Trasformazioni geometriche nello spazio

Iniziamo con il concetto di <u>ISOMETRIA</u>: una trasformazione geometrica tale che segmenti corrispondenti hanno la stessa lunghezza ed angoli corrispondenti hanno la stessa ampiezza

La simmetria rispetto ad un piano è una isometria di cui abbiamo esperienza perché è associata all'uso di uno specchio: sono simmetriche rispetto al piano dello specchio l'immagine reale e quella riflessa.

Si costruiscono altre isometrie, a partire dalla simmetria (spaziale) rispetto ad un piano

Con il concetto di traslazione è associato al concetto intuitivo di spostamento

Rispetto al piano, il concetto di rotazione si estende a rotazione rispetto ad un asse e ad un piano.

Possiamo estendere allo spazio il concetto di CONGRUENZA:

Due figure sono <u>congruenti</u> se si corrispondono in una <u>isometria</u>

La congruenza è una relazione di equivalenza.

SIMMETRIA (rispetto ad un piano)

Dato un piano α si chiama SIMMETRIA rispetto ad α una trasformazione geometrica dello spazio che verifica:

1) Se $P \in \alpha \Rightarrow$ il trasformato di P è P
2) Se $P \in$ ad un semispazio di frontiera α il suo trasformato P' appartiene al semispazio opposto
3) conserva le distanze
4) è involutoria

Si può dare un assioma che garantisce:

$\forall$ piano α, esiste una ed una sola simmetria rispetto ad α.

Essendo le simmetrie involutorie, componendo una simmetria con se stessa si ottiene l'identità: è una isometria che lascia fissi tutti i punti dello spazio

Vedremo più avanti come la nozione di simmetria sia alla base della nozione di perpendicolarità.

Come trasforma gli oggetti geometrici una simmetria rispetto ad un piano π ?

Quali sono le proprietà invarianti per simmetrie rispetto ad un piano?

- Una retta parallela al piano di simmetria si trasforma in una retta ad essa parallela
- Una retta incidente il piano, si trasforma in una retta incidente il piano nello stesso punto
- Un piano si trasforma in un piano; se il piano è parallelo al piano π di simmetria, si trasforma in un piano ad esso parallelo; se è incidente il piano di simmetria in una retta r, si trasforma in un piano incidente il piano di simmetria nella stessa retta

PROPOSIZIONE: La simmetria rispetto ad un piano mantiene la proprietà di parallelismo fra rette

DIMOSTRAZIONE:
a) due rette parallele sono complanari
b) la simmetria mantiene la proprietà di appartenenza tra punti rette e piani
c) la simmetria è una isometria

PROPOSIZIONE: La simmetria rispetto ad un piano mantiene il parallelismo fra piani.

Così il trasformato tramite una simmetria rispetto ad un piano, di un parallelogramma è un parallelogramma

La simmetria mantiene le ampiezze degli angoli poiché è una isometria.

Il trasformato di un quadrato è perciò ancora un quadrato; mantiene la perpendicolarità

Figure che si corrispondono in una simmetria sono congruenti.

A partire dalla simmetria dello spazio rispetto ad un piano è possibile costruire altre isometrie:

- l'<u>IDENTITÀ</u>: è ottenuta come composizione di due simmetrie rispetto allo stesso piano; lascia fissi tutti i punti dello spazio

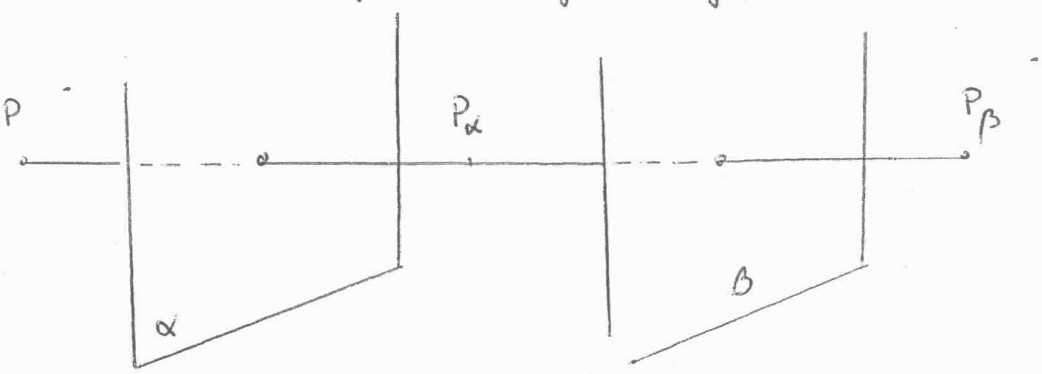
- la <u>TRASLAZIONE</u>: è ottenuta come composizione di due simmetrie rispetto a piani paralleli; non lascia fisso alcun punto dello spazio

- la <u>ROTAZIONE</u> ATTORNO AD UNA RETTA: è ottenuta dalla composizione di due simmetrie rispetto a piani incidenti in una retta; lascia fissi i punti di tale retta

- l'<u>ANTITRASLAZIONE</u>: è ottenuta dalla composizione di una traslazione e di una simmetria rispetto ad un piano.

TRASLAZIONE

La traslazione nello spazio è ottenuta come composizione di due simmetrie rispetto a piani paralleli



$\alpha // \beta$

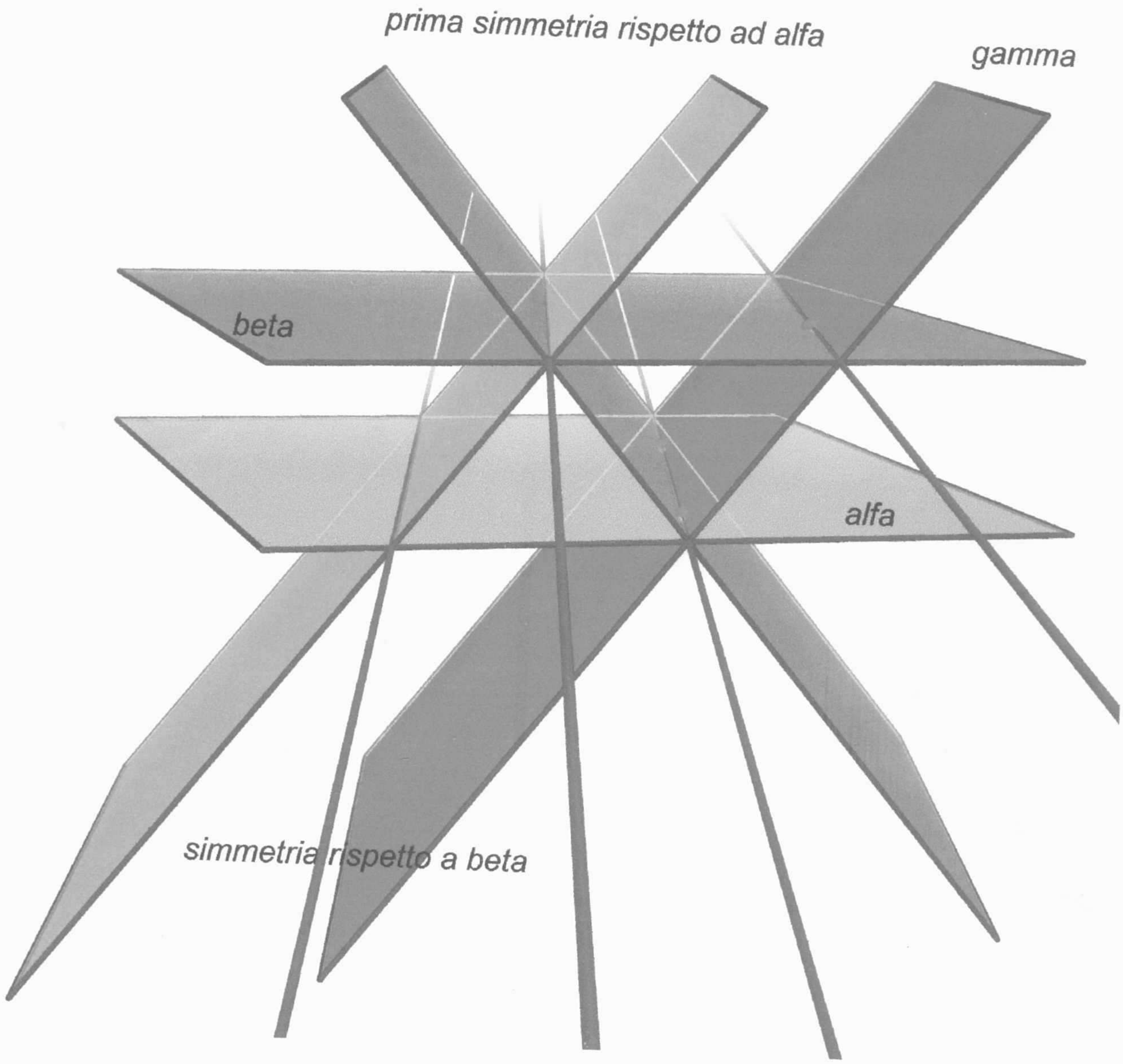
$\longrightarrow \delta$

La traslazione è individuata da un vettore $\vec{v}$ avente una direzione δ perpendicolare ai due piani //, verso dal primo al secondo piano ed una lunghezza pari a due volte la distanza tra i due piani:
$v = PP_\beta$

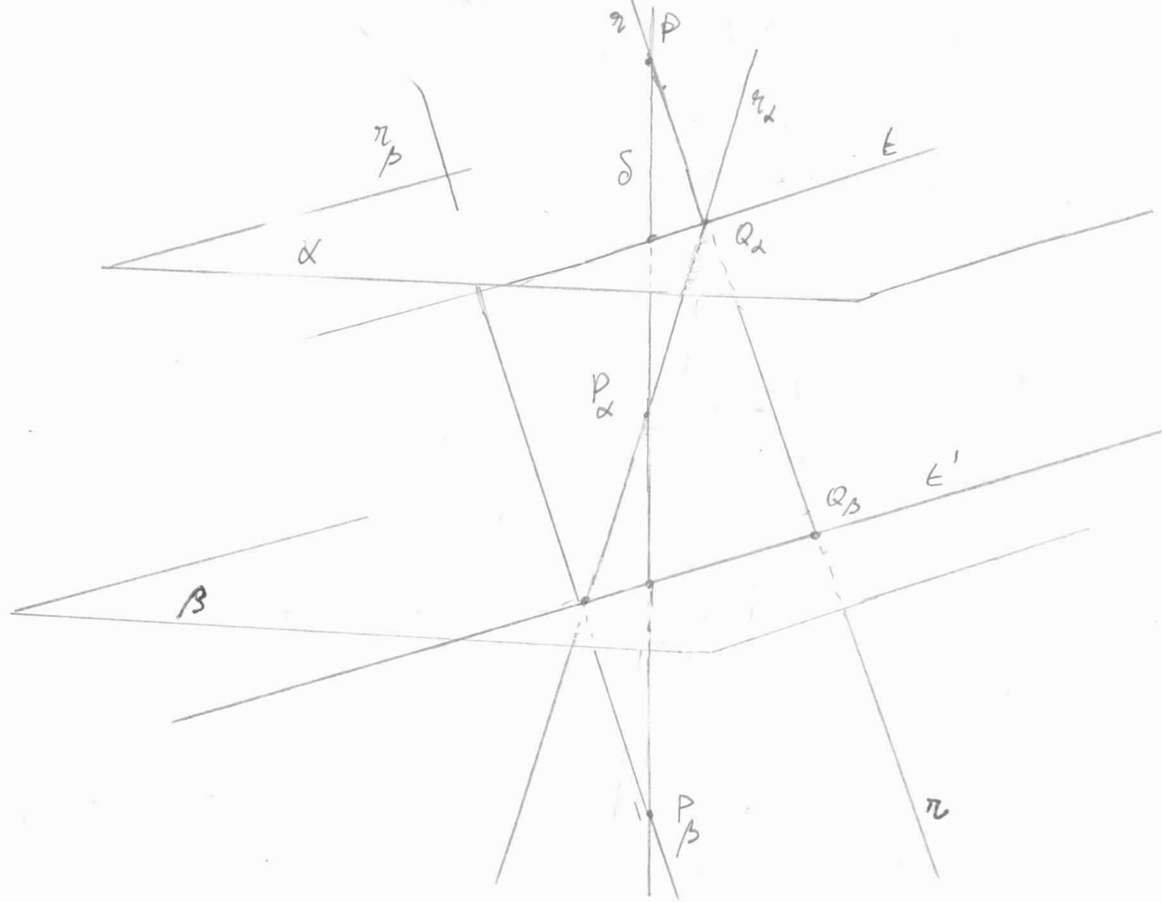
PROPOSIZIONE La traslazione nello spazio fa corrispondere ad una retta r una retta e tale retta è ad essa parallela; ad un piano, un piano ad esso //.

DIMOSTRAZIONE (TRACCIA)

Se la retta ha la direzione della traslazione, non è fissa, punto per punto, ma resta invariata.
Se la retta non ha la direzione δ, r e δ individuano un piano ed in tale piano abbiamo una traslazione che fa corrispondere
simmetria?
P, P_α ; r a r_α



Un piano viene trasformato da una traslazione in un piano ad esso parallelo



P, P_α, r, r_α stanno su un piano perpendicolare ad α e quindi perpendicolare a β essendo $\alpha // \beta$; su tale piano giacciono anche P_β e r_β.
Esso interseca α e β lungo due rette parallele, t e t' che sono perpendicolari ad r

- Ora consideriamo tre punti A, B, C in un piano π e i loro corrispondenti A', B', C' in una traslazione assegnata: A', B', C' determinano un piano π', $//$ a π perché le rette AB e $A'B'$ sono $//$, così $AC // A'C'$ e $BC // B'C'$.

Sia D un altro punto di π e D' il suo corrispondente: nel piano $AA'DD'$ la traslazione è piana e $A'D'$ è $//$ ad AD, quindi anche $D' \in \pi'$
$\Rightarrow$ π' è il corrispondente di π nella traslazione.

Se il piano è parallelo alla direzione della traslazione, il piano rimane invariato.

Problemi: che figura si ottiene traslando:

a) un segmento secondo una direzione non parallela al segmento?

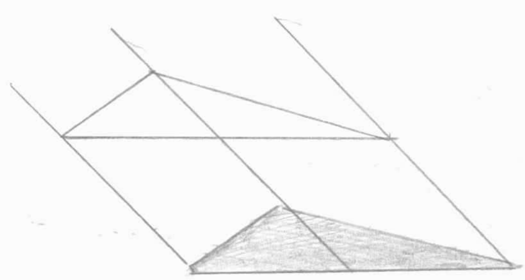
b) un segmento secondo una direzione ad esso parallela?

c) un angolo secondo una direzione non parallela al suo piano di appartenenza?

d) un quadrato secondo una direzione non parallela al suo piano di appartenenza?

Esempio di traslazione:

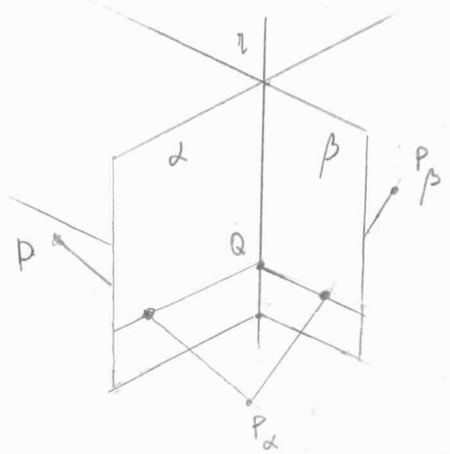
Ombra di un oggetto piano prodotta da un fascio di raggi paralleli (raggi del sole) su un piano // al piano dell'oggetto



L'ombra è congruente all'oggetto reale

ROTAZIONE

Consideriamo due piani α e β incidenti in una retta r: studiamo la trasformazione che si ottiene componendo tra loro successivamente due simmetrie rispetto a tali piani.



P_α è il trasformato di P rispetto ad α e P_β è il trasformato di P_α rispetto a β.

La retta PP_α è perpendicolare ad α e la retta $P_\alpha P_\beta$ è perpendicolare a β $\Rightarrow$ il piano $PP_\alpha P_\beta$ è perpendicolare ad α e β $\Rightarrow$ è perpendicolare ad r

$\Rightarrow$ a P corrisponde P_β che sta su un piano (cui appartiene anche P) perpendicolare ad r

In tale piano sono avvenute due simmetrie piane assiali rispetto alle rette che si intersecano in Q

Ma in tale piano la composizione delle due simmetrie assiali (incidenti) è una rotazione rispetto a Q $\Rightarrow$ può essere estesa allo spazio e possiamo dare la seguente definizione:

DEFINIZIONE : UNA ROTAZIONE rispetto ad una retta nello spazio è la composizione di due simmetrie rispetto a due piani incidenti in tale retta

Conseguenza: la rotazione è una isometria perchè composizione di due isometrie

La retta r è il luogo dei punti fissi perchè rimangono fissi rispetto alla prima e alla seconda simmetria ed è detta ASSE DELLA ROTAZIONE

L'ampiezza dell'angolo della rotazione è l'ampiezza dell'angolo della rotazione piana individuata in uno dei piani perpendicolari all'asse di rotazione (sono sezioni// di un angolo diedro e quindi congruenti)

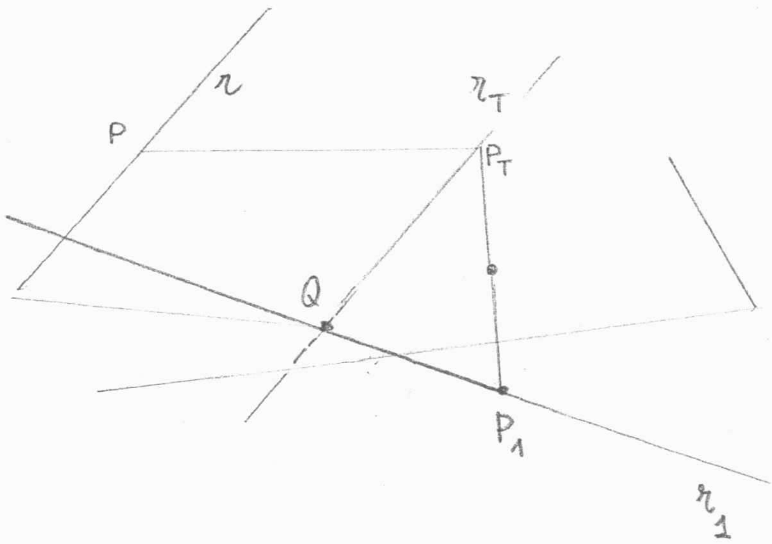
Nello spazio una rotazione è dunque data da:

- una retta r (ASSE);
- l'ampiezza di un angolo in un qualunque piano perpendicolare all'asse;
- un verso della rotazione, attribuito in un piano perpendicolare ad r, una volta fissato il verso di r.

La rotazione mantiene il parallelismo tra rette poichè composizione di simmetrie;
mantiene gli angoli perchè è isometria;
Il trasformato di un parallelogramma è un parallelogramma; il trasformato di un quadrato è un quadrato, etc...

ANTITRASLAZIONE

È il risultato della composizione di una traslazione e di una simmetria rispetto ad un piano mediante quello della traslazione

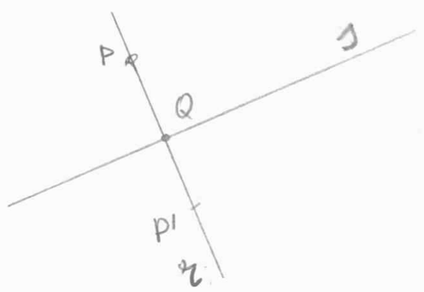


l'antitraslazione mantiene il parallelismo fra rette: r viene trasformata in r_1 e se $s // r$ $\Rightarrow$ s si trasforma in $s_1 // r_1$

Essendo un'isometria mantiene gli angoli perciò i trasformati di parallelogrammi sono parallelogrammi congruenti, dei quadrati, quadrati e così via...

La simmetria rispetto ad un piano è alla base della nozione di perpendicolarità tra enti dello spazio

Consideriamo un punto P ed una retta s, con $P \notin s \Rightarrow$ P ed s individuano un piano dove è già definita una simmetria di asse s che dà una ! retta r perpendicolare ad s e passante per P



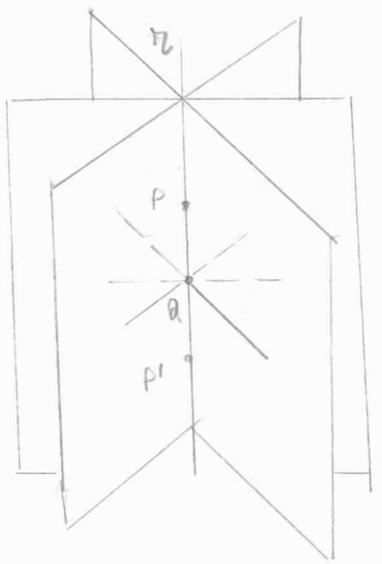
Sia $Q = s \cap r$

Considero il fascio di piani di asse r:

in ognuno di essi $\exists !!$ retta perpendicolare ad r e passante per Q

Si individua così un insieme di rette tutte perpendicolari ad r e passanti per Q:

ogni retta individua con P (nel piano da essi definito) una simmetria che fa corrispondere a P, P'

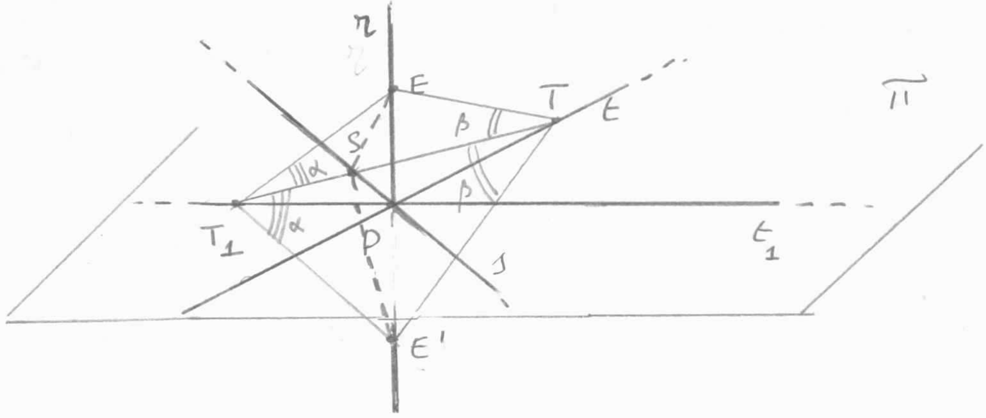


Teorema: L'insieme delle rette perpendicolari ad una retta data r e passanti per un suo punto $P \in r$ formano un piano

La dimostrazione si divide in due parti:

1) tutte le rette passanti per un punto P di una retta r e che appartengono al piano determinato da due perpendicolari ad r per P, sono perpendicolari ad r

Dimostrazione:



Per ipotesi $t, t_1 \in \pi$, t è perpendicolare ad r e t_1 è perpendicolare ad r, $d(E,P) = d(E',P)$.
Vogliamo dimostrare che s è perpendicolare ad r.

Nel piano rT, E ed E' si corrispondono nella simmetria di asse t $\Rightarrow$ $d(T,E) = d(T,E')$

analogamente nel piano r, T_1 si ha

$d(E,T_1) = d(E',T_1)$

$\Rightarrow$ I triangoli TET_1 e $TE'T_1$ sono congruenti $\Rightarrow$ gli angoli $T\hat{T_1}E$ e $T\hat{T_1}E'$ sono congruenti $\Rightarrow$

i triangoli ETS e $E'TS$ sono congruenti $\Rightarrow$ $d(E,S) = d(E',S)$

$\Rightarrow$ per le proprietà dell'asse di un segmento E, ed E' si corrispondono in una simmetria di asse s $\Rightarrow$ le rette s ed r sono perpendicolari

2) Tale piano contiene tutte le rette perpendicolari alla retta r per il punto P

DIMOSTRAZIONE

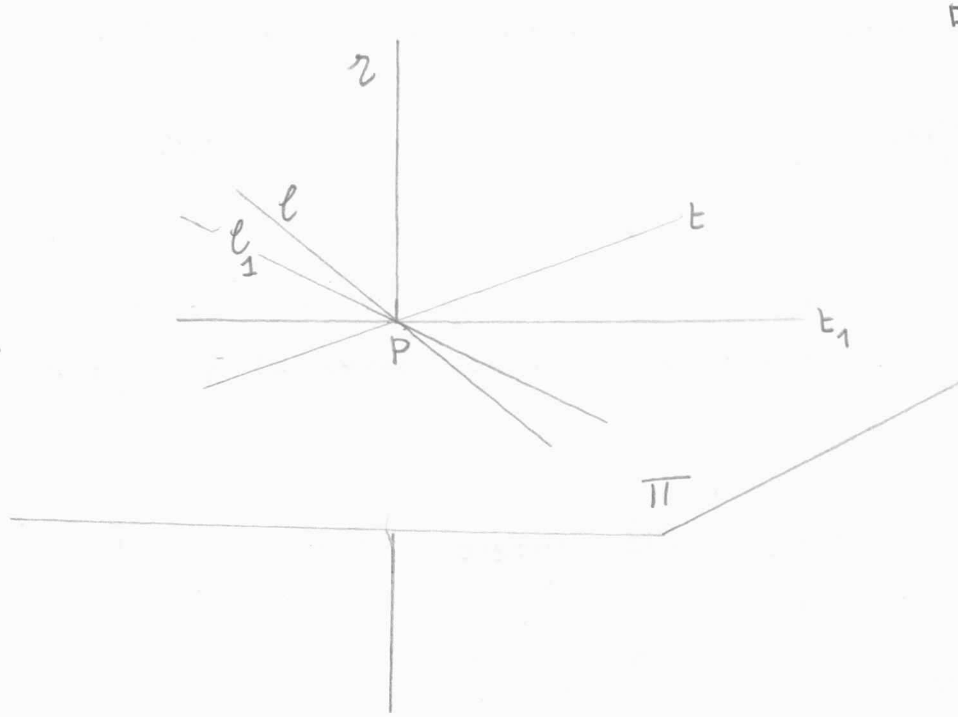
Sia l una retta per P, perpendicolare ad r, ma non giacente nel piano t, t_1; considero il piano rl: esso interseca l'altro in una retta l_1, perpendicolare ad r $\Rightarrow$ esistono nel piano rl, due perpendicolari ad r per il punto P, l e l_1 e questo è assurdo per un assioma del piano.

$\square$

$l \perp r$

$l \notin \pi$

$l_1 \in \pi$



Definizione

Una retta ed un piano aventi un punto P in comune si dicono fra loro PERPENDICOLARI se tutte le rette del piano passanti per il punto P sono perpendicolari alla retta (naturalmente la perpendicolarità è pensata fra rette nel piano da esse individuato)

VICEVERSA

Supponiamo che la retta r sia perpendicolare al piano π $\Rightarrow$ r è perpendicolare a tutte le rette di π passanti per $r \wedge \pi$.

Se r è $\perp$ a π in P $\Rightarrow$ r rimane invariata nella simmetria relativa a π: sia s una retta, $s \perp r$, $s \in \pi$; $\Rightarrow$ nel piano individuato da s e da r si dà una simmetria di asse s che lascia invariata r e manda P in P': si hanno così simmetrie assiali in ogni piano del fascio di asse r, che lasciano invariata r: r perciò resta invariata nella simmetria rispetto al piano π

Possiamo dare allora la seguente definizione alternativa:

Una retta r si dirà perpendicolare ad un piano π se e solo se r resta invariata nella simmetria rispetto a π

Si estendono allo spazio molti teoremi del piano ad esempio

Proposizione: Per un punto P di un piano α può essere condotta una ed una sola perpendicolare ad α

Ci sono teoremi interessanti:

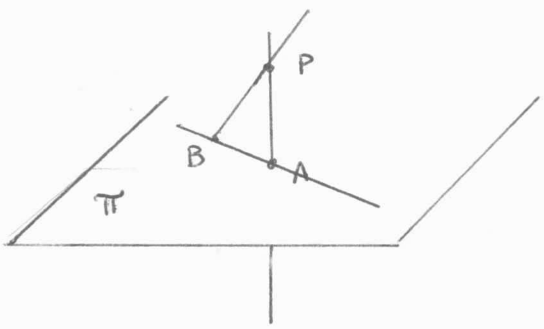
- Due rette $\perp$ allo stesso piano sono parallele
- Se due rette sono // ogni piano $\perp$ ad una di esse è $\perp$ anche all'altra
- Due piani $\perp$ ad una stessa retta sono // tra loro
- Se due piani sono // ogni retta $\perp$ ad uno è perpendicolare anche all'altro

Si vede se è valido il seguente

Teorema: Per un punto esterno ad un piano π può essere condotta una ed una sola perpendicolare al piano ?

Condotta da un punto P la perpendicolare ad un piano π si definisce la distanza di P dal piano π:

$d(P, \pi) = d(P, A)$



La distanza di P da π è sempre minore di qualunque obliqua da P a π.

Dobbiamo poi introdurre il concetto di perpendicolarità fra piani :

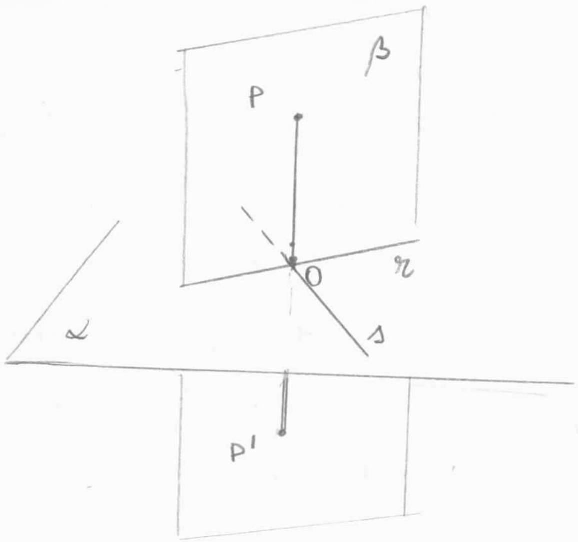
abbiamo diverse possibilità : le più in uso sono le due seguenti :

1) utilizzando la nozione di perpendicolarità tra retta e piano

Consideriamo due piani α e β tali che $\alpha \cap \beta =$ retta r e prendiamo un punto R su r $\Rightarrow$
diremo che α è perpendicolare a β $(\alpha \perp \beta)$ se la retta perpendicolare ad α per R è contenuta in β

2) utilizzando la nozione di simmetria rispetto ad un piano

Consideriamo un piano α, una simmetria rispetto ad α e due punti P e P' corrispondenti in tale simmetria



La retta PP' è perpendicolare al piano α

Ogni piano del fascio di asse la retta PP' resta invariato nella simmetria rispetto al piano α

Al piano individuato da P e da r corrisponde il piano individuato da P' e r $\Rightarrow$ il piano rimane invariato

Definizione: Diciamo che un piano β è perpendicolare ad un piano α se rimane invariato nella simmetria rispetto ad α

Proposizione: La relazione di perpendicolarità tra piani è simmetrica

Dimostrazione: se $\beta \perp \alpha \Rightarrow \beta \cap \alpha = r$

su β, r è asse di simmetria che fa corrispondere P e P'

Sia s retta di α passante per O (dove O è il punto di intersezione tra r e PP') e $s \perp r \Rightarrow$ per il teorema delle tre perpendicolari $s \perp \beta \Rightarrow \alpha \perp \beta$ (per la definizione)