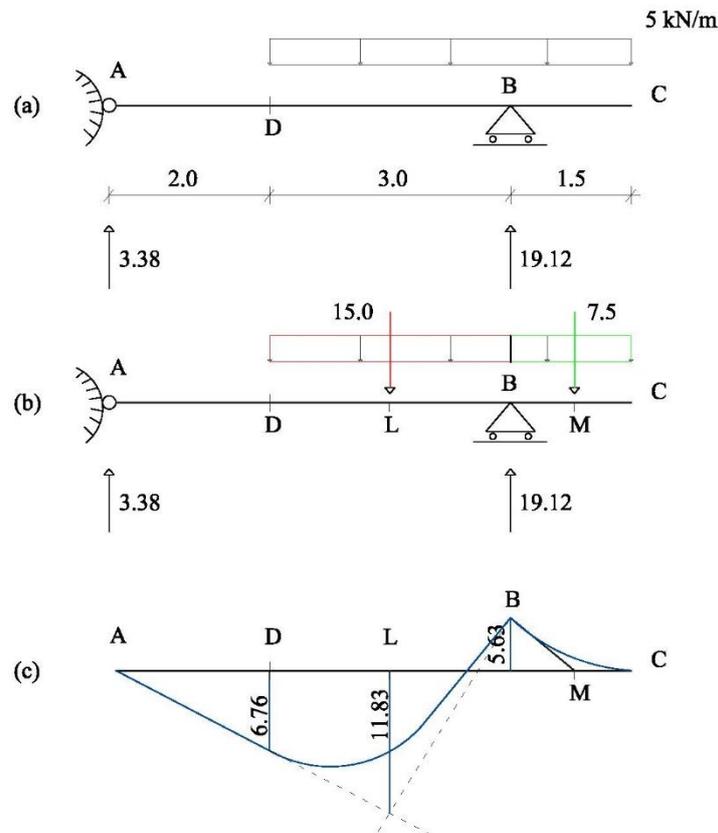


Figura 59. Diagramma del momento formato da due parabole

Il tracciamento del diagramma allora richiede la costruzione di due parabole separate, una nel tratto DB e un'altra nel tratto BC. Per entrambe si procede alla determinazione delle tangenti agli estremi sostituendo i carichi distribuiti con le rispettive risultanti - Figura 59(b). Il valore in M del diagramma lineare è:

$$M_L^{\text{lin}} = 3.38 * 3.5 = 11.83$$

Il valore (a meno del segno) sull'appoggio B è:

$$M_B = 7.5 * \frac{1.5}{2} = 5.63$$

Con questi due valori è possibile completare le tangenti agli estremi nel tratto DB. Per il tratto BC la questione è ancora più semplice. Il diagramma di costruzione, infatti, è nullo da C fino a M. Riparte

poi da zero in M per congiungersi al valore in B già ottenuto (non essendoci sicuramente salto nel diagramma di M in B).

Il diagramma si completa inscrivendo correttamente le due parabole.

Per completare la quotatura del diagramma rimane da calcolare il momento in D:

$$M_D = 3.38 * 2 = 6.76$$

Da notare come nel tratto DB la posizione della sezione in cui si verifica il massimo locale di M è determinata imponendo che il taglio sia nullo in quel tratto.