CAP. II – ANALISI CINEMATICA DELLE STRUTTURE

II. 1 Introduzione

Qualunque assemblaggio di materiali capace di sostenere carichi (verticali e non) è una *struttura*. Compito di questo capitolo è capire come modellare la struttura e come modellare i legami di tale struttura con il mondo esterno e tra le sue parti.

Per poter fare ciò è necessario sviluppare alcuni concetti essenziali.

II.2 Configurazione e spostamento

La configurazione del sistema strutturale consiste nell'insieme delle coordinate di tutti i suoi punti. Conoscere quindi la configurazione di una struttura in un certo istante significa conoscere la posizione di ogni suo punto.

Il compito della Statica è di ricercare la configurazione equilibrata del sistema strutturale soggetto a forze esterne.

Preliminarmente è necessario stabilire TUTTE le possibili configurazioni che un sistema strutturale potrebbe assumere, indipendentemente dalle forze applicate. Solo in questo modo, infatti, sarà possibile poi capire quali vincoli (esterni e interni) applicare per far sì che sia capace di sopportare carichi esterni.

Definire tutte le possibili configurazioni equivale a definire tutti i possibili spostamenti dei punti del sistema strutturale da una configurazione a un'altra (vedi Figura 1).

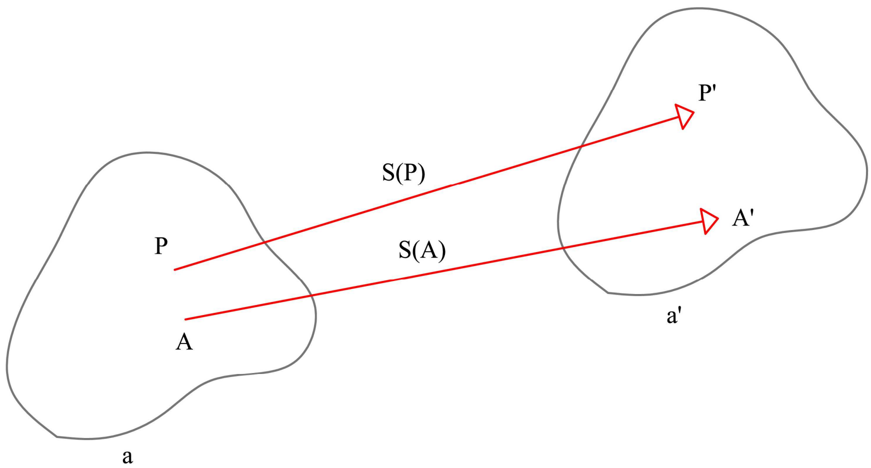


Figura 1. a = configurazione in un certo istante t. a' = configurazione in un instante successivo.

Tali spostamenti sono infinitesimi se tutte le loro derivate sono trascurabili rispetto all'unità. Nel caso dei sistemi di travi, si può equivalentemente dire che gli spostamenti infinitesimi sono trascurabili rispetto alle lunghezze delle travi stesse. Gli spostamenti infinitesimi sono di particolare interesse perché ragioni di carattere funzionale costringono la progettazione strutturale a garantire,

nella stragrande maggioranza dei casi, spostamenti molto piccoli. Molte considerazioni di carattere cinematico sulle variazioni di configurazione delle strutture saranno fatte sotto tale ipotesi.
Si definisce atto di moto di un solido l'insieme delle velocità di tutti i punti del solido. Fornisce, cioè, l'"intenzione" di movimento che ha il solido in un dato istante. L'analisi cinematica di un sistema strutturale consiste nel verificare se ci sono possibili atti di moto rigido. Anche se non è del tutto corretto dal punto di vista formale, si dice anche che l'analisi cinematica equivale a verificare i possibili spostamenti inifinitesimi rigidi della struttura.
L'impresa di definire ogni possibile configurazione e ogni possibile spostamento di un generico sistema strutturale è estremamente ardua. Non è possibile, infatti, caratterizzare con pochi parametri il generico spostamento. Non lo è anche se si vuole caratterizzare semplicemente il generico atto di moto.
Risulta molto utile considerare un tipo di moto molto particolare detto *rigido*. Il moto di un corpo, per esempio una trave, è detto rigido se la distanza tra due qualsiasi suoi punti rimane invariata durante il moto stesso. Il moto è rigido, quindi, se non è accompagnato da deformazioni, se cioè le distanze relative rimangono immutate.
Ebbene, il moto rigido può essere descritto attraverso un numero ridotto di parametri. Si può dimostrare, infatti, che il moto rigido di un corpo può essere rappresentato da tre soli parametri se avviene nel piano, da sei parametri se avviene nello spazio.
I parametri minimi necessari per individuare la configurazione si dicono *coordinate libere o lagrangiane* e il loro numero è detto *gradi di libertà*.
Le strutture devono essere vincolate in modo da avere tutti i gradi di libertà bloccati! In caso contrario, non sarebbero in grado di sopportare carichi generici.

II. 3 Gradi di libertà del punto e della trave

E' facile dimostrare che un punto nel piano ha due gradi di libertà (gdl). Le coordinate coincidono con le coordinate cartesiane rispetto a un riferimento fisso nel piano. I gdl diventano chiaramente tre per un punto libero di muoversi nello spazio.
Due punti non vincolati tra loro avranno quindi 4 gdl nel piano e 6 nello spazio; in generale, N punti liberi avranno 2N gdl nel piano e 3N gradi di libertà nello spazio.
Diversa è la situazione se più punti sono vincolati rigidamente tra loro.
Due punti vincolati rigidamente tra loro e costretti a rimanere su un piano presentano tre gradi di libertà e non quattro.

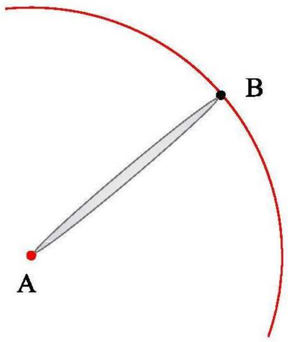


Figura 2 Due punti nel piano vincolati rigidamente tra loro

Come si vede in Figura 2, ciascun punto è obbligato dal vincolo rigido di collegamento a muoversi sulla circonferenza di centro l'altro punto e raggio la loro mutua distanza. In un generico istante quindi, la configurazione del sistema è nota se sono note le coordinate di uno dei due punti (due parametri) e l'angolo di cui è ruotato AB rispetto alla sua posizione precedente (terzo parametro).

Se i punti sono tre, nessuna coordinata lagrangiana aggiuntiva è necessaria per definire la generica configurazione del sistema. Note le posizioni di due punti (attraverso tre parametri), la posizione del terzo punto è data dall'intersezione delle due circonferenze (vedi Figura 3).

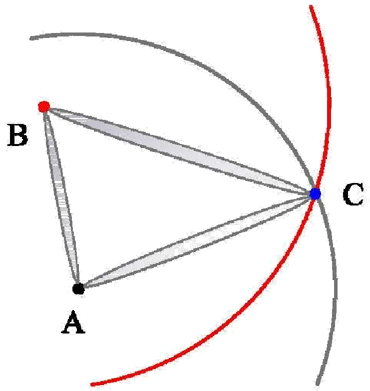


Figura 3. A, B, C in moto rigido

La questione diventa più chiara se si immaginano i tre punti come vertici di un triangolo a lati bloccati (a causa del vincolo di rigidità relativo). Spostati due vertici del triangolo, la posizione del terzo vertice è automaticamente determinata.

Per N punti nel piano, con N>3, i gradi di libertà non cambiano. Rimangono tre.

Si considerino ora, invece, due punti vincolati rigidamente tra loro ma liberi di muoversi (insieme) nello spazio e non più obbligati a muoversi su un piano.

Grazie al vincolo di rigidità i gdl sono cinque e non sei. Infatti, fissata la posizione di un punto A, il secondo punto B è obbligato a trovarsi sulla sfera di centro A e raggio la loro distanza (vedi Figura 4).

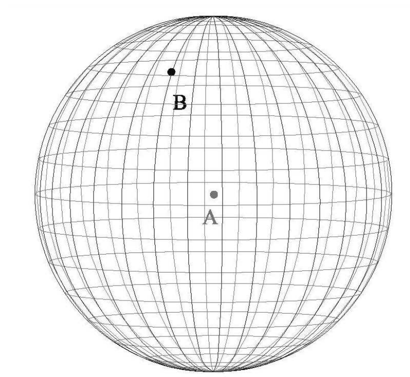


Figura 4. Due punti A e B nello spazio vincolati rigidamente tra loro.

La posizione del punto B è nota se sono noti i due angoli rispetto a due piani di riferimento (φ è detto azimut o longitudine, θ è detto distanza zenitale o colatitudine – vedi Figura 5).

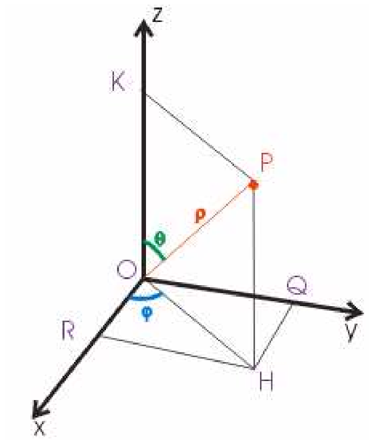


Figura 5. Coordinate sferiche nello spazio

Se i punti nello spazio sono tre, i gdl diventano sei. E rimangono sei anche per più di tre punti. Due punti infatti sono posizionati con cinque parametri, la posizione del terzo è nota con l'ausilio di un solo altro parametro grazie al fatto che è obbligato a trovarsi sull'intersezione di due sfere (vedi Figura 6). Tale intersezione, come è noto, risulta essere una circonferenza: la posizione del terzo punto richiede, allora, solo l'angolo α.

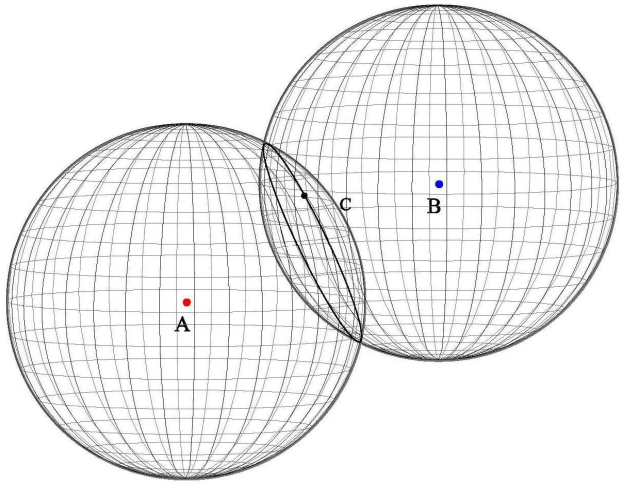


Figura 6. Tre punti A, B, C nello spazio vincolati rigidamente tra loro.

E' facile comprendere che i gdl non aumentano se si considerano più di tre punti vincolati rigidamente tra loro nello spazio.

Le considerazioni fatte per N punti nel piano e nello spazio possono estendersi al corpo continuo. Un corpo continuo, quindi, ha 3 g.d.l. nel piano e 6 g.d.l. nello spazio. Le tre coordinate lagrangiane nel piano possono essere per esempio le due componenti di spostamento di un punto qualsiasi O del solido e la rotazione di un asse (perpendicolare al piano) del solido passante per O rispetto a una retta di riferimento x assoluta (vedi Figura 7).

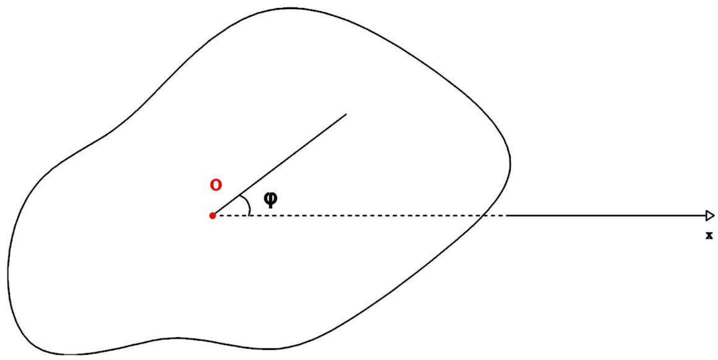


Figura 7. Coordinate lagrangiane nel piano: coordinate di O e rotazione intorno a O.

II. 4 Moto rigido

E' importante a questo punto fornire alcune caratteristiche fondamentali del moto rigido, in particolare dell'atto di moto rigido.

Si definisce atto di moto di un solido l'insieme delle velocità di tutti i punti del solido. Fornisce, cioè, l'"intenzione" di movimento che ha il solido in un dato istante.

Il moto rigido si può definire come un moto nel quale la distanza tra due punti qualsiasi del corpo che si muove rimane invariata. In scrittura vettoriale:

$$\|\mathbf{PQ}\| = \text{cost} \qquad \forall \text{ P,Q}$$

Un moto rigido, cioè, è un moto nel quale non si verificano deformazioni dei corpi. Spostamento rigido è, chiaramente, uno spostamento nel quale rimane invariata la mutua distanza tra due punti qualsiasi del solido che si sposta. Spostamento rigido piano è uno spostamento rigido in cui tutti i punti subiscono spostamenti paralleli a un piano.

Uno spostamento si dice infinitesimo se sono trascurabili rispetto all'unità tutte le sue derivate. Lo spostamento infinitesimo di un punto P verrà indicato nel seguito come:

$$d\mathbf{s}_P$$

Nota la velocità del punto P, lo spostamento infinitesimo si può scrivere:

$$\mathbf{v}_P = \frac{d\mathbf{s}_P}{dt} \Rightarrow d\mathbf{s}_P = \mathbf{v}_P dt$$

Uno spostamento finito può determinarsi come integrale di spostamenti inifinitesimi. Esso verrà indicato nel seguito come:

$\mathbf{s}_P$

Tra i moti rigidi rivestono particolare importanza il moto traslatorio e il moto rotatorio. E analogamente gli atti di moto rigido traslatorio e rotatorio.

Si può dimostrare, infatti, che ogni moto rigido piano (e atto di moto rigido piano), non traslatorio, è rotatorio (teorema di Eulero).

Si dice moto traslatorio un moto nel quale tutti i punti presentano la stessa velocità:

$\mathbf{v}_P$ = vettore costante $\qquad \forall$ punto P

A esempio in Figura 8 l'atto di moto rigido dell'asta BC è approssimabile a un atto di moto rigido traslatorio.

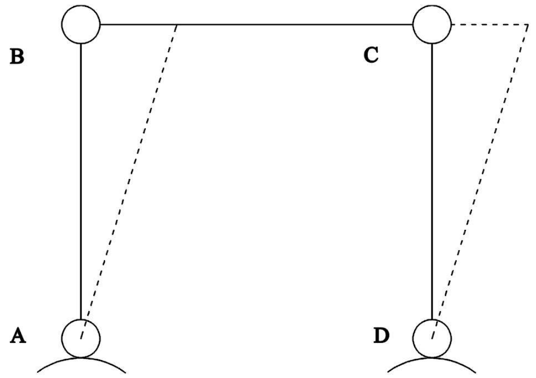


Figura 8. Telaio labile. Tratteggiato è lo spostamento infinitesimo rigido consentito.

Un moto rigido rotatorio è caratterizzato da una retta i cui punti hanno velocità nulla. Tale retta si dice asse di rotazione. La trottola (Figura 9) che non si sposta sul piano è un esempio di solido che si muove di moto rotatorio a ogni istante.

Figura 9. Una trottola che ruota su un piano senza spostarsi si muove di moto rotatorio.

Il moto rotatorio è piano. Il piano è quello perpendicolare all'asse di rotazione; le velocità di tutti i punti sono vettori stesi su tale piano. L'intersezione dell'asse di rotazione con il piano si chiama centro di rotazione C.

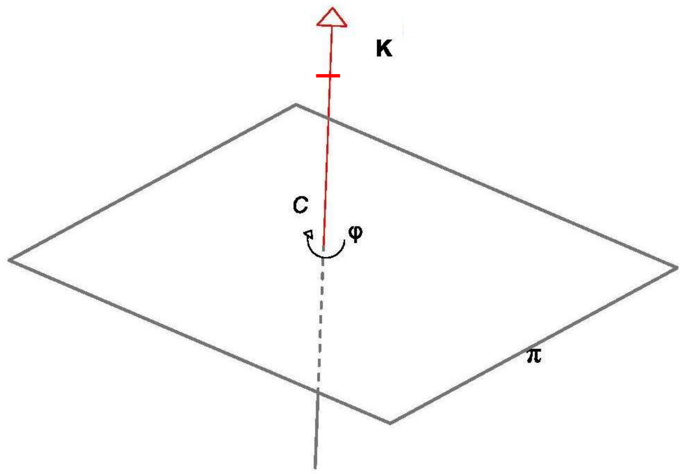


Figura 10. Moto rotatorio intorno alla retta su cui è steso φ.

Se con $\mathrm{d}\varphi$ si indica l'angolo (infinitesimo) di rotazione intorno all'asse di rotazione e con **k** il versore steso sull'asse di rotazione (Figura 10), la velocità del generico punto P si può scrivere come:

$$\mathbf{v}_P^{rot} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{dt}\mathbf{k}\times\mathbf{CP}$$

dove $\frac{\mathrm{d}\varphi}{dt} = \omega$ è detta velocità angolare (misurata in rad/sec).

Lo spostamento infinitesimo si può scrivere come:

$$\mathrm{d}\mathbf{s}_P^{rot} = \mathrm{d}\varphi\mathbf{k}\times\mathbf{CP}$$

Da notare che essendo i due vettori **k** e **CP** perpendicolari tra loro, il vettore spostamento infinitesimo del punto P da rotazione ha per modulo:

$$\left\|\mathrm{d}\mathbf{s}_P^{rot}\right\| = \mathrm{d}\varphi\left|\mathbf{CP}\right|$$

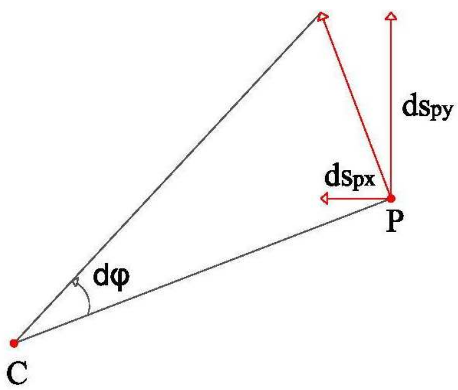


Figura 11. Spostamento del punto P da rotazione antioraria (positiva per convenzione) intorno a C.

E' facile dimostrare (Figura 11) che le componenti del vettore $\mathrm{d}\mathbf{s}_P^{rot}$ si possono scrivere come:

$$\mathrm{d}\mathbf{s}_{P_x}^{rot} = -\mathrm{d}\varphi(y_P - y_C) \tag{1}$$

$$\mathrm{d}\mathbf{s}_{P_y}^{rot} = \mathrm{d}\varphi(x_P - x_C) \tag{2}$$

cioè, a meno del segno, la componente verticale (2) è il prodotto della rotazione infinitesima per la differenza delle ascisse, la componente orizzontale (1) è il prodotto della rotazione infinitesima per la differenza delle ordinate.

Un moto roto-traslatorio è un moto composto da un moto traslatorio più un moto rotatorio (e analogamente per un atto di moto roto-traslatorio). Un esempio è la trottola che ruota intorno al proprio asse e che a sua volta si sposta su un piano. Il moto roto-traslatorio è rigido e non è in generale piano.

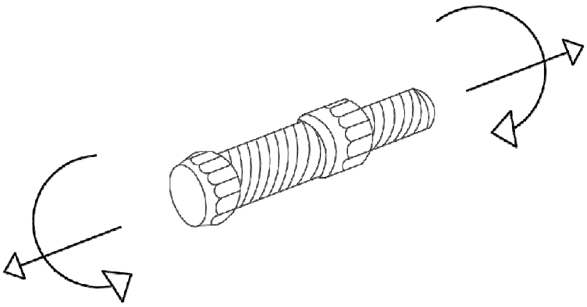


Figura 12. La vite che si avvita nel dado è un esempio di moto rototraslatorio.

Il moto (rispetto al dado) di una vite è un esempio (Figura 12) di roto-traslazione. Tale moto è detto elicoidale. Ha il moto traslatorio parallelo all’asse di rotazione. Non è piano: la componente traslazionale, infatti, è perpendicolare alla componente da rotazione.

Il teorema di Chasles afferma che un qualsiasi moto rigido (anche non piano) si riduce a un moto elicoidale. Nel caso piano il teorema si riduce ad affermare che un qualsiasi moto rigido (e quindi anche un qualsiasi atto di moto rigido) è riconducibile o a una sola traslazione o a una sola rotazione.

Estendendo la definizione di punto alle direzioni, indicando cioè una direzione come un nuovo punto detto improprio (vedi Figura 13), la semplificazione del teorema di Chasles ai moti piani diventa: ogni moto rigido piano è una rotazione intorno a un punto, che può essere proprio (rotazione) o improprio (traslazione). Tale punto (proprio o improprio) è detto centro di rotazione.

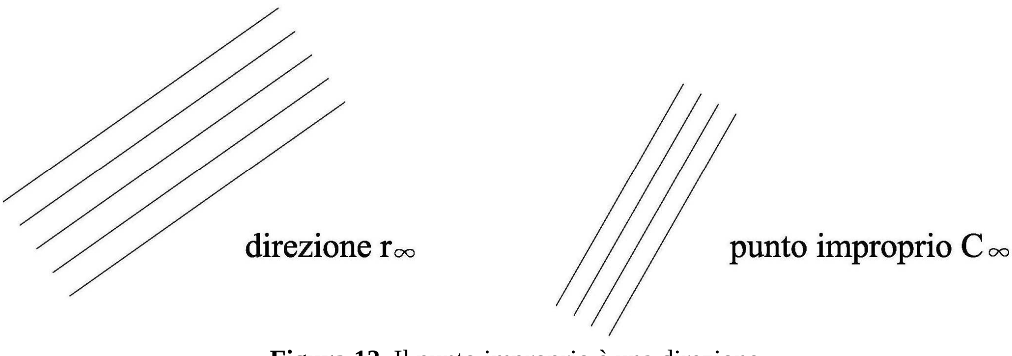


Figura 13. Il punto improprio è una direzione.

Esso rivestirà grande importanza nell’analisi cinematica dei sistemi travi, nella determinazione, cioè, delle eventuali possibilità di atti di moto rigido che una struttura vincolata in un certo modo può o meno avere. L'analisi dei centri di rotazione delle varie travi che compongono una struttura sarà lo strumento attraverso il quale stabilire se una struttura progettata può avere o meno potenziali atti di moto rigidi.

II. 5 Vincoli

I vincoli sono elementi tecnologici che limitano a priori le possibilità di spostamento di un sistema strutturale. Per adempiere a tale funzione devono esercitare delle forze (e/o delle coppie) sugli elementi strutturali sui quali agiscono. Compito di questo capitolo è introdurre dei modelli che rappresentino in maniera semplice e realistica tutti i vari possibili elementi tecnologici vincolari. D'ora in poi si parlerà solo di vincoli olonomi, di vincoli cioè in grado di ridurre i g.d.l. della struttura non vincolata.
Un vincolo può essere esterno o interno. E' esterno se collega la struttura all'ambiente esterno (vedi Figura 14).

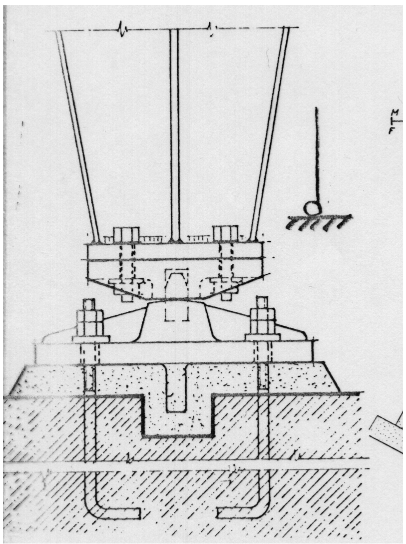


Figura 14. Esempio di collegamento cerniera tra piede pilastro e fondazione.

Interno se collega due elementi strutturali diversi tra loro (vedi Figura 15).
Il vincolo è detto bilatero se può esprimersi analiticamente con un'equazione, unilatero se con una disequazione.
Una palla che poggia su un tavolo è vincolata unilateralmente al piano e il vincolo può esprimersi con un'equazione del tipo:

$$\mathbf{s}_{palla} \cdot \mathbf{k} \geq 0 \qquad \mathbf{k} \perp \text{piano} \tag{3}$$

mentre una palla di ferro su un piano, costretta a muoversi solo sul piano senza allontanarsi da esso, per esempio grazie a una calamita disposta sotto al piano, è vincolata bilateralmente al piano stesso. L'equazione (3) del vincolo diventa:

$\mathbf{s}_{palla} \cdot \mathbf{k} = 0 \qquad \mathbf{k} \perp \text{piano}$

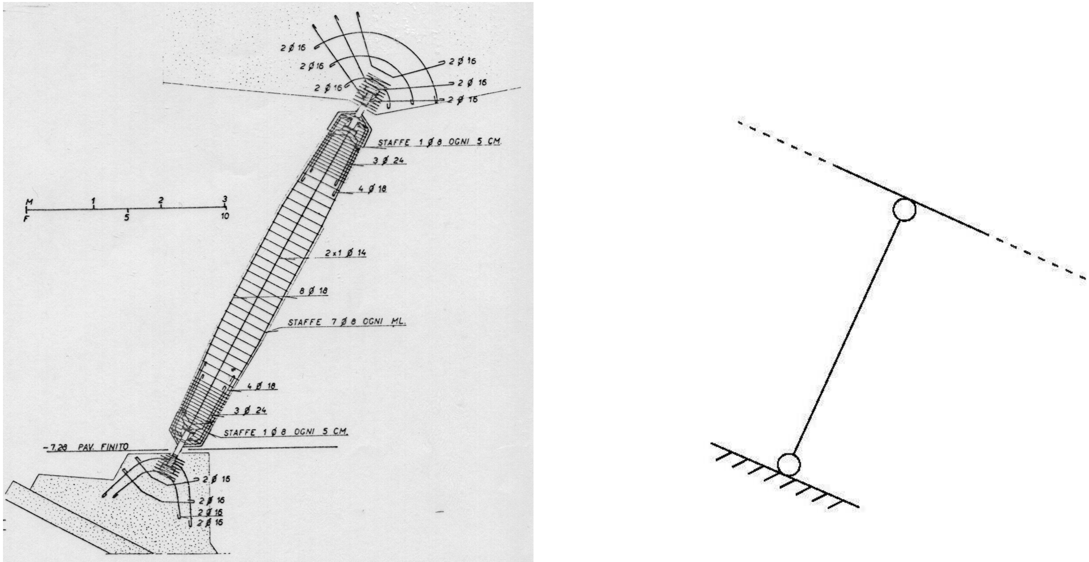


Figura 15. Esempio di vincolo pendolo esterno. La cerniera tra pendolo e struttura sovrastante può essere vista come esempio di vincolo interno.

Un'altalena collegata a una trave con delle aste rigide è vincolata bilateralmente a muoversi su un arco di circonferenza; la stessa altalena vincolata con delle funi alla trave è vincolata unilateralmente in quanto può avvicinarsi alla trave ma non se ne può allontanare.

I vincoli infine possono essere lisci o con attrito. Si considereranno solo vincoli lisci, sottolineando però il fatto che tale ipotesi va valutata caso per caso ed eventualmente rimossa quando l'attrito dovesse avere un'influenza non trascurabile sul regime delle reazioni vincolari e degli sforzi interni.

E' opportuno anticipare sin d'ora che l'analisi cinematica di un sistema strutturale vincolato (con vincoli esterni e/o vincoli interni) consiste nel capire se tale sistema è sufficientemente vincolato in modo da non avere moti rigidi. In tal caso si dirà isostatico o iperstatico. Isostatico se, oltre a essere disposti correttamente, i vincoli sono in numero uguale a quelli strettamente necessari per impedire gli atti di moto rigidi. Iperstatico se i vincoli sono in numero superiore a quelli strettamente necessari e disposti correttamente. Se invece i vincoli non sono sufficienti o sono disposti male, il sistema strutturale si dirà labile.

Capire se una struttura è labile, isostatica o iperstatica aiuta anche a comprendere come i carichi sono ripartiti sui vincoli.

L'analisi cinematica sarà condotta con riferimento agli atti di moto rigidi. Una struttura, cioè, sarà analizzata per stabilire se i vincoli sono sufficienti o meno per impedire "una tendenza" allo spostamento rigido. Il definire una struttura labile, quindi, non implica necessariamente che sotto carico si muova indefinitamente di moto rigido in quanto potrebbe trovare una configurazione di equilibrio in seguito a spostamenti non infinitesimi.

Per esempio, le due aste incernierate in Figura 16 rappresentano un sistema labile perché può subire l'atto di moto rigido in figura. Sotto un carico verticale, però, la struttura troverà una configurazione di equilibrio lontana dalla configurazione iniziale. Cercherà di assumere una configurazione nella quale inclinazione e allungamento delle aste (non più infinitesimi) saranno di valore tale da equilibrare il carico applicato.

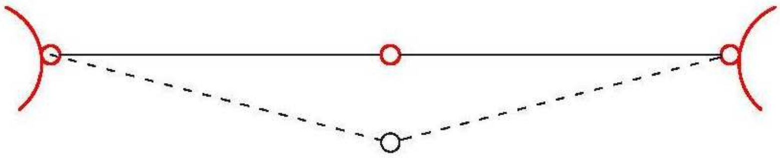


Figura 16. Sistema labile di due travi.

I collegamenti a terra e i collegamenti tra elementi strutturali possono essere modellati attraverso un insieme piuttosto esiguo di vincoli. Nel caso piano, nel caso cioè di strutture appartenenti a un piano nonchè caricate e vincolate nello stesso piano, i modelli di vincolo che si considereranno si dividono in tre gruppi: vincoli semplici, doppi e tripli. La differenza sta nel numero di g.d.l. sui quali intervengono, tenendo presente che un solido nel piano ha tre g.d.l.. Il numero di g.d.l annullati dal vincolo si dicono anche *molteplicità di vincolo*.

II. 6 Vincoli esterni

I vincoli esterni sono gli elementi di collegamento tra la struttura e l'ambiente esterno (per esempio il terreno). Essi condizionano i g.d.l. dell'elemento strutturale collegato all'ambiente esterno. Il vincolo si dirà semplice se annulla l'atto di moto di traslazione orizzontale o quello di traslazione verticale oppure quello di rotazione, doppio se annulla due atti di moto traslatori o una traslazione e una rotazione, triplo se annulla tutti e tre i g.d.l..
A differenza dei vincoli interni, i vincoli esterni introducono dei condizionamenti sugli atti di moto assoluti dell'elemento strutturale al quale sono collegati. Condizionano cioè o l'atto di moto orizzontale e/o l'atto di moto verticale e/o l'atto di moto da rotazione dell'elemento strutturale rispetto a un riferimento assoluto. Si vedrà, invece, che i vincoli interni collegano due o più elementi strutturali tra loro e condizionano non gli atti di moto traslatori/rotatori assoluti, ma quelli relativi tra gli elementi collegati.

Saranno ora introdotti tre modelli di vincoli semplici, il carrello, il pendolo e il doppio-doppio pendolo, due modelli di vincolo doppio, la cerniera e il doppio-pendolo, e un vincolo triplo, l'incastro.

II. 6.1 Il carrello

E' un vincolo che impedisce l'atto di moto traslatorio del punto P nella direzione perpendicolare al piano di scorrimento del carrello stesso (direzione r in Figura 17).

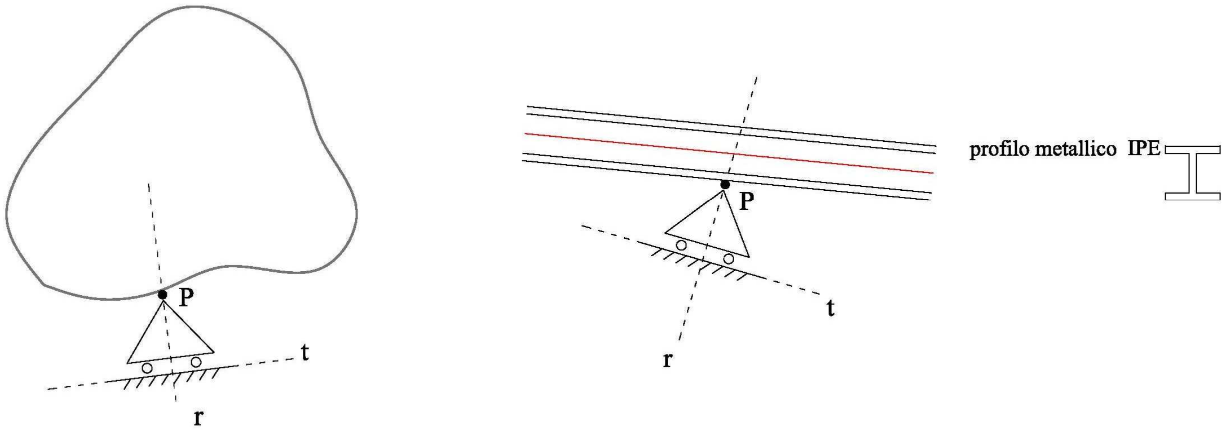


Figura 17. Il vincolo carrello.

Il punto P non può avere atto di moto traslatorio nella direzione r. Le equazioni di vincolo sono:

$$v_r = 0$$

$$v_t \neq 0 \tag{4}$$

O equivalentemente:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{l} = 0$$

dove $\mathbf{l}$ è un vettore generico steso sulla retta r.

Il carrello può essere rappresentato nei due modi indicati in Figura 18.

Figura 18. Simboli adottati per il vincolo carrello

Il solido vincolato a terra con un carrello può avere un atto di moto rotatorio intorno a un punto C che deve appartenere alla retta r. Può essere uno degli infiniti punti della retta r. La sua posizione non è determinata univocamente, ma deve essere tale da appartenere alla retta r. Tutti i vincoli semplici, infatti, introducono un condizionamento sulla posizione dell'eventuale centro di rotazione del solido vincolato, ma non ne definiscono la posizione esatta. I vincoli doppi, invece (si vedrà tra breve), condizionano il centro di rotazione ad avere una posizione ben definita.

II. 6.2 Il pendolo

Il pendolo è un vincolo equivalente al carrello se si ragiona in termini di atti di moto. Si differenzia da esso, invece, per spostamenti non infinitesimi.

Dalla Figura 19 si osserva che un pendolo esterno consente al punto P di muoversi solo sull'arco di circonferenza di centro O e raggio OP.

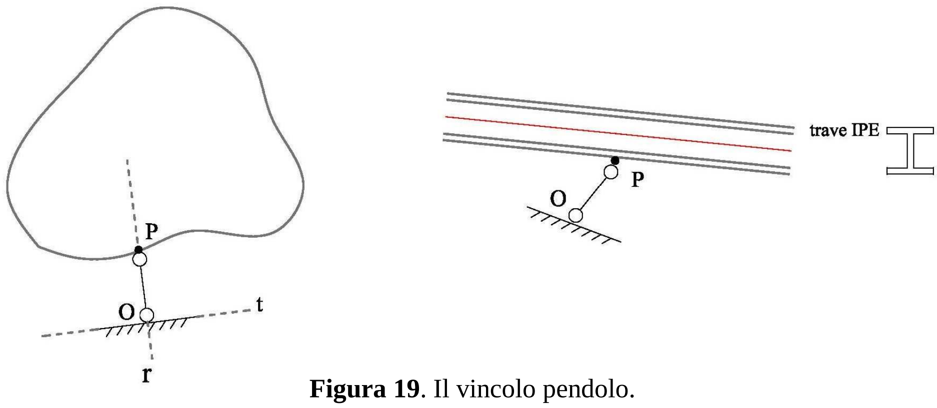


Figura 19. Il vincolo pendolo.

L’equazione di vincolo in un sistema di riferimento con origine in O diventa quindi:

$$x_P^2 + y_P^2 - OP^2 = 0 \tag{5}$$

Le coordinate del punto P in una posizione generica spostata devono, cioè, soddisfare l’equazione della circonferenza. Lo spostamento è di entità qualsiasi. Se, però, gli spostamenti si suppongono infinitesimi, l’equazione di vincolo diventa uguale a quella del carrello. In tale ipotesi, infatti, è lecito approssimare l’arco di circonferenza con la sua tangente (vedi Figura 20).

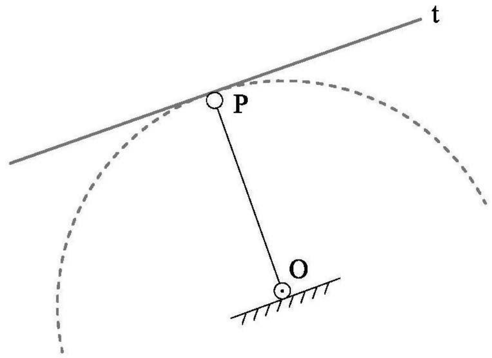


Figura 20. Linearizzazione del vincolo pendolo.

L’equazione di vincolo diventa:

$$d\mathbf{s} \cdot \mathbf{OP} = 0 \Leftrightarrow ds_x x_P + ds_x y_P = 0$$

A tale risultato si può arrivare seguendo una strada matematicamente più rigorosa. Ipotizzare atti di moto significa arrestare lo sviluppo in serie di Taylor della (5) di punto iniziale P ai termini del primo ordine. Tale sviluppo fornisce, infatti:

$$2x_P \, dx_P + 2y_P \, dy_P = 0 \Leftrightarrow d\mathbf{s} \cdot \mathbf{OP} = 0$$

Il centro di rotazione della trave vincolata a terra con un pendolo, come per il carrello, si trova sulla retta OP (Figura 20) in una posizione indeterminata.

<u>II. 6.3 Il doppio-doppio pendolo</u>

Il doppio-doppio pendolo vincola la trave a non poter avere atti di moto rotatori. Si disegna in uno dei modi di Figura 21.

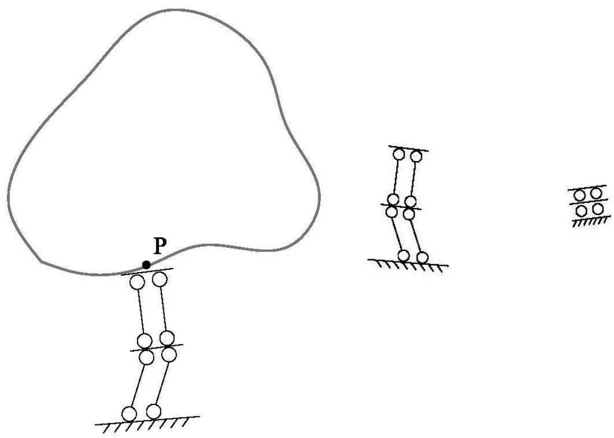


Figura 21. Il vincolo doppio-doppio pendolo (sin.) e sue due rappresentazioni (dx).

Un esempio di doppio-doppio pendolo è fornito dal vincolo che collega le squadrette di un tecnigrafo al tavolo del tecnigrafo stesso (vedi Figura 22). Il blocco con le squadrette può solo traslare liberamente in ogni direzione, ma non può ruotare.

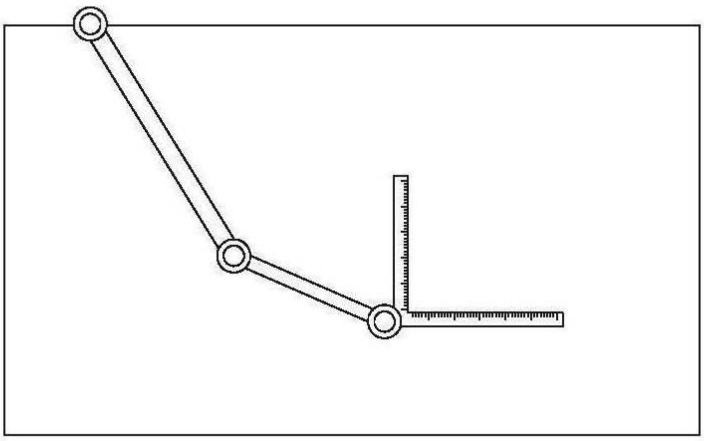


Figura 22. Le squadrette del tecnigrafo come esempio di doppio-doppio pendolo.

La condizione vincolare si esprime semplicemente:

$\omega = 0$

L'elemento vincolato a terra con un vincolo schematizzabile con un doppio-doppio pendolo ha il centro di rotazione all'infinito: è un punto improprio indeterminato.

II. 6.4 La cerniera

La cerniera a terra impedisce l'atto di moto traslatorio del punto P in una direzione qualsiasi. E' equivalente a due carrelli (o due pendoli) disposti lungo due direzioni ortogonali e può essere disegnato convenzionalmente in uno dei modi indicati in Figura 23(sin). Il centro di rotazione è determinato e coincide con la posizione della cerniera.

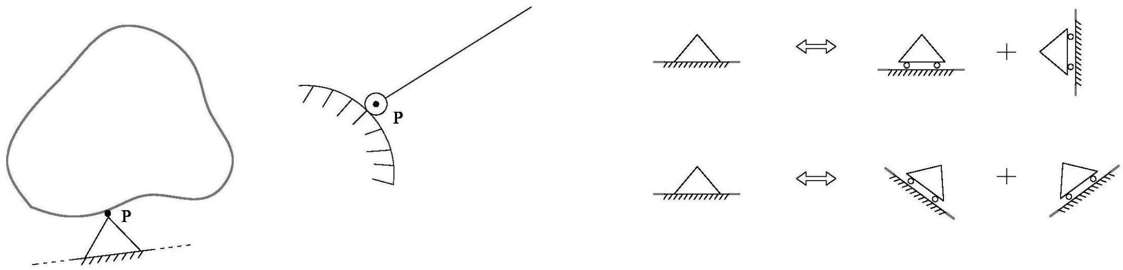


Figura 23. Il vincolo cerniera a terra.

A volte può risultare utile tener presente che un solido vincolato a terra con due carrelli (o pendoli) è equivalente, dal punto di vista cinematico, allo stesso solido vincolato a terra con una cerniera in C (vedi Figura 24).

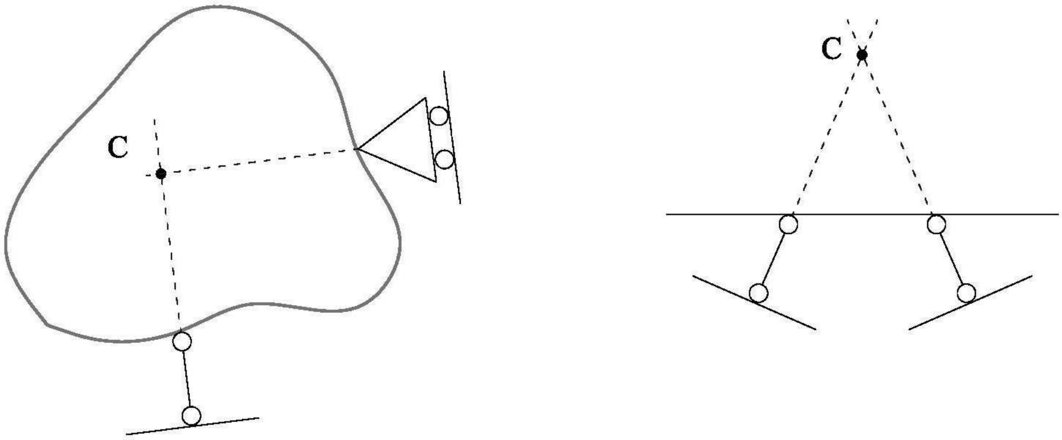


Figura 24. La cerniera come sovrapposizione di due vincoli semplici.

II. 6.5 Doppio pendolo

Il doppio pendolo impedisce al solido di avere atti di moto rotatori e atti di moto traslatori lungo la direzione r (vedi Figura 25).

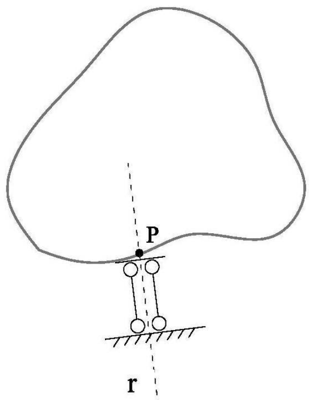


Figura 25. Il vincolo doppio pendolo.

Tale vincolo può essere visto come sovrapposizione di due vincoli semplici, un doppio-doppio pendolo più un carrello (o pendolo) disposto con direzione parallela a r (Figura 26).

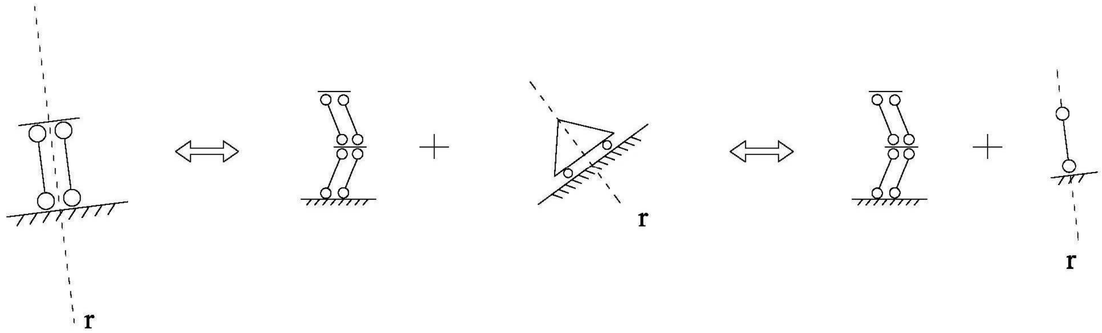


Figura 26. Doppio pendolo è equivalente alla sovrapposizione di due vincoli semplici.

Da sottolineare che anche due carrelli (o pendoli) paralleli disposti in posizione diverse sono cinematicamente equivalenti a un doppio pendolo (vedi Figura 27).

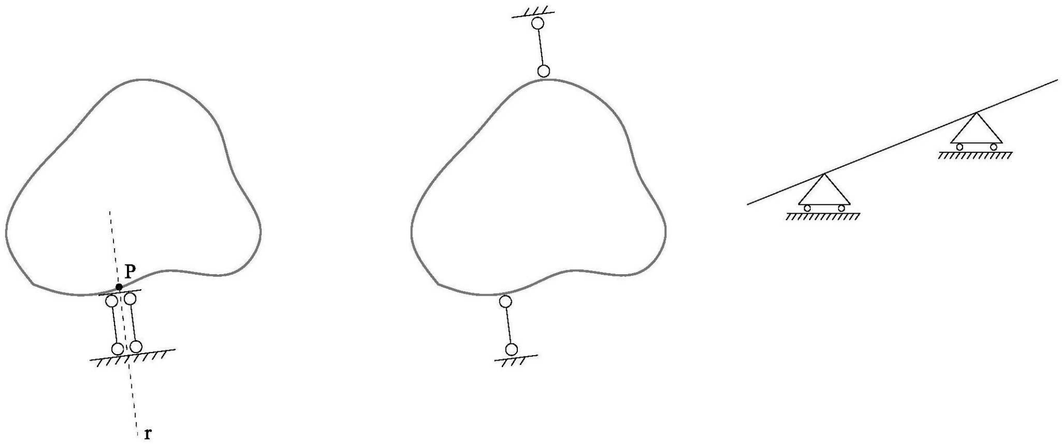


Figura 27. Doppio pendolo equivalente a due carrelli (o pendoli) paralleli.

Il centro di rotazione di un solido vincolato a terra tramite un doppio pendolo è improprio e coincide con la direzione r.

II. 6.6 Incastro

L'incastro (Figura 28) è un vincolo triplo. Impedisce qualsiasi atto di moto rigido del solido a esso collegato. Non esiste, quindi, centro di rotazione.

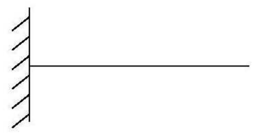


Figura 28. Trave incastrata esternamente.

E' equivalente alla sovrapposizione di tre vincoli semplici o di un vincolo doppio più un vincolo semplice.

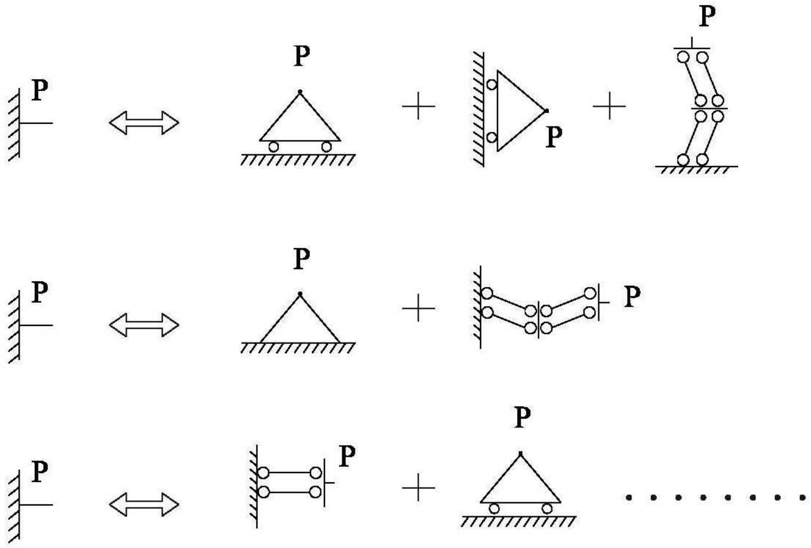


Figura 29. L'incastro come sovrapposizione di vincoli semplici e/o doppi.

II. 6.7 Analisi cinematica del solido

Elencati tutti i modelli di vincolo esterno adottati usualmente nell'analisi strutturale, è possibile stabilire come vincolare un solido affinché esso non possa avere atti di moto rigidi.

Una struttura (anche costituita da più travi collegate tra loro) si dice labile se i vincoli non sono sufficienti (in numero o perché disposti erroneamente) a bloccare tutti i possibili atti di moto rigidi. Si dice isostatica se i vincoli sono in numero strettamente sufficiente a bloccare tutte le cinematiche rigide e sono disposti correttamente, iperstatica se la struttura è vincolata più del necessario.

Per un corpo unico nel piano, per esempio per una trave, i g.d.l. da vincolare per impedire gli atti di moto rigidi sono tre. Tre vincoli ben disposti sono quindi sufficiente a renderla isostatica. I vincoli aggiuntivi a quelli strettamente necessari a rendere una trave isostatica costituiscono le iperstaticità.

Esempi di travi labili, isostatiche e iperstatiche sono dati in Figura 30.

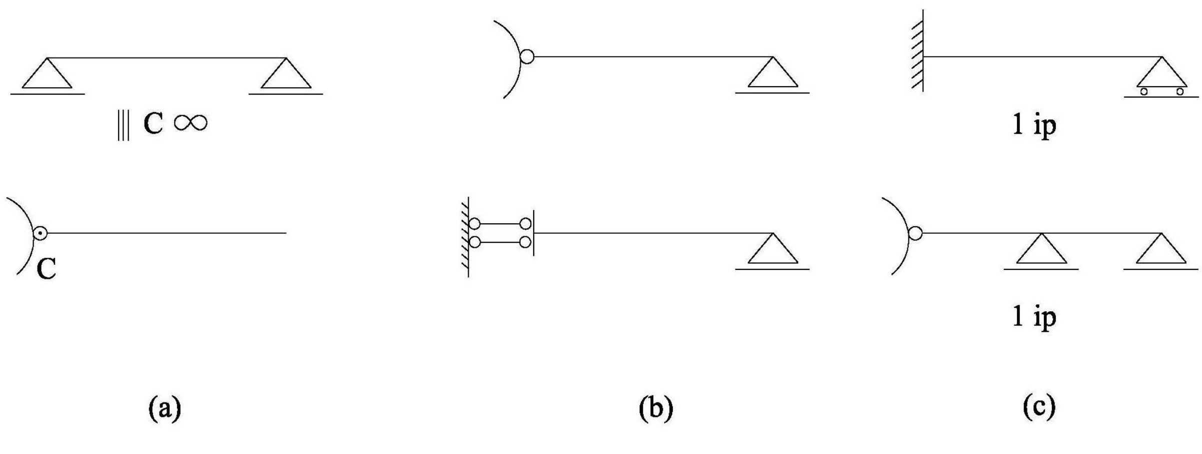


Figura 30. (a) Travi labili con centro di rotazione C. (b) Travi isostatiche. (c) Travi iperstatiche

Esistono situazioni intermedie in cui i vincoli sono disposti in maniera errata. Per esempio la trave di Figura 31 ha vincoli a molteplicità totale tre, sufficienti quindi in numero a renderla isostatica, ma disposti male. Rimane consentito infatti un atto di moto rigido di rotazione intorno al punto C.

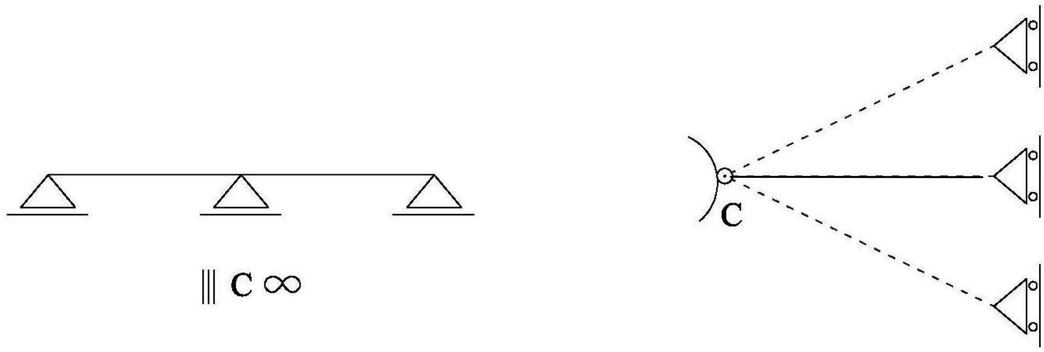


Figura 31. Errata disposizione dei vincoli. La trave risulta labile nei confronti di una cinematica e iperstatica nei confronti dell'altra.

Per un'unica trave è possibile dimostrare che:

$$3 - s = l - i \tag{6}$$

dove s è il numero totale delle molteplicità di vincolo, l le eventuali labilità presenti e i le eventuali iperstaticità. La relazione (6) presenta due incognite, l e i, ma l può essere determinato analizzando l'eventuale presenza del centro di rotazione.

In definitiva, l'analisi cinematica della trave vincolata consiste nel riconoscerla se labile, isostatica, iperstatica (e in tal caso fornire il numero delle iperstaticità) o con una disposizione errata dei vincoli.

II. 7 Vincoli interni

I vincoli interni sono elementi di collegamento tra le varie parti della struttura. Essi condizionano i gli atti di moto relativi tra più travi. In analogia con i vincoli esterni, un vincolo interno tra due elementi si dirà semplice se annulla un g.d.l. relativo (l'atto di moto da traslazione relativa orizzontale oppure da traslazione relativa verticale oppure da rotazione relativa), doppio se annulla due g.d.l. relativi, triplo se annulla tutti e tre i g.d.l. relativi (incastro interno).

Da sottolineare che i vincoli interni non intervengono sugli atti di moto rigidi assoluti. Due corpi collegati da un vincolo interno, cioè, saranno limitati nel moto relativo, ma, senza vincoli esterni, saranno liberi di muoversi come un sol corpo nel piano.

Verranno ora introdotti e descritti due modelli di vincolo interno semplice, il pendolo e il doppio-doppio pendolo, due modelli di vincolo interno doppio, la cerniera e il doppio-pendolo, e un vincolo interno triplo, l'incastro interno. Di ogni vincolo interno verranno date le condizioni introdotte sia sull'atto di moto rigido relativo vincolato sia sulla posizione del centro relativo di rotazione. Quest'ultimo può essere visto come quel punto intorno al quale un corpo può avere un atto di moto relativo rispetto all'altro.

II. 7.1 Il pendolo interno

Il pendolo interno (Figura 32) tra due travi impedisce l'atto di moto relativo da traslazione nella direzione del pendolo (direzione r in figura).

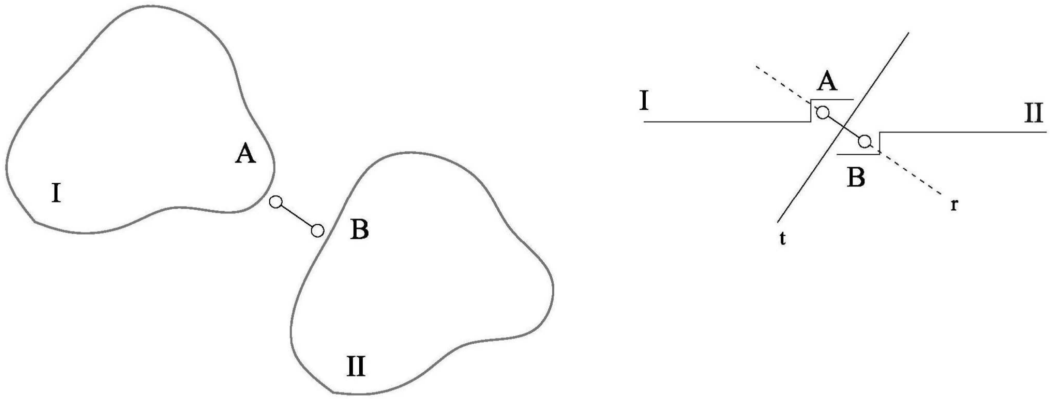


Figura 32. Il vincolo pendolo interno.

Lascia la possibilità che i corpi collegati possano avere atti di moto da traslazione relativa nella direzione t e da rotazione relativa: La condizione di vincolo si può anche scrivere:

$$\Delta \mathbf{v}^{AB} \cdot vers\, r = 0$$

Due corpi legati da un pendolo interno possono avere atti di moto rigido da rotazione relativa intorno a un punto che deve appartenere alla retta r, i.e. il centro relativo C_{I-II} deve appartenere alla retta r.

II. 7.2 Il doppio-doppio pendolo interno

Il doppio-doppio pendolo interno (Figura 33) impedisce l'atto di moto rigido da rotazione relativa tra i tronchi che collega:

$$\Delta \omega^{I-II} = 0 \qquad (7)$$

Le due travi collegate possono avere atti di moto da traslazione relativa (in una direzione qualsiasi), ma non possono ruotare relativamente (7). Il centro di rotazione deve essere quindi improprio ma con direzione qualsiasi.

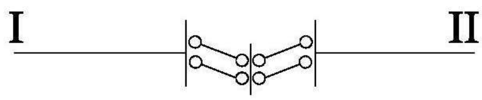


Figura 33. Il vincolo doppio-doppio pendolo interno.

II. 7.3 La cerniera interna

La cerniera interna impedisce l'atto di moto rigido da traslazione relativa tra i tronchi che collega (Figura 34).

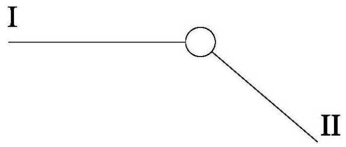


Figura 34. Cerniera interna di collegamento tra due travi

E' un vincolo doppio che si può scrivere come:

$$\Delta v_x{}^{I-II} = 0$$

$$\Delta v_y{}^{I-II} = 0$$

E' un vincolo equivalente alla sovrapposizione di due pendoli interni disposti secondo due direzioni ortogonali, ad esempio disposti lungo l'orizzontale e la verticale (vedi Figura 35).

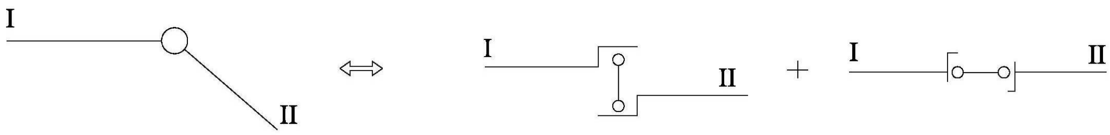


Figura 35. Cerniera interna come sovrapposizione di due pendoli interni.

Il centro intorno al quale i due tronchi hanno l'atto di moto relativo coincide con la cerniera stessa:

$C_{I-II} \equiv$cerniera

Nella realtà costruttiva una cerniera interna può collegare anche più di due travi. In tal caso la molteplicità del vincolo vale:

$$\text{molteplicità vincolo cerniera interna} = s = 2a - 2$$

dove a è il numero delle aste collegate dalla cerniera.

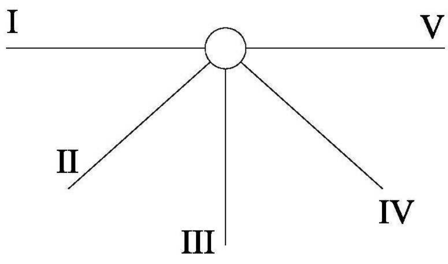


Figura 36. Cerniera interna tra più travi.

Per esempio, la cerniera di Figura 36 impedisce gli atti di moto relativi di traslazione tra tutte le coppie di travi una volta impediti quelli relativi tra:

$I-II,\qquad II-III,\qquad III-IV,\qquad IV-V$

Infatti, se sono impedite le velocità traslazionali relative tra I e II e tra II e III, è chiaro che è automaticamente impedito l'atto di moto traslatorio relativo tra I e III. Ragionando in maniera analoga sulle altre coppie di travi si arriva a otto condizioni indipendenti, ovvero $2a-2$.

II. 7.4 Doppio pendolo interno

Il doppio pendolo interno impedisce l'atto di moto rigido da traslazione relativa nella direzione r e l'atto di moto rigido da rotazione relativa tra i due tronchi (Figura 37). Lascia libero l'atto di moto rigido da traslazione relativa nella direzione t.

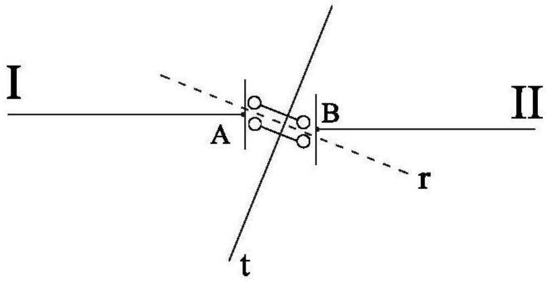


Figura 37. Il vincolo doppio pendolo interno.

Il centro relativo è improprio e coincide con la direzione r, $C_{\infty}^{I-II} \equiv$direzione r .

Il doppio pendolo interno è equivalente a due pendoli disposti parallelamente, anche se posizionati in modo da collegare coppie diverse di punti (purché entrambe le coppie appartenenti alla stessa trave).

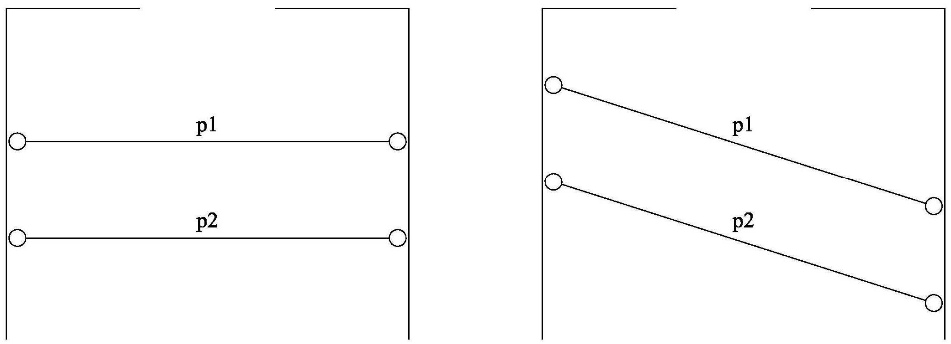


Figura 38. Pendoli interni paralleli tra due travi: sono equivalenti a un doppio pendolo interno.

II. 7.5 Incastro interno

Nell'analisi cinematica dei sistemi di travi può risultare utile considerare tronchi diversi due tratti collegati tra loro da un incastro interno. A esempio, per comprendere perché una trave chiusa su se stessa sia iperstatica internamente per il solo fatto di essere chiusa.

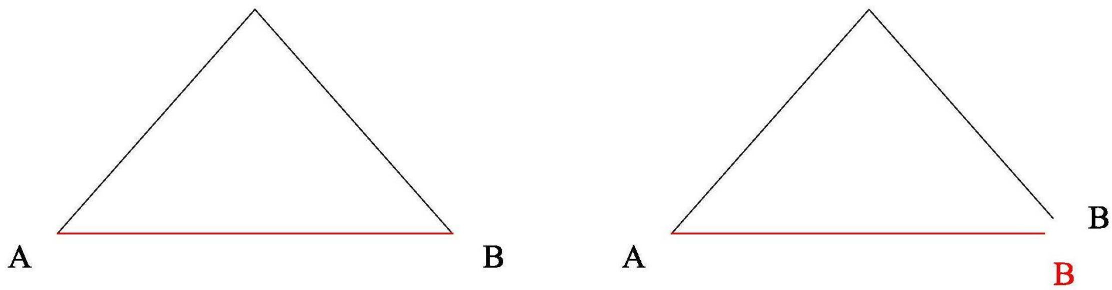


Figura 39. La maglia chiusa è tre volte iperstatica internamente.

In Figura 39 la maglia chiusa triangolare può essere vista come due tratti incastrati tra loro in A e B. Il solo incastro interno in A è sufficiente per garantire che non ci siano atti di moto relativo tra i due tronchi (tronco I in nero e tronco II in rosso). L'ulteriore incastro interno in B, quindi, è sovrabbondante e introduce tre iperstaticità interne al sistema.

Le condizioni di vincolo sono espresse da tre relazioni scalari:

$$\Delta v_x^{B-B} = 0$$

$$\Delta v_y^{B-B} = 0$$

$$\Delta \omega^{I-II} = 0$$

Due elementi incastrati tra loro non hanno centro relativo di rotazione.

Qual è la riduzione di "grado" di vincolo (molteplicità totale) che si verifica introducendo una cerniera in un punto in cui la trave era continua (vedi Figura 40)? La risposta è: un grado di vincolo in meno in quanto si introduce la possibilità di rotazione relativa che prima non era permessa. Si dice anche che inserire una cerniera interna introduce una sconnessione.

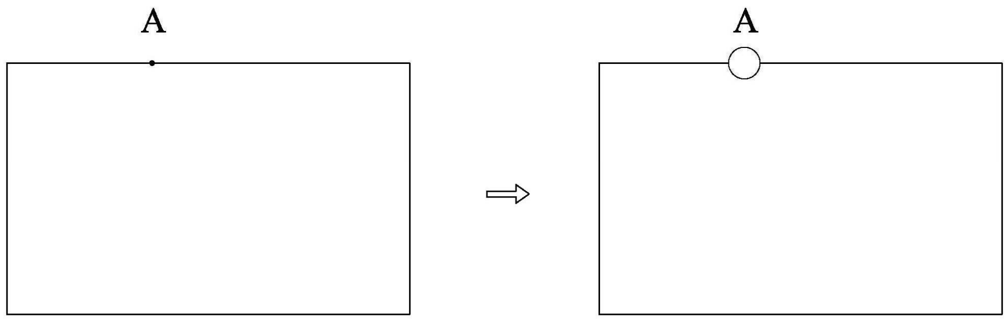


Figura 40. Introduzione di una sconnessione in A.

Se l'incastro interno collega più travi (vedi Figura 41), con un ragionamento analogo a quello della cerniera tra più tronchi si arriva alla conclusione che le condizioni di vincolo introdotte sono:

$3a-3$.

Introducendo quindi una cerniera in una sezione di incastro tra più travi riduce di

$(3a-3)-(2a-2)=a-1$

il grado di vincolo totale.

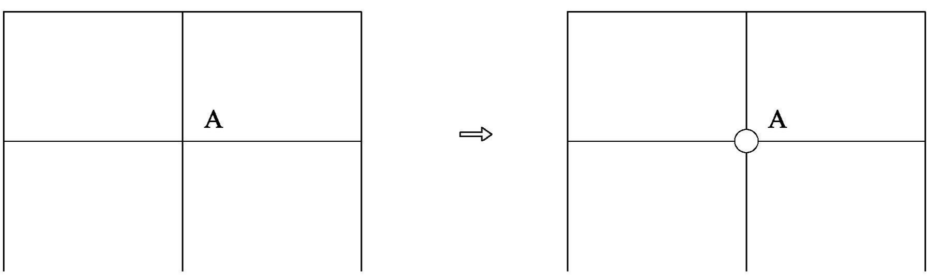


Figura 41. Incastro interno tra più travi. L'introduzione della cerniera equivale all'eliminazione di $a-1=4-1=3$ vincoli semplici

II. 7.6 Analisi cinematica di sistemi di travi

Note le caratteristiche essenziali di vincoli esterni e vincoli interni è possibile stabilire se un sistema vincolato di travi sia labile, isostatico, iperstatico o con vincoli disposti scorrettamente.

Una volta determinate tutte le moltiplicità di vincolo (indicate con s) è possibile scrivere:

$$3a - s = l - i$$

dove $3a - s$ è noto. Si ha quindi un'equazione nelle due incognite l e i, ovvero numero di labilità e numero di iperstaticità. Le iperstatiche i saranno note se si riescono a determinare le eventuali labilità. Ad esempio se $l = 0$ allora $i = -(3a - s)$.

Le labilità si cercano attraverso l'analisi dei centri di rotazione (assoluti e relativi). Tali centri, per esistere, devono soddisfare le condizioni fornite dai vincoli e, in più, nell'ambito degli atti di moto rigidi, essere allineati in un certo modo.

Gli allineamenti da verificare sono del tipo:

$$C_i \quad C_{ij} \quad C_j$$

$$C_{ij} \quad C_{jk} \quad C_{ik}$$

dove i, j e k indicano tre diversi tronchi.

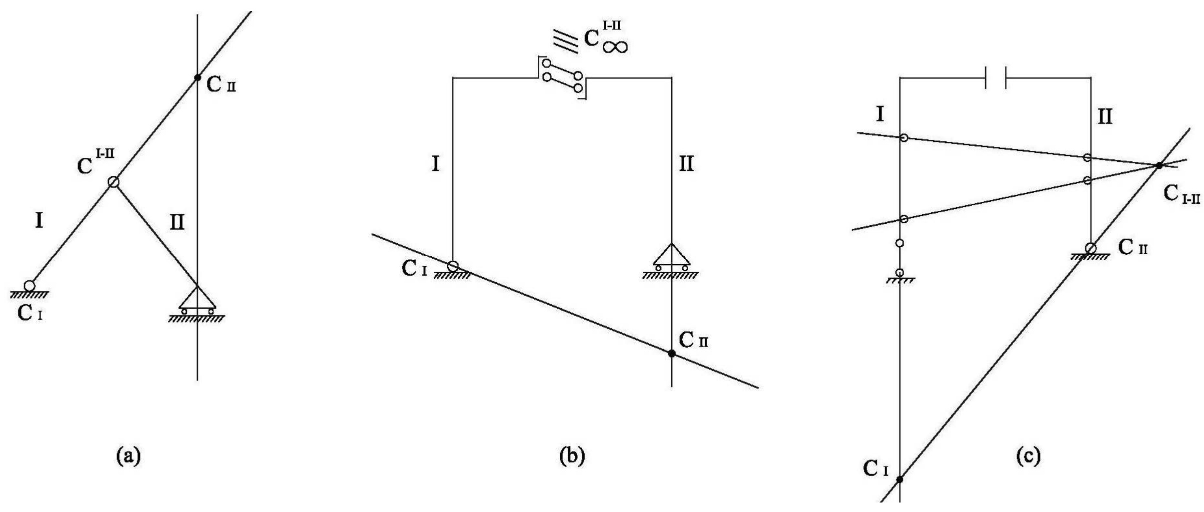
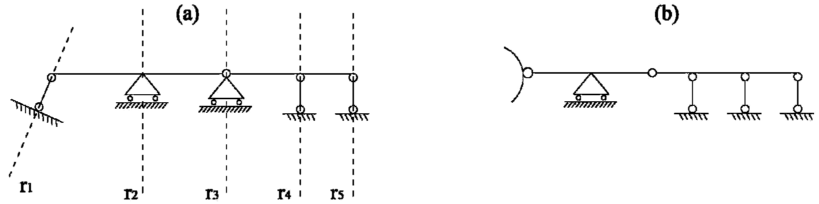


Figura 42. Esempi di sistemi di travi labili con l'indicazione dei centri di rotazione assoluti e relativi.

Per tutti gli esempi di Figura 42 $3a - s = 6 - 5 = 1$. I centri esistono e sono allineati.

Per gli esempi di Figura 43(a,c,d) si ha $3a - s = 6 - 7 = -1$ mentre per 43(b) è $3a - s = 6 - 8 = -2$. Se non ci sono labilità ($l = 0$) dovrà essere $i = 1$ e $i = 2$, rispettivamente.



(d)

Figura 43. Esempi di strutture iperstatiche – (a,c,d) una volta iperstatiche, (b) due volte iperstatica.

In Figura 43(a) il centro C_I non esiste perché dovrebbe trovarsi contemporaneamente su r_1, su r_2 e su r_3 (tutte condizioni dettate dai vincoli esterni agenti sul primo tronco). Il tronco I allora non può avere atti di moto rigidi. Il tronco II è collegato, tramite la cerniera interna in B, a un tratto fermo. La cerniera in B è equivalente, quindi, a una cerniera esterna per il tronco II. Il centro C_{II}, allora, non esiste perché dovrebbe contemporaneamente coincidere con B e trovarsi sia su r_4 che su r_5. In definitiva non ci sono labilità e quindi il sistema è una volta iperstatico.

In maniera analoga si ragiona sugli esempi (b), (c) e (d).

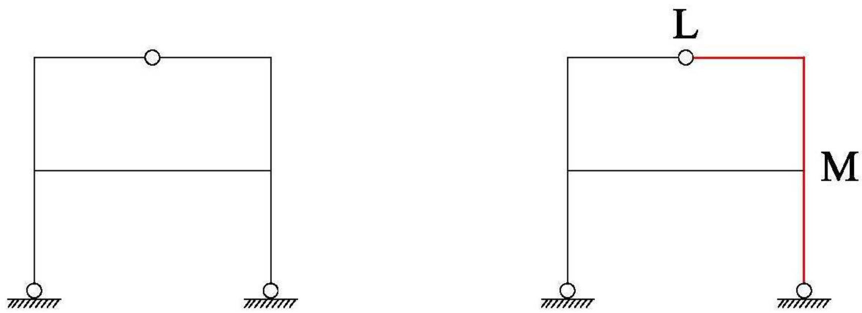


Figura 44. Esempio di struttura chiusa iperstatica.

L'esempio di Figura 44 è tre volte iperstatico. A tale risultato si può arrivare seguendo diversi ragionamenti, tutti equivalenti.

Si può pensare la struttura come l'assemblaggio di due tronchi (nero e rosso in Figura 44), collegati tra loro attraverso la cerniera interna L e l'incastro interno M. Il solo incastro interno è sufficiente per impedire atti di moto rigido relativo tra i due tronchi. L'ulteriore collegamento cerniera introduce le prime due iperstaticità interne. Entrambi i tronchi quindi sono vincolati in modo da formare un unico corpo vincolato a terra con due cerniere esterne e quindi una volta iperstatica esternamente. Del resto risulta:

$$3a - s = 6 - 9 = -3 = l - i \Leftrightarrow l = 0,\ i = 3$$

Analogamente, se si richiama il dato che una maglia chiusa è tre volte iperstatica internamente, si riconosce che la maglia della figura con la cerniera in L è quindi due volte iperstatica internamente; la terza iperstatica è esterna essendo l'intera struttura assimilabile a un unico tronco (data l'iperstaticità interna) vincolata a terra con due cerniere (molteplicità quattro).

L’analisi cinematica di un sistema di travi può essere condotto anche facendo riferimento ad alcuni schemi semplici cosiddetti notevoli di cui si è preventivamente analizzato se labile, isostatico o iperstatico. Una volta appurato che una delle travi di una struttura risulti isostatica (o iperstatica), gli elementi trave che si collegano a questa attraverso vincoli interni possono essere semplificati come elementi a se stanti e vincolati a terra dove è disposto un vincolo interno.

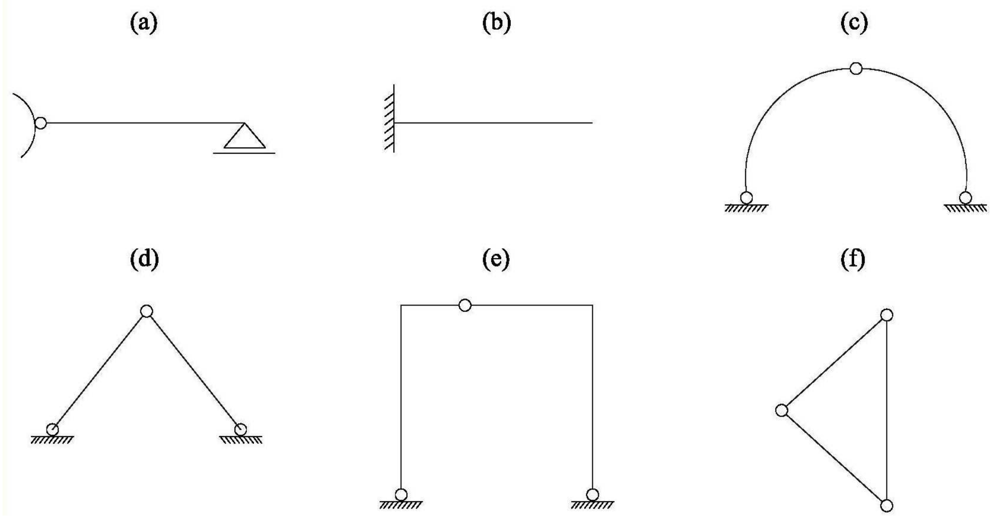


Figura 45. Strutture isostatiche semplici. (a) Trave isostatica su due appoggi. (b) Mensola. (c,d,e) Arco a tre cerniere. (f) Maglia chiusa internamente isostatica.

Le strutture di Figura 45 sono tutte isostatiche, tranne la (f) che è isostatica internamente ma labile esternamente. Gran parte dei sistemi strutturali è scomponibile in sotto-strutture riconducibili a travi appoggiate del tipo (a), a mensole del tipo (b) o ad archi a tre cerniere del tipo (c,d,e). Le strutture chiuse, d’altro canto, sono riconducibili ad assemblaggi di componenti del tipo (f).
Ad esempio, la trave AC di Figura 46, estratta dal sistema, è isostatica. L’elemento CD, allora, può essere semplificato in una trave isostatica su due appoggi del tipo di.

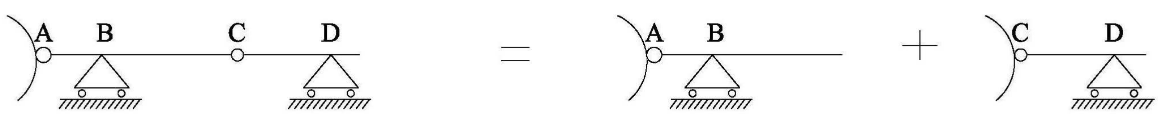


Figura 46. Esempio di struttura isostatica e sua scomposizione in sotto-strutture note.

Il telaio di Figura 47 è una volta iperstatico. Esso, infatti, può essere visto come un arco a tre cerniere (isostatico) a cui è stato aggiunto un ulteriore vincolo interno (il pendolo interno).

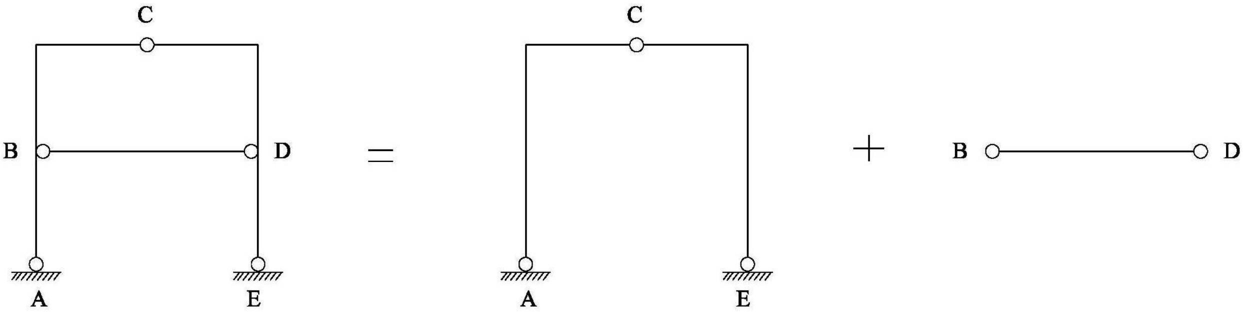


Figura 47. Telaio una volta iperstatico esternamente.

Anche per i sistemi di travi esistono situazioni intermedie in cui i vincoli sono disposti in maniera errata, in maniera cioè da generare labilità e iperstatiche contemporaneamente. Per esempio lo schema di arco a tre cerniere isostatico Figura 45(c,d,e) perde la sua isostaticità se le tre cerniere sono allineate (vedi Figura 48).

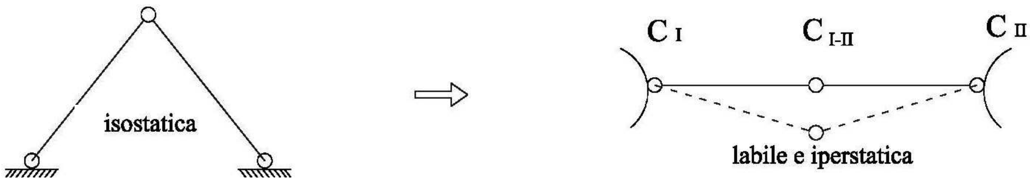


Figura 48. L'arco a tre cerniere può perdere la sua isostaticità se i vincoli sono mal disposti.

In tal caso, infatti, i tre centri di rotazione (due assoluti e uno relativo) esistono perché rispettosi dei vincoli e allineati. In figura è indicato (tratteggiato) anche l'atto di moto rigido consentito.
Si ricordi che il riconoscimento delle strutture si conduce nell'ambito degli atti di moto rigido, ovvero con riferimento alla "tendenza" della struttura ad avere un moto rigido. Per semplicità si dice anche (non del tutto correttamente dal punto di vista formale) che l'analisi è condotta con riferimento agli spostamenti infinitesimi.
Lo schema di Figura 45(f) risulta utile nell'analisi di una famiglia di strutture dette travature reticolari. Si tratta di strutture costituite da aste collegate tra loro con nodi cerniera in modo da formare un assemblaggio di triangoli. Il tutto vincolato a terra in vario modo. Esempi sono rappresentati in Figura 49.

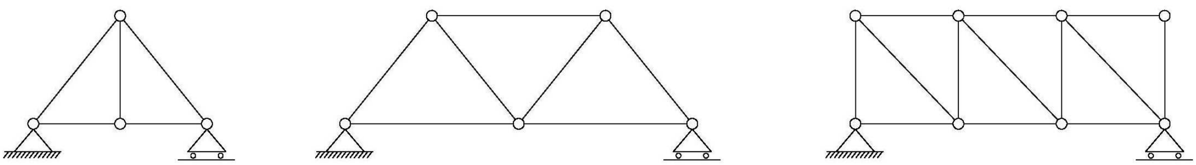


Figura 49. Esempi di travature reticolari.

E' uno schema strutturale dotato di un rapporto resistenza/peso molto alto e quindi utilizzato per coprire grandi luci. Della sua influenza nell'Architettura degli ultimi secoli e delle modalità di analisi degli sforzi interni se ne discuterà in un altro capitolo. L'isostaticità interna è garantita se il sistema è l'assemblaggio di triangoli del tipo di Figura 45(f). Le travature di Figura 50(a,c) risultano una volta iperstatiche internamente, la travatura di Figura 50(b) è quattro volte iperstatica internamente; (a) e (c) sono labili esternamente, mentre (b) è isostatica esternamente.

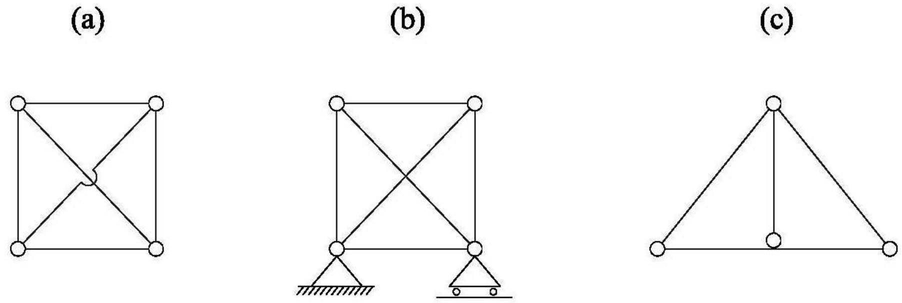


Figura 50. Esempi di travature iperstatiche internamente.

Per le travature reticolari può risultare utile seguire una strada alternativa per la valutazione del grado di iperstaticità. Ogni nodo nel piano, come punto geometrico, presenta due gradi di libertà. $2n$ fornisce i gradi di libertà dell'intera struttura e $2n-3$ i g.d.l. a meno dei moti rigidi assoluti. I nodi sono vincolati tra loro dalle aste. Ciascuna asta equivale a un vincolo semplice tra due nodi. a dà la molteplicità totale dei vincoli interni presenti. La travatura è internamente isostatica se:

$$2n-3=a$$

e se le aste sono ben disposte, se sono, cioè, posizionate in modo da non presentare allineamenti dei centri di rotazione.