

CARATTERISTICHE GEOMETRICHE DELLE TRAVI

1. Elementi geometrici della trave

La trave è una struttura che ha una dimensione (lunghezza) prevalente rispetto alle altre due (dimensioni trasversali). Suoi elementi geometrici caratteristici sono: l'asse e le sezioni trasversali.

La linea d'asse, che viene generalmente assunta coincidente con il luogo geometrico dei baricentri delle sezioni trasversali (fig. 1), può essere sghemba oppure piana; in particolare può essere rettilinea, come nella maggior parte dei casi.

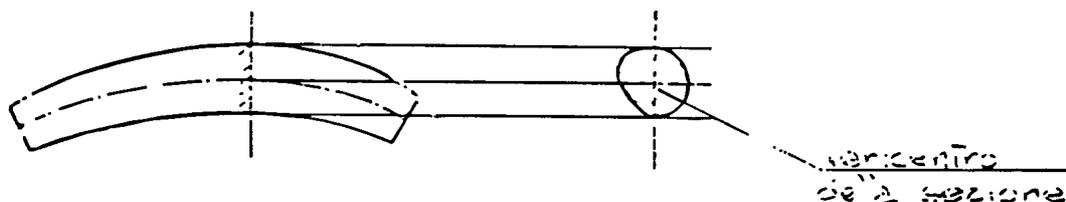
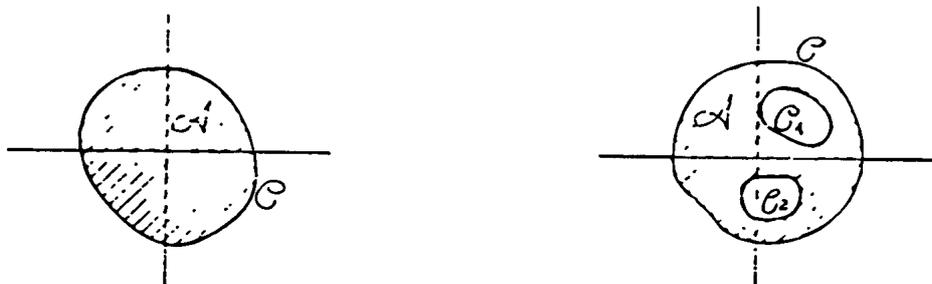


Fig. 1

Le sezioni trasversali (ortogonali all'asse) sono superfici piane delimitate da un contorno esterno ed eventualmente da uno o più contorni interni. La figura geometrica che rappresenta una sezione verrà indicata con \mathcal{A} , il suo contorno esterno con \mathcal{C} e con $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_n$ i suoi eventuali contorni interni (fig. 2).



a) Sezione ad un solo contorno

b) Sezione a più contorni

Fig. 2

Oltre all'area A , vi sono altre proprietà geometriche delle sezioni che vengono interessate nello studio dell'equilibrio delle travi. Esse verranno definite esponendone i procedimenti di calcolo, con particolare riferimento alle forme di più largo impiego nelle applicazioni tecniche.

Alcune proprietà geometriche delle figure piane che verranno qui richiamate possono essere riferite, in una trattazione generale, a coppie di assi obliqui; tuttavia, salvo diverse indicazioni in proposito, gli assi di riferimento verranno sempre assunti ortogonali, come generalmente si presentano nello studio delle travi.

2. Momenti del primo ordine

I momenti del primo ordine, rispetto ad una arbitraria coppia di assi coordinati x, y (fig. 3) di un'area infinitesima dA , situata nell'intorno di un punto generico di \mathcal{A} , sono definiti dai prodotti $y dA$ (rispetto all'asse x) e $x dA$ (rispetto all'asse y).

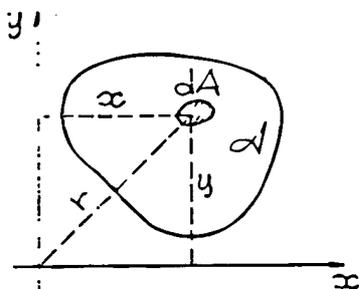


Fig. 3

Per l'intera sezione, i momenti del primo ordine, detti anche momenti statici, sono quindi espressi dagli integrali:

<p>momento statico rispetto all'asse x : $S_x = \int_{\mathcal{A}} y dA$</p> <p>momento statico rispetto all'asse y : $S_y = \int_{\mathcal{A}} x dA$</p>	(1)
---	-----

Come esempio calcoliamo il momento statico rispetto all'asse x del triangolo indicato in fig. 4.

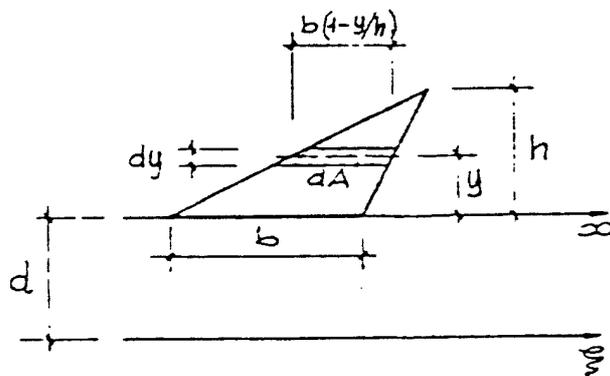


Fig. 4

Sviluppando l'integrazione indicata nella prima (1) si ha:

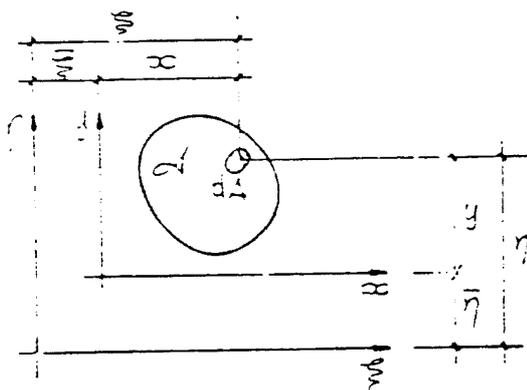
$$S_x = \int_{\mathcal{A}} y dA = \int_0^h y b \left(1 - \frac{y}{h}\right) dy = \frac{1}{6} b h^2 \quad (2)$$

3. Momenti statici riferiti ad assi paralleli

Tra i momenti statici S_x , S_y di una figura piana \mathcal{A} rispetto ad un sistema di assi x , y e i momenti statici S_{ξ} , S_{η} della stessa figura, valutati rispetto ad un altro sistema di assi ξ , η paralleli ai primi, valgono le relazioni:

$$\begin{aligned} S_{\xi} &= S_x + A \bar{\eta} \\ S_{\eta} &= S_y + A \bar{\xi} \end{aligned} \quad (3)$$

dove $\bar{\eta}$ e $\bar{\xi}$ sono le coordinate dell'origine degli assi x , y rispetto agli assi ξ , η , cioè le distanze tra gli assi (fig. 5).



Infatti, con riferimento alla fig. 5, si ha:

$$\begin{aligned}
 S_{\bar{\eta}} &= \int_{\mathcal{A}} \eta \, dA = \int_{\mathcal{A}} (y + \bar{\eta}) \, dA = \int_{\mathcal{A}} y \, dA + A\bar{\eta} \\
 S_{\bar{\xi}} &= \int_{\mathcal{A}} \xi \, dA = \int_{\mathcal{A}} (x + \bar{\xi}) \, dA = \int_{\mathcal{A}} x \, dA + A\bar{\xi}
 \end{aligned} \tag{4}$$

Ad esempio, per il triangolo di fig. 4, il momento statico rispetto all'asse $\bar{\xi}$ parallelo ad x risulta:

$$S_{\bar{\xi}} = S_x + Ad = \frac{1}{6}bh^2 + \frac{1}{2}bhd \tag{5}$$

4. Momenti statici riferiti ad assi ruotati

Vediamo ora come si trasformano i momenti statici al ruotare degli assi di riferimento intorno all'origine (fig. 6).

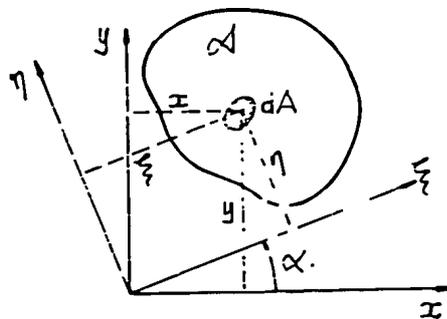


Fig. 6

Indicati ora con $\bar{\xi}$ ed $\bar{\eta}$ due assi ruotati dell'angolo arbitrario α rispetto ad un riferimento iniziale x, y si ha:

$$\begin{aligned}
 S_{\bar{\xi}} &= \int_{\mathcal{A}} \eta \, dA = \int_{\mathcal{A}} (y \cos \alpha - x \sin \alpha) \, dA \\
 S_{\bar{\eta}} &= \int_{\mathcal{A}} \xi \, dA = \int_{\mathcal{A}} (x \cos \alpha + y \sin \alpha) \, dA
 \end{aligned} \tag{6}$$

ed effettuando le integrazioni:

$$S_{\xi} = S_x \cos \alpha - S_y \sin \alpha$$

$$S_{\eta} = S_x \sin \alpha + S_y \cos \alpha \quad (7)$$

Le (7) mostrano che i momenti statici si trasformano, al ruotare degli assi di riferimento, come le componenti scalari di un vettore.

5. Baricentro di una sezione

Il baricentro G di una figura piana \mathcal{A} che rappresenta una sezione è un punto che ha la seguente proprietà: rispetto ad una qualsiasi coppia di assi coordinati aventi l'origine in detto punto, i momenti statici sono nulli. Vediamo come si procede alla determinazione del baricentro e alcune sue proprietà fondamentali.

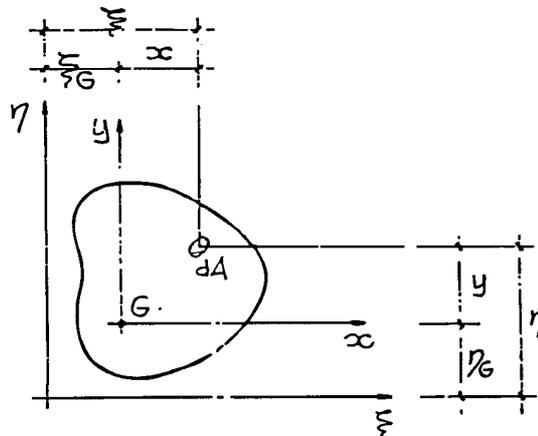


Fig. 7

Con le notazioni di fig. 7, supponiamo ora noti i momenti statici S_{ξ} , S_{η} rispetto ad una arbitraria coppia di assi ξ , η . Per la definizione di baricentro, i momenti statici S_x e S_y rispetto agli assi x , y uscenti da G (di coordinate ξ_G e η_G) dovranno essere nulli. Dalle formule (3), in cui si sostituiscono $\bar{\xi}$ ed $\bar{\eta}$ con ξ_G e η_G , per $S_x = S_y = 0$ si ottiene:

$$\begin{cases} S_{\xi} = A \eta_G \\ S_{\eta} = A \xi_G \end{cases} \quad (8)$$

da cui, risolvendo rispetto a ξ_G e η_G :

$$\boxed{\begin{aligned}\xi_G &= \frac{S_\eta}{A} \\ \eta_G &= \frac{S_\xi}{A}\end{aligned}} \quad (9)$$

Le formule (9) danno le coordinate del baricentro rispetto ad una coppia di assi coordinati quando siano noti i momenti statici rispetto agli stessi assi. Le (8) possono invece essere utilizzate quando sia nota a priori la posizione del baricentro di una figura piana \mathcal{A} e si voglia determinarne i momenti statici rispetto ad un sistema di assi non baricentrici.

Osserviamo ora che dalle formule (7), relative a rotazioni di assi, si può trarre la conclusione che i momenti statici di una figura piana sono nulli rispetto a qualsiasi coppia di assi aventi origine nel suo baricentro. Infatti, se sono nulli i momenti statici S_x , S_y rispetto ad una particolare coppia di assi ~~particolari~~ x, y , per le (7) saranno nulli anche i momenti statici rispetto ad un'altra coppia di assi comunque ruotati rispetto ai primi (aventi però ancora origine nel baricentro).

Per note proprietà degli integrali d'area, i momenti statici di una figura piana \mathcal{A} valutati rispetto a suoi eventuali assi di simmetria dovranno essere nulli. Questa proprietà può essere utilmente impiegata nella determinazione del baricentro: se la figura ha un asse di simmetria, il baricentro cade su tale asse; se gli assi di simmetria sono due, il baricentro è direttamente individuato dalla loro intersezione.

Per una sezione a forma di triangolo isoscele (fig. 8) il baricentro cade sull'asse di simmetria; resta quindi da determinarne la distanza d_G dalla base b . Ricordando la relazione (2), poichè il momento statico S del triangolo rispetto alla base b vale $\frac{1}{8}bh^2$, dalle (1.9) si ha:

$$d_G = \frac{S}{A} = \frac{h}{3} \quad (10)$$

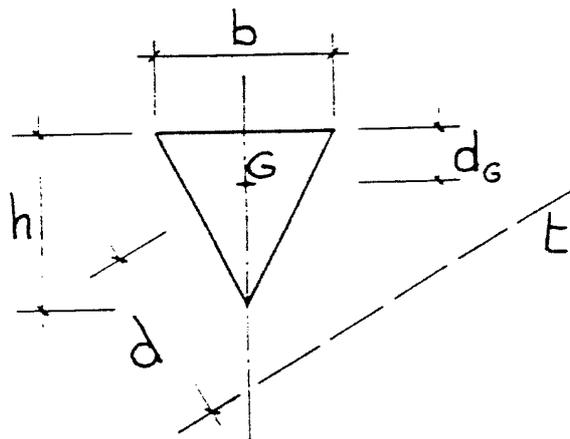


Fig. 8

Volendo poi determinare anche il momento statico del triangolo rispetto ad una retta t , a distanza d da G basta applicare le (8)

$$S_t = A d = \frac{1}{2} b h d \quad (11)$$

In fig. 9 sono indicati i baricentri di alcune figure piane aventi due assi di simmetria.

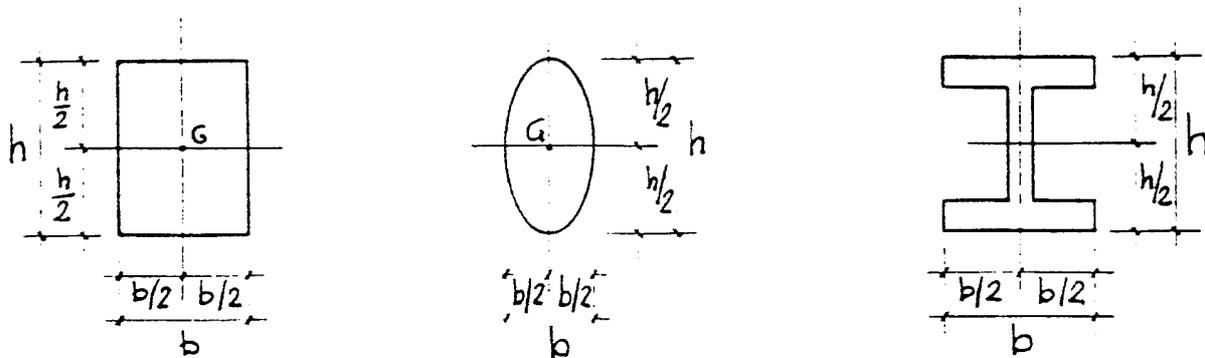


Fig. 9

Come altro esempio di applicazione dell' (8) calcoliamo il momento statico del rettangolo di fig. 9 rispetto ad un asse passante per uno dei lati b di base:

$$S_b = A \frac{h}{2} = \frac{1}{2} b h^2 \quad (12)$$

Un altro caso interessante per le applicazioni è quello rappresentato nella fig. 10, dove è indicata la posizione del baricentro di un

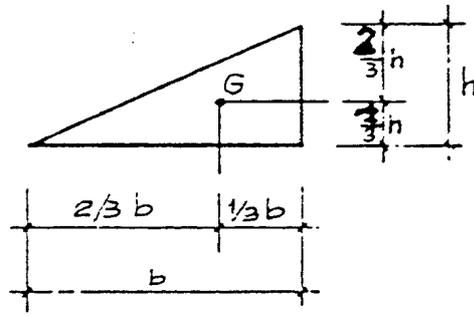


Fig. 10

Concludiamo gli esempi sulla determinazione del baricentro con il settore di corona circolare rappresentato in fig. 11a.

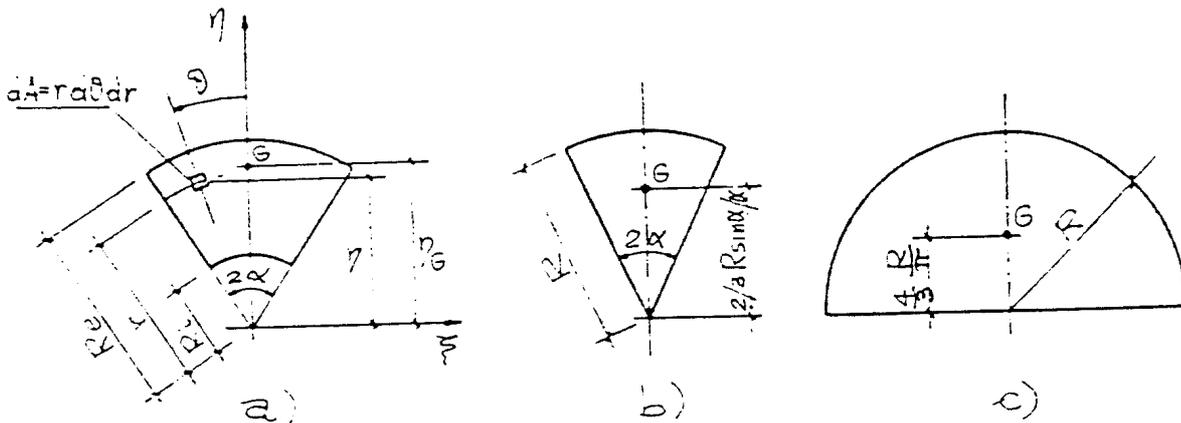


Fig. 11

Introdotta il riferimento polare r , θ , come indicato in figura, il momento statico S_{ξ} ha l'espressione:

$$S_{\xi} = \int_{\omega} \eta dA = \int_{R_i}^{R_e} \int_{-\alpha}^{\alpha} r^2 \cos \theta d\theta dr = \frac{2}{3} (R_e^3 - R_i^3) \sin \alpha \quad (13)$$

ed essendo: $A = \int_{R_i}^{R_e} \int_{-\alpha}^{\alpha} r d\theta dr = \alpha (R_e^2 - R_i^2)$, l'ordinata del baricentro risulta:

$$\eta_G = \frac{S_{\xi}}{A} = \frac{2(R_e^3 - R_i^3) \sin \alpha}{3(R_e^2 - R_i^2) \alpha} \quad (14)$$

Per $R_i=0$, $R_e=R$ si ha il settore circolare (fig. 11b) e per $2\alpha=\pi$ il semicerchio (fig. 11c).

6. Proprietà additiva dei momenti statici.

In quanto integrali d'area, i momenti statici di una figura piana \mathcal{A} godono della proprietà additiva, cioè possono essere calcolati suddividendo \mathcal{A} in due o più parti e sommando algebricamente i momenti delle singole parti che la compongono. Ciò può essere particolarmente utile per le sezioni composte da più figure geometriche semplici delle quali è nota a priori la posizione del baricentro.

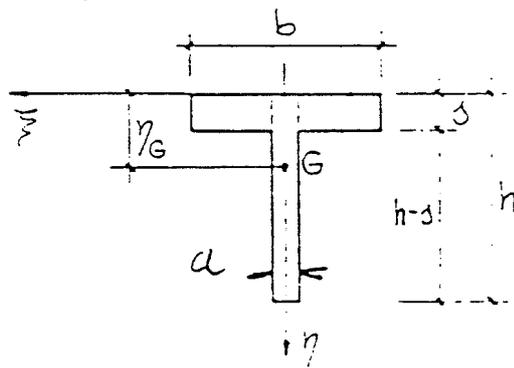


Fig. 12

Ad esempio, per la sezione a T di fig. 12, utilizzando le formule (3) per ciascun rettangolo che compone la sezione, si ha:

$$S_{\bar{x}} = (b-a)\frac{s^2}{2} + a\frac{h^2}{2} \quad (15)$$

$$\eta_G = \frac{(b-a)s^2 + ah^2}{2[(b-a)s + ah]}$$

Altri casi interessanti nelle applicazioni sono quelli indicati in fig. 13.

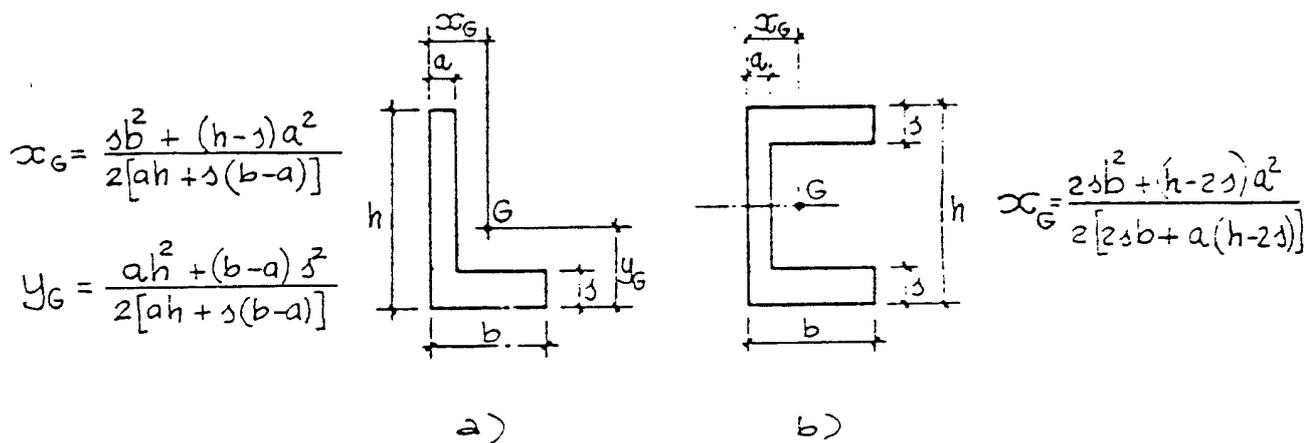


Fig. 13

Procedendo come nel caso della sezione a T, si ottengono i risultati indicati a lato delle figure.

Consideriamo infine il trapezio di fig. 14 e determiniamo il momento statico e la distanza del baricentro rispetto ad una retta $y-y$ di sposta come in figura.

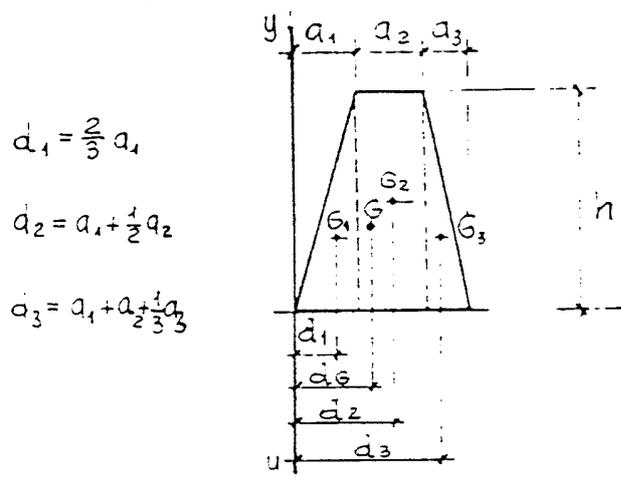


Fig. 14

$$S_y = \frac{1}{2} a_1 h d_1 + a_2 h d_2 + \frac{1}{2} a_3 h d_3 \quad d_G = \frac{S_y}{A} \quad (16)$$

7. Momenti del secondo ordine

Facendo ancora riferimento alla fig. 3, i momenti del secondo ordine dell'area infinitesima dA sono definiti dai prodotti: $x^2 dA, y^2 dA, xy dA, r^2 dA$. Per l'intera sezione, i momenti del secondo ordine sono

quindi espressi dagli integrali:

$$\begin{aligned}
 \text{momento d'inerzia rispetto all'asse } x &: J_x = \int_{\mathcal{A}} y^2 dA \\
 \text{momento d'inerzia rispetto all'asse } y &: J_y = \int_{\mathcal{A}} x^2 dA \\
 \text{momento misto o centrifugo} &: J_{xy} = \int_{\mathcal{A}} xy dA \\
 \text{momento d'inerzia polare} &: J_o = \int_{\mathcal{A}} r^2 dA = \int_{\mathcal{A}} (x^2 + y^2) dA
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

Conviene riportare subito alcuni semplici esempi di applicazione delle (17).

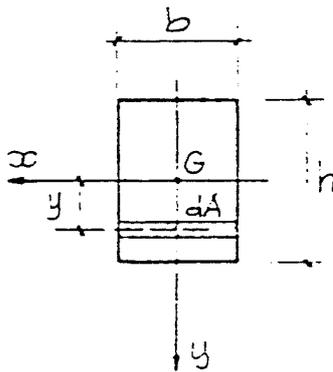


Fig. 15

Per la sezione rettangolare di fig. 15, assunti gli assi x, y baricentrici, si ha:

$$\begin{aligned}
 J_x &= \int_{\mathcal{A}} y^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 b dy = \frac{1}{12} b h^3; & J_y &= \frac{1}{12} h b^3 \\
 J_{xy} &= \int_{\mathcal{A}} xy dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} xy dx dy = 0.
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

Consideriamo ora il triangolo di fig. 16 calcoliamone i momenti del secondo ordine rispetto agli assi x, y disposti come indicato in figura.

$$\begin{aligned}
 J_x &= \int_{\mathcal{A}} y^2 dA = \int_0^b \int_0^{\frac{h}{b}x} y^2 dy dx = \frac{1}{12} b h^3 \\
 J_y &= \int_{\mathcal{A}} x^2 dA = \int_0^b \int_0^{\frac{h}{b}x} x^2 dy dx = \frac{1}{4} h b^3 \\
 J_{xy} &= \int_{\mathcal{A}} xy dA = \int_0^b \int_0^{\frac{h}{b}x} xy dy dx = \frac{1}{8} b^2 h
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

Per la sezione a contorno circolare conviene introdurre un rife-

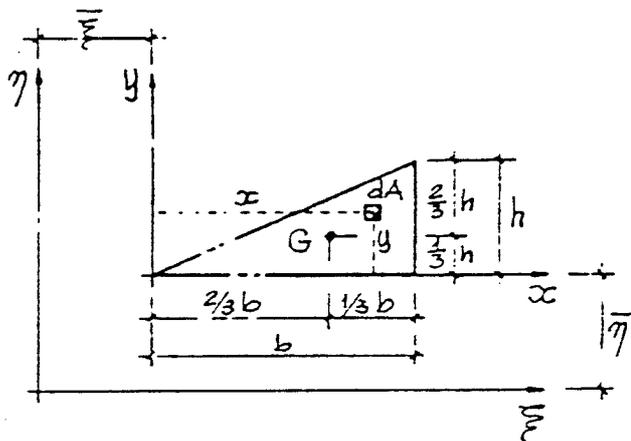


Fig. 16

rimento polare (fig. 17); il calcolo dei momenti d'inerzia J_x , J_y risulta così molto facilitato determinando prima il momento polare J_o .

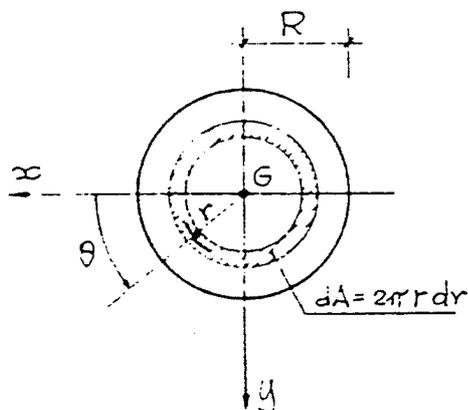


Fig. 17

$$J_o = \int dA r^2 = \int_0^R 2\pi r^3 dr = \frac{\pi R^4}{2}; \quad J_x = J_y = \frac{J_o}{2} = \frac{\pi R^4}{4}; \quad J_{xy} = 0. \quad (20)$$

Per le forme geometriche indicate in fig. 11, si ottengono invece i seguenti risultati:

a) settore di corona circolare: $J_{\zeta} = \frac{(R_e^4 - R_i^4)}{4} (\alpha + \sin \alpha \cos \alpha)$
 b) settore circolare: $J_{\zeta} = \frac{R^4}{4} (\alpha + \sin \alpha \cos \alpha)$ (21)
 c) semicerchio: $J_{\zeta} = \frac{\pi R^4}{8}$

8. Momenti del secondo ordine riferiti ad assi paralleli

Facendo ancora riferimento alla fig. 5, supponiamo noti i momenti del secondo ordine rispetto agli assi x , y ; il problema è quello

di determinare le espressioni dei momenti del secondo ordine rispetto agli assi ξ , η . Risulta evidentemente:

$$\begin{aligned} J_{\xi} &= \int_{\mathcal{A}} \eta^2 dA = \int_{\mathcal{A}} (y + \bar{\eta})^2 dA = \int_{\mathcal{A}} (y^2 + \bar{\eta}^2 + 2\bar{\eta}y) dA \\ J_{\eta} &= \int_{\mathcal{A}} \xi^2 dA = \int_{\mathcal{A}} (x + \bar{\xi})^2 dA = \int_{\mathcal{A}} (x^2 + \bar{\xi}^2 + 2\bar{\xi}x) dA \\ J_{\xi\eta} &= \int_{\mathcal{A}} \xi \eta dA = \int_{\mathcal{A}} (x + \bar{\xi})(y + \bar{\eta}) dA = \int_{\mathcal{A}} (xy + \bar{\xi}\eta + \eta x + \bar{\xi}y) dA \end{aligned} \quad (22)$$

ed effettuando le integrazioni:

$$\begin{aligned} J_{\xi} &= J_x + A\bar{\eta}^2 + 2\bar{\eta}S_x \\ J_{\eta} &= J_y + A\bar{\xi}^2 + 2\bar{\xi}S_y \\ J_{\xi\eta} &= J_{xy} + A\bar{\xi}\bar{\eta} + \bar{\xi}S_x + \bar{\eta}S_y \end{aligned} \quad (23)$$

Le formule per il passaggio da una coppia di assi ad un'altra, traslata rispetto alla prima, hanno particolare importanza applicativa quando uno dei due riferimenti è baricentrico. Supponendo che gli assi x, y abbiano origine nel baricentro, come indicato in fig. 7, dalle formule (23) in cui si ponga $S_x = S_y = 0$ si ottiene:

$$\begin{aligned} J_{\xi} &= J_x + A\eta_c^2 \\ J_{\eta} &= J_y + A\xi_c^2 \\ J_{\xi\eta} &= J_{xy} + A\xi_c\eta_c \end{aligned} \quad (24)$$

dove J_x e J_y sono valutati rispetto ad assi x, y baricentrici mentre J_{ξ} e J_{η} sono valutati rispetto ad assi ξ, η paralleli ai primi: ξ_c e η_c sono le coordinate del baricentro nel riferimento ξ, η .

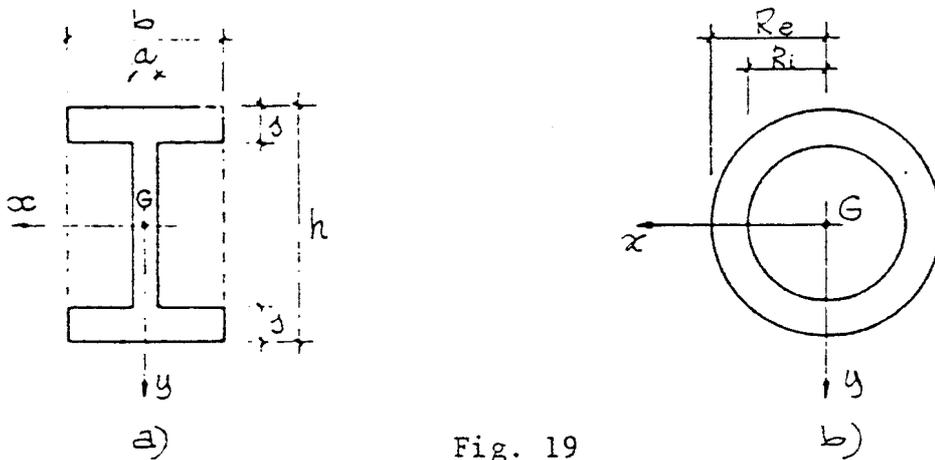
Come esempio calcoliamo il momento d'inerzia J_b del rettangolo di fig. 15 rispetto ad un asse passante per uno dei lati di lunghezza b :

$$J_b = J_x + A\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}bh^3 - \frac{1}{4}bh^3 = \frac{1}{3}bh^3 \quad (25)$$

Altri esempi di applicazione delle (24) sono riportati in seguito nel calcolo dei momenti del secondo ordine di figure geometriche più complesse.

9. Proprietà additiva dei momenti del secondo ordine

Anche nel calcolo dei momenti del secondo ordine si può procedere sommando i contributi delle singole parti in cui può essere arbitrariamente suddivisa una sezione (oppure sottraendo alcune parti da una figura geometrica che la comprende).



Ad esempio, il momento d'inerzia J_y della sezione indicata in fig. 19a può essere ottenuto come somma dei momenti d'inerzia dei tre rettangoli che compongono la figura, calcolati mediante la formula (17) ~~in cui~~ in cui siano opportunamente considerati gli assi di riferimento:

$$J_y = \frac{1}{12} (h-2s)a^3 + 2 \frac{1}{12} s b^3. \quad (26)$$

Il momento d'inerzia J_x della stessa sezione può invece essere ottenuto facilmente per sottrazione dal rettangolo di lati b e h (l'asse x è baricentrico tanto per la sezione quanto per il rettangolo che la comprende e per la parti che vanno sottratte):

$$J_x = \frac{1}{12} b h^3 - \frac{1}{12} (b-a)(h-2s)^3. \quad (27)$$

Analogamente, per la sezione a forma di corona circolare (fig. 19b) si ottiene

$$J_o = \frac{\pi R_e^4}{2} - \frac{\pi R_i^4}{2} = \frac{\pi}{2} (R_e^4 - R_i^4) \quad (28)$$

$$J_x = J_y = \frac{J_o}{2} = \frac{\pi}{4} (R_e^4 - R_i^4).$$

che richiede anche

Un altro esempio, ~~la~~ l'applicazione delle (24), è il calcolo del momento d'inerzia J_x per la sezione a T di fig. 20.

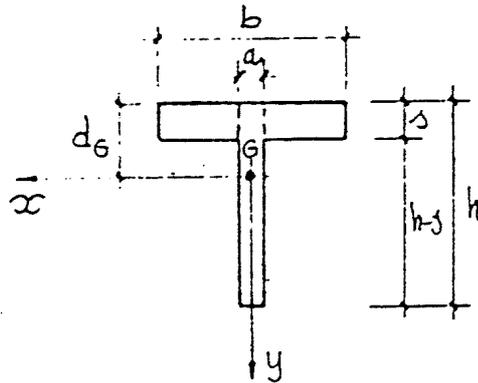


Fig. 20

Il momento d'inerzia J_x dell'intera sezione viene calcolato come somma dei momenti d'inerzia dei rettangoli che la compongono, secondo la suddivisione indicata in figura:

$$J_x = \frac{1}{12} (b-a)s^3 + (b-a)s(d_5 - \frac{s}{2})^2 + \frac{1}{12} ah^3 + ah(\frac{h}{2} - d_6)^2. \quad (29)$$

Per il calcolo di J_y non occorre invece applicare le formule (24) per la traslazione di assi in quanto l'asse y è baricentrico sia per l'intera sezione sia per i singoli rettangoli che la compongono, purchè ora si suddivida la figura separando il rettangolo superiore di lati b , s da quella inferiore di lati a , $(h-s)$:

$$J_y = \frac{1}{12} (h-s)a^3 + \frac{1}{12} s^3 b^3 \quad (30)$$

10. Momenti del secondo ordine riferiti ad assi ruotati.

Consideriamo ora il seguente problema: noti i momenti del secondo ordine rispetto ad una coppia di assi coordinati x, y , aventi origine in un punto arbitrario O , determinare quelli relativi ad un'al-

tra coppia di assi ortogonali ξ , η , uscenti dallo stesso punto O e ruotati di un angolo α rispetto ai primi.

Facendo ancora riferimento alla fig. 6 si ha:

$$\begin{aligned} J_{\xi} &= \int_{\mathcal{A}} \eta^2 dA = \int_{\mathcal{A}} (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dA \\ J_{\eta} &= \int_{\mathcal{A}} \xi^2 dA = \int_{\mathcal{A}} (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 dA \end{aligned} \quad (31)$$

$$J_{\xi\eta} = \int_{\mathcal{A}} \xi \eta dA = \int_{\mathcal{A}} (y \cos \alpha - x \sin \alpha)(x \cos \alpha + y \sin \alpha) dA$$

ed effettuando le integrazioni

$$\begin{aligned} J_{\xi} &= J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{xy} \sin 2\alpha \\ J_{\eta} &= J_x \sin^2 \alpha + J_y \cos^2 \alpha + J_{xy} \sin 2\alpha \\ J_{\xi\eta} &= \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha \end{aligned} \quad (32)$$

Le (32) mostrano che i momenti del secondo ordine si trasformano, al ruotare degli assi di riferimento, come le componenti di un tensore doppio simmetrico.

11. Assi principali.

Si dicono assi principali d'inerzia, rispetto ad un punto scelto come origine, gli assi coordinati rispetto ai quali il momento centrifugo è nullo. Noti i momenti del secondo ordine rispetto ad un riferimento arbitrario, la terza relazione (32), in cui sia ponga $J_{\xi\eta} = 0$, consente di determinare l'angolo $\bar{\alpha}$ che individua gli assi principali di inerzia:

$$\boxed{\operatorname{tg} 2\bar{\alpha} = \frac{2 J_{xy}}{J_y - J_x}} \quad (33)$$

Si noti che la direzione degli assi principali dipende dalla scelta del punto nel quale si pone l'origine. Nello studio delle travi sono di particolare importanza gli assi principali che hanno origine nel ba-

ricentro della sezione e si dicono assi centrali principali d'inerzia.

E' da tenere ben presente che per determinare gli assi centrali principali d'inerzia di una sezione è necessario prima porre l'origine nel baricentro e successivamente determinare $\bar{\alpha}$ mediante la (33).

Due assi ortogonali baricentrici di cui uno di simmetria per la sezione costituiscono una coppia di assi centrali principali d'inerzia. Per le sezioni indicate nella fig. 15, 17, 19, 20 gli assi x, y sono quindi centrali principali d'inerzia. Alcune sezioni hanno più coppie di assi centr. princ. d'inerzia: per il quadrato ed il cerchio, ad esempio, ogni coppia di assi ortogonali baricentrici è centrale principale d'inerzia; infatti, rispetto a due assi x, y di simmetria risulta $J_x = J_y$ e $J_{xy} = 0$ e la terza equazione (32) dà $J_{\xi\eta} = 0$ per ogni valore di α .

Come esempio di applicazione della relazione (33) consideriamo la sezione a L indicata in fig. 21

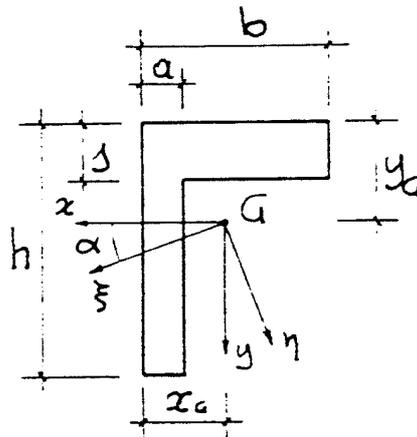


Fig. 21

La posizione del baricentro è riportata a lato della fig. 13a. I momenti di secondo ordine rispetto agli assi x, y risultano:

$$J_x = \frac{1}{12} a h^3 + a h \left(\frac{h}{2} - y_G \right)^2 + \frac{1}{12} (b-a) s^3 + (b-a) s \left(y_G - \frac{s}{2} \right)^2$$

$$J_y = \frac{1}{12} (h-s) a^3 + a (h-s) \left(x_G - \frac{a}{2} \right)^2 + \frac{1}{12} s b^3 + s b \left(\frac{b}{2} - x_G \right)^2$$

$$J_{xy} = a (h-s) \left(x_G - \frac{a}{2} \right) \left(\frac{s+h}{2} - y_G \right) - s b \left(\frac{b}{2} - x_G \right) \left(y_G - \frac{s}{2} \right)$$

Per: $b = 40 \text{ cm}$, $h = 60 \text{ cm}$, $a = 15 \text{ cm}$, $s = 20 \text{ cm}$, le coordinate del bari-

centro risultano $x_G = 14,64$ cm, $y_G = 22,86$ cm e i momenti del secondo ordine:

$$J_x = 415240 \text{ cm}^4 \quad J_y = 171490 \text{ cm}^4 \quad J_{xy} = 128574 \text{ cm}^4$$

e dalla (35) si ottiene $\bar{\alpha} = 66,73^\circ$. (Dalle (34), per $\alpha = \bar{\alpha}$ si ottengono poi i momenti principali d'inerzia: $J_\xi = 116207 \text{ cm}^4$ $J_\eta = 470522 \text{ cm}^4$ ($J_{\xi\eta} = 0$)).

Per $h=b$ e $s=a$ la sezione ad L di fig. 21 diventa simmetrica (fig. 22) rispetto ad un asse inclinato di 45° rispetto ai lati:

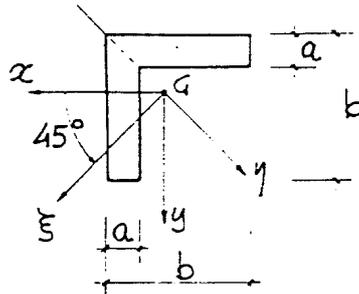


Fig. 22

In questo caso risulta evidentemente $J_x = J_y$ e le soluzioni della (35) individuano gli assi ξ, η indicati in figura.

13. Ellisse centrale d'inerzia

Nello studio delle travi si incontrano espressioni nelle quali compaiono i rapporti tra i momenti principali d'inerzia della sezione trasversale e la sua area. Tali espressioni risultano formalmente piú semplici se si introducono le definizioni:

$$\rho_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}} \quad \rho_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}} \quad (39)$$

da cui si hanno le seguenti espressioni dei momenti principali d'inerzia:

$$J_x = A \rho_x^2 \quad J_y = A \rho_y^2 \quad (40)$$

essendo inteso che gli assi x, y sono qui assunti coincidenti con gli assi centrali principali d'inerzia della sezione.

Le grandezze ρ_x e ρ_y definite dalle (34) sono dimensionalmente delle lunghezze e possono essere interpretate come semidiametri di un'ellisse, detto ellisse centrale d'inerzia della sezione, che solitamente si rappresenta con il semidiametro ρ_x posto sull'asse y e il se-

midiametro ρ_y sull'asse x (fig. 25); ρ_x e ρ_y si dicono raggi principali d'inerzia.

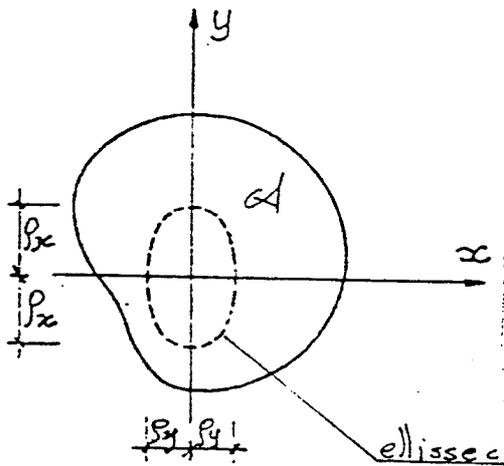


Fig. 25

Con riferimento alla fig. 26, consideriamo un asse baricentrico ξ qualsiasi e ad esso associamo un altro asse η , univocamente determinato unendo il baricentro G con il punto P in cui un asse ξ' , parallelo a ξ , è tangente all'ellisse.

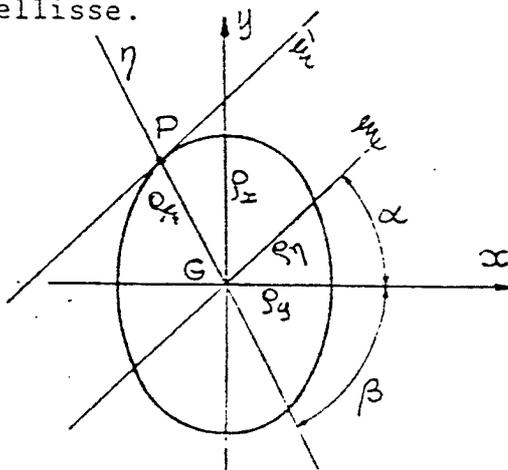


Fig. 26

Indichiamo con ρ_η e ρ_ξ i semidiametri appartenenti, rispettivamente, all'asse ξ e all'asse η . Gli assi ξ ed η , che si corrispondono secondo la costruzione ora definita, si dicono assi coniugati rispetto all'ellisse centrale d'inerzia mentre ρ_ξ e ρ_η si dicono semidiametri coniugati. Evidentemente gli assi principali sono una particolare coppia di assi coniugati (ortogonali).

Determiniamo una relazione analitica che lega gli angoli α e β formati dagli assi ξ ed η con l'asse principale x (fig. 26). L'equa-

zione dell'ellisse è:

$$F(x,y) = \frac{x^2}{\rho_y^2} + \frac{y^2}{\rho_x^2} - 1 = 0 \quad (41)$$

la ~~retta tangente all'ellisse~~ ^{direzione della} retta tangente all'ellisse in un suo punto generico sarà data, per $0 < \alpha < 90^\circ$, dalla derivata:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial y} = - \frac{x}{y} \frac{\rho_x^2}{\rho_y^2} \quad (42)$$

avendo fatto uso della formula di derivazione per le funzioni implicite.

Nel punto P , dove la retta tangente è inclinata dell'angolo α rispetto ad x , dovrà essere:

$$- \frac{x}{y} \frac{\rho_x^2}{\rho_y^2} = \operatorname{tg} \alpha \quad (43)$$

Ma le coordinate x , y del punto P sono evidentemente legate dalla relazione:

$$- \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \beta \quad (44)$$

pertanto, tra gli angoli α e β vale la relazione:

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{\rho_x^2}{\rho_y^2} = \frac{J_x}{J_y} \quad (45)$$

La (45) verrà utilizzata nello studio delle travi in particolari condizioni di sollecitazione.