ESERCIZI SUI VETTORI CON SOLUZIONE

di Mauro Morganti e Juri Riccardi

Esercizio 1

Rispetto ad una terna cartesiana ortogonale di origine O e versori $\hat{\boldsymbol{i}}$, $\hat{\boldsymbol{j}}$, $\hat{\boldsymbol{k}}$ due vettori spostamento $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ hanno componenti $\boldsymbol{a} = (6, -8, 0)$ e $\boldsymbol{b} = (2, -1, \sqrt{11})$. Le componenti sono espresse in metri. Si determini:

1) il modulo dei vettori, il valore del loro prodotto scalare, l'angolo tra i due vettori.
2) uno dei vettori forma un angolo di $\pi/3$ con $\hat{\boldsymbol{i}}$: quale?
3) esprimere le componenti dei versori. Se si misurano le distanze in centimetri come cambiano le componenti dei vettori e dei relativi versori?
4) si scrivano le componenti dei vettori $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$.
5) se i due vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ sono applicati ad un medesimo punto P, quanto vale la distanza tra i punti estremi.
6) se $\boldsymbol{a}$ è applicato in P, mentre $\boldsymbol{b}$ è applicato all'estremità di $\boldsymbol{a}$, quanto vale la distanza tra P e l'estremo di $\boldsymbol{b}$
7) se $\boldsymbol{a}$ è applicato nell'origine O e $\boldsymbol{b}$ nel punto P di coordinate $OP = (2,0,0)$, quanto vale la distanza fra gli estremi di $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$.
8) determinare le componenti dei versori perpendicolari al piano formato da $\boldsymbol{a}$ e da $\hat{\boldsymbol{i}}$.
9) determinare le componenti dei versori perpendicolari ad $\boldsymbol{a}$ e a $\hat{\boldsymbol{k}}$.
10) utilizzando i versori trovati in 8) e 9) si costruisca una nuova terna cartesiana ortogonale e si scrivano le nuove componenti di $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$.
11) con le nuove componenti cosa cambia nelle risposte alle domande 1) ….9)?

Soluzione esercizio 1

1) Dalla definizione di modulo di un vettore si ricava:

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10 \ \ m$$

$$|\boldsymbol{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} = \sqrt{2^2 + 1^2 + (\sqrt{11})^2} = \sqrt{16} = 4 \ \ m \ .$$

Il prodotto scalare fra i vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ vale:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = (6)(8) + (-8)(-1) + (0)(\sqrt{11}) = 20 \ \ m^2 \ .$$

L'angolo tra i due vettori si ricava dalla seguente identità:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\boldsymbol{a}| \ |\boldsymbol{b}| \cos\alpha \, ,$$

ossia:

$$\cos\alpha = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}| \ |\boldsymbol{b}|} = \frac{20}{(10)(4)} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 60^o = \frac{\pi}{3} \ .$$

2) Per rispondere a questa domanda è necessario calcolare il prodotto scalare di ciascun vettore con il versore $\hat{\boldsymbol{i}}$ dell'asse x. Dalla definizione di prodotto scalare si ha:

$$\cos(\theta_{\boldsymbol{a},\hat{\boldsymbol{i}}}) = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \hat{\boldsymbol{i}}}{|\boldsymbol{a}| \ |\hat{\boldsymbol{i}}|} = \frac{a_x}{|\hat{\boldsymbol{i}}| \ |\boldsymbol{a}|} = \frac{6}{(1)(10)} = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad \theta_{\boldsymbol{a},\hat{\boldsymbol{i}}} = 53.1^o$$

$$\cos(\theta_{\boldsymbol{b},\hat{\boldsymbol{i}}}) = \frac{\boldsymbol{b} \cdot \hat{\boldsymbol{i}}}{|\boldsymbol{b}| \ |\hat{\boldsymbol{i}}|} = \frac{b_x}{|\hat{\boldsymbol{i}}| \ |\boldsymbol{b}|} = \frac{2}{(1)(4)} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta_{\boldsymbol{b},\hat{\boldsymbol{i}}} = 60^o = \frac{\pi}{3} .$$

3) I versori $\hat{\boldsymbol{a}}$ e $\hat{\boldsymbol{b}}$ risultano:

$$\hat{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{1}{10}(6, -8, 0) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, 0\right)$$

$$\hat{\boldsymbol{b}} = \frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|} = \frac{1}{4}(2, -1, \sqrt{11}) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{11}}{4}\right) \ .$$

Se le distanze si misurano in centimetri i moduli dei vettori diventano:

$$|\boldsymbol{a}| = 1000 \ \ cm \qquad\qquad |\boldsymbol{b}| = 400 \ \ cm \ .$$

Le componenti dei versori non cambiano.

4) Siano $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$, rispettivamente, i vettori somma e differenza dei vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$. Le componenti del vettore somma $\boldsymbol{c}$ sono:

$$\boldsymbol{c} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z) = (6+2, -8-1, 0+\sqrt{11}) = (8, -9, \sqrt{11}) \ .$$

Le componenti del vettore differenza $\boldsymbol{d}$ sono invece:

$$d = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z) = (6-2, -8-(-1), 0-\sqrt{11}) = (4, -7, -\sqrt{11}) .$$

5) Se i vettori sono applicati nello stesso punto P, la distanza fra i loro estremi è uguale a $|\boldsymbol{d}|$, ossia

$$distanza = |\boldsymbol{d}| = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2} = \sqrt{(4)^2 + (-7)^2 + (-\sqrt{11})^2} = \sqrt{76} \ \ m \ .$$

6) La distanza fra l'estremo libero del vettore $\boldsymbol{b}$ e il punto P è uguale a $|\boldsymbol{c}|$, ossia

$$distanza = |\boldsymbol{c}| = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2} = \sqrt{(8)^2 + (-9)^2 + (\sqrt{11})^2} = \sqrt{156} \ \ m \ .$$

7) In questo caso la distanza fra la punta del vettore $\boldsymbol{a}$ e la punta del vettore $\boldsymbol{b}$ risulta:

$$distanza = |\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{OP} + \boldsymbol{b})| = \sqrt{(4-2-2)^2 + (-8-(-1))^2 + (-(\sqrt{11}))^2} = \sqrt{64} = 8 \ \ m \ .$$

8) Indichiamo con $\hat{\boldsymbol{u}} = (u_x, u_y, u_z)$ il generico versore ortogonale sia al vettore $\boldsymbol{a}$ che al versore $\hat{\boldsymbol{i}}$. Affinché $\hat{\boldsymbol{u}}$ risulti contemporaneamente ortogonale sia al vettore $\boldsymbol{a}$ che al versore $\hat{\boldsymbol{i}}$ dovrà risultare

$$\hat{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{a} = u_x a_x + u_y a_y + u_z a_z = 6u_x - 8u_y = 0 \qquad (1)$$

$$\hat{\boldsymbol{u}} \cdot \hat{\boldsymbol{i}} = u_x 1 + u_y 0 + u_z 0 = u_x = 0 \qquad (2)$$

Inoltre, poiché $\hat{\boldsymbol{u}}$ è un versore, il suo modulo è unitario e pertanto dovrà essere verificata anche l'ulteriore condizione:

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 1 \qquad (3)$$

Dalla condizione (2) si ricava il valore $u_x = 0$, che sostituito nell'equazione (2) dà $u_y = 0$. Dalla condizione (3) si deduce allora il risultato $u_z = \pm 1$. I versori cercati sono dunque $\hat{\boldsymbol{u}} = (0, 0, \pm 1) = \pm \hat{\boldsymbol{k}}$, avendo indicato con $\hat{\boldsymbol{k}}$ il versore dell'asse *z*. Si osservi che a questa domanda si poteva rispondere immediatamente osservando che, oltre al versore $\hat{\boldsymbol{i}}$, anche il vettore $\boldsymbol{a}$ giace nel piano *(x,y)* .

9) Sia $\hat{\boldsymbol{n}} = (n_x, n_y, n_z)$ il generico versore ortogonale sia al vettore $\boldsymbol{a}$ che al versore $\hat{\boldsymbol{k}}$. Procedendo come al punto 7) si ricava:

$$\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{a} = n_x a_x + n_y a_y + n_z a_z = 6n_x - 8n_y = 0$$

$$\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{k}} = n_x 0 + n_y 0 + n_z 1 = n_z = 0$$

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$$

Risolvendo questo sistema nelle incognite (n_x, n_y, n_z) si ricava:

$$n_x = \pm\frac{4}{5}, \ \ n_y = \pm\frac{3}{5}, \ \ n_z = 0 .$$

I versori cercati sono dunque: $\hat{\boldsymbol{n}} = \left(\pm\frac{4}{5}, \pm\frac{3}{5}, 0 \right)$.

10) La nuova terna cartesiana è costruita con i versori $\hat{\boldsymbol{a}}$, $\hat{\boldsymbol{u}}$ e $\hat{\boldsymbol{n}}$. In questa nuova terna le componenti del vettore $\boldsymbol{a}$ sono immediate: $\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\hat{a} = (10, 0, 0)$. Le componenti del vettore $\boldsymbol{b}$ rispetto a questa nuova terna risultano invece:

$$b_{\hat{a}} = \boldsymbol{b} \cdot \hat{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{(6)(2) + (-8)(-1) + (0)(\sqrt{11})}{10} = \frac{20}{10} = 2 \ \ m$$

$$b_{\hat{u}} = \boldsymbol{b} \cdot \hat{\boldsymbol{u}} = (2)(0) + (-1)(0) + (\sqrt{11})(\pm 1) = \pm\sqrt{11} \ \ m$$

$$b_{\hat{n}} = \boldsymbol{b} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = (2)\left(\pm\frac{4}{5}\right) + (-1)\left(\pm\frac{3}{5}\right) + (0)(\sqrt{11}) = \pm\frac{8}{5} \mp \frac{3}{5} = \pm 1 \ \ m \ .$$

11) Nella nuova terna le risposte alle domande 1-9 non cambiano; cambiano infatti soltanto le componenti dei vettori memtre il loro modulo, il loro prodotto scalare e tutte le distanza calcolate rimangono invariate.

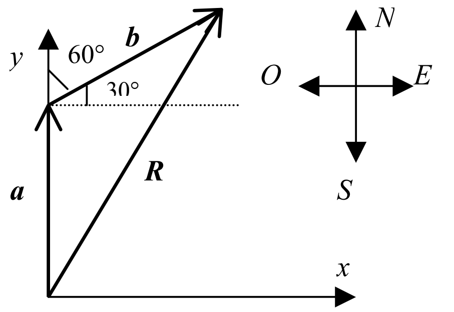
Esercizio *2*

Un'automobile percorre 20 km in direzione nord, successivamente 35 km in direzione 60 gradi nord-est. Si calcoli: il vettore spostamento risultante, il versore del vettore spostamento e lo spazio totale percorso.

Soluzione esercizio 2

L'automobile compie lo spostamento complessivo $\boldsymbol{R}$ che è la somma degli spostamenti $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ indicati in figura.

Dai dati del problema risulta $|\boldsymbol{a}| = 20\ \ km$ e $|\boldsymbol{b}| = 20\ \ km$, pertanto le componenti di questi vettori rispetto al sistema di riferimento *(x,y)* indicato in figura sono:



$$\boldsymbol{a} = (0,20) \qquad \boldsymbol{b} = (35\cos(30°), 35\sin(30°)) = \left(\frac{35}{2}\sqrt{3}, \frac{35}{2}\right).$$

Le componenti dello spostamento complessivo $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ sono:

$$R_x = a_x + b_x = 0 + \frac{35\sqrt{3}}{2} = \frac{35\sqrt{3}}{2}$$

$$R_y = a_y + b_y = 20 + \frac{35}{2} = \frac{75}{2},$$

ossia:

$$\boldsymbol{R} = \frac{35\sqrt{3}}{2}\hat{\boldsymbol{i}} + \left(\frac{75}{2}\right)\hat{\boldsymbol{j}}$$

Il modulo del vettore spostamento vale:

$$|\boldsymbol{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{\left(\frac{35\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{75}{2}\right)^2} = \sqrt{2325}\ \ km.$$

Il versore dello spostamento risulta:

$$\hat{\boldsymbol{R}} = \frac{\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|} = \left(\frac{35\sqrt{3}}{2\sqrt{2325}}, \frac{75}{2\sqrt{2325}}\right).$$

Lo spazio totale percorso dall'automobile è la somma dello spazio percorso lungo Nord e dello spazio percorso lungo la direzione 60° Nord-Est, ossia:

$$spazio\ \ totale\ \ percorso = |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}| = 20\ \ km + 35\ \ km = 55\ \ km\ .$$

Esercizio 3

Una imbarcazione è spinta a velocità V = 5 m/s rispetto all'acqua in direzione bussola 270 gradi (cioè da est verso ovest). Sapendo che la corrente dell'acqua è v = 1 m/s da nord a sud, si trovi la velocità dell'imbarcazione rispetto alla terra ferma. Quale rotta dovrebbe tenere il comandante per mantenere una rotta est-ovest, quale è in questo caso la velocità rispetto alla terra ferma.

Soluzione esercizio 3

Fissiamo un sistema di riferimento con l'asse y diretto lungo la direzione da sud verso nord e l'asse x lungo la direzione da est verso ovest. In questo sistema di riferimento la velocità della corrente (velocità di trascinamento) è $\boldsymbol{v} = -1\hat{\boldsymbol{j}}m/s$, mentre la velocità della barca relativamente alla corrente (velocità relativa) è $\boldsymbol{V} = -5\hat{\boldsymbol{j}}m/s$.

La velocità $\boldsymbol{V}_A$ della barca rispetto alla terra (velocità assoluta) si ottiene sommando la velocità relativa con quella di trascinamento, ossia:

$$\boldsymbol{V}_A = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{v} = \left(-5\hat{\boldsymbol{i}}\text{-}1\hat{\boldsymbol{j}}\right)m/s\ .$$

Inoltre:

$$|\boldsymbol{V}_A| = \sqrt{V^2 + v^2} = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}\ \ m/s.$$

E quindi evidente che se il comandante vuole mantenere una rotta est-ovest (rispetto alla terra) deve inclinare la prua della nave nella direzione nord-ovest in modo da compensare l'effetto di trascinamento della corrente. Se il modulo della velocità della nave relativamente alla acqua rimane invariato ($V = 5 \ m/s$) , l'effetto di trascinamento della corrente è annullato se $\boldsymbol{V}_A = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{v} = \left(V_x\hat{\boldsymbol{i}} + \left(V_y - 1\right)\hat{\boldsymbol{j}}\right) = V_x\hat{\boldsymbol{i}} \ m/s$ e quindi $V_y = 1$ cioe' quando la prua della nave forma con la direzione orientata sud-nord un angolo

$$\theta = ar\,cos\left(\frac{v}{V}\right) = ar\,cos\left(-\frac{1}{5}\right) = 281.5°$$

Il modulo della velocità della nave rispetto alla terra ferma (velocità assoluta) è:

$$\left|\boldsymbol{V}_A\right| = \sqrt{V^2 - v^2} = \sqrt{5^2 - 1^2} = \sqrt{24} \ ,$$

ed è diretta da est verso ovest con rotta vera 270°.

Esercizio 4

Una macchina si è spostata in linea retta da un punto *P* ad un punto *Q* descritti rispetto ad un sistema di assi cartesiano dai vettori posizione $\boldsymbol{r}_P = 5\ \hat{\boldsymbol{i}} + 6\ \hat{\boldsymbol{j}} + 2\ \hat{\boldsymbol{k}}$ ed $\boldsymbol{r}_Q = 3\ \hat{\boldsymbol{i}} - 2\ \hat{\boldsymbol{j}} + 7\ \hat{\boldsymbol{k}}$ metri. Si calcoli lo spostamento $\boldsymbol{PQ}$ e il versore dello spostamento.

Soluzione esercizio 4

Lo spostamento dell'automobile $\boldsymbol{PQ}$ risulta dalla differenza del vettore $\boldsymbol{r}_Q$ con il vettore $\boldsymbol{r}_P$:

$$\boldsymbol{PQ} = \boldsymbol{r}_Q - \boldsymbol{r}_P = (3-5)\ \hat{\boldsymbol{i}} + (-2-6)\ \hat{\boldsymbol{j}} + (7-2)\ \hat{\boldsymbol{k}} = -2\ \hat{\boldsymbol{i}} \text{ -8 } \hat{\boldsymbol{j}} + 5\ \hat{\boldsymbol{k}} \ .$$

Il modulo dello spostamento $\boldsymbol{PQ}$ vale:

$$\left|\boldsymbol{PQ}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-8)^2 + (5)^2} = \sqrt{93}\,,$$

e il versore dello spostamento $\hat{\boldsymbol{n}}_{PQ}$ risulta:

$$\hat{\boldsymbol{n}}_{PQ} = \frac{\boldsymbol{PQ}}{\left|\boldsymbol{PQ}\right|} = -\frac{2}{\sqrt{93}}\ \hat{\boldsymbol{i}} \text{ - } \frac{8}{\sqrt{93}}\ \hat{\boldsymbol{j}} + \frac{5}{\sqrt{93}}\ \hat{\boldsymbol{k}} \ .$$

Esercizio 5

Se i vettori $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ sono tali che $\alpha\ \boldsymbol{a} + \beta\ \boldsymbol{b} + \gamma\ \boldsymbol{c} = 0$ con $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ numeri reali, si dimostri che sono complanari. Si determini il piano parallelo al piano individuato dai tre vettori e che passa per il punto *P* individuato dal vettore posizione $\boldsymbol{r}_P$ rispetto da un punto *O*.

Soluzione esercizio 5

Per dimostrare che i tre vettori giacciono in un piano basta scrivere il vettore $\boldsymbol{c}$ nella forma:

$$\boldsymbol{c} = -\frac{\alpha}{\gamma}\boldsymbol{a} - \frac{\beta}{\gamma}\boldsymbol{b} \ .$$

Il vettore $\boldsymbol{c}$ è quindi una combinazione lineare dei vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ e pertanto appartiene al piano individuato dai vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ (si osservi che nello spazio due vettori non allineati individuano sempre un piano).
Il generico punto *Q* appartenete al piano parallelo a quello individuato dei tre vettori e passante per il punto *P* risulta individuato dalla seguente legge vettoriale:

$$\boldsymbol{r}_Q = \boldsymbol{r}_P + \alpha\ \boldsymbol{a} + \beta\ \boldsymbol{b}\,,$$

essendo $\boldsymbol{r}_P$ la posizione del punto *P* rispetto ad un punto *O* ed α e β due numeri reali arbitrari.

Esercizio 6

Dimostrare che, per un qualunque vettore, $cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$ ($cos\,\alpha,\ cos\,\beta,\ cos\,\gamma$ sono i coseni direttori).

Soluzione esercizio 6

Sia $\boldsymbol{V} = (V_x, V_y, V_z)$ un generico vettore le cui componenti sono riferite ad un sistema di riferimento cartesiano *(x,y,z)* con origine nel punto *O*. Siano poi α, β, γ gli angoli che il vettore **V** forma, rispettivamente, con gli assi *x, y* e *z*. Poiché risulta:

$$\boldsymbol{V} \cdot \hat{\boldsymbol{i}} = V_x = |\boldsymbol{V}| \; |\hat{\boldsymbol{i}}| \cos\alpha = |\boldsymbol{V}| \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{V_x}{|\boldsymbol{V}|}$$

$$\boldsymbol{V} \cdot \hat{\boldsymbol{j}} = V_y = |\boldsymbol{V}| \; |\hat{\boldsymbol{j}}| \cos\beta = |\boldsymbol{V}| \cos\beta \quad \Rightarrow \quad \cos\beta = \frac{V_y}{|\boldsymbol{V}|}$$

$$\boldsymbol{V} \cdot \hat{\boldsymbol{k}} = V_z = |\boldsymbol{V}| \; |\hat{\boldsymbol{k}}| \cos\gamma = |\boldsymbol{V}| \cos\gamma \quad \Rightarrow \quad \cos\gamma = \frac{V_z}{|\boldsymbol{V}|} \; ,$$

si ricava:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{V_x^2}{|\boldsymbol{V}|^2} + \frac{V_y^2}{|\boldsymbol{V}|^2} + \frac{V_z^2}{|\boldsymbol{V}|^2} = \frac{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}{|\boldsymbol{V}|^2} = 1 \, ,$$

in quanto $|\boldsymbol{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$.

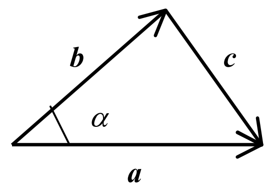
Esercizio 7

Utilizzando le proprietà dei vettori, dimostrare il teorema di Carnot per i lati di un triangolo $(c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos\theta)$.

Soluzione esercizio 7

Consideriamo i vettori ***a*** e ***b*** indicati in figura e sia α l'angolo compreso fra i due vettori. Sia poi ***c*** il vettore differenza di ***a*** e ***b***, ossia:

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \, .$$



I vettori ***a***, ***b*** e ***c*** sono i lati di un generico triangolo. Il modulo quadrato del vettore ***c*** risulta:

$$c^2 = |\boldsymbol{c}|^2 = |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|^2 = (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b} = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha \; ,$$

che è proprio ciò che volevamo dimostrare.

Esercizio 8

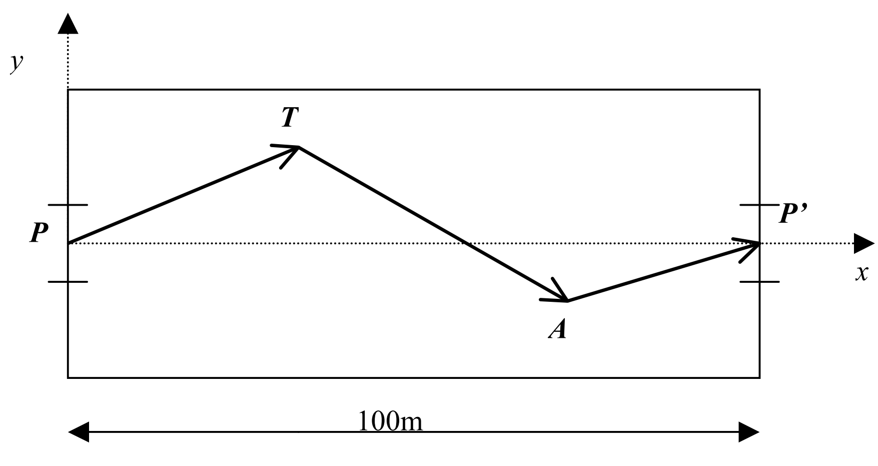
Durante una partita di calcio, il portiere *P*, dal centro della propria porta, rilancia la palla al terzino *T* che si trova ad una distanza *d* =30 m dalla sua linea di fondo e *s* = 20 m dalla sua sinistra. Il terzino poi passa la palla all'attaccante *A* che si trova ad una distanza *h* =80 m dalla linea di fondo ed *a* = 15 m a destra del proprio portiere.

1) Quale direzione e verso deve imprimere alla palla l'attaccante per centrate la porta avversaria se il campo di calcio è lungo 100 m?
2) Quale percorso e quale spostamento ha compiuto la palla nel momento in cui entra nella porta avversaria?

Soluzione esercizio 8

E' conveniente riferire la posizione dei giocatori al sistema di riferimento indicato in figura. Rispetto al riferimento fissato le coordinate cartesiane del portiere *P*, del terzino *T* e dell'attaccante *A* sono:

$$P = (0,0) \quad T = (30,20) \quad A = (80,-15) \; .$$



Il portiere si trova sull'origine del sistema di riferimento cartesiano, la posizione del terzino è individuata dal vettore ***PT*** = (30,20), mentre quella dell'attaccante *A* è individuata del vettore ***PA*** = (80,-15). Lo spostamento ***TA*** risulta:

$$\boldsymbol{TA} = \boldsymbol{PA} - \boldsymbol{PT} = \left(80\ \hat{\boldsymbol{i}} - 15\ \hat{\boldsymbol{j}}\right) - \left(30\ \hat{\boldsymbol{i}} + 20\ \hat{\boldsymbol{j}}\right) = 50\ \hat{\boldsymbol{i}} - 35\ \hat{\boldsymbol{j}}$$

Lo spostamento complessivo subito dalla palla è rappresentato dal vettore ***PP'*** = (100,0) ed è la somma vettoriale degli spostamenti ***PT***, ***TA*** e ***AP'***:

$$\boldsymbol{PP'} = \boldsymbol{PT} + \boldsymbol{TA} + \boldsymbol{AP'},$$

Il vettore ***AP'*** è:

$$\boldsymbol{AP'} = \boldsymbol{PP'} - \boldsymbol{TA} - \boldsymbol{PT} = 100\ \hat{\boldsymbol{i}} - (50\ \hat{\boldsymbol{i}} - 35\ \hat{\boldsymbol{j}}) - (30\ \hat{\boldsymbol{i}} + 20\ \hat{\boldsymbol{j}}) = 20\ \hat{\boldsymbol{i}} + 15\ \hat{\boldsymbol{j}}\ .$$

L'attaccante deve quindi imprimere alla palla la direzione individuata dal vettore ***AP'***. Il vettore ***AP'*** forma con l'asse *x* un angolo pari:

$$\tan\theta = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \theta = 36.9° \quad .$$

Lo spazio totale percorso dalla palla risulta:

$$spazio\ totale = |\boldsymbol{PT}| + |\boldsymbol{TA}| + |\boldsymbol{AP'}| = \sqrt{1300} + \sqrt{3725} + \sqrt{625} = 122.1\ m\ .$$

Esercizio 9

Dati i vettori $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\ , \boldsymbol{c}$ si dimostri:

a) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \le |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$ b) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}| \le ||\boldsymbol{a}| - |\boldsymbol{b}||$ c) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}| \le |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}| + |\boldsymbol{c}|$

Soluzione esercizio 9

a) Con i vettori ***a*** e ***b*** costruiamo il seguente prodotto scalare:

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2 = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 + 2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\alpha\ ,$$

essendo α l'angolo compreso fra i vettori ***a*** e ***b***. Poiché il $\cos\alpha$ è sempre un numero reale compreso nell'intervallo [1,1] risulta sempre:

$$2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\alpha \ \le\ 2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$$

e dalla precedente identità segue la minorazione :

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2 \ \le\ |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 + 2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\ .$$

Poiché $|\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 + 2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| = (\ |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2\ )^2$, la precedente relazione diviene:

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2 \ \le\ \left(\ |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2\ \right)^2$$

ed estraendo la radice quadrata si ottiene il risultato cercato, ossia

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \ \le\ |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}| \qquad (1)$$

b) Con i vettori ***a*** e ***b*** costruiamo il seguente prodotto scalare:

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2 = (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 - 2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\alpha \qquad (2)$$

Poiché il $\cos\alpha$ è sempre un numero reale nell'intervallo [-1,1], si ha:

$$-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\alpha \ \ge\ -2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$$

e quindi per l'identità (2) si ricava la maggiorazione:

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 - 2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\alpha \ \ge\ |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 - 2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\ .$$

Poiché $|\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 + 2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| = (\ |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2\ )^2$ la precedente relazione diviene:

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2 \ \ge\ \left(\ |\boldsymbol{a}|^2 - |\boldsymbol{b}|^2\ \right)^2,$$

ed estraendo la radice quadrata di questa espressione si ottiene il risultato cercato, ossia

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}| \ \ge\ \left|\ |\boldsymbol{a}| - |\boldsymbol{b}|\ \right|\ .$$

c) La dimostrazione discende dalla ripetuta applicazione delle disuguaglianza dimostrata al punto a), precisamente: $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}| \leq |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}| \leq |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}|$.

Esercizio 10

Dimostrare che i vettori $\boldsymbol{a}=(6,-4,2)$, $\boldsymbol{b}=(2,-6,10)$, $\boldsymbol{c}=(4,2,-8)$ formano un triangolo rettangolo. A partire dai vettori perpendicolari si costruiscano le terne cartesiane e si trovino le componenti dei versori rispetto alla terna iniziale.

Soluzione esercizio 10

Dai dati del problema risulta che le componenti del $\boldsymbol{c}$ sono la differenza delle componenti del vettore $\boldsymbol{a}$ con quelle del vettore $\boldsymbol{b}$, ossia:

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$$

I tre vettori sono quindi linearmente dipendenti è giacciono quindi in un stesso piano. Inoltre risulta:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (6)(2)+(-4)(-6)+(2)(10) = 56 \neq 0$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} = (6)(4)+(-4)(2)+(2)(-8) = 24-8-16 = 0\ ,$$

e quindi i vettori $\boldsymbol{a}$ e $\mathbf{c}$ sono ortogonali.

Inoltre risulta:

$$|\boldsymbol{a}|^2 = a_x^2+a_y^2+a_z^2 = 36+16+4 = 56$$

$$|\boldsymbol{b}|^2 = b_x^2+b_y^2+b_z^2 = 4+36+100 = 140$$

$$|\boldsymbol{c}|^2 = c_x^2+c_y^2+c_z^2 = 16+4+64 = 84\ ,$$

e quindi i tre lati del triangolo verificano il teorema di Pitagora essendo $|\boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{c}|^2$.

I vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{c}$ sono ortogonali e i relativi versori sono:

$$\hat{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{1}{\sqrt{56}}(6,-4,2) = \left(\frac{3}{\sqrt{14}},-\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{1}{\sqrt{14}}\right)$$

$$\hat{\boldsymbol{b}} = \frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|} = \frac{1}{\sqrt{84}}(4,2,-8) = \left(\frac{2}{\sqrt{21}},\frac{1}{\sqrt{21}},-\frac{4}{\sqrt{21}}\right)\ .$$

I versori $\hat{\boldsymbol{d}}$ ortogonali al piano individuato dal triangolo rettangolo si ottengono prendendo il prodotto vettoriale di $\hat{\boldsymbol{a}}$ con $\hat{\boldsymbol{b}}$ e di $\hat{\boldsymbol{b}}$ con $\hat{\boldsymbol{a}}$ nel modo di seguito indicato:

$$\hat{\boldsymbol{d}} = \pm\hat{\boldsymbol{a}}\times\hat{\boldsymbol{b}} = \frac{1}{\sqrt{56}}\frac{1}{\sqrt{84}}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \pm\frac{1}{\sqrt{4704}}\begin{vmatrix}\hat{\boldsymbol{i}} & \hat{\boldsymbol{j}} & \hat{\boldsymbol{k}}\\ 6 & -4 & 2\\ 4 & 2 & -8\end{vmatrix} = \pm\frac{28\ \hat{\boldsymbol{i}}+56\ \hat{\boldsymbol{j}}+28\ \hat{\boldsymbol{k}}}{\sqrt{4704}} = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\ .$$

I versori di $\hat{\boldsymbol{a}}$, $\hat{\boldsymbol{b}}$ e $\hat{\boldsymbol{d}}$ individuano due terne cartesiane ortogonali.

Esercizio 11

Due auto che possiedono le quantità di moto $\boldsymbol{Q}_1 = M_1\boldsymbol{V}_1 = 10^4\ \hat{\boldsymbol{i}}$ kg m/s e $\boldsymbol{Q}_2 = M_2\boldsymbol{V}_2 = 510^4\ \hat{\boldsymbol{j}}$ kg m/s si scontrano da un incrocio. Qual è la quantità di moto totale $\boldsymbol{Q}$? Quale è la velocità V se $\boldsymbol{Q} = (M_1+M_2)\boldsymbol{V}$ ed $M_1 = M_2 = 1000$ kg.

Soluzione esercizio 11

La quantità di moto totale risulta:

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{Q}_2 = \left(10^4\ \hat{\boldsymbol{i}}+510^4\ \hat{\boldsymbol{j}}\right)kg\ m/s\ .$$

La velocità $\mathbf{V}$ risulta:

$$\boldsymbol{V} = \frac{\boldsymbol{Q}}{M_1+M_2} = \frac{1}{(1000+1000)kg}\left(10^4\ \hat{\boldsymbol{i}}+510^4\ \hat{\boldsymbol{j}}\right)kg\ m/s = \left(5\ \hat{\boldsymbol{i}}+25\ \hat{\boldsymbol{j}}\right)\ .$$

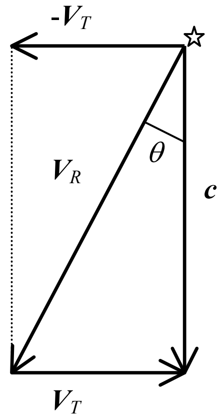
Esercizio 12

Si dia una stima della velocità della luce, se un telescopio deve essere inclinato di 20,5" rispetto alla verticale per osservare una stella che, senza il moto di rivoluzione della terra intorno al sole ($V_T = 29.77\ 10^3$ m/s), si troverebbe sulla verticale.

Soluzione esercizio 12

Nel sistema di riferimento della Terra è la stella che si muove con una velocità $-\boldsymbol{V}_T$. Se $\boldsymbol{c}$ indica la velocità di propagazione della luce nel vuoto, allora la velocità della luce relativamente all'osservatore terrestre risulta:

$$\boldsymbol{V}_R = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{V}_T ,$$



come indicato in figura. Affinché la luce raggiunga l'obiettivo del telescopio è quindi necessario inclinare il telescopio dell'angolo θ indicato in figura in modo che risulti:

$$\tan\theta = \frac{|\boldsymbol{V}_T|}{|\boldsymbol{c}|} .$$

Esprimendo l'angolo in gradi:

$$\theta = \frac{20.5''}{3600} = 5.69410^{-3}\ ^\circ ,$$

si ricava:

$$|\boldsymbol{c}| = \frac{|\boldsymbol{V}_T|}{\tan\theta} = \frac{29.77\ 10^3\ \ m/s}{9.939\ 10^{-5}} = 2.995\ 10^8\ \ m/s .$$

Esercizio 13

Dato il vettore posizione $\boldsymbol{r}_P$ = (3,4,5).

a) si trovi un vettore perpendicolare;
b) si dia un'espressione vettoriale la legge attraverso la quale si individua un punto generico Q del piano perpendicolare che passa per P;
c) si dia iun'espressione vettoriale la legge attraverso la quale si individua un punto generico Q del piano parallelo al piano (x,y) che passa per *P;*
d) se si adopera una terna cartesiana centrata in P con gli assi paralleli a quelli delle terna già utilizzata , si scrivano le espressiono trovate in risposta alle domande b) e c).

Soluzione esercizio 13

a) Sia $\boldsymbol{u} = (x, y, z)$ un generico vettore dello spazio. Affinché $\boldsymbol{u}$ risulti ortogonale al vettore $\boldsymbol{r}_P = (3,4,5)$ è necessario imporre la condizione:

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{r}_P = 3x + 4y + 5z = 0 .$$

Per verificare questa equazione è sufficiente, ad esempio, porre:

$$z = -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{u} = \left(x, y, -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y \right) , \tag{1}$$

dove la componete x e la componete y sono numeri reali variabili arbitrariamente.

Per ottenere poi due vettori linearmente indipendenti, entrambi ortogonali al vettore $\boldsymbol{r}_P$, basta porre alternativamente nell'equazione (1) $x = 0$ e $y = 0$., ossia:

$$\boldsymbol{u}_1 = \left(0, y, -\frac{4}{5}y \right) \qquad \boldsymbol{u}_2 = \left(x, 0, -\frac{3}{5}x \right) .$$

I versori corrispondenti a questi due vettori si ottengono imponendo le condizioni:

$$\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_1 = y^2 + \frac{16}{25}y^2 = 1 \quad \Rightarrow y = \pm\frac{5}{\sqrt{41}} \quad \Rightarrow \hat{\boldsymbol{u}}_1 = \left(0, \pm\frac{5}{\sqrt{41}}, \mp\frac{4}{\sqrt{41}} \right)$$

$$\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_2 = x^2 + \frac{9}{25}x^2 = 1 \quad \Rightarrow x = \pm\frac{5}{\sqrt{34}} \quad \Rightarrow \hat{\boldsymbol{u}}_2 = \left(\pm\frac{5}{\sqrt{34}}, 0, \mp\frac{3}{\sqrt{34}} \right) .$$

b) Sulla base dei risultati trovati al punto a) è ora immediato scrivere la legge vettoriale che individua il generico punto Q appartenente al piano passante per P ed ortogonale al vettore $\boldsymbol{r}_P$, precisamente:

$$\boldsymbol{r}_Q = \boldsymbol{r}_P + \alpha\,\hat{\boldsymbol{u}}_1 + \beta\,\hat{\boldsymbol{u}}_2 \tag{2}$$

dove $\alpha,\ \beta$ sono due numeri reali arbitrari. In altre parole il vettore $\boldsymbol{r}_Q$ si ottiene sommando al vettore $\boldsymbol{r}_P$ un generico vettore appartenente al piano individuato dai versori $\hat{\boldsymbol{u}}_1$ e $\hat{\boldsymbol{u}}_2$. Si osservi inoltre che i versori $\hat{\boldsymbol{u}}_1$ e $\hat{\boldsymbol{u}}_2$, pur essendo linearmente indipendenti , non sono però ortogonali.

c) La legge vettoriale che individua un generico punto Q appartenente al piano passante per P e parallelo al piano *(x,y)* risulta:

$$\boldsymbol{r}_Q = \boldsymbol{r}_P + \alpha\,\hat{\boldsymbol{i}} + \beta\,\hat{\boldsymbol{j}}\,. \tag{3}$$

d) Nella terna cartesiana centrata in P e con gli assi paralleli alla terna già utilizzata risulta $\boldsymbol{r}_P \equiv 0$ e le equazioni (2) e (3) diventano semplicemente:

$$\boldsymbol{r}_Q = \alpha\,\boldsymbol{u}_1 + \beta\,\boldsymbol{u}_2 \qquad\qquad \boldsymbol{r}_Q = \alpha\,\hat{\boldsymbol{i}} + \beta\,\hat{\boldsymbol{j}}\,.$$

SOLUZIONI