EQUIESTENSIONE ED EQUISCOMPONIBILITÀ DEI POLIEDRI

Per i poligoni equiscomponibilità ed equiestensione sono concetti equivalenti; per i poliedri, no.

In generale i poliedri equiestesi (di ugual volume) non sono equiscomponibili.

Ricordiamo che:

Due figure sono equiscomponibili se si possono dividere in un numero finito di parti "sufficientemente regolari" rispettivamente uguali.

Nello spazio consideriamo due relazioni di equivalenza

- 1) la <u>congruenza</u> tra figure solide:
  se esiste una isometria che le trasforma l'una nell'altra

- 2) la <u>equiestensione</u> tra figure solide:
  se hanno lo stesso volume: consideriamo due figure solide vuote all'interno, esse hanno lo stesso volume se contengono la stessa quantità di liquido.

Figure congruenti sono equiestese?

Figure equiestese sono congruenti?

OCCUPIAMOCI DELL'EQUIESTENSIONE DI FIGURE SOLIDE.

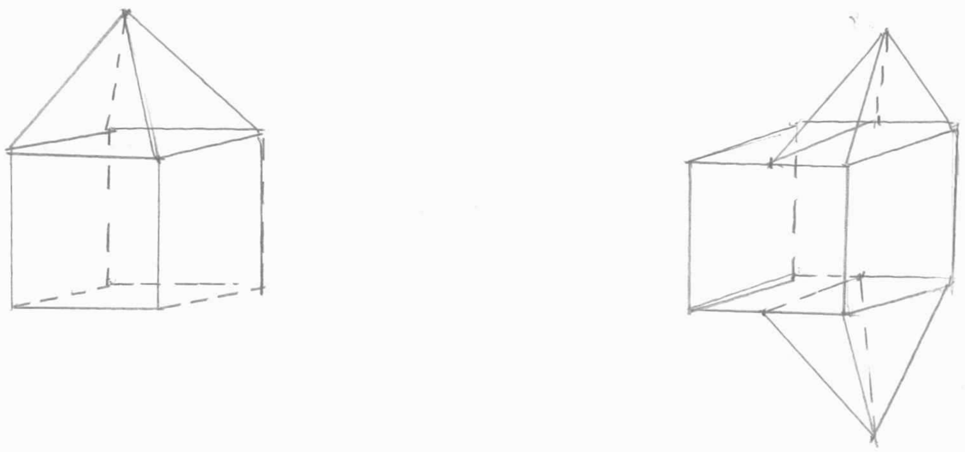
Possiamo pensare un solido come composto da tanti strati di spessore infinitesimo sovrapposti, come una risma di carta, o un mazzo di carte

Ognuno di tali "strati" non è altro che la sezione ottenuta intersecando il solido con un piano; si prendono piani paralleli e quindi sezioni parallele: se qualunque piano del fascio di piani paralleli, taglia su due solidi superfici equivalenti, allora i due solidi possono essere pensati equiestesi: questo è il

PRINCIPIO DI CAVALIERI

> Se esiste un fascio di piani paralleli che taglia due solidi in figure con superfici equivalenti $\Rightarrow$ i due solidi sono equiestesi

Il reciproco non vale: diamo un controesempio:



Equiestensione tra prismi

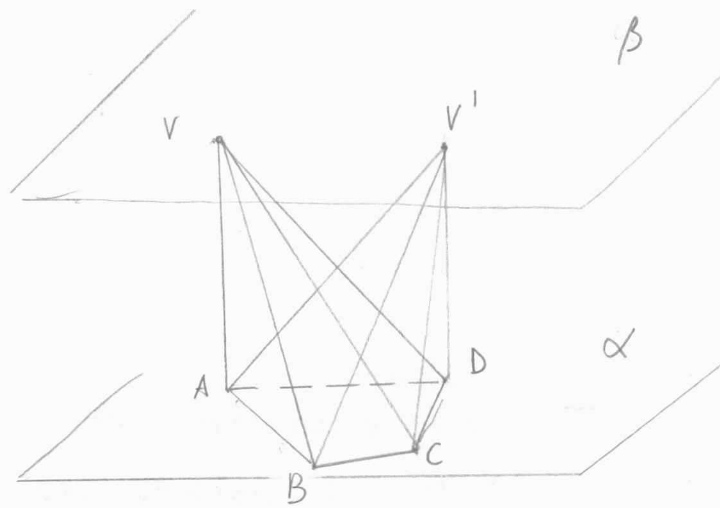
Abbiamo visto che un prisma è generato dalla traslazione della sua base; due prismi con altezza uguale e basi congruenti possono essere posti nello stesso strato dello spazio $\Rightarrow$ l'altezza è la distanza dei due piani paralleli che contengono le basi; ogni altro piano parallelo o non interseca nessuno dei due prismi, oppure li interseca in poligoni equivalenti alle basi e quindi tra loro.

Per il principio di Cavalieri:
due prismi aventi altezze uguale e basi equivalenti sono equiestesi.

PIRAMIDE

Ogni piramide è generata dalle successive omotetie della sua base verso il centro di omotetia V (vertice della piramide): si considerano le omotetie di centro V e rapporto k, con $0<k<1$, del poligono di base e la piramide è la stratificazione di tali poligoni omotetici

Considero due piani α e β e un poligono su α; le due piramidi hanno uguale altezza. Un piano γ parallelo ad α e β le interseca in due poligoni omotetici alla base; il rapporto di omotetia tra i loro lati e quelli del poligono di base è lo stesso

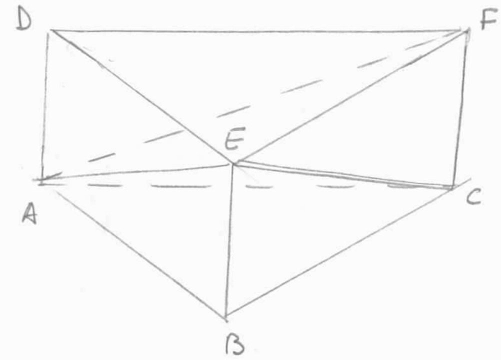


ed è uguale al rapporto delle distanze dei piani γ e α dal vertice $\Rightarrow$ sono congruenti $\Rightarrow$ le piramidi sono equiestese per il principio di Cavalieri.

<u>Proposizione</u>: due piramidi che hanno altezze uguali e basi equivalenti sono equiestese

Teorema Un prisma è equiesteso al triplo di una piramide con la stessa base e di uguale altezza

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo un prisma particolare



Scomponiamo il prisma in 3 piramidi equiestese

ABCE e EFDA hanno basi congruenti e uguale altezza quindi sono equiestese

AEFD e ECFA hanno per basi due triangoli congruenti sullo stesso piano e hanno lo stesso vertice ⇒ hanno uguale altezza

⇒ il prisma è equiesteso al triplo di una piramide con uguale base e uguale altezza

Per un prisma a base qualunque si dimostra nello stesso modo scomponendo le basi in triangoli

Dato un poliedro, esso si scompone in tante piramidi a partire da uno qualunque dei suoi vertici V: basta tracciare i piani determinati da V e da due vertici non adiacenti.

Ogni piramide è equiestesa ad $\frac{1}{3}$ di un prisma con la stessa base e stessa altezza

Ogni prisma è a sua volta equiesteso ad un parallelepipedo retto di uguale altezza e base equivalente

... un solido più generale del prisma è un prisma.

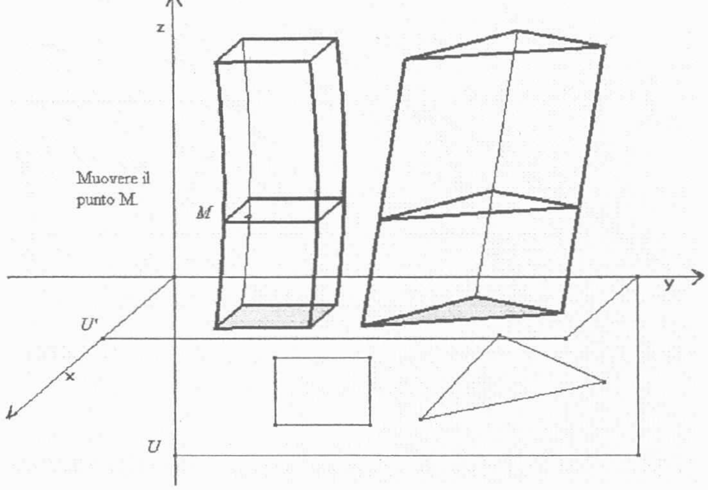


Figura 6

Analoga attività si può ripetere con una coppia di piramidi aventi basi equivalenti e la stessa altezza come mostrato nella Figura 7.

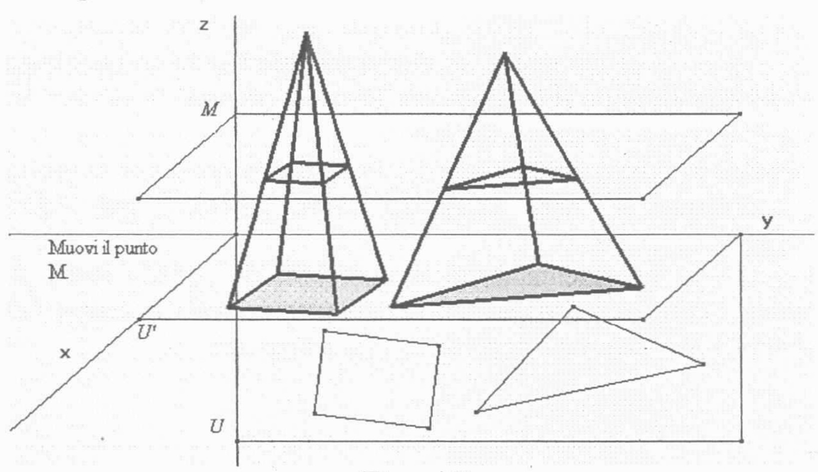


Figura 7

Una delle proposizioni più importanti nello studio del volume delle figure dello spazio afferma l'equivalenza tra un prisma a base triangolare e tre piramidi tra loro equivalenti.

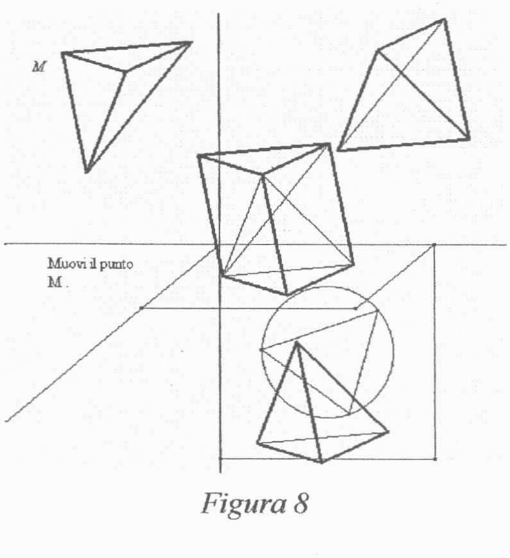


Figura 8

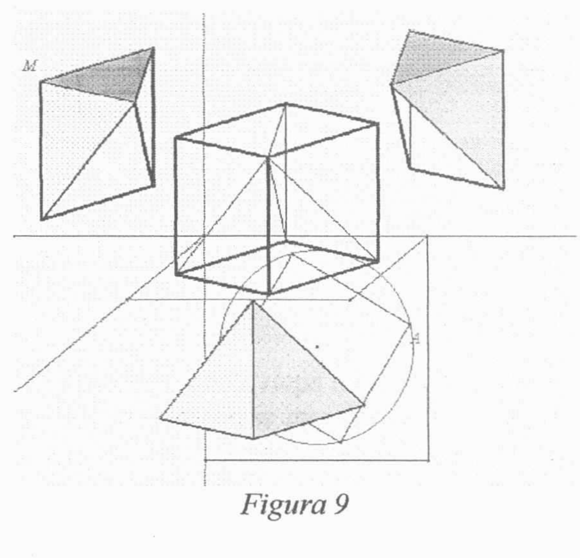


Figura 9

La formula del volume del parallelepipedo retto
(pensato come traslazione perpendicolare del rettangolo)
è data da area di base × altezza

$\Rightarrow$ volume del prisma = area di base × altezza

$\Rightarrow$ volume della piramide = $\dfrac{\text{area di base} \times \text{altezza}}{3}$

Allo stesso modo

TEOREMA: Un cilindro è equiesteso ad un prisma di uguale altezza e di base equivalente a quella del cilindro

Dimostrazione: Poniamo le basi inferiori su un piano α e le superiori su β, $\alpha // \beta$; poiché hanno uguale altezza, un qualunque piano parallelo a quello delle basi, sega i due solidi in figure congruenti a quelle di base e quindi congruenti tra loro $\Rightarrow$ per il principio di Cavalieri, hanno uguale volume

Avremo allora la seguente formula del

Volume del cilindro: area base × altezza

TEOREMA: Un cono è equiesteso ad una piramide di uguale altezza e base equivalente a quella del cono

Dimostrazione: Disponiamoli su un piano α e vertici su un altro piano β ad esso parallelo $\Rightarrow$ la loro altezza h è la distanza tra i piani

Interseco con un piano γ parallelo ad α e β $\Rightarrow$

sia $k = \dfrac{d(\gamma,\alpha)}{d(\alpha,\beta)}$

$\Rightarrow$ il poligono su γ corrisponde alla base della piramide in un'omotetia di centro V e di rapporto k

=> il rapporto delle loro aree è k^2

lo stesso per il cono

Poiché la base del cono e la base della piramide hanno uguale area => hanno ugual area anche le figure individuate su γ, perché stanno nello stesso rapporto coi precedenti

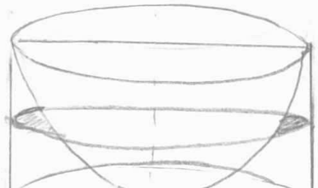
=> i due solidi sono equiestesi

Volume del cono : $\dfrac{\text{Area di base} \times \text{altezza}}{3}$

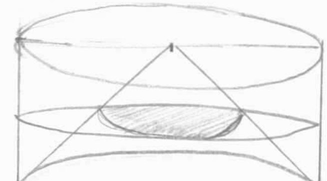
<u>Cerchiamo il volume della sfera:</u>

La dimostrazione è dovuta a Luca Valerio (1552-1618) che riprende Archimede (287-212 a.C)

Egli considerò: - un cilindro con altezza pari al raggio del cerchio di base
- una semisfera inscritta nel cilindro
- un cono inscritto con vertice nel centro della semisfera

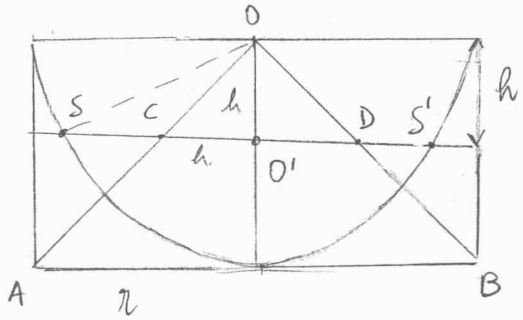


Si tolgo la semisfera dal cilindro ottengo la "SCODELLA DI GALILEO"



Teorema: La scodella è equiestesa al cono

DIMOSTRAZIONE: Utilizzo il principio di Cavalieri e taglio le due figure con un piano parallelo alla base: otteniamo un cerchio e una corona circolare: sono equiestese?



$\overline{O'C}^2 = h^2 \Rightarrow$ Area del cerchio di raggio $O'C = \pi h^2$

$\overline{O'S}^2 = \overline{OS}^2 - \overline{OO'}^2 = r^2 - h^2 \Rightarrow$

Area del cerchio di raggio $O'S$ è $\pi(r^2 - h^2)$

$\Rightarrow$ Area della corona circolare è $\pi(r^2 - (r^2 - h^2)) = h^2\pi$

$\Rightarrow$ Volume del cilindro $-$ volume della semisfera $=$ $= $ Volume del cono $\square$

$\Rightarrow$ Volume della sfera $= 2$(volume semisfera)

$= 2$(volume del cilindro $-$ volume cono)

$$= 2\left(\pi r^2 \cdot r - \frac{\pi r^2 \cdot r}{3}\right)$$

$$= 2 \cdot \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$\square$

Galilei cita questo teorema per un paradosso: due qualunque sezioni parallele sono equivalenti: ma se come piano prendo proprio quello su cui giace il centro della semisfera?

Riprendiamo il problema dell'equivalenza tra equiestensione ed equiscomponibilità.

Nel 1900 a Parigi, al secondo Congresso internazionale dei matematici, David Hilbert pone 23 problemi che toccano i differenti domini della matematica e che ispireranno la ricerca matematica nel XX secolo

Ilterzo problema riguarda la matematica elementare ed ha per titolo: "Sulla uguaglianza in volume di due tetraedridi base ed altezza uguali". Hilbert, citando due lettere indirizzate a Gerling da Gauss, che a sua volta cita Euclide, esprime l'esigenza di una dimostrazione rigorosa dell'impossibilità per due tetraedri di uguale base ed altezza di essere equiscomponibili in generale.

Proviamo ad inquadrare il problema dall'inizio.

Due figure sono equiscomponibili se si possono dividere in un numero finito di parti rispettivamente uguali o, che è lo stesso, se è possibile decomporne una in un numero finito di parti da riposizionare per comporre l'altra.

Da Euclide deriva abbastanza facilmente che due poligoni con la stessa area (cioè equivalenti) sono sempre scomponibili in parti poligonali rispettivamente uguali.

Si ha così che "l'avere la stessa area" fra poligoni può essere sostituito dalla equiscomponibilità e questo permette, "limitandosi al qualitativo", di eliminare elegantemente il concetto primitivo di area, la necessità di definire una unità di misura e le formule per determinarla e soprattutto di evitare il ricorso a procedimenti "al limite". Ma questo è possibile con molte limitazioni. Infatti ad esempio Ugo Amaldi ha dimostrato quello che tutti sanno e cioè che un cerchio e un poligono non sono equiscomponibili. E' infatti impossibile riposizionare i bordi tondi del cerchio senza lasciare dei buchi. Ma anche escludendo il tondo, basta salire a tre dimensioni e quello che prima era sempre possibile per i poligoni, diviene spesso impossibile per i poliedri.

E qui entra in gioco il problema posto da Hilbert. Per calcolare il volume di una piramide e per mostrare in generale che due piramidi di uguale base ed altezza hanno lo stesso volume, i matematici, dai tempi di Euclide, hanno fatto ricorso a dei metodi più complicati della equiscomponibilità, come il metodo di esaustione o altri metodi che fanno intervenire delle nozioni infinitesimali.

Hilbert chiede di dimostrare che questa esigenza è necessaria.

Hill, nel 1895, fornisce 3 tipi di tetraedri equiscomponibili con un cubo, e Bricard, nel 1896, presenta una condizione affinché due poliedri con lo stesso volume siano equiscomponibili. Hilbert capisce che quelli di Hill sono dei casi particolari e non cita Bricard perché la sua dimostrazione è incompleta. Max Dehn, un allievo di Hilbert, mostra nel 1900, pochi mesi dopo il Congresso di Parigi, che due poliedri possono avere lo stesso volume senza che ciò comporti la scomponibilità in un ugual numero finito di poliedri rispettivamente uguali, e precisa la condizione di Bricard.

E' una questione di angoli diedri.

Così un tetraedro regolare e un cubo non sono equiscomponibili perché l'angolo diedro del primo è incommensurabile con quello del secondo. Manca in generale nello spazio la proprietà fondamentale dei poligoni di avere la somma degli angoli interni uguale ad un multiplo intero di p greco.

Nello spazio, dimostra Dehn, perché due poliedri siano equiscomponibili, è necessario che esista una combinazione lineare a coefficienti interi dei loro diedri che sia uguale ad un multiplo di p greco.

Così la piramide di Jeuel, che si ottiene proiettando dal centro di un cubo una sua faccia, è equiscomponibile con un prisma con lo stesso volume.

Con delle considerazioni sulla divisione di un prisma in tre piramidi di uguale volume, altri matematici riprendono il problema, e infine Sydler, nel 1965, dimostra che le condizioni di Dhen, oltre che necessarie, sono anche sufficienti per l'equiscomponibilità di due poliedri con lo stesso volume.
Il problema è così completamente risolto.