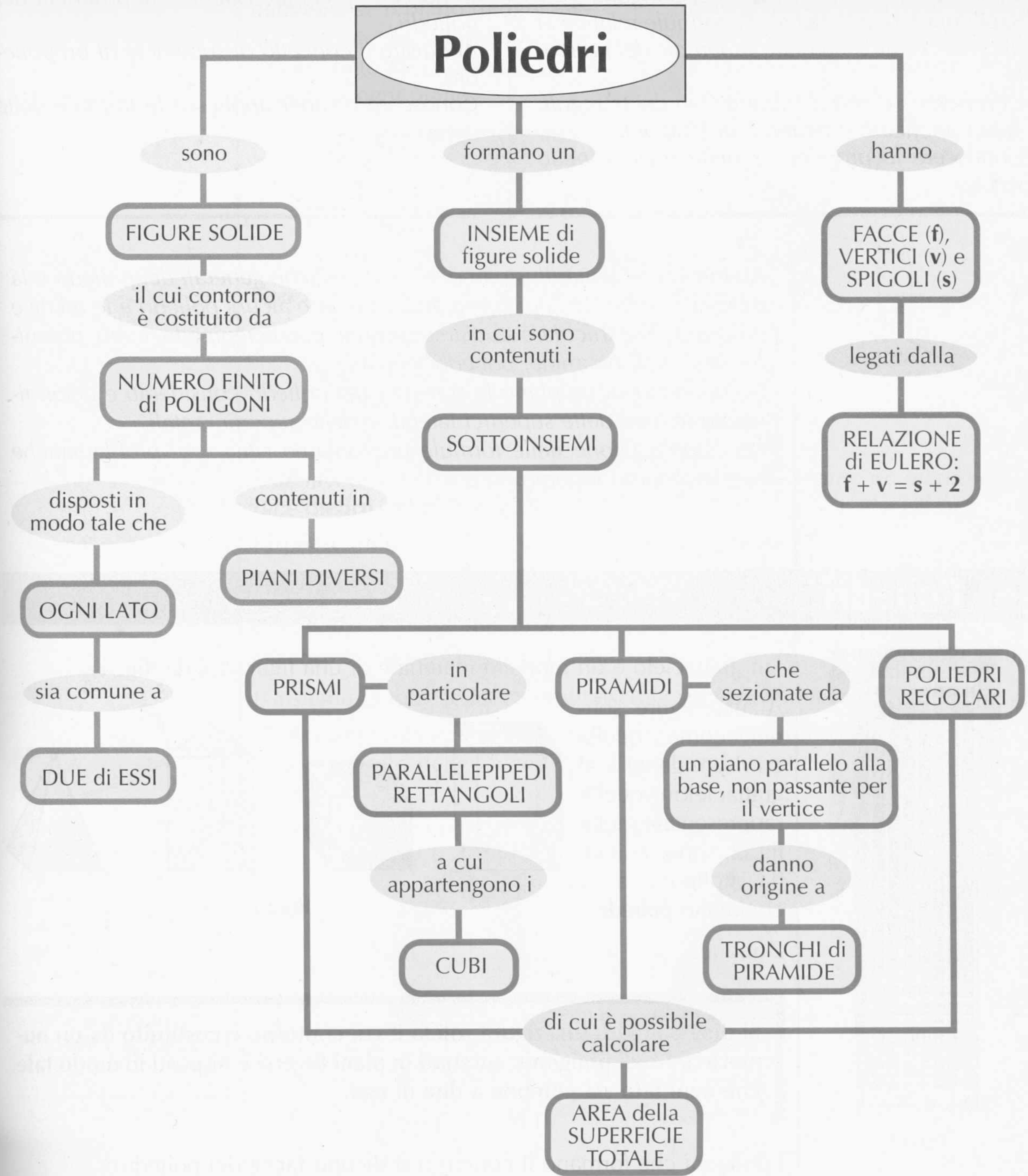
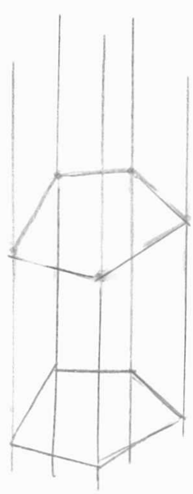
unità 3



Poliedri
sono
FIGURE SOLIDE
il cui contorno è costituito da
NUMERO FINITO di POLIGONI
disposti in modo tale che
OGNI LATO
sia comune a
DUE di ESSI
contenuti in
PIANI DIVERSI
formano un
INSIEME di figure solide
in cui sono contenuti i
SOTTOINSIEMI
PRISMI
in particolare
PARALLELEPIPEDI RETTANGOLI
a cui appartengono i
CUBI
PIRAMIDI
che sezionate da
un piano parallelo alla base, non passante per il vertice
danno origine a
TRONCHI di PIRAMIDE
POLIEDRI REGOLARI
di cui è possibile calcolare
AREA della SUPERFICIE TOTALE
hanno
FACCE (f), VERTICI (v) e SPIGOLI (s)
legati dalla
RELAZIONE di EULERO: f + v = s + 2

Le isometrie sono alla base dello studio di una famiglia di solidi, i PRISMI ottenibili come traslazione speciale di una figura piana

DEFINIZIONE: Un <u>prisma indefinito</u> è la figura solida ottenuta per successive traslazioni di un poligono convesso secondo una direzione assegnata non parallela al piano del poligono

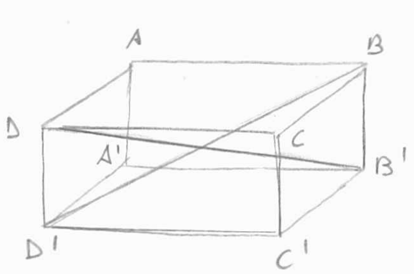


Le rette passanti per i vertici si dicono SPIGOLI del prisma, i lati traslando formano le facce del prisma.

Si dice <u>prisma</u> (finito convesso) l'insieme dei punti di un prisma indefinito limitato da due piani paralleli e non paralleli ad alcuno spigolo

Le facce del prisma sono parallelogrammi e gli spigoli laterali congruenti tra loro

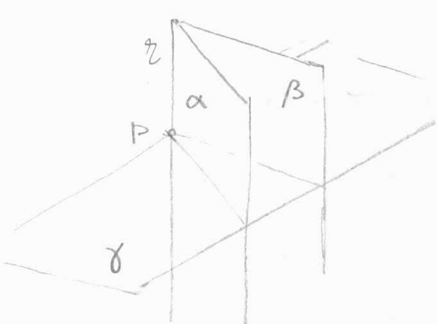
Se anche le basi sono parallelogrammi il prisma è detto <u>parallelepipedo</u>



Il punto d'incontro delle diagonali di un parallelepipedo

Consideriamo due piani incidenti: essi individuano quattro regioni dello spazio: ogni regione ha per frontiera due semipiani con una retta in comune: ogni regione è detta <u>DIEDRO</u> <u>CONVESSO</u>

Il suo complementare si dirà diedro CONCAVO e diedro piatto sarà ognuno dei due semispazi in cui un piano divide lo spazio



Sul piano γ è individuato un angolo di vertice P detto <u>SEZIONE DEL DIEDRO</u> con il piano γ.

Se γ è perpendicolare alla retta r si parla di <u>SEZIONE NORMALE</u> del diedro

<u>Teorema</u>: Sezioni parallele di uno stesso diedro sono congruenti

Dimostrazione: Dati due piani paralleli, esiste una traslazione che fa corrispondere i punti dell'uno nei punti dell'altro ⟹ l'angolo individuato dal primo piano è traslato allora nell'angolo individuato dal 2° ed essendo una isometria hanno uguale ampiezza

<u>Definizione</u>: l'ampiezza di una qualunque sezione normale si dice <u>ampiezza del diedro</u>

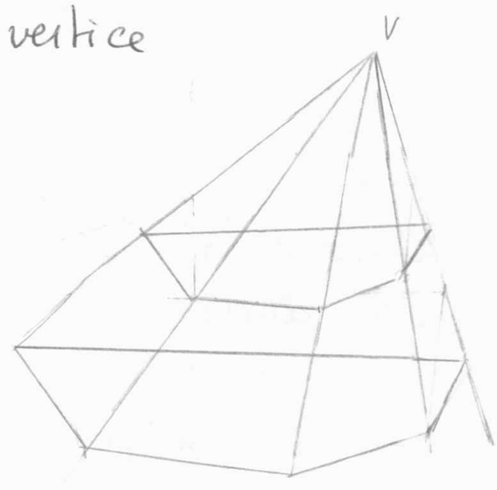
Il concetto di ampiezza del diedro è così rapportato a quello di un'ampiezza di un angolo; così un DIEDRO RETTO ha ampiezza 90°

Proposizione Due piani perpendicolari individuano quattro diedri retti.

Consideriamo ora tre piani non paralleli e non appartenenti allo stesso fascio, aventi un punto in comune. Essi dividono lo spazio in $2^3 = 8$ regioni convesse.

Ogni regione si chiama TRIEDRO: esso è perciò dato dell'intersezione di 3 diedri, cioè di tre semispazi ognuno dei quali contiene lo spigolo del diedro formato dagli altri due.
L'intersezione di n semispazi determinati da piani che si incontrano in un punto, detto vertice, si dice ANGOLOIDE

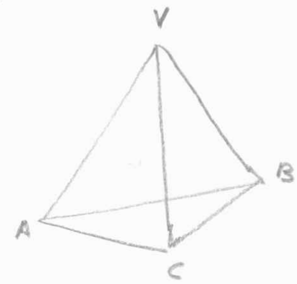
Se interseco un angoloide con due piani paralleli abbiamo su di essi poligoni che si corrispondono in un'omotetia che ha:
a) come centro il vertice V dell'angoloide
b) come rapporto, il rapporto fra le distanze dei due piani dal vertice



Tagliamo l'angoloide con un piano non parallelo ad alcuna faccia dell'angoloide di vertice V. L'intersezione dell'angoloide con il semispazio che contiene V si dice PIRAMIDE

Si chiama PIRAMIDE REGOLARE una piramide che ha come base un poligono regolare e tale che la proiezione perpendicolare di V sulla base sia il centro del poligono.

A partire da un triedro si ha un tetraedro



Si dice POLIEDRO l'intersezione di un numero finito di semispazi, limitata, cioè contenuta in un tetraedro

Le piramidi finite sono particolari poliedri

i prismi sono particolari poliedri

Ricordiamo una relazione che lega tra loro il # facce, f, di un poliedro, il # degli spigoli s, ed il # di vertici v del poliedro.

Formula di Eulero per i poliedri

$$f - s + v = 2$$

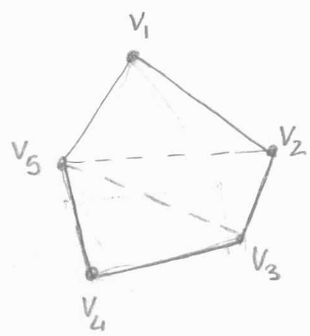
1) DIMOSTRAZIONE Considero $f - s + v = x$ e dimostro che $x = 2$

Dalla superficie del poliedro $\mathcal{P}$ tolgo una faccia $\Rightarrow$ ora $f - s + v = x - 1$

In ogni faccia rimasta tracciamo tutte le diagonali a partire da un vertice in ogni faccia

$\Rightarrow$ la faccia è divisa in triangoli

$\Rightarrow$ dopo tale "triangolazione" consideriamo i triangoli come facce e le diagonali come spigoli $\Rightarrow$ non abbiamo aggiunto vertici, ma per ogni spigolo aggiunto abbiamo aggiunto una faccia



$\Rightarrow$ ora $f' - s' + v = \chi - 1$

Ora togliamo triangoli, uno alla volta, che abbiano almeno uno spigolo libero

$\Rightarrow$ posso togliere triangoli con uno solo spigolo libero

$$\Rightarrow \quad f' = f - 1 \qquad s' = s - 1$$

$$f' - s' + v' = f - 1 - s + 1 + v' = \chi - 1$$

oppure tolgo triangoli con due spigoli liberi

$$\Rightarrow \quad f' = f - 1 \quad e \quad s' = s - 2 \quad \Rightarrow \quad v' = v - 1$$

$$\Rightarrow \quad f' - s' + v' = f - 1 - s + 2 + v - 1 = f - s + v = \chi - 1$$

Si giunge alla fine ad un solo triangolo con $f = 1$, $s = 3$, $v = 3$ $\Rightarrow$ $f - s + v = 1$

$$\Rightarrow \quad \chi - 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \chi = 2$$

c.v.d.

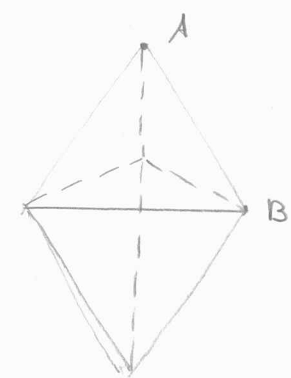
Poliedri regolari

Definizione Un poliedro convesso si dice **REGOLARE** se

1) tutte le facce sono poligoni regolari
2) tutte le facce sono congruenti tra loro
3) da ciascun vertice deve uscire lo stesso numero di spigoli

Le condizioni 1) e 2) non sono sufficienti alla regolarità di un poliedro

Esempio: Incolliamo due tetraedri per una faccia $\Rightarrow$ A è vertice di 3 spigoli, B è vertice di 4 spigoli non è un poliedro regolare



$\Rightarrow$ un poliedro regolare può essere individuato da una coppia di numeri (p, q) con

$p := \#$ lati di ogni faccia

$q := \#$ spigoli che escono da ogni vertice

Nel piano abbiamo le seguenti proprietà:
Sappiamo che $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists$ poligoni piani regolari con n lati.

Non vale un teorema analogo per i poliedri regolari, ma abbiamo invece il seguente

TEOREMA : Esistono solo cinque tipi di poliedri regolari

Dimostrazione : In ogni vertice del poliedro devono convergere almeno tre facce e la somma delle ampiezze degli angoli che convergono in quel vertice è minore di 360°

=> possiamo avere :

a) Poliedri che hanno per facce triangoli equilateri

=> a_1) In ogni vertice possono convergere 3 triangoli
infatti $3 \cdot 60° = 180° < 360°$
Tale poliedro si dice TETRAEDRO

a_2) In ogni vertice possono convergere 4 triangoli
infatti $4 \cdot 60° = 240° < 360$
Tale poliedro si chiama OTTAEDRO

a_3) In ogni vertice possono convergere 5 triangoli
infatti $5 \cdot 60° = 300° < 360°$
Tale poliedro si chiama ICOSAEDRO

Non ce ne sono altri con facce triangolari

b) poliedri che hanno per facce quadrati :

b_1) In ogni vertice convergono 3 quadrati
infatti : $3 \cdot 90° = 270° < 360°$ ESAEDRO (o CUBO)

non ce ne possono essere altri con facce quadrate

c) Poliedri con facce di 5 lati, pentagoni regolari

$\Rightarrow$ c_1) è possibile avere poliedri con al massimo 3 facce pentagonali che convergono in un vertice - poiché

$$3 \cdot 108^\circ = 324^\circ < 360^\circ$$

Tale poliedro si chiama <u>DODECAEDRO</u>

Non possono esserci poliedri con facce aventi un numero maggiore di lati!

I possibili poliedri regolari sono dunque

(3,3) ; (3,4) ; (3,5) ; (4,3) ; (5,3)

Tali poliedri regolari erano conosciuti fin nell'antichità e già allora si sapeva che non ve ne erano altri oltre i cinque visti. Essi sono anche conosciuti come Solidi Platonici.

Timeo da Locri inventò una corrispondenza mistica, ripresa da Platone, fra

tetraedro — fuoco
ottaedro — aria
icosaedro — acqua
esaedro — terra

Il dodecaedro deve considerarsi come la "forma che avvolge l'universo"

Questi solidi vengono trattati matematicamente da Teeteto di Atene e da Euclide nei libri XIII e XV dei suoi Elementi (posteriori, trattati da vari autori successivi)

Un dodecaedro costruito dagli Etruschi è stato rinvenuto vicino a Padova e risale a 2500 anni fa; sembra fosse un giocattolo

Tra i tipi di poliedri regolari si osservano le seguenti regolarità:

i) $\exists$ due coppie di tipi di poliedri per le quali si scambiano tra loro i parametri p e q; f e v mentre rimane uguale s:

Tali sono il cubo e l'ottaedro con $p, q \in \{3, 4\}$

$f, v \in \{8, 6\}$; $s = 12$

l'icosaedro e dodecaedro $p, q \in \{3, 5\}$, $f, v \in \{20, 12\}$ $s = 30$

Tali tipi si dicono DUALI tra loro. Il tetraedro è autoduale