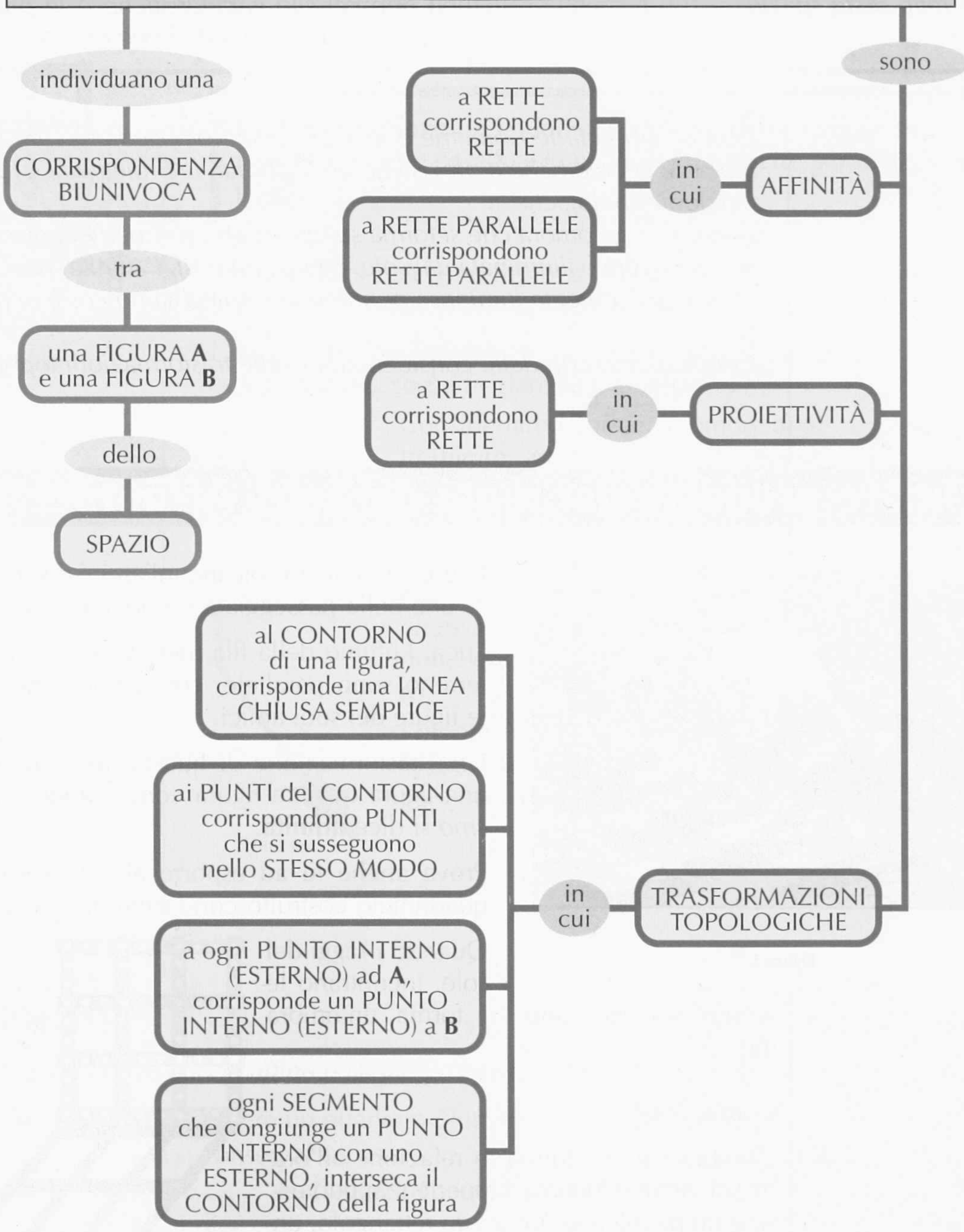
unità 2

Altre trasformazioni geometriche



PREREQUISITI

Avere acquisito il concetto di trasformazione geometrica.
Conoscere le caratteristiche e le proprietà:
– delle rette parallele;
– delle rette nello spazio.

OBIETTIVI

Acquisire i concetti di:
– trasformazione affine,
– trasformazione proiettiva,
– trasformazione topologica.
Conoscere le caratteristiche e le proprietà di queste trasformazioni geometriche.

Conosciamo già le isometrie e le similitudini, ora studiamo altre trasformazioni geometriche e precisamente: l'affinità, la proiettività e le trasformazioni topologiche.
Esaminiamo l'ombra che si forma su una qualsiasi superficie piana quando una figura è illuminata dal sole, definiamo così, l'affinità; poi consideriamo una sorgente luminosa puntiforme e spieghiamo cos'è una proiettività.
Concludiamo con delle considerazioni sulle trasformazioni topologiche.

1 Ombre prodotte dai raggi del sole. Affinità

Figura 1

In una giornata di sole alcuni amici decidono di fare una bella passeggiata in montagna (fig. 1).

Luca, l'ultimo della fila, osserva che le ombre sul terreno sono parallele, così come sono parallele le figure dei suoi amici.

Una trasformazione di questo tipo che associa a una figura un'altra figura *conservando il parallelismo* si dice **affinità**.

Prova anche tu ad esporre al sole un reticolato quadrettato costruito con listelli di meccano.

Quando i raggi del sole, incontrano le strisce del meccano, si forma un'ombra (fig. 2).

Com'è l'ombra?

L'ombra cambia forma in relazione all'ora in cui viene effettuata l'esperienza; può essere un parallelogrammo, un rettangolo, un rombo o anche un quadrato congruente a quello dato, in ogni caso a lati paralleli della figura *A* corrispondono lati paralleli dell'ombra *B*.

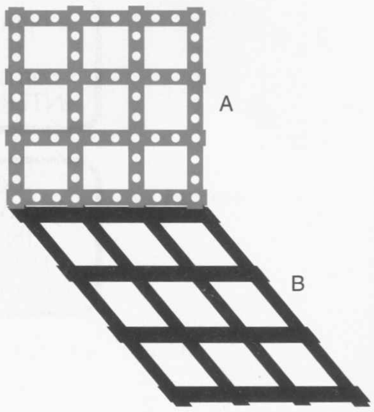


Figura 2

A ogni segmento e a ogni angolo di *A* corrispondono, rispettivamente, un segmento e un angolo di *B* e a segmenti paralleli di *A* corrispondono segmenti paralleli di *B*.

Fra i punti del reticolato quadrettato *A* e quelli della sua ombra *B* si stabilisce, così, una *corrispondenza biunivoca*, detta **affinità**, che ha come invariante il parallelismo dei lati; *le figure A e B si dicono* **affini**.

In generale:

La trasformazione tra i punti dello spazio che a rette fa corrispondere rette e a rette parallele fa corrispondere rette parallele, si dice affinità.

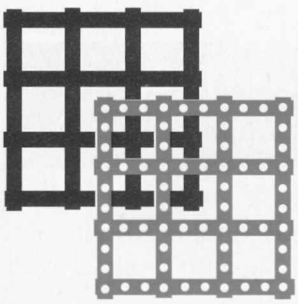


Figura 3

Sistema ora il reticolato in posizione perpendicolare ai raggi solari e osserva la sua ombra proiettata su un piano parallelo (fig. 3):

i segmenti e gli angoli corrispondenti sono congruenti; si ha quindi la **congruenza**, caso particolare dell'affinità.

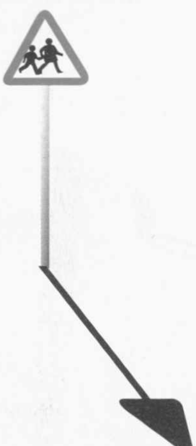


Figura 4*a*

Consideriamo, infine, le ombre di altre figure, ad esempio quelle dei segnali stradali che puoi vedere in una giornata di sole (fig. 4 *a, b*);

l'ombra di un cartello che ha la forma di un triangolo equilatero ha anch'essa una forma triangolare, ma non è quella di un triangolo equilatero;

l'ombra di un cartello circolare ha una forma diversa da quella del cerchio e precisamente la forma di un'ellisse.

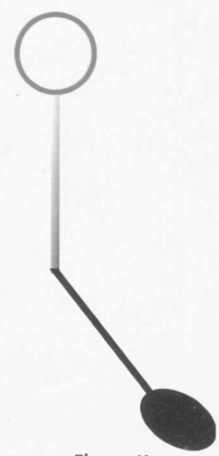


Figura 4*b*

Studiamo insieme

Conosci la trasformazione affine e le sue proprietà? Rispondi e completa.

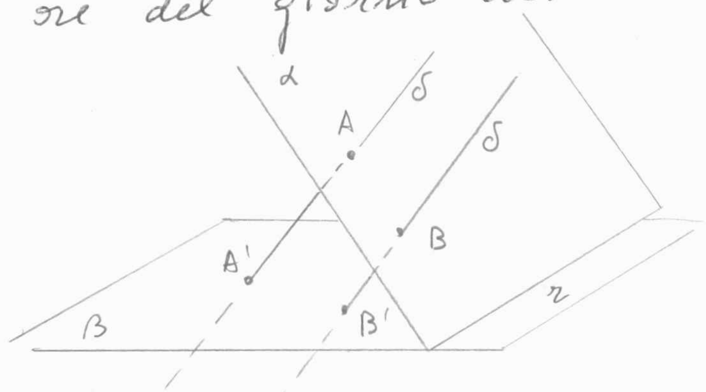
- Quale forma può assumere un quadrato illuminato dai raggi solari?.. .... Che cosa si conserva? .... Fra il quadrato e la sua ombra esiste una .... che si dice ....
- L'affinità trasforma le rette in .... e le rette parallele in ....
- Due figure che si corrispondono in una affinità si dicono ....

OMOLOGIA AFFINE O PROIEZIONE PARALLELA

Consideriamo due piani incidenti α e β e proiettiamo punti di un piano su un altro mediante "raggi" paralleli: i piani α e β sono incidenti in una retta r

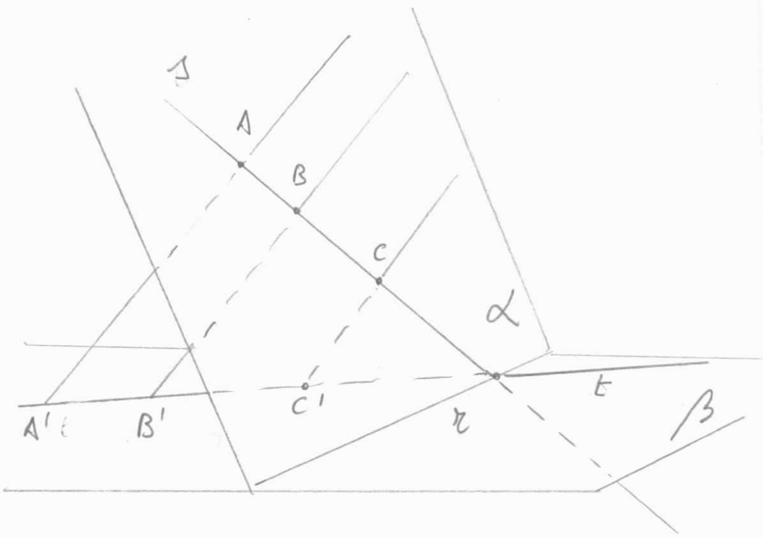
Un esempio di tale trasformazione geometrica è dato dell'ombra di una finestra proiettata sul pavimento nelle varie ore del giorno dai raggi del sole.

Supponiamo che la direzione δ dei raggi proiettanti non appartenga né al piano α né al piano β.



La corrispondenza tra i piani α e β è biunivoca; i punti della retta r sono fissi e corrispondono a se stessi.

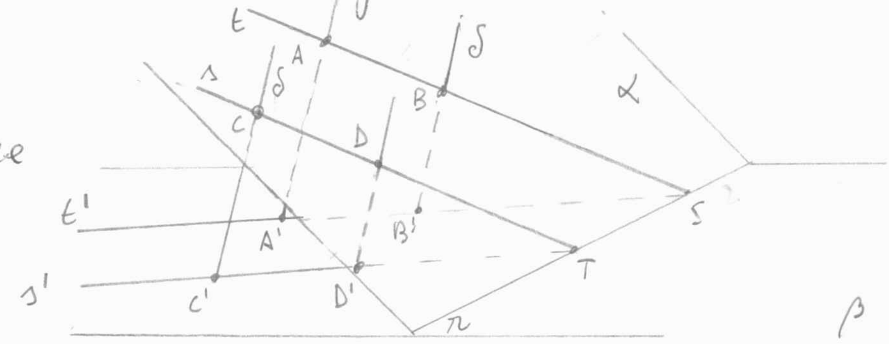
Consideriamo una retta s di α: ad essa corrisponde una retta t di β, data dall'intersezione tra β ed il piano $s\delta$; tra le due rette esiste una corrispondenza di Talete:



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

L'omologia affine mantiene il parallelismo tra rette:

consideriamo su α due rette parallele s e t



Conduco i piani (s, δ) e (t, δ): sono paralleli $\Rightarrow$ tagliano β in rette parallele s' e t'

Questa osservazione ci porta a dire che l'ombra mediante un'omologia affine di un parallelogramma sarà un parallelogramma..

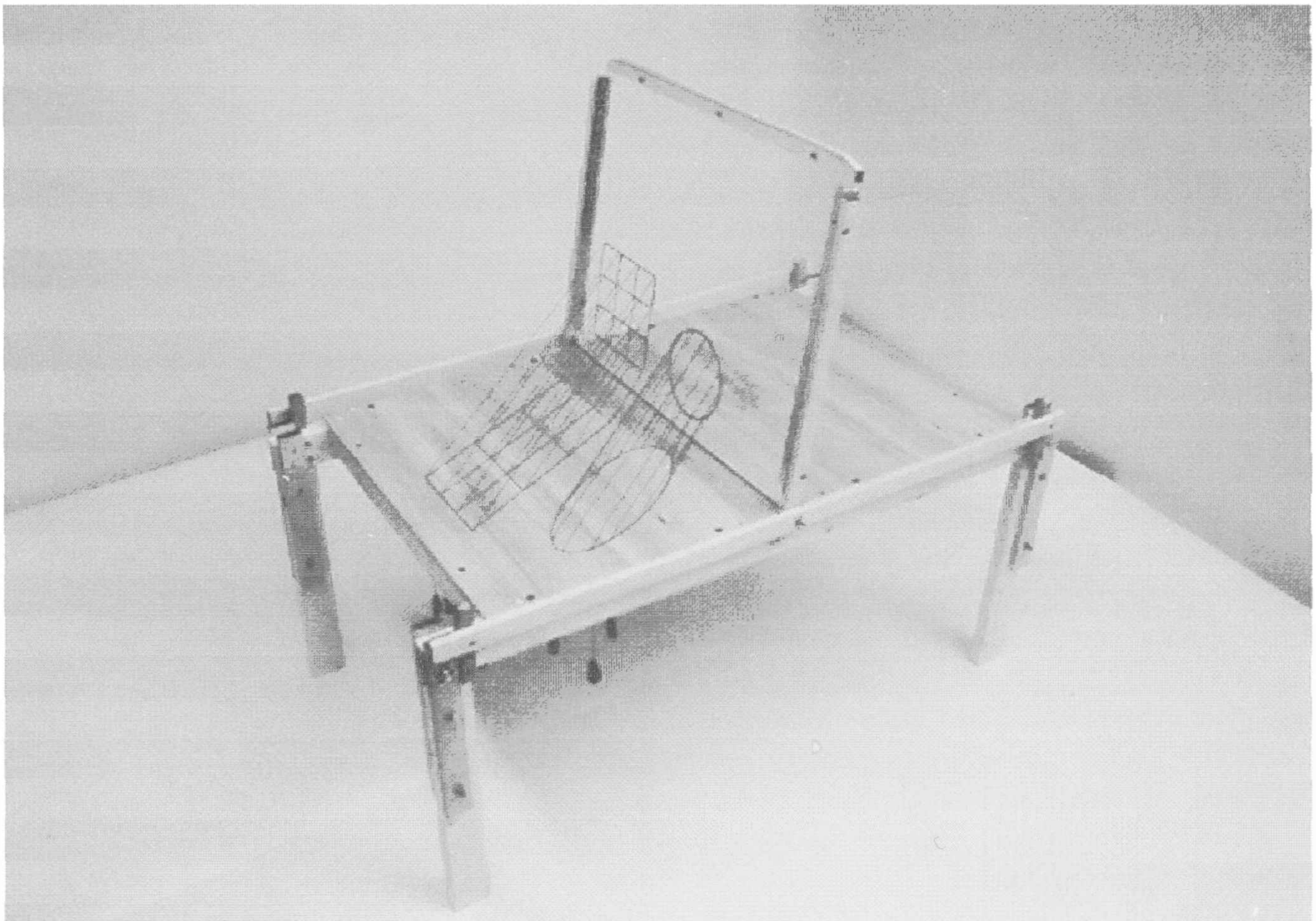
Questa trasformazione geometrica però non è una isometria: non mantiene l'ampiezza degli angoli. L'ombra di un rettangolo non sarà un rettangolo

L'omologia affine non mantiene le forme degli oggetti proiettati: infatti tra le lunghezze non si mantiene un rapporto costante che manterrebbe le forme delle figure.

Il rapporto costante è mantenuto solo tra lunghezze poste sulla stessa retta o su rette parallele: Infatti:

Vediamo un esempio di quanto detto in generale: proiettiamo tramite un'omologia affine una circonferenza presa su un piano α: l'immagine sul piano β sarà un'ellisse

25



- Se i raggi solari sono perpendicolari a una figura, l'ombra che si forma è .... alla figura considerata.
- Quale forma assume l'ombra di un triangolo equilatero? .... E di un cerchio? ....

② Ombre prodotte da una sorgente puntiforme. Proiettività

Nel paragrafo precedente abbiamo preso in esame le ombre prodotte dai raggi solari che possono essere considerati paralleli in quanto il sole si trova a una notevole distanza dalla terra.

Ora, invece, osserviamo le ombre prodotte da raggi divergenti che hanno origine da una sorgente luminosa puntiforme e vicina alle figure che si considerano.

Procurati una lampada e ricoprila con uno schermo scuro lasciando libera una piccola apertura (fig. 5); poi sistema davanti alla lampada un reticolato quadrettato *A*.

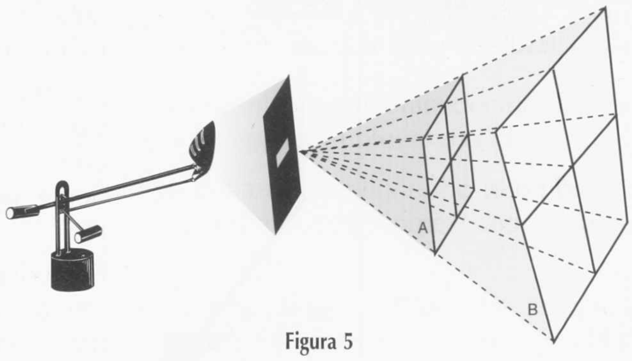


Figura 5

Le ombre dei quadrati della figura *A*, che si formano su un qualsiasi piano sono dei quadrilateri; a ogni segmento e a ogni angolo della figura *A* corrispondono, rispettivamente, un segmento e un angolo della figura *B* e a segmenti paralleli di *A*, in generale, **non** corrispondono segmenti paralleli di *B*.

Questa corrispondenza biunivoca fra la figura *A* e la figura *B* si dice **proiettività**.

In generale:

> **La trasformazione dei punti dello spazio che trasforma rette in rette si dice proiettività.**

Se il reticolato ha un bordo appoggiato a un piano, i lati ombra dei lati paralleli al piano d'appoggio sono ancora paralleli; si ottengono, così, dei trapezi (fig. 6).

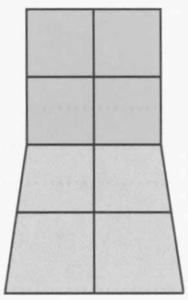


Figura 6

Figura 7

Questa trasformazione viene applicata nel disegno in **prospettiva**, cioè nelle rappresentazioni artistiche in cui si vuole dare il senso della profondità (fig. 7).

Proviamo ora a considerare l'ombra che si forma su un **piano parallelo** a quello del reticolato, cosa notiamo?

La figura ombra *B* è simile alla figura data *A*; dunque la similitudine è un caso particolare della proiettività (fig. 8).

Un altro caso particolare della proiettività è l'affinità; infatti, se immaginiamo di spostare ad una distanza infinita la lampada, i raggi emessi dalla sorgente luminosa si possono considerare paralleli e quindi le figure *A* e *B* risultano affini.

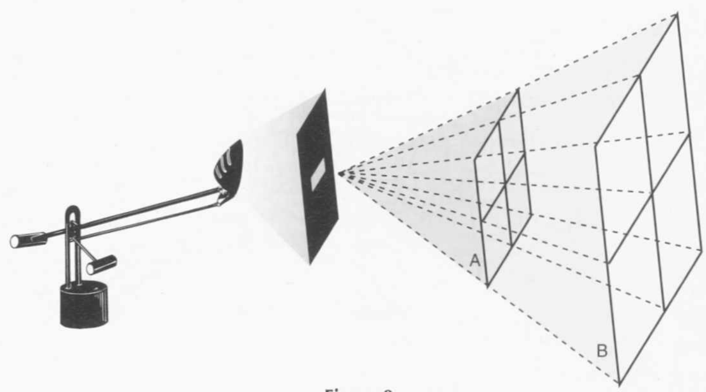


Figura 8

Studiamo insieme

Conosci la trasformazione proiettiva e le relative proprietà? Per verificare le tue conoscenze prova a completare.

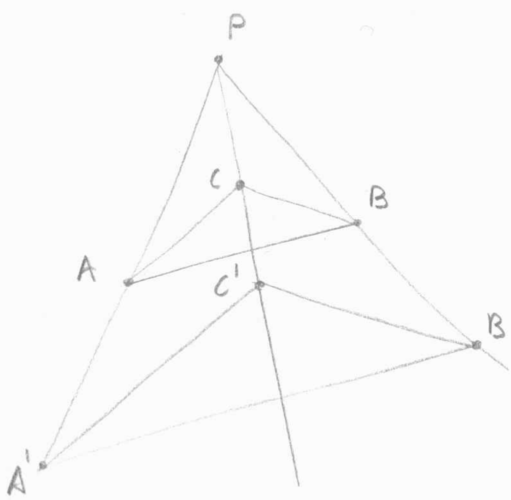
- Con una sorgente luminosa puntiforme, posta vicino a un oggetto di forma quadrata si forma su un qualsiasi piano un'ombra che ha la forma di un .... Fra i punti dell'oggetto e quelli della sua ombra si stabilisce una corrispondenza .... che fa corrispondere a un segmento un .... e a un angolo un .... ; questa corrispondenza che trasforma le rette in .... si chiama ....
- La trasformazione proiettiva conserva la lunghezza dei segmenti ?.................... E le ampiezze degli angoli? ....
- Se i lati della figura ombra *B* sono paralleli ai lati della figura data *A*, vuol dire che il piano su cui possiamo vedere l'ombra è .... al piano della figura data.
  Le figure *A* e *B* sono figure ....
- Quando la sorgente luminosa viene posta a una grandissima distanza dalla figura *A* si forma un'ombra *B* .... alla figura data perché i raggi possono essere considerati .... ; dunque l' .... è un caso particolare della proiettività.

OMOTETIA

Abbiamo incontrato un esempio di una proiezione di un oggetto piano su un piano parallelo mediante raggi paralleli come quelli del sole: LA TRASLAZIONE.

Consideriamo un'altra esperienza speciale che possiamo dedurre dalla realtà: una figura piana è proiettata su un piano ad essa parallelo da un punto, detto CENTRO DI PROIEZIONE

Tale proiezione, detta OMOTETIA, ha un unico punto fisso, il centro di proiezione, P



Per ogni punto A dello spazio, detto A' il suo corrispondente P, A, A' sono allineati.

$\forall$ coppia di punti A, B si ha $d(A', B') = K \cdot d(A, B)$

Questa trasformazione non è isometrica: diremo allora la trasformazione OMOTETIA DI CENTRO P e RAPPORTO k

L'omotetia trasforma rette in rette e le rette corrispondenti sono parallele

Trasforma piani in piani paralleli

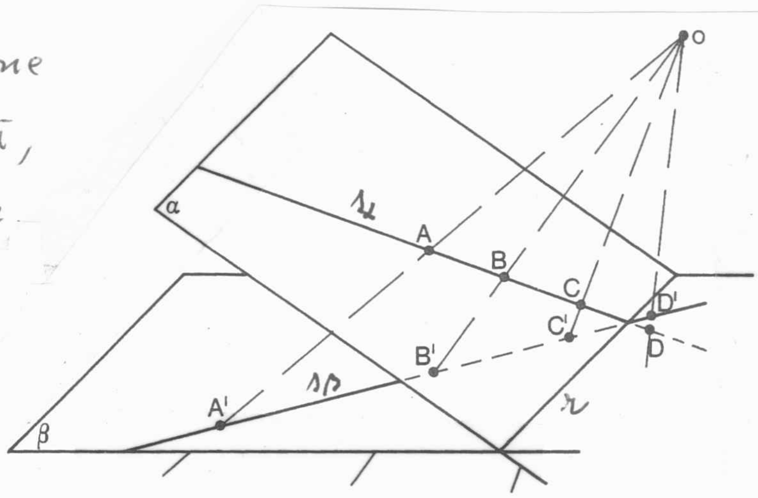
Mantiene le ampiezze degli angoli

Lascia invariata la forma delle figure

OMOLOGIA PROIETTIVA O PROIEZIONE CENTRALE

Come risulterebbe l'ombra delle finestre sul pavimento se l'illuminazione esterna fosse prodotta da un lampione durante le ore notturne?

Consideriamo la proiezione tra due piani incidenti, α e β, in una retta r ottenuta con raggi anch'essi incidenti in un punto O, detto CENTRO DI PROIEZIONE

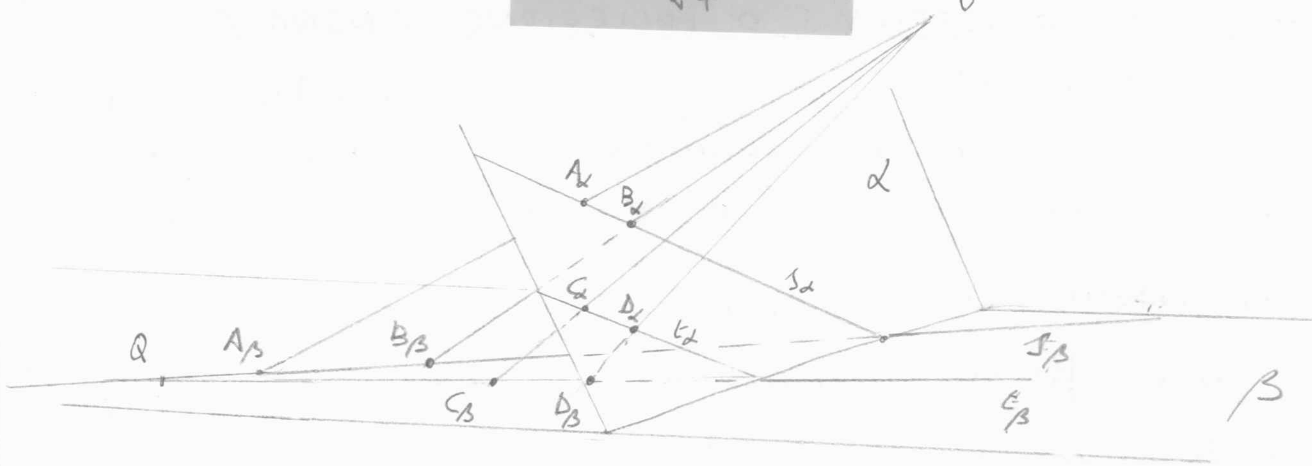


La corrispondenza è biunivoca, se si escludono le rette per il punto O, parallele ad α o a β; considerandola come corrispondenza fra punti dello spazio.

I punti della retta r rimangono fissi.

Ad una retta s_α corrisponde una retta s_β, ma non rimane valida la corrispondenza di Talete: se $\frac{A_\alpha B_\alpha}{B_\alpha C_\alpha} = k \Rightarrow \frac{A_\beta B_\beta}{B_\beta C_\beta} \neq k$

Non mantiene il parallelismo tra rette:
(né il parallelismo tra piani)
rette parallele in α hanno per immagini su β rette incidenti in un punto Q.



Se s_β e t_β non fossero incidenti, ma parallele i piani $(s_\alpha s_\beta)$ e (t_α, t_β) sarebbero paralleli, ma essi sono incidenti in O.

Un parallelogramma è trasformato in un quadrilatero generico in quanto mantiene le incidenze.; quindi, pur non mantenendo misure, rapporti, angoli, la figura proiettata rende ancora l'idea della figura che è stata proiettata originaria; questo perché esistono altri invarianti che si mantengono nella proiezione, quali l'incidenza, l'appartenenza di punti a rette e piani, di rette a piani o altre figure geometriche; alcuni rapporti quale il birapporto di quattro punti.