PREMESSA GENERALE

Il progetto di una costruzione comporta in genere un complesso di operazioni che, pur riconducibili al concatenamento di alcune essenziali fasi, raramente ammettono sviluppi passivamente ripetuti.

Occorre innanzi tutto, per un progetto, definire la soluzione strutturale, essendo spesso possibile un gran numero di scelte, a cominciare dal materiale e dal tipo di strutture. Poi, stabiliti i carichi permanenti e accidentali, è necessario in genere, essendo il più delle volte la costruzione iperstatica, il dimensionamento di massima degli elementi strutturali; ed è soltanto a questo punto che è possibile passare al calcolo definitivo, quindi alla definizione dei particolari costruttivi, delle caratteristiche dei materiali, e delle disposizioni riguardanti l'esecuzione, ragguagliando infine tutto ai costi conclusivi dell'opera progettata.

Ma una citazione tanto sommaria dei punti salienti delle operazioni richieste da un progetto è lontanta dal consentire, a chi non sia iniziato, un giusto giudizio del lavoro necessario, poiché in realtà le varie fasi elencate si intrecciano strettamente nella progressiva maturazione del progetto stesso, nonché nella scelta della soluzione strutturale; di modo che le operazioni che, ad esempio, nel precedente ordine appaiono conclusive (ossia quelle riguardanti l'esecuzione) possono condizionare la stessa scelta della soluzione. Inoltre ciascuna fase richiede per sé stessa altre serie di operazioni; e in particolare la precisazione dei dimensionamenti, siano essi di massima o definitivi, coinvolge la messa a punto di un relativo schema strutturale, ossia di un modello teorico al quale riferire i calcoli; modello che, comportando tutto un suo corredo di ipotesi semplificatrici, deve essere adattato al grado effettivamente possibile e non immaginario di approssimazioni, essendo chiaro che sarebbe, ad esempio, non soltanto inutile, ma anche ingannevole e pericoloso, un calcolo sofisticato là dove, come non di rado accade, le stesse condizioni di carico fossero assai incerte.

Tanto i metodi di calcolo basati sui fondamenti impartiti nel precedente corso di Scienza delle costruzioni, quanto le cognizioni pratiche, le normative e gli essenziali problemi tecnologici riguardanti le strutture verranno illustrati nel corso di Tecnica delle costruzioni. Sostanzialmente esso quindi concerne, dopo una approfondita illustrazione dei dati di partenza, ossia delle condizioni di carico e delle salienti caratteristiche dei materiali, lo studio delle più importanti classi strutturali.

Sistemi di travi altamente iperstatici, strutture di fondazione, lastre piane inflesse, strutture precompresse, strutture miste: saranno questi, nelle grandi linee, dopo l'illustrazione delle principali condizioni di carico e di proprietà generali utili per il progetto delle strutture, gli argomenti che verranno sviluppati: però con il primario intento non di produrre una rassegna di questioni strutturali, bensì di dare inizio ad autonome capacità di risoluzione. Ciò che è necessario per potere non soltanto affrontare l'infinita varietà dei casi offerti dalla pratica professionale, ma anche per non disperdersi in notizie che, essendo eccessivamente volte al particolare, divengono rapidamente inattuali.

Come diremo più estesamente in seguito, nel comportamento di una struttura occorra distinguere stati limite di esercizio e stati limite ultimi: per i primi s'intendono situazioni estreme possibili nel normale funzionamento della struttura, oltre le quali, seppure senza pericolo per gli utenti, essa non è più in grado di soddisfare i requisiti di progetto; mentre per stati limite ultimi s'intendono le situazioni oltre le quali avviene il collasso della struttura, a causa del raggiungimento di stati tensionali e deformativi ultimi, o dell'incapacità di mantenere confi-

gurazioni equilibrate stabili. L'esame della sicurezza nei confronti di tali due categorie di situazioni limite, entrambe di imprescindibile importanza, ammette ipotesi e metodi di calcolo in genere molto diversi tra di loro; ipotesi e metodi disciplinati da normative (cogenti), istruzioni, circolari ministeriali. Sono in via di elaborazione gli "Eurocodici", atti a dare un comune riferimento a tutti i paesi CEE.

S'intende che parte di tali argomenti costituiranno il naturale supporto di più dettagliate nozioni pratiche relative a elementi strutturali ricorrenti; e che accanto ad essi, e non secondariamente, dovranno venire illustrate le questioni relative alle esecuzioni, ai collaudi, ai modi di vincolare le strutture e di collegarne le relative parti. Questioni che ovviamente, pur essendo diverse per le costruzioni di calcestruzzo armato o di acciaio, spesso si ispirano ai medesimi criteri informatori. Per cui, mentre nelle lezioni si cercherà di mantenere la maggiore unità possibile nei confronti del problema della progettazione, nelle esercitazioni verranno esposte le indispensabili distinzioni derivanti dalle qualità dei materiali, illustrando anche le principali normative, la cui conoscenza costituisce un'imprescindibile parte della formazione professionale.

Ovviamente tali conoscenze di base, necessarie a tutte le sezioni dell'ingegneria civile, dovranno essere integrate dai successivi insegnamenti volti alle specializzazioni.

Pertanto il corso, del quale i presenti appunti sono soltanto una traccia, si articolerà nelle seguenti parti: Preliminari e fondamenti (1ª); stati limite di esercizio (2ª); stato limite ultimo per crisi di resistenza dei materiali (3ª); stato limite ultimo per instabilità dell'equilibrio (4ª): principali normative (5ª).

PARTE 1ª: PRELIMINARI E FONDAMENTI

Capitolo I

AZIONI ESTERNE RICORRENTI

1.1. OSSERVAZIONI INTRODUTTIVE

La definizione dello schema statico relativo a una struttura comporta la necessità, spesso complessa, di individuare e di valutare sia i carichi ad essa applicati, sia altre circostanze (variazioni termiche, viscosità del calcestruzzo, stati di coazione, imperfezioni costruttive, ecc.) dalle quali sensibilmente dipendono gli stati di sollecitazione e di deformazione. Indicazioni a tale riguardo sono contenute nella Circolare del Min. dei Lav. Pubbl. 24 maggio 1982 ("Istruzioni relative ai carichi..."), nonché nelle istruzioni CNR-UNI 10012-85 "Azioni sulle costruzioni", e ad esse si rimanda per quanto non si troverà esposto nel presente paragrafo. Tuttavia nelle suddette istruzioni non sono presi in considerazione casi speciali previsti da normative specifiche, quale ad es. "Criteri generali e prescrizioni tecniche per la progettazione, esecuzione e collaudo di ponti stradali" (Decr. Min. 2 agosto 1980).

Per quanto attiene ai carichi derivanti da fenomeni sismici, indicazioni generali sono riportate nella Legge n. 64 del 2 febbraio 1974: "Provvedimenti per le costruzioni con particolari prescrizioni per le zone sismiche"; mentre prescrizioni specifiche sono contenute nel decreto ministeriale del 24 gennaio 1986, relativo a "Norme tecniche per le costruzioni in zone sismiche".

In relazione alla durata della loro applicazione, le azioni si distinguono in permanenti e accidentali; queste ultime, che possono essere "rare", "frequenti", "semipermanenti", sono applicate alle strutture con distribuzione e intensità variabili nel tempo, e per la loro determinazione è necessario fare riferimento a indagini di natura statisti-

ca e a valutazioni suggerite da criteri probabilistici.

Generalmente i carichi si intendono applicati in modo statico, cioè si trascurano gli effetti conseguenti alla loro velocità di accrescimento; talvolta il regime dinamico, di complessa traduzione analitica, viene messo in conto incrementando l'entità dei carichi statici (è il caso, ad esempio, dei ponti stradali e ferroviari); in particolari circostanze (quali azioni sismiche, costruzioni snelle investite dal vento) non è lecito prescindere da un'analisi accurata che tenga conto degli effetti dinamici, soprattutto quando intervengano problemi relativi alla stabilità, o siano da temere fenomeni di risonanza.

Nei paragrafi seguenti verrà dato un breve cenno ai criteri informatori e alle indicazioni principali contenuti nelle istruzioni precedentemente citate ([1.1]); è da notare che tali istruzioni, sulla base di criteri convenzionali, distinguono in alcuni casi (ad es. nelle Norme relative alle strutture di acciaio) le azioni agenti sulle strutture in principali e complementari, sottintendendo una graduatoria di importanza che non può avere carattere generale.

La distinzione tra condizione di carico 1ª (concomitanza di applicazione delle azioni principali) e condizione di

([1.1.]) Le unità di misura che verranno in seguito adottate sono quelle solite. A tale proposito ricordiamo che i Newton (N), unità di misura delle forze, equivale a circa 0,102 Kgf.

di carico 2ª (concomitanza di applicazione delle azioni principali e complementari) appare più rispondente alle necessità di variare i coefficienti di sicurezza in relazione alla probabilità che si verifichi per la struttura la più gravosa delle condizioni di carico possibili.

1.2. CARICHI SUI SOLAI

I carichi sui solai sono da imputare ai pesi propri dei materiali costituenti gli orizzontamenti di piano e ai sovraccarichi ad essi applicati.

La distribuzione e l'entità dei carichi permanenti, scelta la tipologia di esecuzione e definite le caratteristiche geometriche, possono essere valutate conoscendo i pesi specifici $[F/L^3]$ dei materiali da costruzione ([1.2]); a titolo di esempio si elencano i pesi specifici di alcuni materiali di impiego frequente:

Materiale	γ (kg/m³)	(KN/m³)
- Calcestruzzo ordinario (non armato)	2.400	~24
- " " (armato)	2.500	~25
- Calcestruzzo alleggerito	1200÷2000	~12÷20
- Mattoni pieni comuni	1.800	~18
- Mattoni forati	1.100	~11
- Legno	600-1000	~6÷10
- Acciaio	7.850	~78,5

I carichi accidentali, o carichi di esercizio, vengono fissati in relazione alla destinazione dell'edificio: per i locali di abitazione si può assumere un sovraccarico di 200 kg/m² (2 KN/m²); per i locali pubblici suscettibili di grande affollamento si sale a 500 kg/m²; mentre per balconi e scale il sovraccarico varia da 400 a 500 kg/m², a seconda che si tratti di edifici di civile abitazione o aperti al pubblico.

I valori citati e i rimanenti riportati nelle istruzioni sono da intendere come valori minimi, quindi non esimono il progettista dall'assumere valori maggiori in seguito a un'analisi accurata dei carichi in gioco, particolarmente per edifici industriali, o comunque per edifici destinati a sopportare carichi eccezionali.

Nel calcolo delle fondazioni e delle strutture verticali portanti di edifici con più di 3 piani, per i quali non sia probabile la concomitanza dei carichi accidentali massimi a tutti i piani, è consentita una riduzione progressiva dei carichi stessi.

1.3. AZIONI DELLA NEVE

E' fissato un valore minimo del carico per m² di proiezione orizzontale della costruzione, pari a 900 N/m² per le regioni settentrionali e centrali sul versante adriatico (zona I) e 600 N/m² per le rimanenti regioni (zona II). Il carico minimo va incrementato, per altitudini h maggiori di 300 m, della quantità $\Delta p = 1,5\ (h - 300)$ N/m², con h espresso in metri. S'intende che possono esistere particolari condizioni locali di clima, di esposizione, di conformazione delle coperture per cui sia necessario considerare valori superiori a quelli menzionati e distribuzioni di carico non uniformi (fig. 1.1).

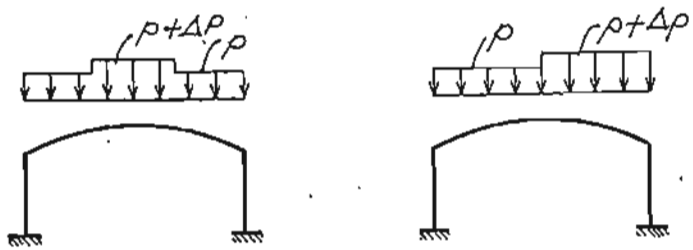


fig. 1.1

Nelle coperture con inclinazioni ≥60° sull'orizzontale, il carico della neve può essere trascurato, purchè il materiale non abbia particolare rugosità; per inclinazioni comprese tra 20° e 60°, se non sono presenti ritegni contro lo scivolamento, è ammessa una riduzione di 2,5% per ogni grado d'inclinazione. Si deve tener conto di possibili formazioni di sacche di neve in corrispondenza dei compluvi; la neve e il ghiaccio possono ostacolare il libero scarico delle acque piovane.

(1.2) I carichi conseguenti ad alcuni elementi costruttivi (ad es. i tramezzi), la cui distribuzione può essere variata nel tempo, si assumono spesso distribuiti uniformemente, con intensità fissata in relazione al prevedibile peso complessivo di tali elementi (a titolo indicativo, 700÷500 N/m²).

1.4. AZIONI DEL VENTO

a) La complessa natura dell'azione del vento può essere schematizzata con un'azione a carattere persistente, assimilata ad un carico statico, accompagnata da fluttuazioni di più elevata frequenza; da queste derivano sollecitazioni dinamiche, che debbono essere considerate per strutture molto deformabili.

Il vento, supposto spirante in direzione orizzontale, provoca pressioni e depressioni (queste ultime verranno considerate negative) a seconda delle inclinazioni delle superfici investite.

L'intensità delle azioni esercitate, supposte in genere uniformi, viene riferita alla pressione cinetica p_c, definita come la pressione ideale che si sviluppa su di una superficie piana, immersa in un fluido le cui particelle si muovono con velocità costante in direzione normale alla superficie stessa.

Nel caso dell'aria, avente densità media $\rho = \gamma/g \cong 0,125$ kg sec²/m⁴, si ottiene

$$p_c = \frac{\rho v^2}{2} = \sim \frac{v^2}{16} \quad . \quad (1.3)$$

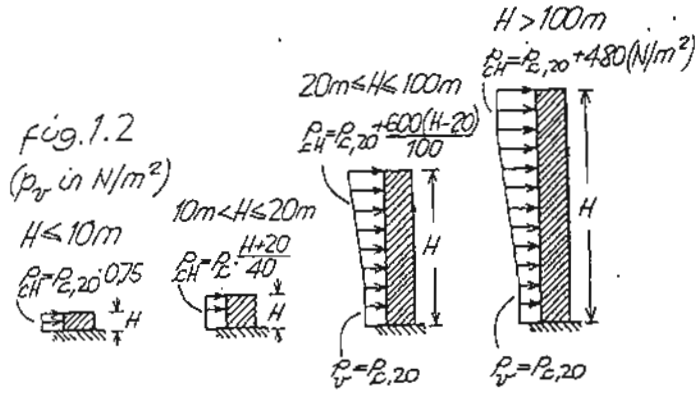
Le citate Istruzioni distinguono 4 zone, con diversi valori della pressione cinetica a 20 m di altezza dal suolo

($p_{c,20}$ = 600÷1200 N/m²), in cui sono incluse le località del territorio italiano, a seconda della regione di appartenenza, della vicinanza alla costa e dell'altitudine sul

(1.3) Se v è espressa in m/sec, p_c risulta espressa in kg/m². Su vette e lungo alcune coste sono state misurate, in fase di raffica, velocità fino a 70 m/sec (=250 km/h; p_c = 310 kg/m²); nell'entroterra difficilmente si sono superate punte superiori a 50 m/s (= 180 km/h; p_c = 160 kg/m²).

livello del mare. Ad esempio per l'Emilia $p_{c,20}$ passa dagli 800 N/m² delle fasce costiere e dell'entroterra con altidudine compresa tra i 300 e gli 800 m s.l.m., ai 600 N/m² delle zone con altitudine inferiore a 300 m, e ai 1000 e 12000 N/m² rispettivamente per le zone con altitudine superiore agli 800 m.

L'altezza H dell'edificio può influenzare sensibilmente la pressione (p_{cH}). Per tenere conto di ciò il valore della pressione cinetica di riferimento ($p_{c,20}$) viene diminuito del 25% e mantenuto uniforme per costruzioni di altezza inferiore a 10 m; corretto con il coefficiente (H + 20)/40 e adottato costante quando l'altezza sia compresa tra 10 e 20 m; per altezze superiori, la pressione cinetica si incrementa linearmente con l'altezza fino a raggiungere il valore massimo, che rimane successivamente invariato, a una quota di 100 m.



A parità di pressione cinetica, le pressioni effettive possono essere notevolmente diverse in relazione alla caratteristiche geometriche, all'orientazione, alle eventuali aperture delle superficie degli elementi investiti dal vento (permeabilità della sup.).

La pressione effettiva viene valutata mediante la relazione:

$$p_v = c\, p_{cH}$$

dove c è un coefficiente adimensionale, denominato coefficiente di forma (1.4); e viene indicato c_e o c_i, se è necessario per distinguere pressione esterna o interna.

b) Il coefficiente c_e per la valutazione della pressione esterna, nel caso di edufici a pianta rettangolare con coperture piane, a falde inclinate e curve, è variabile con l'angolo α che la superficie investita dal vento forma con l'orizzontale:

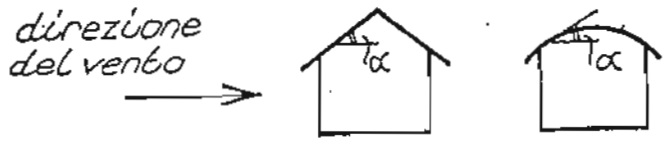


fig.1.3

(1.4) La pressione del vento, riferita a superficie di area maggiore di 15 m², è assunta indipendentemente dall'ampiezza della superficie stessa, contrariamente a quanto dimostrato da esperienze ormai classiche, secondo cui la pressione diminuisce con l'aumentare della superficie.

per $\alpha \geq 60°$ $\quad c_e = 0,8$

" $20° < \alpha < 60°$ $\quad c_e = 0,03\,\alpha - 1$ (con α in gradi)

" $0° \leq \alpha \leq 20°$ $\quad c_e = -0,4$

Per superficie sottovento $c_e = -0,4$, indipendentemente dal valore di α.

Per costruzioni non stagne si introduce un coefficiente $c_i = \pm 0,2$ per la valutazione della pressione interna, scegliendo il segno che provoca l'effetto più gravoso.

Valori diversi del coefficiente di esposizione e forma si utilizzano in presenza di aperture, in relazione alla loro ampiezza e disposizione.

Le Istruzioni riportano indicazioni per quanto riguarda il valore del coefficiente c da adottarsi anche nel caso di coperture multiple, di tettoie e pensiline isolate, di travi ad anima piena e reticolari.

Per torri e pali a traliccio viene definito il valore dell'azione d'insieme S,

$$S = 2,8\, p_{cH} A_p \quad ,$$

dove A_p rappresenta l'area della superficie della parte piena della struttura; se gli elementi tubolari hanno sezione circolare, il coefficiente c si assume pari a 2,4 ([1.5]).

Anche per corpi sferici e corpi cilindrici le Istruzioni italiane fanno riferimento all'azione d'insieme; nel secondo caso essa è funzione del rapporto $d\sqrt{p_c}$, essendo d il diametro del cilindro (per diametri elevati, si ha c = 0,7).

Si deve precisare che le indicazioni fornite valgono per la stima delle azioni d'insieme esercitate dal vento, mentre non si possono escludere pressioni locali più elevate; in particolare, quando la superficie investita dal vento abbia area inferiore a 15 m², o ci siano zone di discontinuità nella forma esterna, si introduce un coefficiente c = ± 1,6; per i cilindri le pressioni locali vengono assegnate tramite diagramma, e dipendono dalla scabrezza della superficie (le depressioni sono molto maggiori per superfici lisce).

c) Gli effetti dinamici del vento possono essere dovuti alle raffiche; ma le oscillazioni longitudinali (nel piano del vento) risultano raramente molto temibili, poiché le frequenze delle raffiche hanno in genere cadenza irregolare.

Pericoloso può essere invece il fenomeno delle vibrazioni trasversali forzate, indotte (pur con vento privo di raffiche) a seguito della formazione di vortici (detti "di von Kárman") innescati dalla turbolenza del moto dei filetti fluidi (in lingua inglese "buffeting"); la nascita di oscillazioni trasversali autoeccitate ("flutter" e "galloping") è invece più complessa, legata a fenomeni di interazione delle sollecitazioni e a particolari forme degli elementi investiti dal vento. Tali fenomeni di vibrazioni trasversali fortunatamente interessano soltanto strutture molto deformabili; possono essere importanti per i ponti sospesi di grande luce, come purtroppo hanno dimostrato non lontane esperienze (ad es. il crollo del ponte di Tacoma, nel 1940)([1.6]).

Per talune strutture (edifici alti, ciminiere, antenne, tralicci) secondo le norme la pressione dinamica può essere calcolata con la formula:

$$p_D = p_{cH}\, \rho (1 + \xi \tau) \quad ,$$

([1.5]) Nel caso di vento spirante secondo la bisettrice dell'angolo formato da due pareti, l'azione d'insieme è pari a 1,15 volte quella precedentemente definita.

ove ξ (coefficiente dinamico) viene fornito in funzione del periodo proprio T_1 del primo modo di vibrare della struttura (v. cap. II, par. 2.8); τ (coeff. di pulsazione), in funzione della quota $\underline{h}$ in cui si valuta p_D; Θ (coefficiente riduttivo), in funzione dell'altezza complessiva della struttura.

Le norme forniscono anche espressioni per la valutazione approssimata di T_1, per il quale però la presenza di parti non tipicamente strutturali può essere influente.

Nelle costruzioni a sezione circolare o poligonale si può verificare una situazione di risonanza (cap. II, par. 2.8) per i predetti vortici di v. Kàrman, conseguenti a una velocità "critica" del vento, in genere superiore ai 25 m/s; sono date indicazioni su tale stato di cose.

1.5. SPINTA DELLE TERRE ([1.7])

a) Col termine "terra", o "terreno", si intende un materiale ottenuto dall'aggregazione di particelle di varie dimensioni, di diversa composizione chimica e mineralogica.

In relazione alle dimensioni dei grani, si distinguono terre a grana grossa (ghiaie e sabbie) e fine (limi e argille)([1.8]): in generale le prime sono prive di coesione, e sono pertanto dette "incoerenti", cioè incapaci di resistere a trazione; mentre per le seconde la coesione tra le particelle costituenti è sensibile, però si indebolisce a seguito di impregnazione con acqua e di rimaneggiamento.

Le caratteristiche di resistenza e di deformazione del terreno sono strettamente legate alla presenza di acqua e aria nei vuoti intergranulari; nel seguito si farà riferimento alle due situazioni limite di materiale secco e di materiale completamente saturo.

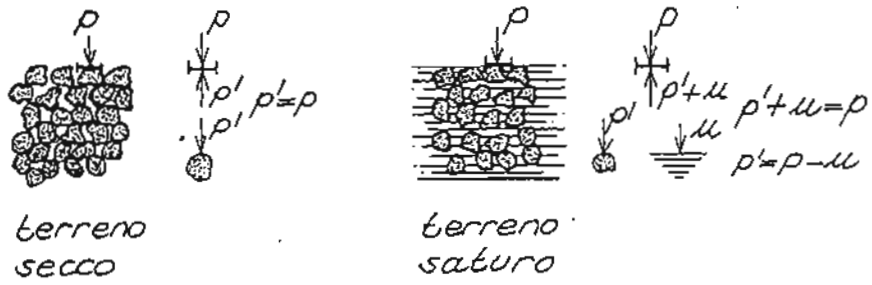
Nella prima situazione limite la pressione esterna p applicata ad una porzione piccolissima di materiale si esercita interamente sui granuli; nella seconda essa è equilibrata in parte anche dalla pressione interstiziale (o pressione neutra) u assorbita dall'acqua. Si chiama pressione effettiva, e si indica con il simbolo p', la parte di pressione esterna che le particelle di terreno si trasmettono reciprocamente.

Il fenomeno della crisi di resistenza del terreno, con riferimento al caso dei terreni incoerenti, fu affrontato da Coulomb (1776) assimilando a un puro problema di slittamento il complesso fenomeno della rottura; ossia

([1.6]) Vari ponti, e lo stesso "Golden Gate", sono stati sofferenti.

([1.7]) I problemi connessi con la valutazione della spinta delle terre vengono accennati, nelle loro linee essenziali, in quanto imprescindibili dal quadro delle azioni esterne che si esercitano sulle strutture. Per una trattazione più ampia e approfondita del tema si rimanda ai corsi specialistici della materia.

([1.8]) Il diametro limite delle particelle che distinguono le sabbie dai limi è convenzionalmente fissato in 0,02 mm



riconoscendo possibile l'equilibrio per ogni elemento di terra solamente se su ogni sua superficie la direzione della tensione risultante fosse contenuta all'interno del cono d'attrito, definito dall'angolo di apertura φ, detto anche angolo di attrito interno del materiale ([1.9]).

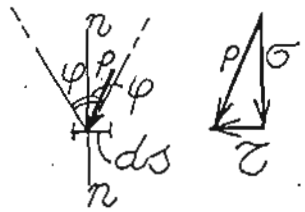


fig. 1.5

Il criterio di rottura proposto da Coulomb, che poneva un limite alla tensione tangenziale massima secondo la relazione:

$$\tau = \sigma \, tg\varphi$$

[sostanzialmente in accordo con quello proposto circa un secolo più tardi da Mohr (1882) con l'introduzione del concetto di curva intrinseca], appare tuttoggi attendibile se, seguendo l'indicazione di Terzaghi, si intende la tensione normale σ come tensione efficace, ossia:

$$\tau = (p-u)tg\varphi = p' \, tg\varphi \quad .$$

Definendo la coesione come la tensione tangenziale limite in assenza di tensioni normali, la relazione precedente può essere estesa al caso di terreno coesivo:

$$\tau = c + p' \, tg\varphi \quad . \quad (1.10)$$

Si riporta di seguito, a titolo indicativo, l'ordine di grandezza di alcuni valori caratteristici dell'angolo di attrito e della coesione per i principali tipi di terreno:

(1.9) L'angolo di attrito interno può essere misurato dall'inclinazione delle facce di un cumulo di terreno secco, lasciato libero di scoscendere.

(1.10) E' da notare che i parametri di resistenza del terreno c e φ (a quest'ultimo è opportuno attribuire un significato più ampio di quello insito nella denominazione di angoli di attrito) non sono in realtà costanti fisiche del materiale, ma dipendono dallo stato di tensione e di deformazione che si sviluppa nel terreno. In particolare per i terreni argillosi saturi, quando è impedita l'espulsione dell'acqua interstiziale (condizione non drenata), l'angolo di attrito interno è praticamente nullo e il valore della coesione diventa pari alla metà della resistenza a compressione con espansione laterale libera.

	φ (in gradi)	c (kg/cm²)
ghiaia	35° - 45°	0
sabbia	25° - 35°	0
argilla compatta	20° - 25°	0,5 - 1
argilla tenera	5° - 20°	0 - 0,5

b) Si consideri un terreno incoerente e omogeneo, indefinito in ogni direzione, delimitato da un piano orizzontale e sottoposto alla pressione verticale e uniforme p .

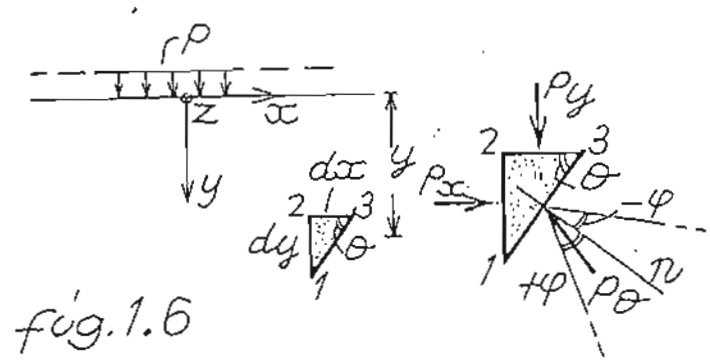


fig. 1.6

Il sistema di deformazione è piano e lo stato di tensione, costante lungo l'asse z, può essere analizzato con riferimento ad una striscia di terreno di spessore unitario.

Sulla faccia superiore di un elemento di sezione triangolare posto alla profondità y è applicata la pressione

$$p_y = \gamma y + p \quad , \quad (1.11)$$

essendo γ il peso specifico del terreno.

Sulla faccia verticale 1-2 deve agire necessariamente una pressione orizzontale p_x, perchè altrimenti la pressione p_θ sulla faccia 1-3, per ragioni di equilibrio, dovrebbe risultare verticale, e allora la sua inclinazione rispetto alla normale n sarebbe maggiore dell'angolo di attrito φ per le infinite sezioni 1-3 formanti con la faccia superiore del prismetto un angolo $\theta > \varphi$. E per assicurare l'equilibrio dell'elemento, cioè per fare in modo che la risultante delle tensioni applicate alla faccia 1-3 sia inclinata non più di φ rispetto alla normale n, occorre che la p_x non sia inferiore ad un valore limite ovviamente variabile con θ. Analogo ragionamento può esser fatto nei confronti dell'altra situazione di equilibrio estremo, in cui la direzione della p_θ attinge l'inclinazione $-\varphi$.

E' chiaro allora che in condizioni di equilibrio il valore della pressione p_x dovrà essere compreso entro i valori limite superiore e inferiore per effetto dei quali la tensione risultante sulla faccia 1-3 (su cui può innescarsi la rottura) forma un angolo rispettivamente pari a $\pm\varphi$ rispetto alla normale n.

Al valore limite inferiore della pressione p_x si dà il nome di "spinta attiva" (p_a), intendendo con questo termine che tale azione è quella minima trasmessa da un eventuale sostegno al terreno (e viceversa) prima che si verifichi lo scoscendimento; mentre il valore limite superiore è detto "spinta passiva" (p_p), essendo questa la reazione

(1.11) L'espressione di p_y si ottiene imponendo la condizione di equilibrio alla traslazione verticale della colonna di terreno sovrastante la fascia 2-3 e tenendo presente che, per ragioni di simmetria, le direzioni x e y sono direzioni principali.

massima che il terreno può fornire ad un corpo premuto su di esso.

In relazione a tali definizioni, indicati con

$$\lambda_a = tg^2(45° - \frac{\varphi}{2}) \quad , \quad \lambda_p = tg^2(45 + \frac{\varphi}{2}) = \frac{1}{\lambda_a} \quad ,$$

rispettivamente i coefficienti di spinta attiva e passiva, si ha che le pressioni orizzontali nel terreno sono definite, in condizioni di equilibrio limite, dalle relazioni:

$$p_a = p_y \lambda_a \quad , \quad p_p = p_y \lambda_p \quad . \quad (1.12)$$

Nella tabella seguente si riportano i valori dei coefficienti di spinta attiva e passiva corrispondenti ad alcuni valori dell'angolo di attrito interno:

	20°	25°	30°	35°	40°
λ_a	0,491	0,406	0,333	0,272	0,216
λ_p	2,040	2,465	3,000	3,690	4,599

E' da notare che, se la pressione orizzontale sulla faccia 1-2 del prismetto esaminato risulta inferiore alla spinta attiva, lo scoscendimento (rottura) del terreno si manifesta secondo una direzione inclinata di un angolo pari a $(45° - \frac{\varphi}{2})$ rispetto alla verticale; se la pressione orizzontale risulta invece superiore alla spinta passiva, la crisi avviene secondo una direzione di rottura inclinata di un angolo pari a $(45° + \frac{\varphi}{2})$.

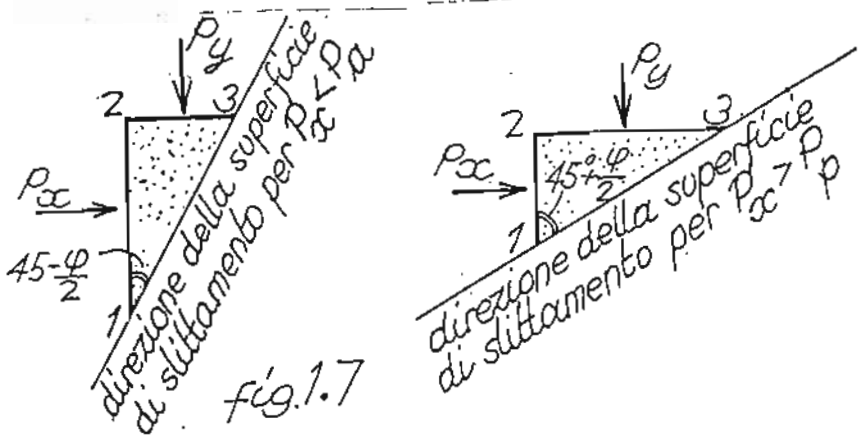


fig. 1.7

Nel caso che il terreno sia dotato di coesione, si può dimostrare che le spinte attiva e passiva valgono rispettivamente ("piano di campagna" orizzontale):

$$p_a = p_y \lambda_a - 2\,c\,\sqrt{\lambda_a} \quad , \qquad p_p = p_y \lambda_p + 2\,c\,\sqrt{\lambda_p} \quad .$$

c) Quando l'azione di sostentamento al terreno è fornita da un manufatto, nella valutazione della spinta attiva può essere opportuno mettere in conto l'influenza dell'attrito tra terreno e parete; tale influenza, legata al valore dell'angolo di attrito δ tra i due materiali a contatto, gioca nel senso di ridurre la spinta valutata in accordo con le relazioni precedenti ([1.13]).

([1.12]) In generale a p_y deve essere attribuito il significato di pressione verticale efficace.

([1.13]) La riduzione della spinta attiva è comunque relativamente modesta; più sensibile è invece l'influenza dell'angolo di attrito δ sull'entità della spinta passiva.

In ogni caso, essendo non sempre lecito considerare il terreno omogeneo, agli effetti della valutazione delle spinte attive e passiva occorre tener conto delle eventuali variazioni di angolo di attrito interno e di peso specifico ([1.14]).

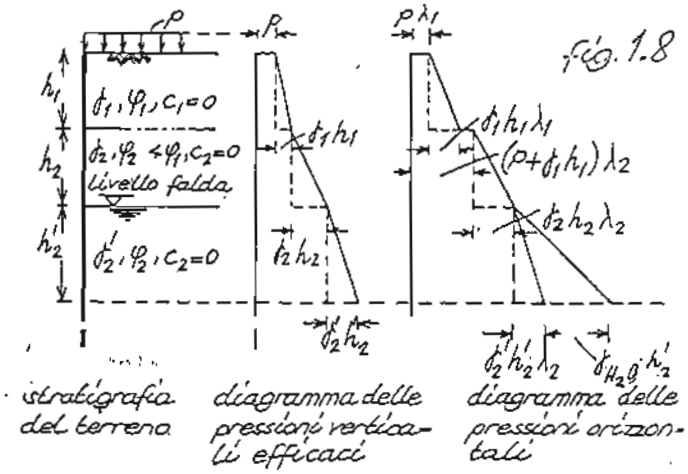


fig. 1.8

Le espressioni della spinta attiva e passiva precedentemente riportate sono state dedotte da Coulomb (1776) e da Rankine (1857): la valutazione della spinta globale fornita da un ammasso di terra si può ottenere, per configurazioni geometriche relativamente semplici, sommando i contributi dei vari elementi infinitesimi di materiale, analoghi a quello del prismetto di cui si sono considerate le condizioni di equilibrio limite superiore ed inferiore. In molti casi però le difficoltà analitiche risultano insormontabili, e risulta più semplice l'analisi della stabilità del terreno in termini di azioni globali, seguendo il metodo proposto da Coulomb, ottenendo risultati che in vari casi ricorrenti coincidono con quelli ottenibili secondo Rankine.

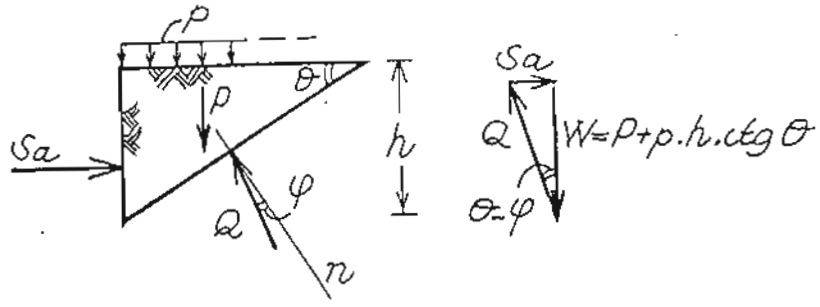


fig. 1.9

Nella valutazione di Coulomb l'azione globale S_a viene calcolata ammettendo una superficie di scivolamento piana, e imponendo la condizione che, per la sezione più critica ottenuta al variare dell'angolo θ, si realizzi la condi-

(1.14) A questo scopo è da notare che, indicanto con γ_s il peso specifico del materiale costituente i granuli, in relazione all'umidità presente, il peso specifico del terreno varia da un minimo di $\gamma_{t,0} = \gamma_s(1-n)$ nel caso di terreno secco, ad un massimo di $\gamma_{t,1} = \gamma_s(1-n) + \gamma_a n$ nel caso di terreno saturo, dove si è indicato con γ_a il peso specifico dell'acqua e con n la porosità del terreno (n = volume dei vuoti/volume totale); con il simbolo γ'_t s'intende invece il peso specifico del terreno immerso, pari a $(\gamma_s - \gamma_a)(1 - n)$.

zione di equilibrio limite inferiore (con ragionamento analogo si può ottenere l'azione globale S_p); risulta (con le ipotesi fatte, e in particolare supponendo il piano superiore orizzontale)

$$S_a = \tfrac{1}{2}\gamma h^2 \lambda_a + p\, h\, \lambda_a \quad ,$$

cioè la stessa espressione deducibile con la teoria di Rankine (coincidenza, questa, per altro legata alla particolare configurazione del problema e priva, come si è detto, di carattere generale).

La soluzione di Coulomb appare concettualmente lacunosa, perchè non mette in conto la condizione di equilibrio alla rotazione del sistema, e perchè ipotizza una superficie di rottura arbitraria; tuttavia è ancora oggi largamente utilizzata in virtù della sua semplicità di applicazione e della buona prova data da molte strutture di sostegno progettate basandosi su di essa.

d) Un esempio delle numerose applicazioni delle teorie esposte si trova, relativamente allo studio della stabilità

delle paratie con tirante, nella ricerca della profondità minima di infissione (1.15).

Schematizzando l'effetto del tirante con un appoggio (cedevole) A, la condizione di equilibrio alla rotazione si può imporre annullando il momento delle spinte rispetto al punto A, e si ottiene, con evidenti approssimazioni:

$$\frac{\gamma i_{min}^2 \lambda_p}{2}\left(h + \frac{2}{3} i_{min}\right) = \gamma \frac{(h+i_{min})^3}{3}\lambda_a + p_s \lambda_a (h+i_{min})^2/2 \qquad (1.16)$$

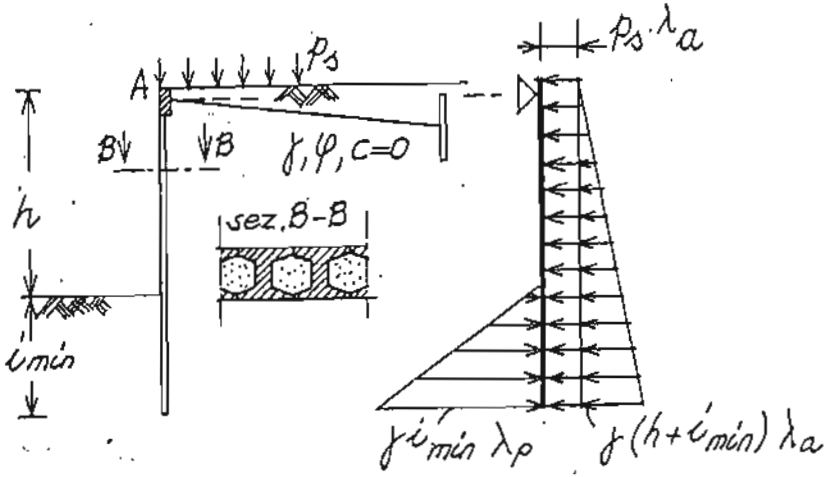


fig. 1.10

Che la profondità i_{min} determinata mediante la relazione precedente sia effettivamente la minima necessaria appare evidente se si pensa che, avendo messo in gioco la massima capacità di reazione del terreno, per profondità di infissione minori non è possibile assicurare l'equilibrio del sistema; prudenzialmente la profondità i effettiva viene poi assunta spesso pari a $-i_{min}\sqrt{2}$.

(1.15) Con il termine paratia s'intende un complesso di elementi, detti palancole, di varia forma, realizzati in acciaio o calcestruzzo, atti a costituire una parete continua di contenimento del terreno.

(1.16) Si fa implicitamente riferimento ad una porzione di paratia di profondità unitaria.

1.6. AZIONI SULLE PARETI DEI SILI

I sili sono strutture destinate al contenimento di materiali, costituite da più celle aventi in genere altezza sensibilmente maggiore delle dimensioni medie della sezione (di solito a forma circolare o rettangolare), realizzate in acciaio o calcestruzzo.

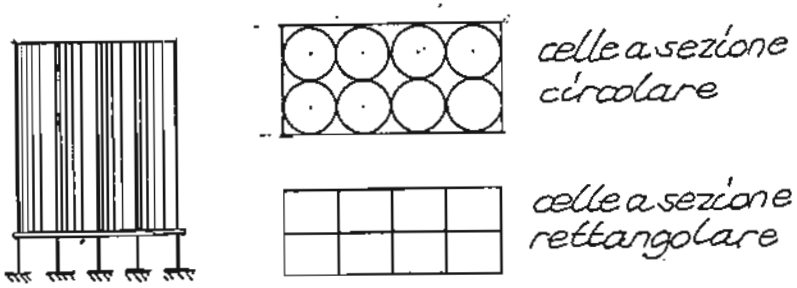
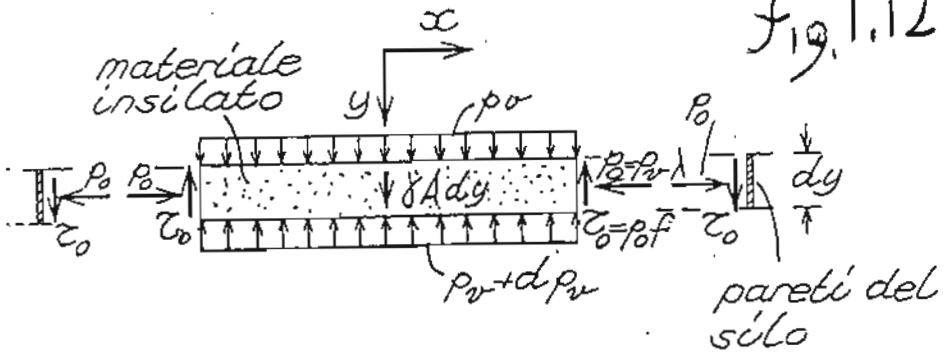


fig. 1.11

L'analisi delle pressioni trasmesse alle pareti dal materiale insilato viene sviluppata sulla scorta della teoria formulata da Janssen e Koenen (1895-96), strettamente correlata a quella della spinta delle terre.

fig. 1.12



Assimilando il comportamento del materiale contenuto a quello di un terreno incoerente, per l'equilibrio è necessario che le pareti forniscano un'azione di sostentamento, che si esplica tramite una pressione orizzontale $p_* = \lambda\, p_v$ e l'associata tensione tangenziale $\tau_* = f\, p_*$ (con si è indicato il coefficiente di spinta e con f il coefficiente di attrito tra materiale e parete).

La soluzione dell'equazione differenziale esprimente l'equibilibrio di una porzione infinitesima di materiale fornisce la legge di variazione della pressione verticale:

$$p_v = \frac{\gamma A}{\lambda f l}\left(1 - e^{-y/y_*}\right) \qquad (y_* = A/\lambda f l)$$

essendo A l'area, l la lunghezza del perimetro della sezione.

All'aumentare della profondità (l'origine del sistema di riferimento è stata posta in sommità del silo), la pressione tende asintoticamente al valore

$$\bar{p}_v = \frac{\gamma A}{\lambda f l} = \gamma\, y_* \quad ;$$

e per tramite delle relazioni precedentemente riportate resta ugualmente definito l'andamento della pressione orizzontale p_* e della tensione tangenziale τ_*.

Per semplicità di calcolo, nel progetto delle pareti spesso si fa riferimento ad un diagramma di pressione

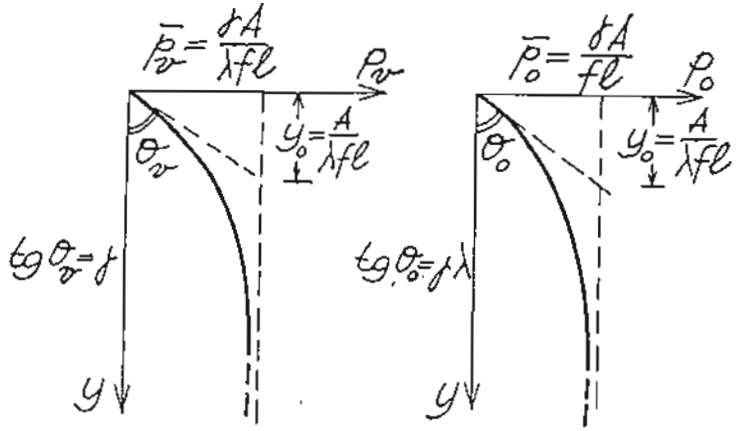


fig. 1.13

p_v a forma di bilatera, definito dalla tangente all'origine e dalla retta corrispondente al valore asintotico della pressione; le due rette si intersecano alla profondità y_0, detta profondità caratteristica. A volte, per tener conto delle incertezze sul valore dei parametri, le pressioni vengono incrementate del 20-30% rispetto ai valori teorici.

E' importante notare che le pareti del silo, oltre a ricevere una pressione radiale p_v, sono soggette ad uno sforzo normale N_y progressivamente crescente, pari alla differenza tra il peso del materiale insilato e l'azione di sostentamento fornita dal metariale sottostante:

$$N_y = \gamma A y - p_v A \quad .$$

L'effetto dello sforzo normale N_y è particolarmente importante per le pareti d'acciaio che, in relazione all'esilità dello spessore, sono soggette al pericolo di instabilità; tale pericolo è accentuato, specialmente per i materiali pulverulenti, dalla possibile formazione di "ponti" da parte dello stesso materiale.

In ordine alla determinazione dei parametri f e λ, è da notare che essi dipendono dalla natura del materiale insilato(granulare o pulverulento), e dalla scabrezza delle pareti; inoltre variano a seconda che sia in atto o meno lo scarico del materiale (regime statico o dinamico).

Per i materiali granulari in condizione di regime dinamico (di solito più gravoso per la pressione orizzontale), mediamente si può assumere:

$$f \cong 0{,}32 \quad , \quad \lambda \cong 0{,}90 \quad .$$

Invece in regime statico: $f \cong 0{,}41$, $\lambda \cong 0{,}45$.

Non dissimili, seppure insidiati da maggiori incertezze, risultano i valori nel caso di materiale pulverulento.

Per concludere può essere opportuno accennare che per un'analisi completa dello stato di sollecitazione dei sili, occorre mettere in conto anche l'influenza dei fenomeni termici, delle azioni esterne, degli eventuali cedimenti delle fondazioni; l'indagine collegata a questi ultimi aspetti è spesso complessa, particolarmente quando il collegamento reciproco delle celle mette in gioco azioni mutue di carattere iperstatico.

1.7. AZIONI SISMICHE

a) I fenomeni sismici provocano nelle costruzioni effetti essenzialmente dinamici conseguenti alle accelerazioni manifestate dalle masse strutturali, costrette a seguire i moti alternativi orizzontali e verticali del terreno sul quale le stesse costruzioni si fondano.

Non essendo possibile, sul piano pratico, effettuare in modo rigoroso lo studio del comportamento di una struttura investita da un sisma - del quale per altro sono inevitabilmente ignote le effettive caratteristiche da mettere

in conto nel progetto -, i procedimenti di calcolo e la normativa si riportano a valutazioni approssimative, qui ricordate soltanto per alcuni loro aspetti essenziali, più che altro con l'intendimento di richiamare l'attenzione sull'importanza di tali azioni esterne che possono sollecitare le struttura in maniera assai diversa da quella conseguente agli usuali carichi.

b) Le norme disciplinano le costruzioni da realizzarsi in zone sismiche, che sono state per legge definite sul suolo nazionale e distinte in tre categorie, per la prerogativa dei terremoti di presentare una certa loro persistenza in intensità e relativi periodi di ritorno. Relativamente ai principali criteri generali di progettazione risultanti dall'apposito decreto (2 febbr. 1974) si ricorda quanto segue.

Le sollecitazioni indotte da scosse "ondulatorie" (azioni orizzontali) e sussultorie (verticali) debbono essere valutate convenzionalmente mediante analisi statica o dinamica.

Con l'analisi statica gli effetti di scosse ondulatorie sono assimilati a quelli prodotti da forze convenzionali orizzontali.

$$F_h = WCRI \quad ,$$

con

W = peso complessivo delle masse strutturali,

C (coefficiente di intensità sismica) = (S-2)/100 ,

S = grado di sismicità = 12; 9; 6 per le strutture delle 3 categorie,

R = coefficiente di risposta relativo alla direzione considerata,

I (coeff. di protez. sismica) = 1,4 per opere di primaria importanza per la protezione civile; 1,2 per opere che dan luogo a particolare rischio.

Il coefficiente C corrisponde al rapporto a/g , essendo a l'accelerazione assunta per il moto del terreno, g l'accelerazione di gravità. Conseguentemente ai predetti tre valori del grado di sismicità S, il coefficiente C (quindi a/g) assume i valori 0,1-0,07-0,04; ma tali valori non corrispondono ai sismi più violenti. Fatta eccezione per edifici e opere di sostegno del terreno (oppure opere di comportamento simile) la forza F_h deve venir considerata distribuita proporzionalmente ai singoli pesi.

Con l'analisi statica, gli effetti di scosse sussultorie sono assimilati a quelli prodotti da forze verticali (distribuite proporzionalmente ai pesi):

$$F_v = WCIm \quad ,$$

con, in generale, m = 2 .

Gli effetti globali Z_t delle scosse ondulatorie e sussultorie si calcolano con la relazione quadratica:

$$Z_t = \sqrt{Z_h^2 + Z_v^2}$$

L'analisi dinamica può essere eseguita con le tecniche dell'analisi modale, adottando per lo spettro di risposta, in termini di accelerazione: a/g = CIR .

Effettuato il calcolo delle sollecitazioni, le verifiche sismiche consistono:

- Nel controllo delle tensioni secondo il metodo delle tensioni ammissibili, quindi in regime elastico lineare, per garantire l'improbabilità di danni alle strutture e alle parti non prettamente strutturali, per effetto delle forze F_h, F_v calcolate con i coefficienti C: quindi per effetto di sismi moderati (abbastanza frequenti), considerati contemporanei agli altri effetti; però con carichi accidentali in genere ridotti (eccettuati contenitori e opere similari), e in assenza del vento.
- Nel controllo, se necessario, dell'entità delle deformazioni massime a causa di terremoti rari, quindi più violenti, in regime anche non lineare; quando non si eseguano

analisi più accurate (parte 3ª), gli spostamenti massimi possono venire valutati convenzionalmente con la relazione

$$\eta_{tot} = \eta_p + c\eta_s \quad ,$$

essendo η_s, η_p gli spostamenti elastici per sismi moderati e per le altre azioni (vento escluso); c = 6 o 4 a seconda che l'analisi sia statica oppure dinamica. Gli spostamenti così valutati non debbono compromettere il mantenimento delle connessioni, nè dar luogo a "martellamenti".

c) Le norme in merito alle fondazioni. Le strutture di fondazione debbono essere collegate tra loro da un reticolo di travi, e ogni collegamento deve essere in grado di resistere, oltre alle azioni applicate dalla struttura in elevazione, a una forza assiale di trazione o compressione, pari a un decimo del maggiore dei carichi verticali presenti alle due estremità del collegamento stesso. Tali collegamenti possono essere omessi se la struttura sovrastante può tollerare uno spostamento relativo dalle basi (distanti L) $\Delta L \geq L/1000 \geq 2$ cm .

d) Le norme in merito agli edifici. Sono fissate le distanze minime tra edifici vicini, e le altezze massime per strutture di muratura e a pannelli, in relazione alla zona sismica e alla larghezza stradale; nessuna limitazione dell'altezza per strutture intelaiate. Per edifici contigui indipendenti, la distanza tra due lembi affacciati, posti alla quota h , deve essere non inferiore a

$$d(h) = h/100 \quad .$$

Varie prescrizioni sono date per edifici di muratura. Per gli edifici intelaiati:

$$W_i = G_i \text{ (perman.)} + s\, Q_i \text{ (accid.)} \quad ,$$

con s pari a 0,33 (locali di abitazione), 0,50 (locali pubblici), 1 (contenitori).

Forza orizzontale complessiva:

$$F_h = (\Sigma W_i) C R I \beta \Phi \quad ,$$

con R (coeff. di risposta) = 1 (per $T_* \leq 0,8$ sec.) = $0,862\, T_*^{2/3}$ (per $T_* > 0,8$ sec.) ;

T_* = periodo proprio del 1° modo di vibrare (c. cap. II, par. 2.8); in via approssimativa, $T_* = 0,1 . H/\sqrt{B}$ (H, B in m; T_* in sec); per $T_* > 1,4$ sec, deve essere eseguita un'analisi dinamica;

β (coeff. di struttura) = 1,2 se vi sono telai e irrigidimenti verticali, e a questi ultimi è affidata l'intera resistenza;

Φ (coeff. di fondazione), di norma = 1; = 1,3 se le fondazioni riposano su terreni molto compressibili.

Alla quota h ;

$$F_j = F_h\, W_j h_j / (\Sigma W_i h_i)$$

Nel caso che l'edificio in pianta presenti un'eccentricità e tra il baricentro delle rigidezze e quello delle masse, si deve tener conto di e nella ripartizione delle forze orizzontali, a ciascun livello delle strutture dell'edificio. Quando D/B > 2,5 (D, B = lunghezza e larghezza della pianta rettangolare), deve essere introdotta un'eccentricità supplementare.

e) Le norme in merito alle opere di sostegno dei terreni. Oltre alla spinta statica F , deve essere considerato un incremento di spinta $\Delta F = F_s - F$, essendo F_s la spinta praticata dalla falda di terreno retrostante in con-

dizioni sismiche; ΔF deve essere applicato a una distanza dalla base del muro pari a 2/3 dell'altezza del muro stesso.

Oltre a ΔF, devvono essere considerate le forze d'inerzia orizzontali relative al peso del muro.

Tali verifiche non sono necessarie per muri con altezza inferiore a 3 m.

1.8. STATI COATIVI

a) Variazioni termiche

L'entità delle variazioni termiche rispetto alla presumibile temperatura ambiente media all'atto dell'esecuzione dell'opera, in mancanza di dati più precisi, può essere convenzionalmente assunta pari a ± 15°C per costruzioni di calcestruzzo direttamente esposte alle azioni atmosferiche, e ± 10°C per opere non direttamente esposte. Per le strutture di acciaio, ± 25°C.

In pratica è opportuno distinguere tra strutture metalliche, sensibili anche a variazioni termiche rapide (ad es. di poche ore), quindi alle volte più violente di quelle citate, e strutture di calcestruzzo, generalmente dotate di elevata inerzia termica, quindi influenzate principalmente da effetti termici stagionali.

Può essere opportuno ricordare che, pur essendo assai diverse le conducibilità, il coefficiente di dilatazione termica α_t dei due materiali è praticamente uguale ($\approx 1.10^{-5}$ per il calcestruzzo; $\approx 1,2.10^{-5}$ per l'acciaio; $\varepsilon_t = \alpha_t \Delta t$).

In generale la variazione di temperatura può essere considerata uniforme per tutti gli elementi di una costruzione; e quando esistano per una stessa membratura variazioni tra estradosso e intradosso, in generale si ammette una distribuzione variabile linearmente.

Per le strutture iperstatiche, le variazioni termiche possono provocare notevoli stati di sollecitazione, dei quali si può considerare, come prova, la facilità, ad es., con la quale si verificano rotture improvvise nei pezzi di acciaio temprati. Tali stati di sollecitazione dipendono - considerando il comportamento elastico lineare - dal modulo di elasticità E. Ma tale comportamento è poco attendibile quando, per le costruzioni di c.a., le evoluzioni siano lente e attingano elevati stati di tensione: e ciò a causa dei fenomeni viscosi e plastici, entrambi tali da restituire, in misura più o meno grande, le mobilità che la sovrabbondanza dei vincoli tende a contrastare, conferendo ai materiali l'attitudine a fluire spontaneamente (parte 4ª); mobilità che per il c.a. è facilitata anche dalla probabile fessurazione del calcestruzzo teso.

Purtroppo calcoli attendibili, specialmente per il c.a., sono problematici, e spesso si preferisce interpretare il complesso andamento $\sigma - \varepsilon$ con un fittizio diagramma lineare, dotato di un convenzionale valore E del modulo. Così, per il c.a., si adotta spesso un modulo secante apparente di circa 25.000÷30.000 N/mm² per stati tensionali di breve durata e non molto intensi, e di - 10.000 N/mm² per azioni di lunga durata: ma è illusoria la pretesa di riuscire a interpretare elasticamente un fenomeno che nella sua essenza non è elastico; per cui i risultati dei calcoli debbono essere accolti con prudenza, non stupendosi se vengono alle volte smentiti dalla realtà.

b) Ritiro del calcestruzzo

Per "ritiro" si intende la contrazione di volume che le masse di conglomerato cementizio manifestano nel processo di presa e di indurimento all'aria (si ha invece una dilatazione per calcestruzzi immersi permanentemente in acqua).

E' un fenomeno complesso che, con andamento asintotico nel tempo, presenta in genere un'evoluzione assai lenta

e che dipende da molte circostanze, in particolare dalla benefica umidità dell'atmosfera, dall'età e dalla composizione dei getti, dalla percentuale di armatura e dal rapporto A_c/u (essendo A_c l'area ed $\underline{u}$ il perimetro della sezione di una membratura).

Relativamente alle costruzioni di c.a., quando non si ricorra ad additivi speciali, per la dilatazione ε_r conseguente al ritiro si possono assumere in genere indicativamente i valori: 40.10^{-5} (conglomerato non armato); 30.10^{-5} (armat. $\leq 1\%$); 20.10^{-5} (armat. $> 1\%$). Tali valori si riferiscono ad una stagionatura dei getti in ambienti di normale umidità.

Come per le variazioni termiche, il ritiro provoca stati di sollecitazione per le strutture iperstatiche, per cui (essendo $\varepsilon_r \doteq -30.10^{-5}$; $\varepsilon_{term.} = 10^{-5}\,\Delta t$) i suoi effetti vengono spesso assimilati a quelli provocati da $\Delta t = -30°$; ma i due fenomeni sono di natura assai dissimile, e il ritiro provoca stati di tensione anche nelle membrature di c.a. vincolate isostaticamente.

c) Viscosità dei materiali

Le deformazioni dei materiali non si manifestano completamente all'atto dell'applicazione di uno stato tensionale; ma di esse una parte avviene istantaneamente, e una residua parte (detta viscosa) differita nel tempo.

Il fenomeno viscoso può essere assai variabile, nell'entità e nell'evoluzione, per materiali diversi; notevole, ad esempio, per il calcestruzzo e per i terreni.

Per le strutture dà luogo a deformazioni variabili nel tempo, e può provocare anche stati di sollecitazione variabili per le strutture iperstatiche: per cui un'operazione di aggregazione di strutture nate indipendentemente tra loro può dar luogo a sollecitazioni di natura staticamente indeterminata, pur non variando i carichi; oppure possono nel tempo indebolirsi i collegamenti strutturali.

Per il calcestruzzo compresso lo scorrimento viscoso può essere considerato, entro moderati limiti della tensione, con discreta approssimazione proporzionale alla tensione (viscosità lineare); in genere la dilatazione viscosa finale si aggira sul valore $\varepsilon_{visc.} \doteq 2\,\varepsilon_{ist.}$, e risente, tra l'altro, dell'umidità dell'atmosfera, nonchè del rapporto A_c/u (v. p.to b).

1.9. BIBLIOGRAFIA

G. OBERTI, Corso di Tecnica delle costruzioni, ed. Levrotto, Torino, 1971, cap. II.

K. BEYER, Statik im Eisenbeton, Springer, Berlin, 1933, vol. I, cap. VI.

E.F. RADOGNA, Tecnica delle costruzioni (costruzioni composte acciaio-calcestruzzo-c.a.-c.a.p.) ed ESA.

P. POZZATI, Teoria e tecnica delle strutture, ed. UTET, Torino, 1972, vol. I, parte I; con C. CECCOLI, vol. II, parte II, cap. I.

Circolare Min. LL.PP. n. 22631 del 24.5.82: "Istruzioni relative ai carichi, ai sovraccarichi e ai criteri generali per la verifica di sicurezza delle costruzioni".

Capitolo II

GENERALITA' SUL CALCOLO DELLE STRUTTURE SOGGETTE A FLESSIONE COMPOSTA (M, N). PROPRIETA' UTILI PER LA PROGETTAZIONE ([2.1])

2.1. STRUTTURE SOGGETTE A M, N: CONFRONTO TRA STATI TENSIONALI

A titolo esplicativo, ma senza togliere nulla a conclusioni generali, facciamo riferimento alla struttura della fig. 2.1, soggetta a flessione composta (M, N) in regime elastico. Se si indicano con $\sigma(N)$, $\bar{\sigma}(M)$ (sui lembi) le tensioni dovute a N, M in una generica sezione S rettangolare di lati $\underline{h}$, $\underline{b}$ ($J = bh^3/12$, $A = bh$), si ha (prescindendo dai segni):

$$\sigma(N) = P \operatorname{sen} \Theta / A \ , \qquad \bar{\sigma}(M) = Pxh/2J \ ;$$

per cui il rapporto dei valori assoluti delle tensioni vale:

$$\rho_S(\sigma) = \sigma(N)/\bar{\sigma}(M) = \frac{\operatorname{sen} \Theta}{6} \frac{h}{x} \qquad (2.1)$$

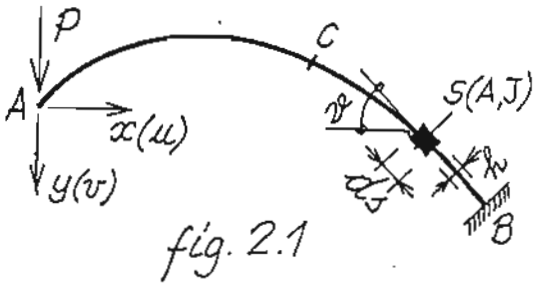


fig. 2.1

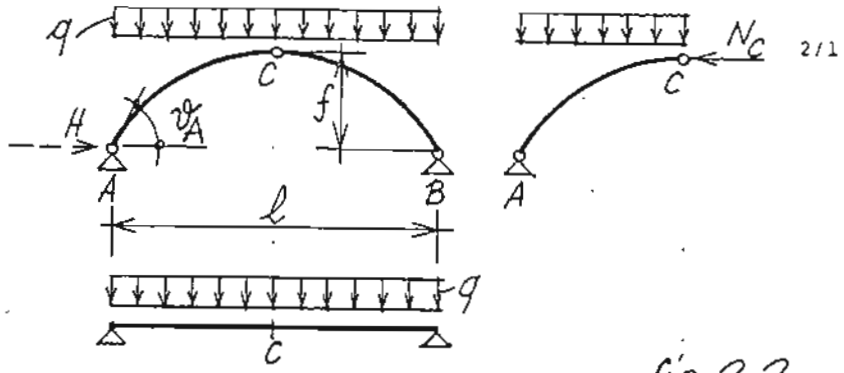
Quindi in una struttura soggetta a flessione composta, i valori assoluti delle tensioni dovute a N sono in genere piccoli rispetto a quelli massimi dovuti a M, e tanto minori quanto più la struttura è snella.

Ma tale proprietà, a prima vista banale, consente conseguenze rilevanti: infatti nella scelta di una soluzione strutturale è opportuno tener presente che, a parità delle grandezze in gioco, le strutture soggette prevalentemente a sforzo assiale sono tanto più convenienti rispetto a quelle prevalentemente inflesse quanto più sono esili. E la convenienza è da considerare in relazione al fatto che, essendo le tensioni basse, possono essere fortemente ridotte le sezioni e diminuiti i pesi propri; però con la necessità evidente di dovere non perdere di vista il problema della stabilità dell'equilibrio quando lo sforzo assiale sia di compressione.

Di conseguenza è chiara la ragione per cui l'impiego dell'arco (per il quale lo sforzo assiale ha in genere un ruolo importante) ha consentito il superamento di grandi luci libere rispetto all'impiego della trave. Infatti a

titolo di esempio, consideriamo l'arco parabolico a 3 cerniere della fig. 2.2, soggetto a un carico uniforme sull'orizzontale; la curva delle pressioni è centrata, ossia ogni sezione è soggetta a puro sforzo assiale, il cui valore non si modifica fortemente nelle varie sezioni ($N_A = N_C/\cos \Theta_A$); essendo la spinta $H = ql^2/8f$, risulta (sezione rettangolare) $H_C = H = ql^2/8f$, $\sigma_C(N) = ql^2/(8fbh)$.

(2.1.) Relativamente a questo cap. si veda in particolare, anche per vari esempi, P. POZZATI, Teoria e tecnica delle strutture, UTET, vol. I, capo. VI,..., X.



2/1

fig. 2.2

Invece per la trave di uguale lunghezza e carico si ha

$$\bar{\sigma}_C(M) = \frac{ql^2}{8} \frac{6}{bh^2} \ ,$$

quindi

$$\rho_C(\sigma) = \sigma_C(N)/\bar{\sigma}_C(M) = \frac{h}{6f} \qquad (2.2)$$

ove, in genere, $f \gg h$.

Per ragioni analoghe è stato possibile, ad esempio, realizzare ponti sospesi o strallati di grandissima luce, appendendo le travate a cavi tesi ancorati a piloni; o

realizzare vaste coperture con esilissime volte a doppia curvatura. Ed è per la predetta proprietà che conviene, nella precompressione, adottare cavi eccentrici rispetto all'asse della relativa trave.

2.2. STRUTTURE SOGGETTE A M, N: CONFRONTO FRA STATI DEFORMATIVI

a) Non soltanto per le tensioni, ma anche e soprattutto per le deformazioni è istruttivo il confronto degli effetti conseguenti a N e a M.

Consideriamo al solito un riferimento concreto: per la struttura della fig. 2.3 si voglia calcolare, in condizioni elastiche, un movimento o di una generica sezione C, considerando deformabile un solo tronco elementare ds e tenendo separati gli effetti delle sollecitazioni M, N che le azioni esterne suscitano nello stesso tronco in corrispondenza della sez. S.

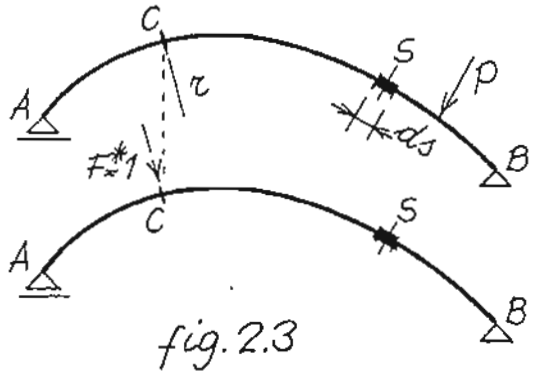


fig. 2.3

Il calcolo del predetto movimento può essere effettuato facilmente utilizzando, con le ben note tecniche, il principio dei lavori vituali; ossia applicando in C la forza ausiliaria F* = 1 correlativa ad o (ad es. una forza 1 diretta secondo r se si vuole lo spostamento in tale direzione). Per cui, se si indicano con $\bar{\sigma}_S(M)$, $\sigma_S(N)$ le tensioni in S

conseguenti sui lembi a M (uguali ed opposte in segno, se la sezione è simmetrica) e a N, per effetto delle azioni esterne, e con $\bar{\sigma}'_S(M)$, $\sigma'_S(N)$ quelle dovute in S all'azione ausiliaria, è facile rendersi conto che il rapporto dei contributi forniti da M e N può essere scritto nella forma (prescindendo dai segni):

$$\rho_C(o) = do_C(N)/do_C(M) = \frac{\sigma_C(N)}{\bar{\sigma}_C(M)} \psi , \qquad [2.3]$$

ove ψ, dipendendo dal rapporto $\sigma'_S(N)/\bar{\sigma}'_S(M)$ è tanto minore di 1 quanto più la struttura è snella (par. 2.1). A maggior ragione, $\rho_C(o)$ è in genere molto piccolo; ma resterebbe piccolo anche se $\sigma_C(N)$ e $\bar{\sigma}_C(M)$ avessero valori assoluti paragonabili, quindi la [2.3] sta a testimoniare la maggiore sensibilità che la deformazione della struttura presenta alle sezioni flessionali piuttosto che a quelle assiali.

La relazione [2.3] è riferita alla deformabilità di un solo tronco ds ; passando alla deformazione complessiva, si ha che relativamente al rapporto

$$\rho_C(o) = o_C(N)/o_C(M)$$

l'eventuale esistenza di parti della struttura soggette a momenti flettenti di segno opposto attenua la prevalenza della deformazione flessionale, per cui si può concludere che: in una struttura soggetta a flessione composta la deformazione per effetto di N è in genere largamente inferiore a quella dovuta a M; tanto minore quanto più la struttura è snella e quanto meno si intreccia la curva delle pressioni. Quindi frequentemente la deformazione per N può essere trascurata in confronto a quella dovuta a M.

Esempio 2.1

Per la struttura della fig. 2.4, costituita da 2 travi uguali, il rapporto degli spostamenti v_C (secondo y) per N e M vale (sezione rettangolare):

$$\rho_C = h^2/4l^2$$

(ρ_C = 1/400 per h/l = 1/10

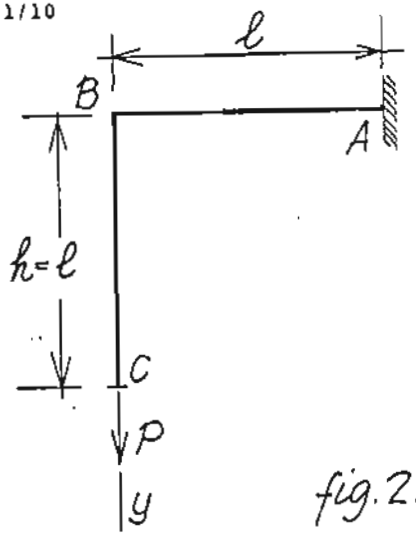


fig. 2.4

b) Per quanto è stato osservato, è chiaro che, relativamente a una struttura snella iperstatica soggetta a M, N, la scrittura delle condizioni di congruenza può essere frequentemente molto semplificata omettendo le deformazioni per effetto degli sforzi assiali (e, per ragioni analoghe anche degli sforzi taglianti).

Esempio 2.2.

Per la struttura della fig. 2.5 calcolare la reazione del ritto BD, avendo le travi uguali lunghezza e uguale sezione rettangolare .

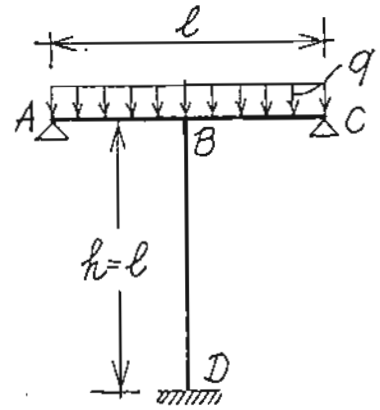


fig. 2.5

a) Omettendo la deformazione del ritto per sforzo normale:

$$X_B = \frac{5}{8}\, ql = 0{,}625\ ql \quad .$$

b) Mettendo in conto la predetta deformazione:

$$X_B = \frac{5}{8}\, ql \frac{1}{1+4\ h^2/l^2} \quad ;$$

per l/h = 10, X_B = 0,600 ql .

2.3. STRUTTURE IPERSTATICHE: QUANDO LE AZIONI STATICAMENTE INDETERMINATE DIVENTANO INESSENZIALI

Vi sono strutture che per particolari condizioni di carico sono sede solo di sforzi normali. Esempi correnti sono l'arco a tre cerniere, ad asse parabolico, uniformemente caricato; l'arco a tre cerniere, ad asse circolare, con carico radiale; le travi reticolari con le aste collegate in corrispondenza dei nodi mediante cerniere e sottoposte a carichi concentrati solo in corrispondenza degli

stessi nodi. Diremo nel seguito che tali strutture ammettono una configurazione isostatica soggetta a solo sforzo normale.

Per una struttura iperstatica l'intervento di vincoli esterni o interni in aggiunta a quelli già esistenti in una sua configurazione isostatica soggetta a solo sforzo assiale può mettere in gioco un regime di sollecitazioni flessionali che ovviamente si sovrappone a quello dei soli sforzi normali. E' il caso, ad esempio, dell'arco a due cerniere - quindi con un grado di iperstaticità - ad asse parabolico della fig. 2.6.

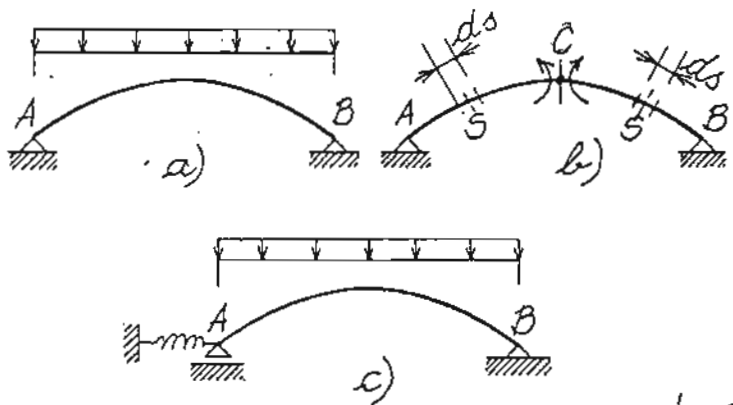


fig. 2.6

Assunta come configurazione principale (isostatica) l'arco a tre cerniere, l'unica incognita staticamente indeterminata è il momento flettente X, che resta determinata scrivendo la condizione di congruenza delle rotazioni delle due sezioni in chiave che si affacciano sulla cerniera (rotazione relativa dovuta ai carichi uguali e contraria a quella conseguente alle coppie). Se si considerano elastici soltanto due tronchi simmetrici ds, e se si indicano con N_q, M_X, N_X le collecitazioni nei due tronchi per effetto dei carichi e dell'azione X, la rotazione $d\varphi_C(N_q)$ dovuta ai carichi e conseguenza di un regime di solo sforzo normale,

mentre quella conseguente a $X[d\varphi_C(M_X,N_X)]$ discende da un regime misto di flessione e sforzo normale; ma per quanto è stato osservato nel precedente paragrafo, possiamo dire che, rispetto agli effetti dei momenti flettenti M_X, quelli di N_X sono trascurabili e pertanto l'equazione di congruenza può assumere la forma semplificata:

$$d\varphi_C(N_q) = d\varphi_C(M_X) \quad , \qquad [2.4]$$

intendendo con ciò che nel valutare la rotazione conseguente a X si trascurano lecitamente gli effetti degli sforzi normali N_X.

Ricordando ora la [2.3] e le sucessive considerazioni possiamo porre il rapporto fra le rotazioni totali φ_C conseguenti a M_X e N_q nella forma (prescindendo dai segni):

$$d\varphi_C(N_q)/d\varphi_C(M_X) = \frac{\sigma(N_q)}{\bar{\sigma}(M_X)}\,\psi, \qquad [2.5]$$

essendo ψ un numero in genere molto minore di uno per le strutture snelle. Ma per la [2.4] il rapporto dei movimenti totali deve essere uguale a 1, e di conseguenza dalla [2.5] discende, essendo $\psi \ll 1$,

$$\frac{\sigma(N_q)}{\bar{\sigma}(M_X)} \gg 1 \qquad [2.6]$$

La relazione [2.6] vale per le tensioni nella generica sezione S, considerando deformabili i soli tronchi ds; in sostanza afferma che, essendo la deformabilità di una struttura molto più sensibile alle azioni interne flessionali che a quelle assiali, bastano tensioni $\bar{\sigma}(M_X)$ piccole rispetto a $\sigma(N_q)$ per assicurare la congruenza in C. Ed è impportante rilevare che l'equazione di congruenza [2.4] presuppone che i vincoli A, B siano rigidi, o almeno abbiano cedevolezza trascurabile nei confronti della stessa equazione.

Passando a considerare la deformabilità dell'intera struttura, l'esistenza di diagrammi di momenti intrecciati per effetto delle M_X, attenua la sensibilità della deformazione alle azioni flessionali. Pertanto si può concludere che: se una struttura iperstatica, soggetta a flessione composta, ammette una configurazione isostatica soggetta a solo sforzo normale N_q per effetto dei carichi, le tensioni dovute alle incognite staticamente indeterminate (che inducano momenti flettenti) sono in generale piccole rispetto a quelle indotte dagli sforzi N_q; e ciò è tanto più vero quanto più la struttura è snella e i vincoli sono rigidi, e quanto meno si intreccia la curva delle pressioni relativa alla soluzione esatta.

E' questa una proprietà rilevante che in vari casi consente di evitare, almeno nelle progettazioni di massima, la parte più complessa dei calcoli, e di conoscere facilmente l'ordine di grandezza delle sollecitazioni, che è quello che veramente importa.

Conviene notare infine che le osservazioni esposte nel presente capitolo hanno riguardato il regime elastico, ma in realtà hanno generale interesse qualitativo.

Esempio 2.3

Si considera la semplice struttura reticolare della fig. 2.7.

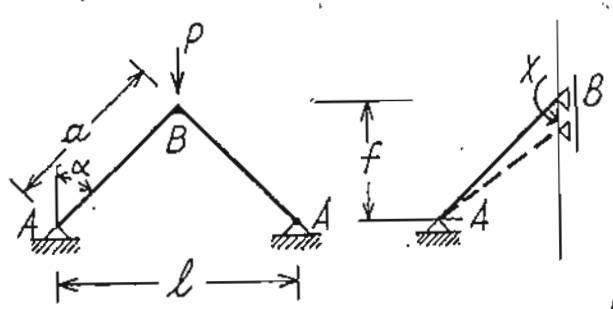


fig. 2.7

Se in B vi fosse una cerniera le aste sarebbero semplicemente compresse con $N = \frac{P}{2\cos\alpha}$. Per determinare l'incognita X impostiamo la congruenza delle rotazioni nella forma (2.4):

$$\frac{Na}{EA}\frac{tg\alpha}{a} = \frac{Xa}{3EJ} \quad ; \qquad X = N\,3\,tg\,\alpha\,\frac{\rho^2}{a} \quad ;$$

e le tensioni $\sigma(N_q)$ e $\bar{\sigma}(M_X)$ valgono, pensando la sezione rettangolare:

$$\sigma(N_q) = \frac{N}{A}\,, \qquad \bar{\sigma}(M_X) = \frac{X}{W} = \frac{N}{A}\frac{3}{2}\,tg\,\alpha\,\frac{h}{a} \quad .$$

Posto, ad esempio, $f/l = 0{,}5$ e $h/l = \frac{1}{20}$, risulta $\frac{\bar{\sigma}(M_X)}{\sigma(N_q)} \cong 0{,}106$: quindi le tensioni flessionali sono dell'al massimo, del 10% di quelle conseguenti ad N .

2.4. STATI COATTIVI: LORO CORRELAZIONE CON LA RIGIDITA' DELLE STRUTTURE

a) Una struttura o una sua parte si trova in stato di coazione se è sede di tensioni anche in assenza di forze esterne applicate.

Quindi è chiaro che l'insieme delle reazioni vincolari di una struttura in coazione deve risultare un sistema di forze equilibrato; e che una possibilità di rimuovere stati coattivi dipendenti dai vincoli è quella di ricorrere ad un vincolamento isostatico. Così ad esempio, l'arco a due cerniere della fig. 2.8, sottoposto ad una variazione termica uniforme Δt, riceve dalle cerniere due spinte H, uguali e contrarie, in grado di annullare la variazione della corda $\overline{AB}$ che avrebbe se l'arco fosse libero di dilatarsi. Se l'arco fosse a tre cerniere, quindi isostatico, le reazioni dei vincoli sarebbero nulle e i movimenti termici non sarebbero contrastati.

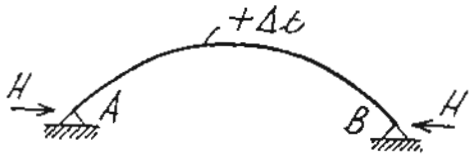


fig. 2.8

Gli esempi si potrebbero moltiplicare, ma è evidente fin d'ora che le possibilità di stati coattivi, e talvolta anche le relative intensità delle tensioni, si accrescono in genere con l'aumentare del grado di indeterminazione statica della struttura: tornando all'esempio della fig. 2.8 appare chiaro infatti che un cedimento relativo verticale della cerniera B rispetto alla A non induce sollecitazioni nella struttura; il contrario avviene se l'arco ha le estremità incastrate.

Le cause di fenomeni coattivi sono molteplici e può valere la pena di richiamare le più rilevanti.

Oltre alle già ricordate variazioni termiche, sulle quali torneremo per alcuni utili osservazioni, possono essere causa di stati coattivi i cedimenti dei vincoli, frequentemente imputabili a movimenti delle fondazioni; i difetti di montaggio, che obbligano ad unire, forzandole, parti staccate delle strutture; il ritiro del calcestruzzo, che, come è noto, durante la maturazione manifesta la tendenza a diminuire il suo volume e per le strutture metalliche il ritiro dei cordoni di saldatura. Vi sono casi in cui le coazioni vengono artatamente introdotte per migliorare lo stato di sollecitazione della struttura: un esempio ricorrente, come vedremo, è offerto dalla precompressione delle strutture di calcestruzzo.

Si è accennato, in quanto precede, alle strutture nel loro insieme, ma è evidente che stati coattivi possono sussistere anche nella compagine dei materiali stessi che lo compongono. Nei profilati metallici, ottenuti per lami-

nazione, o nei pezzi di acciaio formati per fusione, le autotensioni si generano essenzialmente a causa della diversa velocità di raffreddamento delle varie parti, di modo che le une si oppongono ai movimenti relativi delle altre; ed è evidente che quanto più elevati sono i gradienti termici, tanto più elevate sono le intensità delle tensioni. Nelle masse di calcestruzzo le autotensioni possono essere conseguenti ai ritiri differenziali (sia termici, sia idraulici) di getti eseguiti in tempi diversi, o al contrasto opposto dalle armature metalliche al libero contrarsi del calcestruzzo.

Nel punto seguente si svilupperanno alcune semplici osservazioni in merito all'influenza che può avere la rigidità di una struttura sugli stati coattivi, nell'ipotesi, al solito, che il materiale abbia un comportamento elastico e lineare.

b) Si consideri l'arco della fig. 2.9a, soggetto alla variazione termina uniforme Δt. Svincolata in A la struttura e indicando con R la reazione staticamente indeterminata, si ha, per il principio dei lavori virtuali (per $R = 1$, $M' = 1.d$, $N' = 1.\cos\varphi$):

$$\int N' \left(\frac{N' R\, ds}{EA} - \alpha_t \Delta t\, ds\right) + \int \frac{M'^2 R}{EJ}\, ds = 0 \quad .$$

Trascurando, come in genere è lecito, il lavoro dello sforzo normale, la reazione R può essere scritta nella forma (supponendo la sezione costante ed esprimendo la freccia f in funzione di l):

$$R \doteq c.EJ\, \alpha_t \frac{\Delta t}{l^2} \quad ,$$

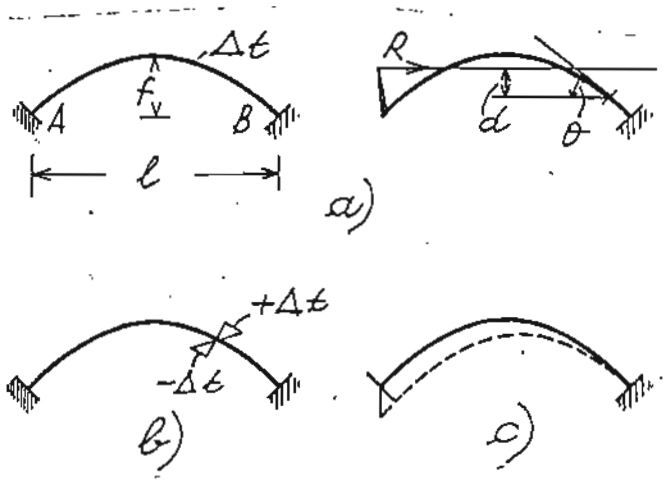


fig. 2.9

dove c è un coefficiente dipendente dall'andamento dell'asse e delle condizioni di vincolo in A e in B .

In definitiva, quindi, la massima tensione flessione risulta, supposta la sezione simmetrica e di altezza h :

$$|\sigma_{max}| = \frac{|M_{max}|h}{2J} + \frac{|N|}{A} = \frac{R\, d_{max} h}{2J} = c_1 E \alpha_t \Delta t \frac{h}{l} \qquad [2.7]$$

Quindi le tensioni si accrescono, a parità d'altre condizioni, con il diminuire della snellezza della struttura.

Nel caso rappresentato nella fig. 2.9b, si ottiene invece, ragionando come nel caso precedente:

$$|\sigma_{max}| = c_2 E \alpha_t \Delta t \; ; \qquad [2.8]$$

quindi le tensioni sono indipendenti dalle dimensioni della sezione.

Infine per un cendimento δ impresso risulta (fig. 2.9c):

$$|\sigma_{max}| = c_3 E \frac{\delta \cdot h}{l^2} \quad . \qquad [2.9]$$

Gli esempi dianzi trattati mostrano come le punte massime di tensione conseguenti ad uno stato coattivo sono in genere aggravate, o quanto meno non diminuite, da un aumento delle dimensioni delle sezioni. S'intende che osservazione analoga vale anche relativamente al grado di indeterminazione statica della struttura.

2.5. LE DUE VIE GENERALI DEL CALCOLO ELASTICO: METODO DELLA CONGRUENZA E METODO DELL'EQUILIBRIO

2.5.1. Richiami sul metodo della congruenza

Data una struttura n volte staticamente indeterminata, si pensi di eliminare n vincoli (interni o esterni) sostituendoli con le rispettive azioni Z_i incognite. In tale struttura così svincolata, che in seguito chiameremo "struttura principale", i soli carichi esterni (o, più in generale, le azioni esterne) inducono movimenti e deformazioni che non corrispondono a quelli effettivi della struttura originaria perchè si sono soppressi vincoli che in realtà esistono. Le azioni Z_i staticamente indeterminate hanno il compito di ripristinare la congruenza, ossia il rispetto delle condizioni effettive di vincolo.

Si indichi con l'indice k il generico vincolo soppresso e in corrispondenza del quale si intende scrivere la condizione di congruenza. Sia inoltre: $\bar{\zeta}_k$ il movimento consentito dalla soppressione del vincolo k e conseguente ai carichi; ζ'_{ki} l'analogo movimento indotto in k dall'azione Z_i unitaria.

E' evidente allora che la generica equazione di congruenza prende la forma, nell'ipotesi al solito di elasticità lineare e di movimenti piccolissimi:

$$\bar{\zeta}_k + \sum_i \zeta'_{ki} z_i = 0 \ . \qquad [2.10]$$

Le equazioni [2.10] sono tante quanti sono i vincoli n soppressi e corrispondentemente si hanno n incognite z. Ammessa l'unicità della soluzione del problema dell'equilibrio elastico, il sistema di n equazioni in n incognite risulta determinato.

Tale modo di procedere viene chiamato "metodo delle forze" o "della congruenza" e quest'ultima denominazione pone in risalto la circostanza che il procedimento di risoluzione di una struttura staticamente indeterminata si concreta scrivendo condizioni di congruenza: quindi fra le infinite soluzioni equilibrate ottenute assegnando arbitrari valori alle z_i ne esiste una soltanto che rispetta anche la congruenza.

La scelta della struttura principale è arbitraria, ma conviene in genere operare in modo tale da rendere per quanto possibile semplice la deduzione dei coefficienti ζ'_{ki} delle incognite e dei termini noti. Inoltre, per questioni note di algebra lineare, si potrebbe dimostrare che la precisione numerica dei risultati si migliora se la struttura principale viene scelta in modo tale da rendere i coefficienti ζ'_{kk} della diagonale principale dominanti rispetto a quelli della stessa riga.

Infine è opportuno scegliere una struttura principale il cui regime statico conseguente alle sole azioni esterne non sia troppo dissimile da quello effettivo. Ciò che è chiaro appena si rifletta che conviene rendere poco influente la parte del calcolo relativa alla determinazione delle incognite staticamente indeterminate, che è in genere la più laboriosa e quindi più suscettibile di errori. Ne consegue che, se per una data sezione una certa sollecitazione S deriva dalla differenza del valore S_0 (conseguente ai carichi per la configurazione isostatica) e del valore

S_i (relativo alle incognite staticamente indeterminate), conviene che S_0 sia il più possibile prossima a S, e quindi S_i il più possibile piccola rispetto a S_0; perchè, se così non è, in detta differenza le prime cifre significative si eliminano, e il risultato dipende dalle ultime, che sono le più incerte.

2.5.2. Il metodo dell'equilibrio

Si tratta di un procedimento duale al precedente: vengono assunte come incognite le deformazioni e per determinarle si scrivono condizioni di equilibrio. Più precisamente si considerano incogniti i movimenti (spostamenti e rotazioni) dei nodi ζ, e si intende che così operando si rispetta automaticamente la congruenza delle sezioni delle varie membrature che convergono in ciascun nodo (ad esempio, se con ζ_k si indica la rotazione di un nodo, e quindi di tutte le sezioni collegate ad esso, implicitamente si pone la condizione che siano uguali tra loro le rotazioni di tutte dette sezioni). Per ogni nodo si devono scrivere le relative condizioni di equilibrio: ad esempio, in genere 3 se si tratta di strutture piane caricate nel piano, dovendo rispettare due condizioni di equilibrio alla traslazione e una alla rotazione; e invece in genere 6 per strutture spaziali.

Si consideri allora il generico nodo k e per questo una generica condizione di equilibrio. Indicando con $\bar{z}_k$ l'azione complessiva trasmessa dai carichi (valutata considerando i movimenti dei nodi tutti nulli) e con z'_{ki} l'azione applicata in k a seguito del movimento i posto uguale ad uno (con tutti gli altri movimenti nulli), le equazioni di equilibrio assumono la forma:

$$\bar{z}_k + \sum_i z'_{ki} \zeta_i = 0 \quad , \qquad [2.11]$$

dove, ovviamente, la sommatoria è estesa a tutti i nodi e a tutte le componenti di movimento di ciascun nodo.

In definitiva le equazioni del tipo [2.11] sono in numero pari al numero delle incognite ζ_i e il problema risulta determinato. Trovati i movimenti dei nodi, si può poi risalire facilmente alle sollecitazioni delle varie membrature.

Il procedimento dianzi esposto consente dunque di trovare, fra infinite configurazioni congruenti della struttura, l'unica anche equilibrata.

Come vedremo in seguito, la scrittura delle equazioni [2.11] è frequentemente più facile di quella delle equazioni [2.10]; inoltre nelle strutture a gran numero di iperstatiche, quindi fortemente vincolate sia internamente sia esternamente, il ricorso al "metodo dell'equilibrio" consente spesso una drastica riduzione del numero delle incognite. Ad esempio, nel caso della fig. 2.10, se di volesse operare con il "metodo della congruenza", sarebbero in gioco 12 incognite staticamente indeterminate; invece con il metodo dell'equilibrio, trascurando come in genere è lecito le deformazioni per sforzo normale, si avrebbe incogniti i due spostamenti orizzontali delle travate e sei rotazioni.

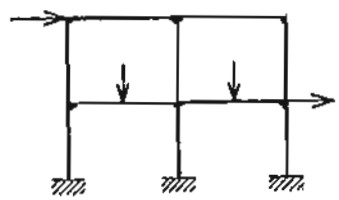


fig. 2.10

Esempio 2.4

L'esempio seguente, proposto da Navier, chiarisce la portata del "metodo dell'equilibrio".

Il complesso delle n aste della fig. 2.11 è simmetrico e simmetricamente carica

to: quindi l'unico movimento incognito del nodo è l'abbassamento v_k; corrispondentemente occorre scrivere la condizione di equilibrio alla traslazione verticale del nodo stesso. A tale scopo esprimiamo, in funzione di v_k, lo sforzo che l'asta generica i trasmette al nodo; è immediato riconoscere che per lo spostamento verticale unitario si ha $N_i' = EA_i/l_i \; l \; \text{sen}\, \alpha_i$, e di conseguenza l'equazione di equilibrio prende la forma ($\Sigma Y = 0$):

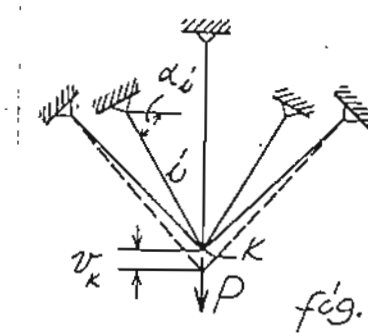


fig. 2.11

$$P - v_k \sum_i N_i' \, \text{sen}\, \alpha_i = 0 \quad ,$$

equazione che consente di determinare v_k. Noto v_k, lo sforzo normale nell'asta i vale $N_i = (EA_i/l_i) v_k \, \text{sen}\, \alpha_i$. Qualunque sia il numero della aste, l'incognita è sempre v_k; operando invece con il "metodo della congruenza", si avrebbero n incognite.

2.6. IL METODO DEI VINCOLI AUSILIARI, LA PROPRIETA' DELLA EQUIVALENZA

a) Si consideri una generica struttura comunque caricata (fig. 2.12a) e si pensi di introdurre dei vincoli ausiliari in grado di impedire tutti i movimenti dei nodi (fig. 12.12b). A tale scopo occorre applicare ai nodi morsetti in grado di impedire le rotazioni; alle travate e ai piedritti invece, pensando trascurabili le deformazioni assiali, appoggi scorevoli, come è indicato a titolo d'esempio nella stessa figura. E' evidente che nella struttura così

vincolata le varie membrature si comportano come perfettamente incastrate alle estremità, ed è in genere semplice calcolare le reazioni di incastro perfetto (coppie, reazioni verticali e orizzontali); s'intende che ciascun vincolo ausiliario fornisce la somma delle reazioni delle varie membrature che concorrono nel nodo in esame.

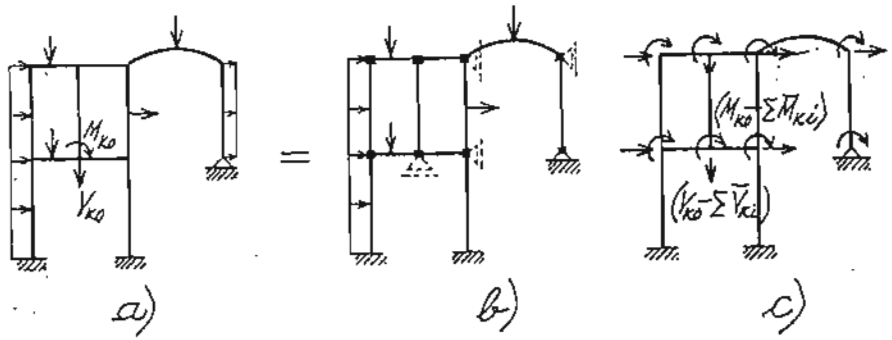


fig. 2.12

In tale fase la struttura è congruente, essendo la continuità delle membrature assicurata; ma si trova in condizioni di equilibrio immaginario, a causa della presenza delle reazioni dei vincoli ausiliari. Quindi, poichè tali reazioni in realtà non esistono, se ci si vuole ricondurre all'effettiva situazione di partenza, occorre applicarle cambiate di segno alla struttura scarica. E' evidente che sommando la situazione b alla c (Fig. 2.12), si ottiene quella effettiva di partenza.

In definitiva lo studio della struttura viene scomposto in due fasi: nella prima si considerano solo gli effetti dei carichi; mentre nella seconda la struttura si trova soggetta solo ad azioni applicate in corrispondenza dei nodi, per cui è evidente che, essendo le membrature scariche le sollecitazioni dipendono solo dai movimenti dei nodi stessi.

b) Come conseguenza immediata di quanto dianzi esposto, si ha che gli effettivi movimenti dei nodi di una struttura genericamente caricata coincidono con quelli che si hanno nella medesima struttura soggetta soltanto in corrispondenza dei nodi alle eventuali azioni esterne di nodo e alle reazioni di incastro perfetto, cambiate di segno, fornite dai vincoli ausiliari; tale osservazione è nota come "proprietà dell'equivalenza".

Vedremo in seguito varie applicazioni del metodo dei vincoli ausiliari e della proprietà dell'equivalenza; tuttavia l'esempio seguente può, fin d'ora, chiarire i vantaggi che discendono dalle semplici osservazioni riportate.

Esempio 2.5

Lo studio della struttura rappresentata nella fig. 2.13 può essere scomposto nelle due fasi a e b . Nella fase a ,

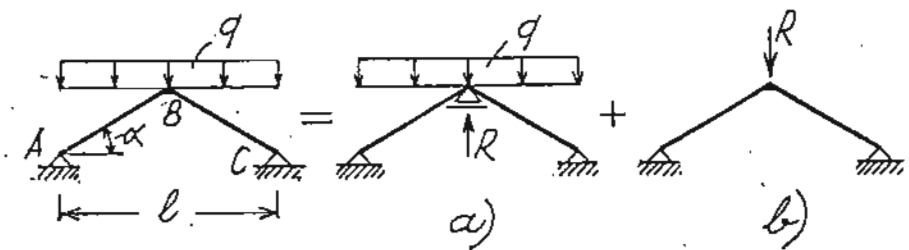


fig. 2.13

nella quale è stato introdotto l'appoggio ausiliario in B , le due travata AB e BC si comportano come perfettamente incastrate in B . Di conseguenza il numero flettente in B vale $M_{inc} = (q \cos^2\alpha) l_{AB}^2/8 = q(1/2)^2\, l/8 = q\, l^2/32$ e la reazione verticale del vincolo ausiliario risulta:

$$R = 2\,\frac{5}{8}\,q\,\frac{l}{2} = \frac{5}{8}\,ql \quad .$$

Nella seconda fase, ammesso che le aste siano suffi-

cientemente snelle, è lecito trascurare le azioni interne di flessione (par. 2.3) e considerare solo il regime principale di sforzi normali; per cui dalla condizione di equilibrio del nodo risulta:

$$N = \frac{R}{2 \operatorname{sen} \alpha} \quad .$$

2.7. SIMMETRIA E PARASIMMETRIA DELLE STRUTTURE

2.7.1. Strutture simmetriche soggette ad azioni simmetriche e antimetriche

Nello studio di una struttura simmetrica soggetta ad azioni generiche, scomponendo il complesso delle azioni stesse in due sistemi, l'uno simmetrico e l'altro antimetrico (fig. 2.14), si può ottenere il vantaggio di una parziale separazione delle incognite; ed è chiaro che tale operazione è lecita a condizione che sia lecito sovrapporre gli effetti.

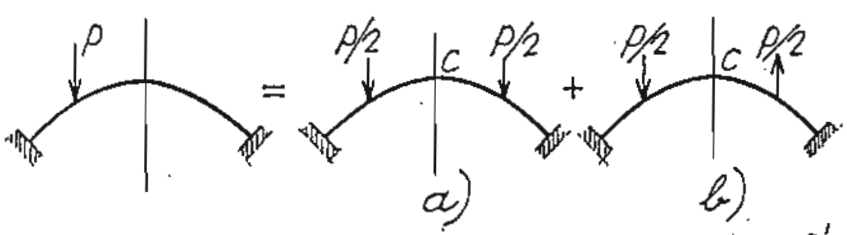


fig. 2.14

a) Consideriamo dapprima le proprietà di cui godono le strutture simmetriche caricate simmetricamente (fig. 2.14a). E' evidente, per definizione stessa di simmetria, che ogni effetto (azione interna o movimento) deve mantenere il carattere della simmetria; per cui ovviamente le eventuali azioni interne che, soddisfacendo a tale condizione, non rispettano l'equilibrio, devono essere considerate nulle. Ad esempio per l'arco della fig. 2.8 le azioni verticali A e B, se esistono, per la simmetria devono essere uguali ed equiverse; ma poichè ciò contrasta con la condizione di equilibrio alla traslazione verticale, si può concludere che le reazioni verticali sono nulle.

Relativamente ai problemi piani e a un numero dispari di campate, nelle sezioni giacenti sull'asse di simmetria lo sforzo di taglio, la rotazione e lo spostamento in direzione normale all'asse stesso devono essere nulli (fig. 2.15); e se in C è applicato un carico P, per evidenti ragioni di equilibrio e simmetria questo si ripartisce in parti uguali sulle sue semistrutture.

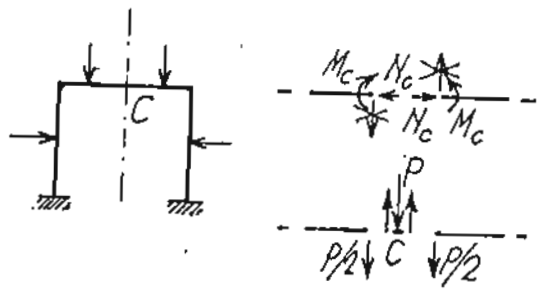


fig. 2.15

Le eventuali azioni di M ed N, se sono staticamente indeterminate, si possono calcolare imponendo nulli lo spostamento orizzontale e la rotazione nella sezione C.

b) Per una struttura simmetrica caricata antimetricamente gli effetti (azioni interne o movimenti) in sezioni simmetriche devono conservare il carattere dell'antimetria. Valgono poi considerazioni analoghe a quelle riportate nel punto a. In particolare per le sezioni appartenenti all'asse di simmetria e non direttamente caricate devono risultare nulli il momento flettente e lo sforzo normale; inoltre deve essere nullo lo spostamento nella direzione dell'asse (fig. 2.16). Se alla sezione è applicata una coppia, questa si ripartisce in parti uguali fra le due semistrutture.

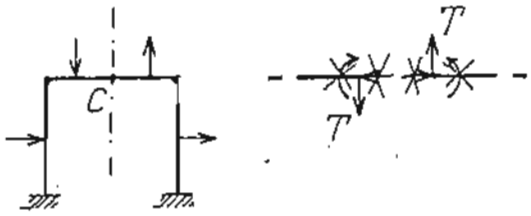


fig. 2.16

Esempio 2.6

a) Per studiare il portale della fig. 2.17 si decompone il carico nelle due condizioni a e b . Se si trascura la deformazione per sforzo normale, nel caso a si riconosce che la travata è compressa con $N = P/2$. Nel caso b le reazioni devono rispettare la condizione di antimetria presentata dal carico. E' allora evidente che $H = P/2$ (per l'equilibrio alla traslazione orizzontale) e $V = Ph/l$ (per l'equilibrio alla rotazione). In definitiva la

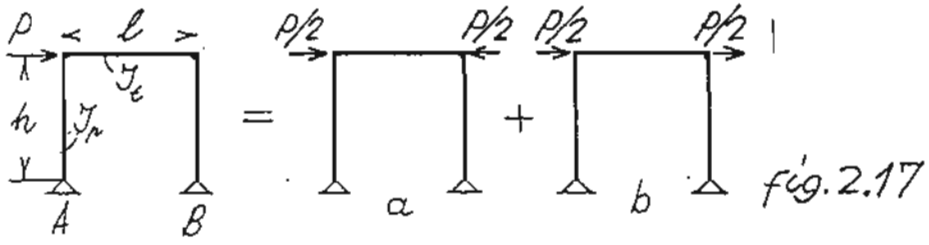


fig. 2.17

struttura assegnata è iperstatica ma staticamente determinata.

b) Se la stessa struttura ha le estremità A, B incastrate, la configurazione antimetrica può essere risolta facilmente considerando la trave isolata dai piedritti. L'unica incognita staticamente indeterminata è il momento M_i , che può essere calcolato con la condizione che debbono essere uguali le rotazioni dell'estremità della trave e della sommità delle colonne, per cui si ottiene (fig. 2.18):

$$(P/2)h^2/2\,EJ_p - M_i h/EJ_p = M_i l/6EJ_t \quad ;$$

e se $h = l$, $J_p = J_t$, $M_i = \frac{8}{28}Ph$ (sinistrogiro per l'estremità del ritto).

Alla base risulta $M_a = -Ph/2 + \frac{6}{28}Ph = -\frac{8}{28}Ph$ (sinistrogiro).

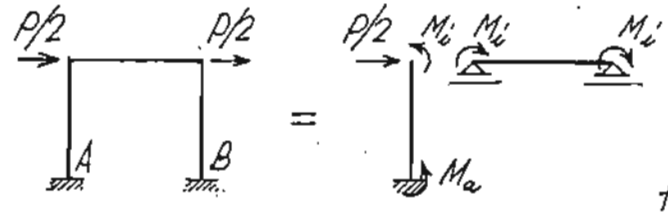


fig. 2.18

c) Le considerazioni fino ad ora svolte si potrebbero facilmente estendere anche alle strutture piane caricate normalmente al loro piano o, più in generale, alle strutture spaziali; basta a tale scopo tener presente che, relativamente a una sezione centrale, momenti flettenti e sforzo normale sono azioni di tipo simmetrico, mentre hanno caratteristiche di antimetria i tagli e il momento torcente. Inoltre i criteri esposti valgono ovviamente non soltanto per i carichi, ma anche per gli stati coattivi.

Esempio 2.7

Per la trave ad anello della fig. 2.19 ogni sezione retta è di simmetria; quindi, tenuto presente quanto sopra si è accennato delle varie componenti delle azioni interne, può essere diverso da zero solo il momento flettente M_y . Si riconosce poi facilmente, ad esempio, considerando l'equilibrio alla rotazione di un tronco infinitesimo attorno all'asse tangente t, che $M_y = mr$.

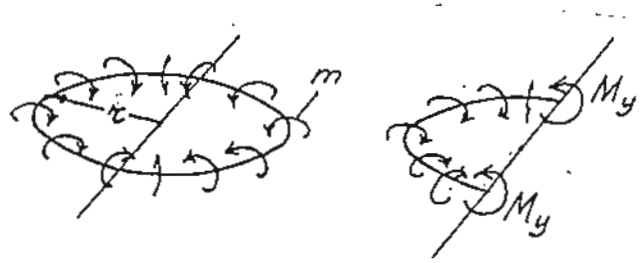


fig. 2.19

2.7.2. Strutture parasimmetriche

Vi sono strutture, come ad esempio quella rappresentata nella fig. 2.20, che si trasformano in simmetriche ruotando di 180° una delle loro metà intorno all'asse a : simili strutture godono di proprietà per certi aspetti simili a quelle delle strutture simmetriche.

a) Il caso in cui con rotazione di 180° di una metà la struttura risulta antimetricamente caricata (fig. 2.20a)

Un osservatore posto in O_1 vede la stessa struttura dell'osservatore in O_2 , ma con i versi delle forze cambiati. Allora, tenendo presente tale circostanza, si può riconoscere che le spinte H e le reazioni verticali V sono staticamente determinate, le coppie $\bar{M}$ sono simmetriche. In C devono essere nulli V_c , H_c e φ_c .

b) Il caso in cui con rotazione di 180° di una metà la struttura risulta caricata simmetricamente (fig. 2.20b)

In questo caso i due osservatori vedono la stessa struttura ugualmente caricata; da tale circostanza conseguono le reazioni V, H ed M rappresentate nella fig. 2.20b. In C deve annullarsi il momento flettente e pure nullo deve essere lo spostamento della sezione; la struttura è due volte staticamente indeterminata.

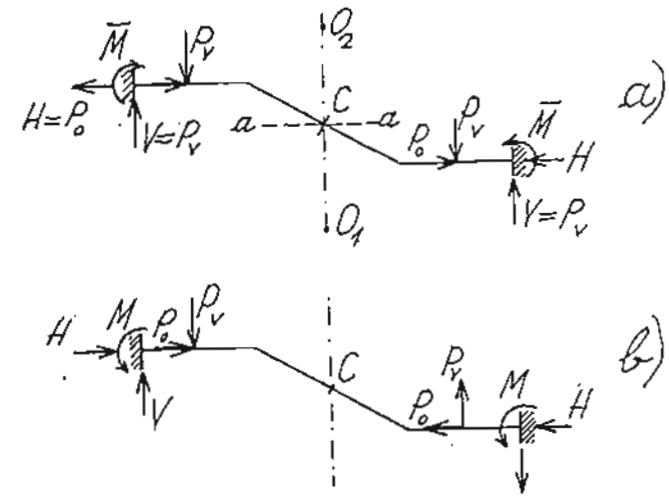


fig. 2.20

2.8. CENNO A ELEMENTI DI DINAMICA DELLE STRUTTURE

Un cenno ad alcune fondamentali proprietà della dinamica delle strutture è opportuno per potersi rendere in qualche modo conto di ricorrenti questioni dinamiche nell'analisi della resistenza delle costruzioni, nonchè di certe regola progettuali e normative riguardanti in particolare gli edifici in zone sismiche o investiti dal vento.

2.8.1. Sistemi strutturali a un grado di libertà (oscillatore elementare)

a) Premessa

Un sistema possiede un solo grado di libertà quando il suo moto può essere descritto con un solo movimento indipendente, ossia con una sola "coordinata". Un moto è detto periodico (fig. 2.21) se riproduce ogni suo valore a intervalli di tempo costanti, detti periodo T_o di vibrazione, misurato in genere in secondi; la frequenza $f_o = 1/T_o$, inversa del periodo, è misurata di solito in numero di cicli al secondo (Hertz).

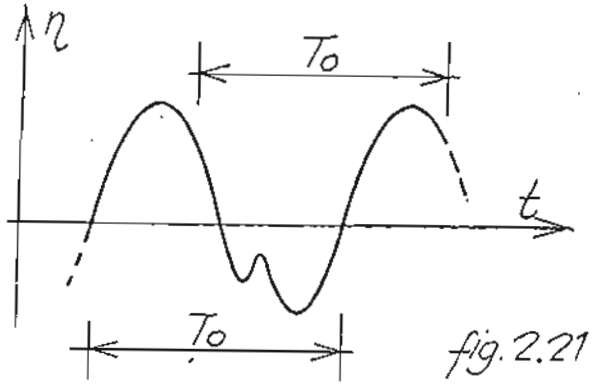


fig. 2.21

La vibrazione periodica più semplice è quella sinusoidale (o armonica), le cui espressioni sono:

$$\text{(a)}\ \eta = \eta_o \operatorname{sen}(\omega_o t+\psi)\ , \qquad \text{(b)}\ \eta = \eta_o \cos(\omega_o t-\theta)\ , \qquad [2.12]$$

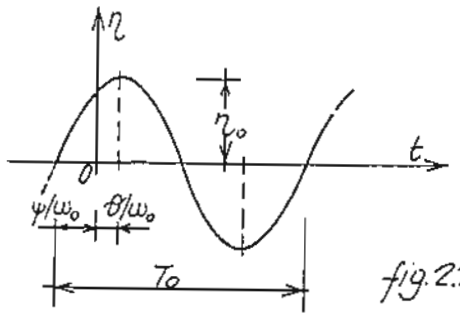


fig. 2.22

ove η_o è il valore massimo (ampiezza) della vibrazione, ψ e θ sono angoli di fase definiti in funzione della posizione dell'origine degli assi; ovviamente nella (a) per $t = -\psi/\omega_o$ si ha $\eta = 0$, e nella (b), per $t = \theta/\omega_o$, $\eta = \eta_o$. In qualunque istante (t,η), per $\Delta t = T_o$ si deve riprodurre il valore η, quindi

$$\omega_o T_o = 2\pi\ , \quad (\omega_o = 2\pi/T_o = 2\pi f_o)\ ; \qquad [2.13]$$

ω_o è detta "<u>pulsazione</u>" (o velocità angolare; o <u>frequenza</u> circolare).

Si mantengono armoniche le derivate dell'espressione di un moto armonico; per la [2.12a], ad esempio:

$$\dot{\eta} = \text{velocità} = \eta_o\omega_o\cos(\omega_o t+\psi)\ ,$$
$$\ddot{\eta} = \text{accelerazione} = -\eta_o\omega_o^2\operatorname{sen}(\omega_o t+\psi)\ . \qquad [2.14]$$

Le vibrazioni armoniche possono essere utilmente rappresentate in forma vettoriale. Così, ad es., lo spostamento η è misurato dalla proiezione secondo y di un vettore OA di modulo η_o che ruota con velocità angolare ω_o e che nell'istante $t_o = 0$ si trova in OA_o (fig. 2.23). Analogamente, le grandezze della velocità e della accelerazione sono date dalle proiezioni di due vettori rotanti OB e OC di moduli $v_o = \omega_o\eta_o$ e $a_o = -\omega_o^2\eta_o$, sfasati di 90° e di 180° rispetto a OA.

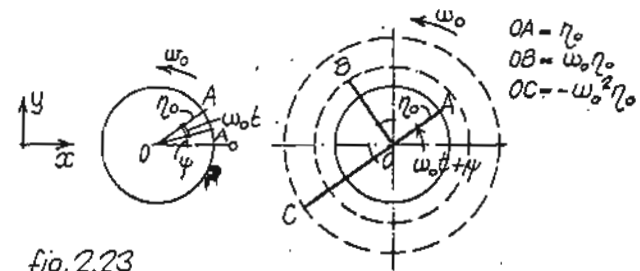


fig. 2.23

E' da notare inoltre che due o più vibrazioni armoniche aventi uguale frequenza ammettono una vibrazione risultante pure essa armonica e dotata della medesima frequenza. Ma possono essere rilevanti le conseguenze anche di una piccola differenza delle frequenze di due vibrazioni armoniche: infatti la vibrazione risultante dà luogo al rilevante fenomeno dei "battimenti", anch'esso periodico, e di frequenza ω_b molto minore di quelle delle due vibrazioni componenti $(\omega_b = \omega_2-\omega_1)$; mentre all'interno di ciascun

periodo del battimento le ampiezze variano da (A_1+A_2) a (A_1-A_2), essendo A_1, A_2 le ampiezze delle stesse vibrazioni componenti.

Infine, sempre in tema di vettori, è opportuno ricordare che un punto del piano di coordinate x, y può essere rappresentato mediante il numero complesso $x + iy$ (con x asse reale, y asse immaginario, $i = \sqrt{-1}$); per cui un vettore di modulo r, inclinato di α rispetto all'asse x, di componenti $x = r\cos\alpha$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\alpha$, può essere rappresentato con l'espressione $x + iy = r(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)$. Pertanto, in virtù della formula di Eulero $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha$, si ha che un vettore unitario può essere rappresentato sinteticamente con $e^{i\alpha}$; e se $\alpha = \omega t$, un vettore rotante può essere scritto $r\,e^{i\omega t}$.

Da quanto è stato ricordato segue che, se un moto armonico $\eta(t)$ è rappresentato col vettore $\eta_* e^{i\omega t}$, la velocità $v(t)$ e l'accelerazione $a(t)$ sono rappresentate da $\dot\eta = i\omega\eta_* e^{i\omega t}$, $\ddot\eta = -\omega^2\eta_* e^{i\omega t}$.

b) Vibrazioni libere senza smorzamento

Una massa m mobile lungo una direzione orizzontale, vincolata a una molla, può rappresentare schematicamente un sistema a un solo grado di libertà (fig. 2.24).

Se immaginiamo di imprimere al corpo uno spostamento η rispetto alla sua posizione di equilibrio, poi di abbandonarlo senza più applicare azioni esterne, si manifestano oscillazioni libere la cui frequenza dipende principalmente dalla massa e dalla rigidezza del sistema ed è, come vedremo, debolmente influenzata dagli attriti; per cui lo smorzamento può essere in genere trascurato nella determinazione della frequenza naturale.

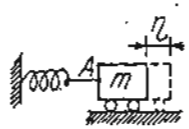


fig. 2.24

E' evidente che, se si considera positivo lo spostamento verso destra e il moto privo di attriti, e se si ritiene la molla elastica, di massa trascurabile rispetto a m e di rigidezza nota k (essendo k la forza che provoca lo spostamento $\eta = 1$), il corpo è soggetto alla forza di richiamo della molla $(-k\eta)$ rivolta verso sinistra, e per la legge di Newton l'equazione di equilibrio dinamico risulta

$$m\ddot\eta = -k\eta \quad , \quad \text{o anche} \quad \ddot\eta + \omega_*^2\eta = 0 \ , \qquad (2.15)$$

avendo posto

$$\omega_*^2 = k/m \ . \qquad (2.16)$$

Essendo l'integrale generale dell'equazione (2.15)

$$\eta = C_1\,\mathrm{sen}\,\omega_* t + C_2\cos\omega_* t \ , \qquad (2.17)$$

per quanto è stato detto il moto risulta armonico con la frequenza circolare (2.16) $\omega_* = \sqrt{k/m}$, e con il periodo

$$T_* = 2\pi/\omega_* = 2\pi\sqrt{m/k} \qquad \left(f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{k/m}\right) . \qquad (2.18)$$

Il moto, avendo supposto il sistema conservativo, prosegue indefinitamente nel tempo, con un'incessante conversione di energia potenziale in cinetica e viceversa.

Le costanti C_1 e C_2 sono determinabili con le condizioni ai limiti: se η_i e v_i sono i valori iniziali, per $t = 0$, dello spostamento e della velocità, si ottiene

$$\eta = (v_i/\omega_*)\,\mathrm{sen}\,\omega_* t + \eta_i\cos\omega_* t \ . \qquad (2.19)$$

Ponendo $\eta_i = \eta_* \operatorname{sen}\psi$, $v_i/\omega_* = \eta_* \cos\psi$ (con η_* = spost. max) risulta:

$$\eta_*^2 = \eta_i^2 + (v_i/\omega_*)^2 , \quad \tan\psi = \eta_i\omega_*/v_i ,$$

$$\eta = \eta_* \operatorname{sen}(\omega_* t + \psi) \quad . \qquad [2.19]_1$$

Alcune osservazioni:

- Se si indica con δ_{st} l'allungamento della molla per effetto di una forza statica uguale al peso $P = mg$ del corpo, si ha $k = P/\delta_{st}$, quindi la [2.18] diventa

$$T_* = 2\pi \sqrt{\delta_{st}/g} \quad . \qquad [2.20]$$

- La configurazione del sistema a un solo grado di libertà trova riscontro in numerosi problemi pratici. Ad es. per i due casi della fig. 2.25 (massa m dominante)

$$k = 48\, EJ/l^3 , \quad k = 6\, EJ_1/h^3$$

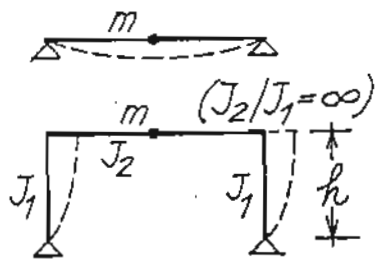


fig. 2.25

- La pulsazione $\omega_* = \sqrt{k/m}$ può essere ottenuta direttamente osservando che, essendo il sistema conservativo, la massima energia potenziale $E_p = 1/2\, k\eta_*^2$ si deve convertire tutta nella massima energia cinetica $E_c = 1/2\, m\dot{\eta}_{max}^2 = 1/2\, m\eta_*^2\omega_*^2$.

c) Vibrazioni libere con smorzamento

Un moto oscillatorio comporta sempre una dissipazione di energia a causa delle inevitabili resistenze passive, che possono avere caratteristiche diverse; una delle resistenze più semplici, e tuttavia significativa, è imputabile al così detto "smorzamento viscoso", proporzionale alla

velocità. Con riferimento al solito caso emblematico della fig. 2.24, l'equazione del moto vale

$$m\ddot{\eta} + c\dot{\eta} + k\eta = 0 , \qquad [2.21]$$

e una sua soluzione particolare è (indicando con $\bar{\eta}$ l'ampiezza di una oscillazione generica) $\eta(t) = \bar{\eta}e^{\beta t}$, con β da determinare. Sostituendola nella [2.21], si trova che β deve soddisfare l'equazione caratteristica

$$\beta^2 + \frac{c}{m}\beta + \frac{k}{m} = 0 \qquad [2.22]$$

le cui radici sono (indicando con $\omega_* = \sqrt{k/m}$ la pulsazione per il sistema privo di smorzamento)

$$\beta_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega_*^2} \qquad [2.23]$$

Quindi l'integrale generale della [2.21] è

$$\eta = C_1 e^{\beta_1 t} + C_2 e^{\beta_2 t} \qquad [2.24]$$

ove C_1, C_2 sono da determinare con le condizioni iniziali.

Chiaramente il moto dipende da β_1, β_2, quindi dal segno del radicale presente nella [2.23]; e può convenire adottare come valore di riferimento "lo smorzamento critico", ossia il particolare valore $\bar{c}$ di c che rende nullo lo stesso radicale

$$\bar{c} = 2\sqrt{km} = 2\, m\omega_* \quad , \qquad [2.25]$$

essendo $\omega_* = \sqrt{k/m}$ la pulsazione senza smorzamento. Pertanto l'effettivo smorzamento può essere espresso in funzione del "fattore di smorzamento"

$$\rho = c/\bar{c} \qquad [2.26]$$

Essendo allora $c/2m = \rho\bar{c}/2m = \rho\omega_*$, le espressioni (2.23) possono essere scritte

$$\beta_{1,2} = \omega_*(-\rho + \sqrt{\rho^2 - 1}) \quad . \qquad [2.27]$$

Il valore del fattore ρ di smorzamento governa l'andamento del moto, e conviene distinguere i seguenti 3 casi.

Caso 1. Smorzamento critico ($\rho = 1$).

Si ha

$$\beta_1 = \beta_2 = -\omega_* \quad , \quad \eta = (C_1+C_2)e^{-\omega_* t} \quad ; \qquad [2.28]$$

quindi il moto è aperiodico smorzato (fig. 2.26); ossia, avvenuto il disturbo, il sistema torna alla sua posizione originaria senza oscillazioni.

Caso 2. Smorzamento $c > \bar{c}$ ($\rho > 1$)

Il radicale nella [2.27] è positivo, quindi le radici sono reali e il moto si svolge senza oscillazioni. Pertanto lo smorzamento critico è il minimo valore dello smorzamento per il quale il sistema può "incassare" eventuali disturbi senza oscillare.

Caso 3. Smorzamento $c < \bar{c}$ ($\rho<1$; è il caso più frequente).

Il radicale è immaginario e le due radici [2.28] possono essere scritte

$$\beta_{1,2} = (-\rho \pm i\sqrt{1-\rho^2})\omega_* = -\rho\omega_* \pm i\omega_n \quad , \qquad [2.29]$$

con

$$\omega_n = \omega_*\sqrt{1-\rho^2} \quad , \qquad [2.30]$$

e la pulsazione naturale ω_n, come è stato detto, differisce pochissimo da ω_*, essendo in pratica $c \ll \bar{c}$ (per le

strutture correnti $c < 0,05$).

L'espressione del moto [2.24] diventa

$$\eta = e^{-\rho\omega_* t}[C_1\exp(i\sqrt{1-\rho^2}\omega_* t) + C_2\exp(-i\sqrt{1-\rho^2}\omega_* t)] =$$
$$= C\,e^{-\rho\omega_* t}\,\mathrm{sen}(\sqrt{1-\rho^2}\omega_* t + \psi); \qquad [2.31]$$

con $C = \bar{\eta}$ (ampiezza); per cui il moto è oscillatorio con ampiezze via via decrescenti (fig. 2.26).

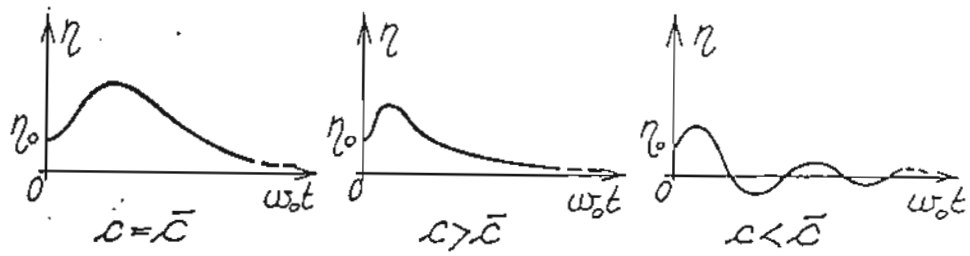


fig. 2.26

d) Vibrazioni forzate con eccitazione armonica

Il solito esempio di un sistema a un grado di libertà (fig. 2.24) sia soggetto alla eccitazione armonica $F(t) = \bar{F}\,\mathrm{sen}\,\omega t$ (essendo ω la pulsazione della forza) e a uno smorzamento viscoso. L'equazione differenziale del moto risulta

$$m\ddot{\eta} + c\dot{\eta} + k\eta = \bar{F}\,\mathrm{sen}\,\omega t \quad . \qquad [2.32]$$

Dopo una fase transitoria, il corpo oscilla, a regime, con una frequenza uguale a quella dell'azione esterna (quindi armonica), però rispetto a questa con un ritardo di fase φ. Di conseguenza si può adottare, per il moto a regime, la soluzione particolare:

$$\eta = \bar{\eta}\,\mathrm{sen}(\omega t - \varphi) \quad , \qquad [2.33]$$

essendo $\bar{\eta}$ l'ampiezza del movimento; e sostituendo nella [2.32]

$$-m\omega^2\bar{\eta}\,\mathrm{sen}(\omega t-\varphi)+c\omega\bar{\eta}\,\mathrm{sen}(\omega t-\varphi+\pi/2)+k\bar{\eta}\,\mathrm{sen}(\omega t-\varphi) = \bar{F}\,\mathrm{sen}\,\omega t \qquad [2.34]$$

Le varie forze presenti in tale equazione sono riportate nel diagramma 2.27, dal quale si deducono immediatamente (triangolo 03'3) le equazioni determinatrici delle grandezze φ, $\bar{\eta}$

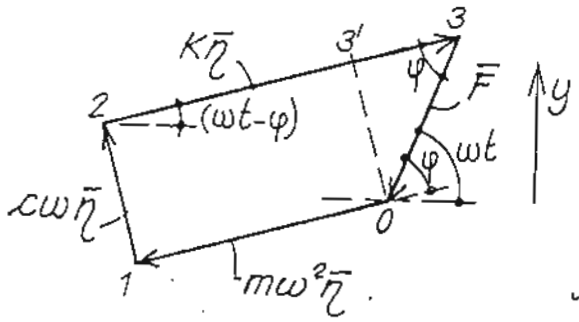


fig. 2.27

$$\mathrm{tg}\,\varphi = c\omega/(k-m\omega^2) \quad ,$$

$$(c\omega\bar{\eta})^2 + (k\bar{\eta}-m\omega^2\bar{\eta})^2 = \bar{F}^2 \quad . \qquad [2.35]$$

Per cui, dividendo i vati termini della 2ª per lo spostamento η_{st} dovuto all'ampiezza $\bar{F}$ della forza pensata agente staticamente ($\eta_{st} = \bar{F}/k$), si ottiene ($\omega_*^2 = k/m$, $c = \rho\,\bar{c} = \rho\,2m\omega_*$)

$$(\bar{\eta}/\eta_{st})^2 = 1/\{[1-(\omega/\omega_*)^2]^2 + (2\rho\omega/\omega_*)^2\} \quad . \qquad [2.36]$$

Nella fig. 2.28 sono riportati i diagrammi che forniscono $\bar{\eta}/\eta_{st}$ in funzione di ω/ω_*: evidentemente, per $\omega/\omega_* = 0$ (pulsazione della forza nulla, quindi periodo

di applicazione infinito) si ha $\bar{\eta} = \eta_{st}$; mentre $\bar{\eta}/\eta_{st}$ tende a zero con il tendere all'infinito della pulsazione della forza. Attenzione particolare deve essere posta alla condizione detta di "risonanza" ($\omega = \omega_*$): per essa $\bar{\eta}/\eta_{st} = 1/2\rho$, quindi $\bar{\eta}/\eta_{st}$ tende all'infinito con il tendere a zero dello smorzamento di tipo viscoso; di qui l'opportunità di tenere, potendo, la pulsazione della forza scostata da ω_*, e la notevole benefica influenza che lo smorzamento può avere nei confronti della risonanza.

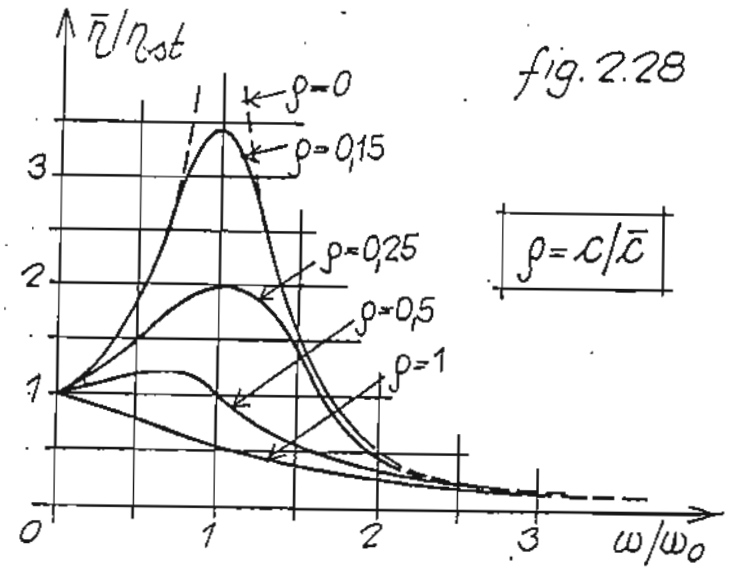


fig. 2.28

2.8.2. Un cenno a sistemi dotati di più gradi di libertà: frequenze e modi di oscillazioni libere di piccola ampiezza

a) Ogni struttura reale, potendo assumere infinite configurazioni deformate, possiede in genere infiniti gradi di libertà: un modello semplificato che la rappresenti (ad es. un insieme di nodi in cui si immaginano concentrate le masse) deve essere tale che possa risultare efficacemente descritto il comportamento della stessa struttura. Chiaramente uno o più gradi di libertà (ossia componenti del moto indipendenti tra loro) possono competere a ciscun

nodo e, ad es., $\{\eta_1 \ldots \eta_n\}$ siano, in una data direzione, gli spostamenti degli $\underline{n}$ nodi (sistema a $\underline{n}$ gradi di libertà), e $\{m_1 \ldots m_n\}$ le correlative masse.

Volendo determinare la frequenze e i modi naturali di vibrare del sistema, è possibile trascurare le dissipazioni di energia (rel. 2.30); e per semplicità di esposizione, riferiamoci al caso non infrequente che ogni accelerazione sia associata alla sola massa correlativa, ossia che, come si dice comunemente, non si abbia accoppiamento dinamico delle masse.

In questo caso (indicando con k_{ji} i coefficienti di rigidezza, ossia la forza F_j per $\eta_i = 1$) le equazioni del moto in regime elastico diventano

$$\begin{aligned} -k_{11}\eta_1 - k_{12}\eta_2 - \ldots - k_{1n}\eta_n &= m_1\ddot{\eta}_1 \\ -k_{21}\eta_1 - k_{22}\eta_2 - \ldots - k_{2n}\eta_n &= m_2\ddot{\eta}_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -k_{n1}\eta_1 - k_{n2}\eta_2 - \ldots - k_{nn}\eta_n &= m_n\ddot{\eta}_n \end{aligned} \qquad [2.37]$$

Soluzioni del sistema sono le seguenti, corrispondenti a puri moti armonici

$$\eta_i = A_i \operatorname{sen}(\omega t + \psi) \qquad [2.38]$$

ove ω è la frequenza angolare dell'oscillazione e ψ un arbitrario angolo di fase. Poichè $\ddot{\eta}_i = -\omega^2 \eta_i$, si ottiene il seguente sistema di $\underline{n}$ equazioni lineari omogenee con le incognite $A_1 \ldots A_n$

$$\begin{aligned} k_{11}A_1 + k_{12}A_2 + \ldots k_{1n}A_n &= m_1\omega^2 A_1 \\ k_{21}A_1 + k_{22}A_2 + \ldots k_{2n}A_n &= m_2\omega^2 A_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k_{n1}A_1 + k_{n2}A_2 + \ldots k_{nn}A_n &= m_n\omega^2 A_n \end{aligned} \qquad [2.39]$$

Affinchè il sistema ammetta altre soluzioni oltre a quella banale (masse in quiete) $A_1 = 0, \ldots, A_n = 0$, deve essere nullo il determinante dei coefficienti (regola di Kramer):

$$\begin{vmatrix} k_{11}-m_1\omega^2 & k_{12} & \ldots & k_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_{n1} & k_{n2} & & k_{nn}-m_n\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad [2.40]$$

Sviluppando, si ottiene un'equazione algebrica di grado $\underline{n}$ (equazione delle frequenze); e le sue $\underline{n}$ radici $\{\omega_1^2, \omega_2^2, \ldots, \omega_n^2\}$ costituiscono gli $\underline{n}$ valori (autovalori) di $\underline{\omega}$ per i quali le soluzioni [2.38] sono accettabili. Quindi la soluzione generale del moto non è limitata a un solo modo [2.38], ma è la somma di tutti i possibili $\underline{n}$ modi armonici, e può essere scritta

$$\eta_i = \sum_{r=1}^{n} A_i^{(r)} \operatorname{sen}(\omega_r t + \psi_r) \qquad [2.41]$$

dove $A_1^{(r)}, A_2^{(r)}, \ldots, A_n^{(r)}$ corrispondono alla frequenza ω_r. E' importante rilevare che dalle $\underline{n}$ equazioni [2.39], essendo esse omogenee, si ottengono i valori relativi delle ampiezze A_i: ossia, se A_1 è ad esempio adottata come una costante arbitraria, dalle equazioni [2.39] possono essere ricavati i rapporti $A_2/A_1, A_3/A_1, \ldots, A_n/A_1$ per ciascun valore ω_r di ω_j; per cui ogni sequenza di ampiezze contiene un fattore indeterminato. Quindi, per ogni configurazione deformata [2.41] corrispondente a una certa frequenza ω_r, può essere valutato l'andamento, non la grandezza: l'oscillazione risultante da una sequenza di ampiezze $A_i^{(r)}$ è detta <u>r.mo modo di vibrare</u>, e relativamente ad esso le $\underline{n}$ masse oscillano in sincronismo, ossia con la stessa frequenza ω_r e con la stessa fase ψ_r.

Se le $\underline{n}$ frequenze ω_r vengono ordinate secondo i loro valori crescenti ($\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 \ldots$), sono in genere le prime frequenze ad avere maggiore importanza; in parti-

colare, il periodo $T_1 = 2\pi/\omega_1$ corrispondente al primo modo di vibrare è alle volte detto fondamentale. E' da notare che, aumentando i valori di ω, aumenta la velocità di oscillazione; quindi aumenta l'importanza dello smorzamento e si attenuano i pericoli di risonanza.

PARTE 2ª: STATI DI ESERCIZIO

PREMESSA GENERALE

Per il calcolo dello stato di sollecitazione delle strutture iperstatiche in esercizio può essere in genere accettabile l'ipotesi del comportamento elastico lineare del materiale. Quindi relativamente a tale stato verranno in seguito trattate le soluzioni di ricorrenti e fondamentali tipologie strutturali, quali i telai, le fondazioni, le strutture precompresse, le lastre piane sottili inflesse.

Tali soluzioni, accomunate dalla predetta ipotesi di base, consentono di individuare i cosiddetti "stati di esercizio", ossia le condizioni tensionali e deformative che una struttura può attingere senza compromettere la sua utilizzazione nelle inevitabili e incessanti ripetizioni delle sollecitazioni. L'esame degli stati limite di esercizio e degli stati limite ultimi (per instabilità dell'equilibrio o per cedimento dei materiali) è fondamentale nella progettazione strutturale, e viene disciplinato dalle normative.

Nell'analisi delle strutture in esercizio, spesso fortemente iperstatiche, il metodo "dell'equilibrio" (v. cap. II; basato sull'ipotesi dell'elasticità lineare) offre in genere la più conveniente via di soluzione.

Capitolo III

SISTEMI DI TRAVI IPERSTATICI: L'INTERPRETAZIONE ELASTICA ([3.1])

3.1. METODO DELL'EQUILIBRIO (o DELLE DEFORMAZIONI)

3.1.1. Osservazioni introduttive

Di solito denomineremo le azioni esterne "forze" (F), indipendentemente dal fatto che si tratti di forze vere e proprie o di coppie. Analogamente, "movimento" di un nodo starà a indicare tanto una sua rotazione φ quanto un suo spostamento δ; e in generale verranno presi in considerazione i movimenti o tra loro indipendenti, ossia necessari e sufficienti per rendere definita la configurazione deformata di una struttura. Inoltre un movimento che interverrà interamente nel far compiere lavoro diretto ad una data forza verrà detto ad essa "correlativo"; e s'intende che agli n movimenti indipendenti dei nodi ($a_1, a_2, \ldots, a_n$) corrisponderanno in genere n forze correlative ($F_1, F_2, \ldots, F_n$), alcune delle quali potranno essere ovviamente nulle e viceversa.

Come si accennò nel precedente capitolo, nella scrittura delle equazioni di equilibrio relative a casi piani considerammo positivi i momenti e le rotazioni destrogiri, le forze e gli spostamenti orizzontali verso destra, le forze e gli spostamenti verticali verso il basso. Il simbolo S starà spesso a indicare una generica sollecitazione.

Frequentemente, se non sussisteranno particolari ragioni connesse con la chiarezza dell'esposizione, una forza e il movimento ad essa correlativo verranno distinti col medesimo indice; e ciò potrà quindi non avere alcun riferimento con la numerazione attribuita alle sezioni o ai nodi. Convenzione questa che sarà conveniente, come vedremo in particolare nel paragrafo sull'impiego delle matrici (par. 3.6), specialmente nello studio dei sistemi complessi.

Col simbolo k_{ij} indicheremo l'azione F_i (correlativa al movimento a_i) conseguente al solo movimento $a_j = 1$, supponendo

quindi ogni altro movimento indipendente nullo (ovviamente, per il teorema di Betti, $k_{ij} = k_{ji}$): così, ad esempio, per il semplice telaio della fig. 3.1 si ha un solo movimento indipendente (la rotazione α_1 del nodo A, trascurando la deformazione per effetto dello sforzo assiale). Ad $\alpha_1 = 1$ destrogira, corrispondono i momenti destrogiri $M_{ab} = (4\ EJ/l)_{ab} \cdot 1$, $M_{ac} = (4\ EJ/l)_{ac} \cdot 1$; quindi il momento, per il nodo A, $k_{11} = (M_{ab} + M_{ac})$. Vedremo che le quantità k_{ij}, dette <u>coefficienti di rigidezza</u>, consentono una scrittura molto semplice e significativa delle equazioni costitutive del metodo dell'equilibrio.

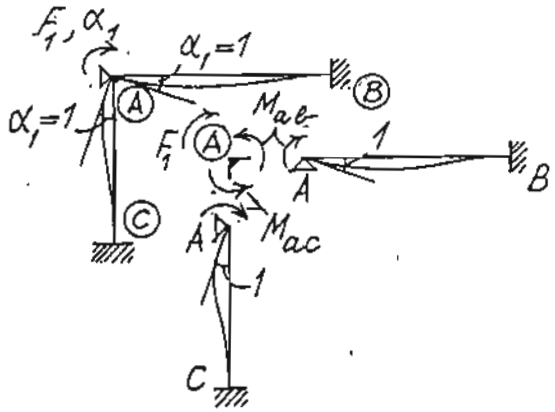


Fig. 3.1

(3.1) Il presente capitolo trae spunto dai capp. XII,..., XV del vol. II, parte I dell'opera di P. POZZATI, <u>Teoria e tecnica delle strutture</u>, ed. UTET.

3.1.2. Equazioni risolventi del metodo dell'equilibrio

a) <u>Strutture caricate nei nodi</u>

Per una struttura soggetta ad azioni esterne F_0 nei nodi, applicate con segno positivo, siano $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ i movimenti indipendenti degli stessi nodi. Per effetto di tali movimenti, la complessiva azione "di nodo" correlativa ad α_i

vale, in virtù della definizione dei coefficienti di rigidezza, e considerando alle estremità delle travi azioni tutte positive (quindi negative ai nodi),

$$-\sum_j k_{ij} \cdot \alpha_j \ ;$$

dovendo ogni azione interna risultare per equilibrio uguale alla corrispondente azione esterna F_0, si ottiene il sistema di <u>n</u> equazioni di equilibrio (tante quanti sono i movimenti indipendenti)

$$\begin{aligned} k_{11}\alpha_1 + k_{11}\alpha_2 + \ldots + k_{1n}\alpha_n &= F_{01} \\ \ldots \\ k_{n1}\alpha_1 + k_{n2}\alpha_2 + \ldots + k_{nn}\alpha_n &= F_{0n} \ . \end{aligned} \qquad (3.1)$$

Come è stato accennato, i coefficienti di rigidezza k_{ij} si ricavano facendo avvenire un movimento unitario per volta. E poiché ad ogni movimento α_j impresso a un nodo corrisponde una configurazione congruente, tra le infinite possibili situazioni congruenti (che corrispondono agli infiniti valori dei movimenti α), il sistema di equazioni (3.1) individua l'unica soluzione equilibrata, connessa con l'ipotesi della legittimità della sovrapposizione degli effetti.

Il sistema di equazioni (3.1) rende evidenti le due prerogative primarie del metodo dell'equilibrio: in genere (vedremo che non è sempre così) figurano come incognite i movimenti α dei nodi (o di particolari parti strutturali), per cui tale metodo viene anche detto "delle deformazioni"; inoltre il numero delle incognite α è tanto più ridotto quanto più la struttura è vincolata, per cui il metodo, al contrario di quello della congruenza (par. 3.5), si semplifica quanto più è ridotto il grado di mobilità dei vincoli (ed ovviamente si complica spostandosi verso la configurazione isostatica).

b) <u>Strutture genericamente caricate</u>

Se la struttura è soggetta, oltre alle azioni esterne F_0

nei nodi, anche a forze qualsiasi applicate fuori dei nodi, pensiamo, in una prima fase provvisoria, tutti i movimenti indipendenti resi nulli in virtù di un complesso di vincoli ausiliari, dei quali siano F le relative reazioni. In tale situazione particolare la congruenza è evidentemente soddisfatta, non avendo discontinuità per le varie deformate; però non è in genere soddisfatto l'equilibrio, perché nei nodi agiscono le reazioni immaginarie F dei vincoli ausiliari. Ma questi vincoli in realtà non esistono, quindi debbono essere soppressi; ciò che equivale ad applicare le loro reazioni F cambiate di segno, ossia a considerare la struttura soggetta soltanto, in corrispondenza dei nodi, alle forze

$$F_0 - F \quad . \qquad [3.2]$$

Per tali forze potrà venire scritto il sistema di equazioni di equilibrio [3.1], attribuendo alle forze F_0 il valore [3.2]; definendo quindi i movimenti indipendenti $\underline{a}$. L'impiego delle matrici (cap. 3.6) consentirà di rappresentare molto sinteticamente tale modo di procedere, e di rendere evidenti utili sue proprietà.

c) - Le equazioni risolventi [3.1], con i termini noti [3.2], sono dunque espressione tipica del metodo dell'equilibrio, che si attua quindi in alcune fasi che conviene distintamente ricordare:

1. Supposti nulli tutti i movimenti indipendenti $\underline{a}$ per la presenza di vincoli ausiliari, si calcolano alle estremità delle varie membrature le sollecitazione d'incastro $\bar{S}$ e le corrispondenti azioni di nodo $\bar{F}$.
2. Si considera la struttura soggetta, soltanto nei nodi, alle forze $(F_0 - \bar{F})$, correlative ai movimenti $\underline{a}$.
3. Imprimendo un movimento $\underline{a}$ per volta, si calcolano le sollecitazioni $S(a)$ alle estremità delle membrature e i coefficienti di rigidezza k.

4. Sovrapponendo gli effetti si scrivono le varie equazioni di equilibrio nei confronti dei vari movimenti $\underline{a}$. Relativamente a un generico a_i si ha

$$\sum_j k_{ij} a_j = F_{0i} - \bar{F}_i \quad . \qquad [3.3]$$

5. Si ricavano i movimenti incogniti $\underline{a}$.
6. Noti i movimenti $\underline{a}$, si risale alle sollecitazioni, utilizzando il calcolo eseguito nelle fasi 1 e 3 e ricavando quindi il loro valore complessivo

$$S = \bar{S} + S(a) \quad . \qquad [3.4]$$

d) - Se la struttura ha un estremo incernierato, questo è da considerare alla stregua di un nodo comprendente una sola asta; per cui è possibile scrivere per esso una delle equazioni [3.3] (v. es. 3.2).

Analoga osservazione vale se una sezione estrema può anche traslare; e dovranno venire scritte tante equazioni del tipo [3.3] quanti sono i movimenti incogniti.

e) - Per uno stato di sollecitazione "coattivo" (ossia causato da azioni estranee ai carichi, quali, ad esempio, variazioni termiche, cedimenti dei vincoli) lo studio può essere effettuato senza alcuna sostanziale modificazione del procedimento generale: se si tratta di movimenti impressi $\bar{a}$, questi figurano nelle equazioni [3.3] come dati, e non più come incogniti; in altri casi si consente all'inizio un movimento indipendente, determinando i valori iniziali $\bar{F}$ (es. 3.3).

f) - In generale, per strutture snelle soggette a primario stato flessionale, può essere trascurata la deformazione per effetto dello sforzo normale (oltre, s'intende, a quella per sforzo tagliante).

g) - Per il caso ricorrente dei sistemi di travi prismatiche, può essere opportuno ricordare alcuni risultati noti, onde facilitare la scrittura delle equazioni [3.1].

Per una trave AB prismatica e scarica, avente l'estremo B incastrato e la sezione A soggetta alla sola rotazione φ_a (fig. 3.2a)

$$M_{ab} = \frac{4\,EJ}{l}\,\varphi_a\,, \quad M_{ba} = M_{ab}/2\,, \quad T_{ab} = -T_{ba} = \frac{6\,EJ}{l^2}\,\varphi_a\,. \qquad [3.5]$$

Se la trave ha gli estremi impediti di ruotare e soggetti allo spostamento relativo δ in direzione normale all'asse (di segno tale da rendere destrogira la rotazione della congiungente i baricentri delle sezioni estreme):

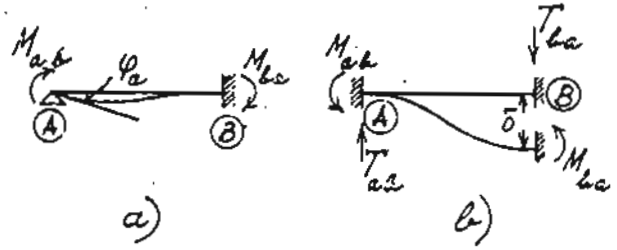


Fig. 3.2

$$M_{ab} = M_{ba} = -\frac{6\,EJ\,\delta}{l^2}\,, \quad T_{ab} = -T_{ba} = -12\,EJ\,\delta/l^3\,. \qquad [3.6]$$

Esempio 3.1

Studiare, con il metodo "dell'equilibrio", il telaio della fig. 3.3, le cui aste hanno la medesima sezione.

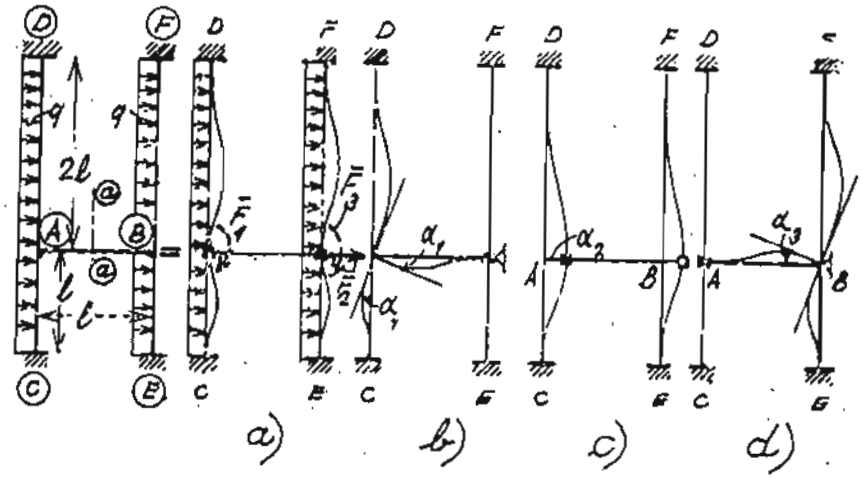


Fig. 3.3

Soluzione

Per l'antimetria rispetto all'asse a dev'essere $\varphi_a = \varphi_b$; inoltre è $\delta_a = \delta_b$. Quindi i movimenti indipendenti sono $\alpha_1 (= \varphi_a)$, $\alpha_2 (= \delta_a)$, $\alpha_3 (= \varphi_b = \varphi_a)$.

1ª fase) nulli i movimenti indipendenti (fig. 3.3a):

$$\bar{M}_{ac} = +q\,l^2/12\,, \quad \bar{M}_{ad} = -q(2\,l)^2/12\,, \quad \bar{F}_1 = \bar{M}_{ac} + \bar{M}_{ad} = -q\,l^2/4\,;$$

$$\bar{T}_{ac} = \bar{T}_{be} = -ql/2\,, \quad \bar{T}_{ad} = \bar{T}_{bf} = -q(2l)/2\,, \quad \bar{F}_2 = \sum \bar{T} = -3\,ql\,.$$

2ª fase) calcolo dei coefficienti di rigidezza k.

Impressa la sola rotazione α_1 (fig. 3.3b):

$$M_{ab} = M_{ac} = \alpha_1\,4\,EJ/l\,, \quad M_{ad} = \alpha_1\,4\,EJ/2\,l\,, \quad k_{11} = 10\,EJ/l\,;$$

$$T_{ac} = -\alpha_1\,6\,EJ/l^2\,, \quad T_{ad} = \alpha_1\,6\,EJ/(2\,l)^2\,, \quad k_{21} = -4{,}5\,EJ/l^2\,.$$

Impresso il solo spostamento α_2 (fig. 3.3c):

$$T_{ac} = T_{ba} = \alpha_2\, 12\, EJ/l^3 \;, \quad T_{ad} = T_{bf} = \alpha_2\, 12\, EJ/(2l)^3 = \alpha_2\, 1{,}5\, EJ/l^3 \;,$$

$$k_{22} = 27\, EJ/l^3 \;;$$

$$M_{ac} = -\alpha_2\, 6\, EJ/l^2 \;, \qquad M_{ad} = \alpha_2\, 6\, EJ/(2\,l)^2 \;,$$

$$k_{12} = -4{,}5\, EJ/l^2 \;.$$

Impressa la sola rotazione α_3 (fig. 3.3d):

$$M_{ab} = \alpha_3\, 2\, EJ/l \;, \qquad k_{12} = 2\, EJ/l \;;$$

$$T_{be} = -\alpha_3\, 6\, EJ/l^2 \;, \quad T_{bf} = +\alpha_3\, 6\, EJ/(2\,l)^2 \;, \quad k_{23} = -4{,}5\, EJ/l^2 \;.$$

Equazioni di equilibrio [3.3].

$$\begin{aligned} k_{11}\alpha_1 + k_{12}\alpha_2 + k_{13}\alpha_3 &= F_{01} - \bar{F}_1 \\ k_{21}\alpha_1 + k_{22}\alpha_2 + k_{23}\alpha_3 &= F_{02} - \bar{F}_2 \\ k_{31}\alpha_1 + k_{32}\alpha_2 + k_{33}\alpha_3 &= F_{03} - \bar{F}_3 \;; \end{aligned}$$

essendo $\alpha_3 = \alpha_1$, $F_{01} = F_{02} = F_{03} = 0$, sostituendo i valori precedentemente calcolati si ottiene (posto $R = EJ/l$; chiameremo R rigidità dell'asta)

$$12\, R\alpha_1 - 4{,}5\, R\alpha_2/l = +q\, l^2/4$$

$$-9\, R\alpha_1/l + 27\, R\alpha_2/l^2 = +3\, q\, l \;.$$

La soluzione è

$$\alpha_1 = 0{,}071429\; ql^3/EJ \;, \qquad \alpha_2/l = 0{,}13492\; ql^3/EJ \;.$$

Infine, utilizzando le espressioni [3.4] e il calcolo preparatorio, si ottiene ad esempio:

$$M_{ac} = +q\, l^2/12 + 4\, R\alpha_1 - 6\, R\alpha_2/l = -0{,}4405\; q\, l^2 \;,$$

$$M_{ad} = -q\, l^2/3 + 2\, R\alpha_1 + 1{,}5\, R\alpha_2/l = 0{,}0119\; q\, l^2 \;;$$

$$M_{ab} = 4\, R\alpha_1 + 2\, R\alpha_3 = +0{,}4286\; q\, l^2 \;.$$

L'equilibrio del nodo A è evidentemente soddisfatto ($\sum M_{ai} = 0$).

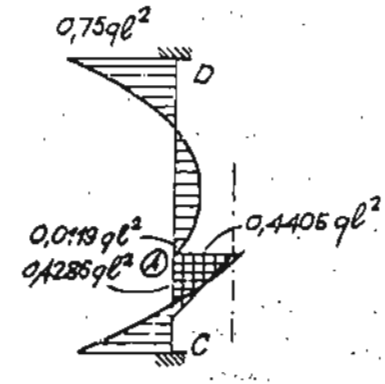


Fig. 3.4

Al medesimo risultato si perviene anche imprimendo simultaneamente, per tener conto dell'antimetria, le due rotazioni α_1 e $\alpha_3 = \alpha_1$. Nella fig. 3.4 è riportato il diagramma dei momenti.

Esempio 3.2

La stessa struttura dell'es. precedente ha le estremità C.E incernierate anzichè incastrate (fig. 3.5).

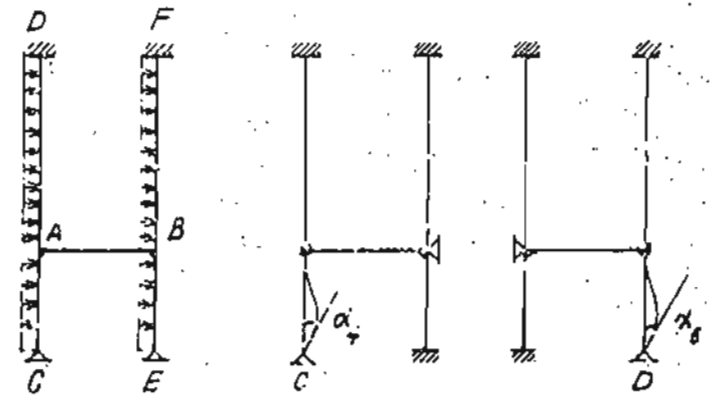


Fig. 3.5

Soluzione

Rispetto al caso precedente si aggiunge la sola incognita a_4 (essendo per antimetria $a_5 = a_4$), e occorre calcolare i coefficienti di rigidezza $k_{14} = 2EJ/l$, $k_{24} = -6EJ/l^2$, $k_{44} = 4EJ/l$. L'equazione di equilibrio relativa alla rotazione a_4 vale ($k_{43} = k_{45} = 0$, $F_{04} = 0$):

$$k_{41}a_1 + k_{42}a_2 + k_{44}a_4 = -\bar{F}_4 \quad , \quad \text{e sostituendo i valori } (R = EJ/l),$$

$$2Ra_1 - a_2\, 6EJ/l^2 + 4Ra_4 = +ql^2/12 .$$

Esempio 3.3

La trave AB del telaio dell'es.3.1 è soggetta alla variazione di temperatura Δt (con α_t si indica il coefficiente di dilatazione termica)(v. fig. 3.6).

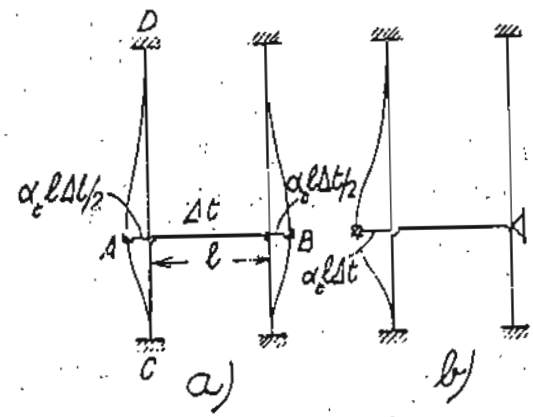


Fig. 3.6

Soluzione

Per tenere conto della simmetria ($a_3 = -a_1$; v. fig. 3.3), si può consentire alla trave di allungarsi per metà da una parte e per metà dall'altra (fig. 3.6a): l'unica incognita è la rotazione a_1 del nodo A: nell'equazione di equilibrio si ha $\bar{F}_1 = \bar{M}_{ac} + \bar{M}_{ad} = \alpha_t l \Delta t/2\, [6EJ/l^2 - 6EJ/(2l)^2]$.

Si ottiene lo stesso risultato consentendo alla trave di allungarsi da una sola parte (le equazioni di equilibrio diventano 2).

3.1.3. Un'applicazione rilevante del metodo dell'equilibrio: equazioni tipiche per i telai aventi i nodi che ruotano e che traslano (equazioni di Gehler)

a) - Nel caso, ricorrente nella pratica, di telai piani costituiti da aste prismatiche, le equazioni di equilibrio [3.1] possono essere specificate una volta per tutte; da esse, poichè si considerano i nodi liberi di ruotare e di traslare, potranno venire dedotte immediatamente le equazioni tipiche relative ai casi particolari in cui i nodi o ruotano soltanto (par. 3.2.1) o traslano soltanto (par. 3.3.1).

Le equazioni che ci apprestiamo a ricavare furono dedotte, in forma un po' meno generale, da W. Gehler (1916).

b) - Momenti e sforzi taglianti alle sezioni estreme di una trave in funzione dei movimenti delle stesse sezioni

Pensiamo che per le sezioni estreme di una trave J-A siano noti lo spostamento relativo δ_{ja} (positivo se risulta destrogira la rotazione della congiungente j-a dei baricentri delle sezioni estreme) e le rotazioni φ_j, φ_a (3.2).

Per ricavare le conseguenti azioni facciamo avvenire, con la consueta procedura, le loro cause, ossia i movimenti, una per volta (fig. 3.7).

(3.2) Per maggiore chiarezza d'esposizione, i movimenti non vengono indicati col medesimo simbolo a, e i loro indici sono riferiti ai nodi.

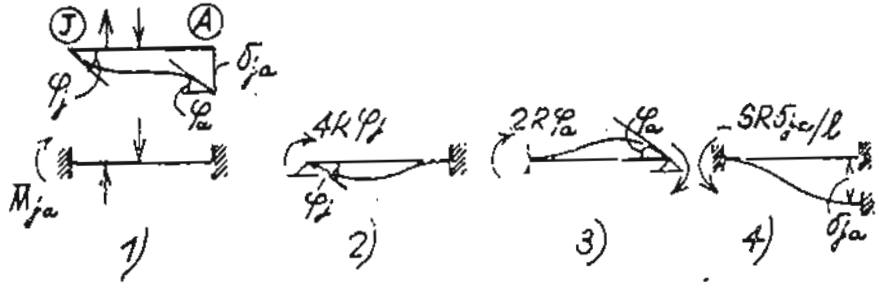


Fig. 3.7

c) - La equazioni

Consideriamo un telaio comunque caricato, costituito da ritti verticali e travi orizzontali, con i nodi liberi (tutti o in parte) di ruotare e di traslare, alcuni orizzontalmente, altri verticalmente (fig. 3.8).

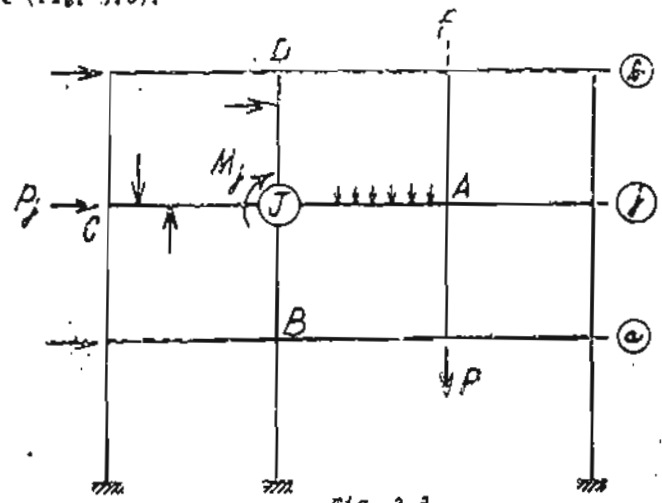


Fig. 3.8

Per l'equilibrio alla rotazione di un generico nodo J, contornato dai nodi A,..., D e soggetto al momento esterno M_j, si deve avere (ritenendo al solito positivi i momenti destrogiri alle estremità delle aste)

1. Per effetto dei carichi considerando le estremità incastrate:

$$M_{ja} = \bar{M}_{ja} , \qquad T_{ja} = \bar{T}_{ja} .$$

2. Per la sola rotazione φ_j ($R = EJ/l$):

$$M_{ja} = 4 R \varphi_j , \qquad M_{aj} = 2 R \varphi_j ,$$

$$T_{ja} \text{ (rivolto verso il basso)} = - T_{aj} = (M_{ja} + M_{aj})/l = 6 R \varphi_j/l$$

3. Per la sola rotazione φ_a:

$$M_{aj} = 4 R \varphi_a , \qquad M_{ja} = 2 R \varphi_a , \qquad T_{ja} = - T_{aj} = 6 R \varphi_a/l .$$

4. Per lo spostamento relativo δ_{ja}. Al posto di tale movimento conviene considerare il rapporto

$$\gamma_{ja} = \delta_{ja}/l = (\delta_j - \delta_a)/l , \qquad [3.7]$$

ossia la rotazione che la trave dovrebbe effettuare, quale corpo rigido, per dar luogo allo stesso spostamento relativo delle sue sezioni estreme; ritenendola al solito positiva se destrogira, si ha allora

$$M_{ja} = M_{aj} = -6 R \gamma_{ja} , \qquad T_{ja} = - T_{aj} = -12 R \gamma_{ja}/l .$$

In totale:

$$M_{ja} = \bar{M}_{ja} + 4 R \varphi_j + 2 R \varphi_a - 6 R \gamma_{ja} , \qquad [3.8]$$

$$T_{ja} = \bar{T}_{ja} + \frac{6R}{l} (\varphi_j + \varphi_a - 2\gamma_{ja}) . \qquad T_{aj} = \bar{T}_{aj} - \frac{6R}{l} (\varphi_a + \varphi_j - 2\gamma_{ja}) . \qquad [3.9]$$

$$M_j - \sum_i M_{ji} = 0 , \qquad (i = A, B, C, D) \qquad [a]$$

per cui, tenendo conto della relazione [3.8], l'equazione di equilibrio alla rotazione dello stesso nodo J risulta [le varie sezioni collegate al nodo J ruotano del medesimo angolo φ_j; $R_{ji} = (EJ/l)_{ji}$]

$$M_j - \sum_i \bar{M}_{ji} + 4 \varphi_j \sum_i R_{ji} + 2 \sum_i R_{ji} \varphi_i - 6 \sum_i R_{ji} \gamma_{ji} , \qquad (i = A, B, C, D) \qquad [3.10]$$

ove le somme sono da estendere a tutte le aste collegate al nodo, escludendo ovviamente quegli elementi il cui contributo nella relativa somma non esiste, essendo nulli i carichi, o la rotazione φ_i, o lo spostamento δ_{ji} (quindi γ_{ji}).

Prendiamo ora in esame, trascurando al solito la deformazione per sforzo assiale, una travata j del telaio suscettibile di spostamenti relativi rispetto alle travate vicine a, b. Per l'equilibrio alla traslazione lungo il suo asse dev'essere (ritenendo positivi gli sforzi taglianti verso destra per le estremità degli elementi collegati alla trave)

$$P_j - \sum_i T_{ji} = 0 \quad , \qquad [b]$$

con la somma estesa a tutti gli elementi compresi tra la travata j e le due contigue a, b. Tenendo conto della formula [3.9] e dei segni degli sforzi taglianti espressi in funzione delle rotazioni (per la travata, sono positive le forze verso destra; inoltre i tagli $\bar{T}_{ji}$ sono considerati positivi, se applicati verso destra alle relative sezioni) si ottiene l'equazione di equilibrio alla traslazione della travata j

$$P_j - \sum_i \bar{T}_{ji} + 6 \sum_a \frac{R_{ji}}{l_{ji}} (\varphi_j + \varphi_i - 2\gamma_{ji}) - 6 \sum_b \frac{R_{ji}}{l_{ji}} (\varphi_j + \varphi_i - 2\gamma_{ji}) = 0, \qquad [3.11]$$

ove la prima somma è da estendere a tutti gli elementi che si collegano alla travata j; la seconda a quelli compresi tra le due travate, j, a (con γ_{ji} uguale per tutti gli elementi della medesima lunghezza); la terza a quelli tra j e b.

Ovviamente l'equazione [3.11] vale anche per una trave verticale quale la f (fig. 3.8), con l'intesa però di ritenere positivi tanto l'eventuale carico applicato alla stessa trave f, quanto gli sforzi taglianti T_{ji} agenti alle estremità delle membrature collegate alla f, se essi sono rivolti verso il basso: inoltre la seconda somma è da intendere estesa alle travi a sinistra e la terza a quelle a destra.

c) - Di equazioni del tipo [3.10], ne debbono essere scritte tante quanti sono i nodi liberi di ruotare (quindi anche in corrispondenza di eventuali sezioni articolate, da considerare alla stregua di un nodo comprendente una sola membratura); del tipo [3.11], quante sono le travate libere di traslare (orizzontalmente o verticalmente). Non stiamo a dilungarci su osservazioni che già facemmo a proposito del modo di procedere generale; ci limitiamo a rilevare l'unica lieve variante di aver considerato gli spostamenti relativi δ_{ji} (e le corrispondenti γ_{ji}) anzichè quelli totali.

Esempio 3.4

Risolvere il telaio dell'esempio 3.1.

Soluzione

Equazione di equilibrio alla rotazione [3.10] scritta per il nodo A:

$$\left[\frac{ql^2}{12} - \frac{q(2l)^2}{12}\right] + 4\varphi_a\left(R + R + \frac{R}{2}\right) + 2R\varphi_b - 6\left(R\gamma_{ac} + \frac{R}{2}\gamma_{ad}\right) = 0 \quad ;$$

equazione di equilibrio alla traslazione [3.11] scritta per l'asta A-B:

$$-2\left(-ql - \frac{ql}{2}\right) + 6 \cdot 2\frac{R}{l}(\varphi_b - 2\gamma_{ac}) - 6 \cdot 2\frac{R/2}{2l}(\varphi_a - 2\gamma_{ad}) = 0 \quad .$$

Essendo $\varphi_b = \varphi_a$, $\gamma_{ad} = -\gamma_{ac}/2$, si ottiene:

$$12R\varphi_a - 4{,}5R\gamma_{ac} - ql^2/4 = 0$$

$$3ql + 9R\varphi_a/l - 27\gamma_{ac}R/l = 0 \quad ,$$

e tali equazioni coincidono con quelle ricavate direttamente nell'es. 3.1.

Al solito, ricavate le incognite φ_a, γ_{ac} ($\varphi_a = 0{,}071429\, ql^3/EJ$, $\gamma_{ac} = 0{,}13492\, ql^3/EJ$), mediante le relazioni [3.8], [3.9] si risale ai valori delle azioni interne. Così, ad esempio ($\varphi_b = \varphi_a$):

$$M_{ab} = \bar{M}_{ab} + 4R\varphi_a + 2R\varphi_b - 6R\gamma_{ab} = 0 + 6R\varphi_a - 0 = 0{,}4286\, ql^2 \quad .$$

3.2. METODO DELL'EQUILIBRIO: STRUTTURE CON I NODI LIBERI SOLTANTO DI RUOTARE

3.2.1. Equazione tipica per telai aventi i nodi che ruotano soltanto (equazione delle φ rotazioni)

E' un caso particolare dell'equazione [3.10]; essendo nulli gli spostamenti ($\gamma = 0$), per l'equilibrio alla rotazione di un generico nodo J (fig. 3.9):

$$M_j = \sum_i \bar{M}_{ji} + 4\varphi_j \sum_i R_{ji} + 2\sum_i R_{ji}\varphi_i \qquad (i = A,B,C,D) \qquad [3.12]$$

Di tali equazioni se ne debbono scrivere tante quanti sono i nodi che possono ruotare, comprese quindi le estremità articolate, da considerare come nodi comprendenti una sola asta (es. 3.6). Ogni equazione contiene al massimo 5 incognite ($\varphi_j, \varphi_a, \ldots, \varphi_d$), per cui frequentemente è detta "delle 5 rotazioni".

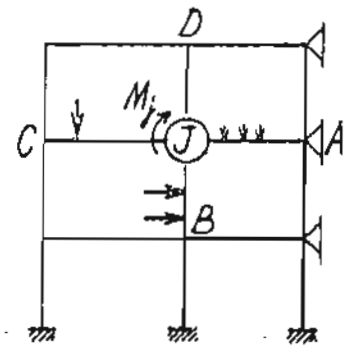


Fig. 3.9

Ricavate le rotazioni φ dei nodi, si calcolano i momenti alle estremità di ogni asta con la relazione:

$$M_{ja} = \bar{M}_{ja} + 4R\varphi_j + 2R\varphi_a \,, \qquad [3.13]$$

che è la [3.9] con $\psi_{ja} = 0$.

Esempio 3.5

Risolvere il telaio della fig. 3.10 avente tutte le aste di uguale rigidità R.

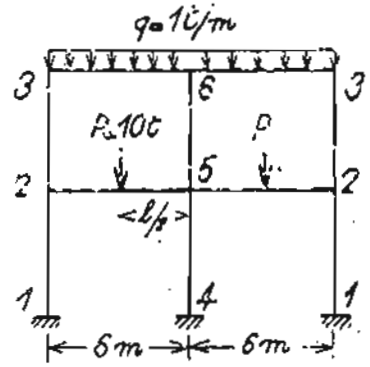


Fig. 3.10

Soluzione

Poiché il telaio è simmetrico ed è caricato simmetricamente, i nodi sono fissi e le uniche incognite sono le rotazioni dei nodi 2 e 3.

Per i nodi 2 e 3 l'equazione delle 5 rotazioni [3.12] risulta (tenendo presente che il momento d'incastro perfetto di una trave soggetta a un carico concentrato nella mezzeria vale $Pl/8 = 7{,}5$ tm $= 7{,}5\cdot10^5$ kgcm; $ql^2/12 = 3.0$ tm):

$$-7{,}5\cdot10^5 + 4\varphi_2 3R + 2R\varphi_3 = 0$$

$$-3{,}0\cdot10^5 + 4\varphi_3 2R + 2R\varphi_2 = 0 \,,$$

e la soluzione è

$$\varphi_2 = 0{,}58696\cdot10^5/R \,, \qquad \varphi_3 = 0{,}22826\cdot10^5/R \,.$$

Le rotazioni sono entrambe positive, quindi destrogire. Ad esempio il momento all'estremità 2-5 vale, applicando la [3.13]:

$$M_{25} = -\frac{Pl}{8} + 4R\varphi_2 + 0 = -7{,}5\cdot10^5 + 2{,}35\cdot10^5 = -5{,}15 \text{ tm} \,.$$

Esempio 3.6

Risolvere il telaio della fig. 3.11.

Soluzione

Sono incognite le rotazioni $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Ad esempio per il "nodo" 1 l'equazione [3.12] fornisce:

$$-ql^2/12 + 4\varphi_1 R + 2R\varphi_2 = 0 \,.$$

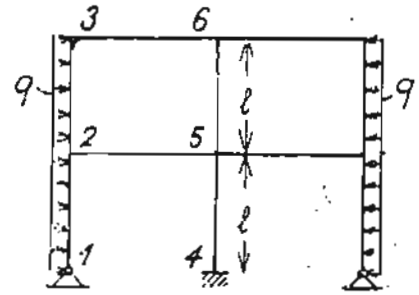


Fig. 3.11

Le altre due equazioni sono uguali (a parte s'intende i termini noti, ossia i momenti d'incastro) a quelle viste nell'esempio precedente.

3.2.3. Risoluzione iterativa: il metodo di Cross

a) - I movimenti dei nodi, o i momenti agli estremi delle membrature, possono essere ricavati anche procedendo iterativamente, ossia ripetendo una prestabilità serie di operazioni sino a raggiungere il voluto grado di approssimazione.

E' possibile escogitare un elevato numero di tali modi di procedere; tra essi ha acquistato larga risonanza, per lo studio delle strutture aventi i nodi liberi soltanto di ruotare (come spesso è lecito considerare), il metodo di Cross (1930), il quale presenta non soltanto il vantaggio di una rapida convergenza, ma anche quello di operazioni molto semplici, per di più dotate di una chiara interpretazione fisica.

Per facilitare l'esposizione del procedimento, che d'altronde come vedremo è assai semplice, premettiamo alcune rilevanti osservazioni.

b) - La rigidezza alla rotazione dell'estremità di un'asta

Data una trave A-B, si definisce rigidezza alla rotazione W_{ab} del suo estremo A il momento che dev'essere applicato alla sezione A per provocarne la rotazione unitaria, considerando gli spostamenti dei nodi nulli. Se l'estremità B è incastrata, evidentemente la rigidezza alla rotazione non è altro che un particolare valore dei coefficienti di rigidezza definiti precedentemente; e se l'asta è prismatica vale

$$W_{ab} = M_a/\varphi_a = 4\,EJ/l = 4\,R\ , \qquad [3.14]$$

essendo $R = EJ/l$ la rigidità della trave.

Nel caso in cui la sezione B sia articolata, o si abbia per la trave configurazione simmetrica o antimetrica, la rigidezza alla rotazione vale

$$W_{ab} = 3\,R\,,\quad W_{ab} = 2\,R\ (\text{coppie simm.}),\quad W_{ab} = 6\,R\ (\text{coppie antim.})\,. \qquad [3.15]$$

c) - Distribuzione di un momento tra più aste aventi rigidezza alla rotazione nota (equilibramento di un nodo al quale è applicato un momento)

A un nodo J in cui si collegano n aste per le quali è nota la rigidezza alla rotazione, sia applicato un momento M_j (fig. 3.12). Se il collegamento è rigido la rotazione φ_j del nodo dev'essere uguale, per congruanza, alla rotazione delle sezioni estreme delle aste che si saldano in J; per cui esse ricevono i momenti, ricordando la definizione di rigidezza alla rotazione,

$$\begin{aligned} M_{ja} &= W_{ja}\ \varphi_j \\ M_{jb} &= W_{jb}\ \varphi_j \\ &\dots \\ M_{jn} &= W_{jn}\ \varphi_j\,. \end{aligned} \qquad [a]$$

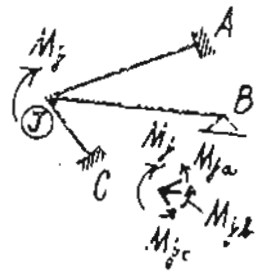


Fig. 3.12

Se il momento M_j è destrogiro, debbono esser tali sia la rotazione φ_j, sia i momenti applicati alla estremità delle varie aste; quindi il nodo riceve, oltre al momento esterno, i momenti sinistrogiri $M_{ja}, \dots, M_{jn}$, e per il suo equilibrio giratorio si deve avere

$$M_j - \sum_{i=1}^{n} M_{ji} = 0\,. \qquad [b]$$

Sommando allora membro a membro le relazioni [a], si ottiene

$$\sum_i M_{ji} = M_j = \varphi_j \sum_i W_{ji}\,,$$

$$\varphi_j = \frac{M_j}{\sum_i W_{ji}}\,. \qquad [3.16]$$

Allora per una qualunque asta s risulta, utilizzando la relativa espressione $M_{js} = W_{js}\,\varphi_j$ [relaz. a],

$$M_{js} = M_j\,\frac{W_{js}}{\sum_i W_{ji}} = M_j\,\rho_{js}\,, \qquad [3.17]$$

ossia il momento esterno si ripartisce tra le varie aste in modo proporzionale alle rispettive rigidezze alla rotazione; e ρ è il coefficiente di ripartizione. Può essere opportuno notare che le espressioni [3.14 e 3.15] della rigidezze (relative ad aste prismatiche) potranno essere impiegate soltanto quando i nodi ruotano senza traslare.

Esempio 1.7

Risolvere i casi indicati nella fig. 3.13.

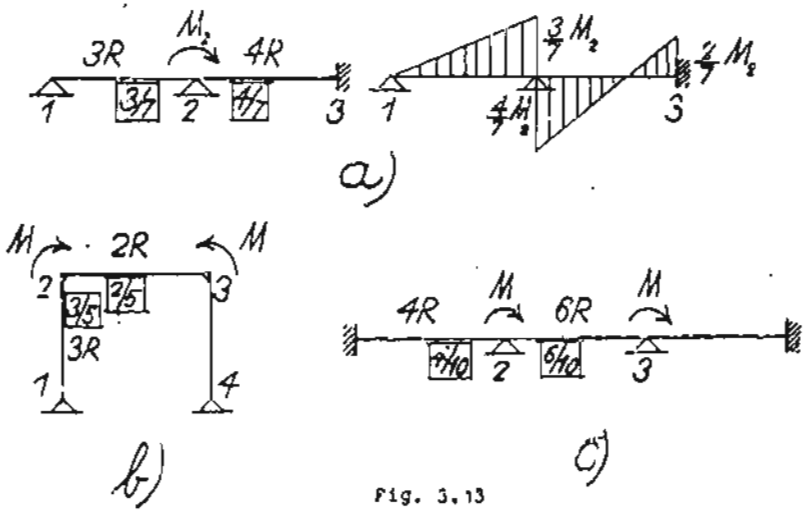


Fig. 3.13

Soluzione

I coefficienti di ripartizione valgono:

a) $\rho_{21} = 3/7$, $\rho_{23} = 4/7$;

b) $\rho_{21} = 3/5$, $\rho_{23} = 2/5$;

c) $\rho_{21} = 4/10$, $\rho_{23} = 6/10$.

d) - Il procedimento

Consideriamo all'inizio tutti i nodi impediti di ruotare mediante vincoli ausiliari, ossia mediante ideali morsetti. In tale provvisoria situazione, alle estremità delle aste sono applicati i momenti d'incastro perfetto che indicheremo col numero romano I; la congruenza è evidentemente soddisfatta, essendo la continuità elastica rispettata, mentre in genere non è soddisfatto l'equilibrio, poichè per i vari nodi la somma dei momenti d'incastro I è diversa da zero.

In corrispondenza di un solo nodo (e non ha importanza quale) allentiamo il morsetto, mantenendo tutti gli altri nodi bloccati. Allentare il morsetto comporta l'annullamento della sua reazione: ma ciò equivale ad aggiungere la stessa reazione cambiata di segno, ossia applicare al nodo in esame il momento $-\sum I$, che (secondo quanto abbiamo visto poc'anzi) siamo in grado di ripartire tra le varie aste, poichè per esse la rigidezza alla rotazione è nota (4 R), avendo uno degli estremi incastrato. I momenti ripartiti vengono indicati col numero romano II , quelli trasmessi alle estremità incastrate col numero III ; e ciascun momento III , se la trave è prismatica, vale II/2 , ed ha il medesimo segno del relativo II. Il nodo è ruotato e risulta ora in equilibrio; possiamo quindi tornare a serrare il morsetto.

Passiamo a un altro nodo e ripetiamo la medesima operazione: ossia, mantenendo i nodi circostanti bloccati, allentiamo il suo morsetto; il che equivale ad aggiungere, cambiata di segno, la somma dei momenti d'incastro, ossia la $-\sum (I + III)$.

E così si prosegue, passando da un nodo all'altro, sino ad estinguere le trasmissioni; ed è chiaro che nelle operazioni di equilibramento successive alla prima ci si trova a ripartire soltanto dei momenti III .

Il momento definitivo in ciascun estremo si ottiene sommando, col relativo momento I , i vari momenti II e III ; e si può tracciare facilmente il diagramma dei momenti (le ordinate vengono portate dalla parte delle fibre tese) immaginando ogni asta separata, soggetta ai carichi e ai momenti trovati ai suoi estremi.

E' chiaro che con tale metodo iterativo la congruenza nelle varie fasi è sempre rispettata, mentre l'equilibrio viene raggiunto in tempi successivi, a mano a mano che si allentano i morsetti.

d) - Osservazioni

Al termine del procedimento, la somma dei momenti intorno a ciascun nodo deve risultare nulla, qualora s'intende non sia applicato un momento esterno. Ma se tale momento esiste e vale M_{jo} , nella prima fase si ripartisce $(M_{jo} - \sum I)$.

Se l'estremità A di una trave J-A è articolata, non è necessario applicare ad essa un morsetto; però il momento d'incastro I_{ja} dev'essere quello relativo alla trave incastrata in J e appoggiata in A , e la rigidezza vale 3 R .

Per una struttura simmetrica caricata simmetricamente il calcolo può essere limitato a metà struttura, assumendo per le aste bisecate dall'asse di simmetria la rigidezza 2 R, e considerando i nodi che si trovano sul medesimo asse incastrati; la rigidezza per le aste vale 6 R, se la condizione di carico è antimetrica.

Esempio 3.8

In alcuni casi il procedimento di Cross comporta una sola ripartizione, come è mostrato nei seguenti esempi.

Caso a) (fig. 3.14).

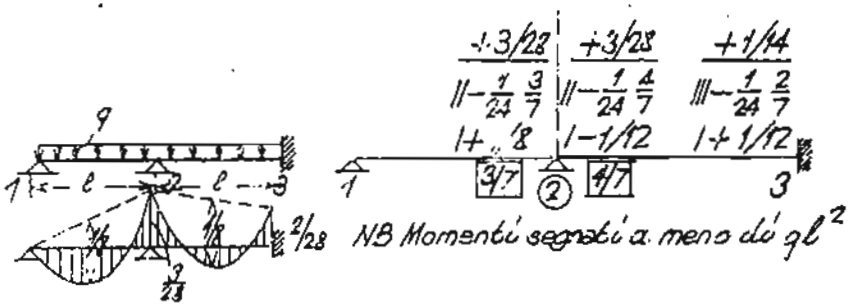


Fig. 3.14

$I_{21} = ql^2/8$, $I_{23} = -ql^2/12$;

$\rho_{21} = 3/7$, $\rho_{23} = 4/7$.

Caso b) (fig. 3.15).

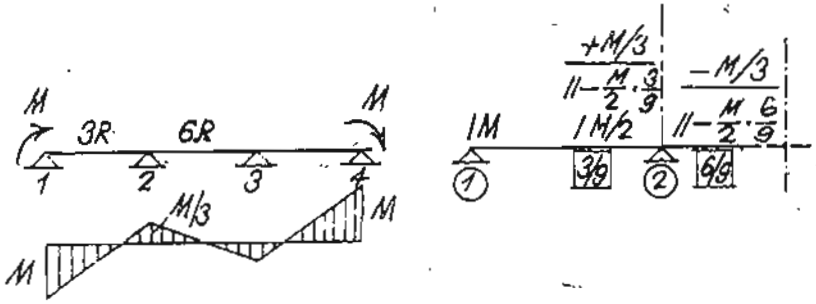


Fig. 3.15

Per la trave 1-2 il momento è da considerare alla stregua di una generica condizione di carico, quindi, considerando metà struttura per l'antimetria:

$I_{21} = M/2$, $\rho_{21} = 3/9$; $\rho_{23} = 6/9$.

Caso c) (fig. 3.16).

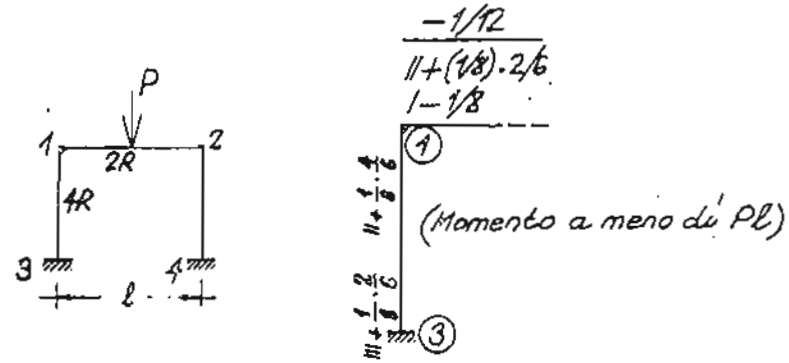


Fig. 3.16

Considerando metà struttura per la simmetria del carico:

$I_{12} = -Pl/8$, $\rho_{13} = 4/6$, $\rho_{12} = 2/6$.

Esempio 3.9

Risolvere col metodo di Cross il telaio della fig. 3.17.

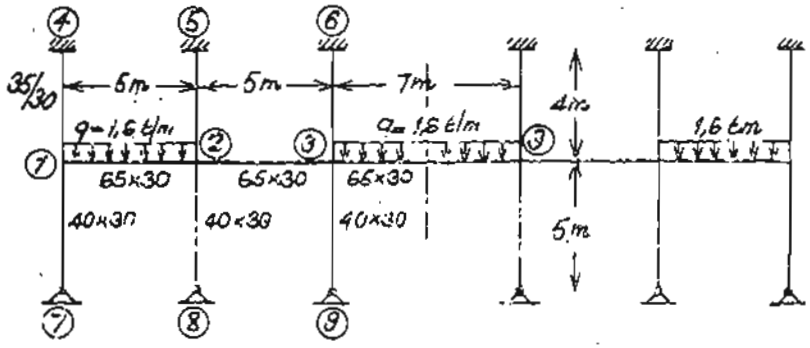


Fig. 3.17

a) Momenti d'incastro:

$$I_{12} = -I_{21} = -1,6 \cdot 5^2/12 = -3,33 \text{ tm} ,$$

$$I_{33} = -1,6 \cdot 7^2/12 = -6,53 \text{ tm} .$$

b) Coefficienti di ripartizione:

Nodo 1

aste	lati sez. (cm)	J (dm^4)	l (dm)	k	W = kJ/l	ρ
1-2	65/30	68,66	50	4	5,49	0,730
1-7	40/30	16,0	50	3	0,96	0,128
1-4	35/30	10,72	40	4	1,07	0,142
					7,52	1,000

Procedendo in modo analogo, per le aste facenti capo ai nodi 2 e 3 i coefficienti di ripartizione valgono:

aste	2-3	2-8	2-1	2-5	
ρ	0,422	0,074	0,422	0,082	($\sum \rho = 1,0$)

aste	3-3	3-9	3-2	3-6	
k	2	3	4	4	
W = kJ/l	1,96	0,96	5,49	1,07	($\sum W = 9,48$)
ρ	0,207	0,101	0,579	0,113	($\sum \rho = 1,0$) .

Lo sviluppo del procedimento è riportato nella fig. 3.18.

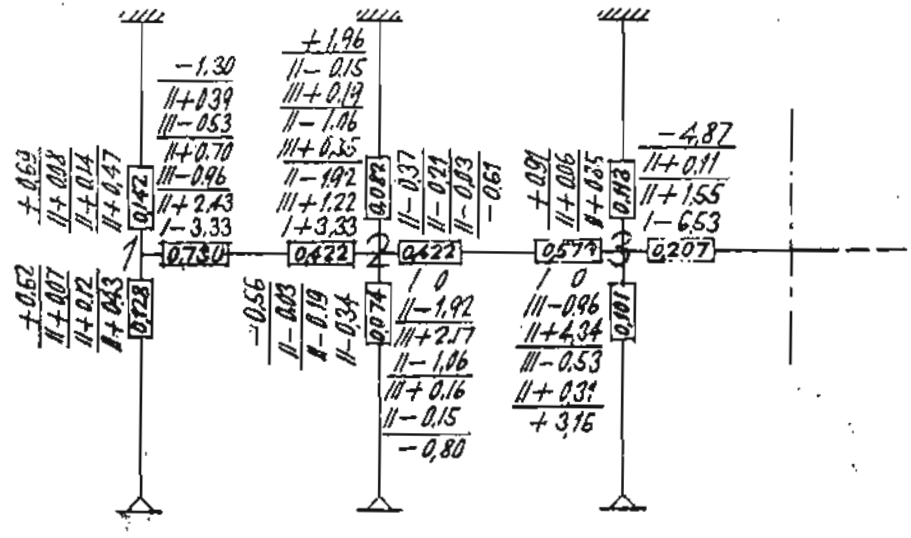


Fig. 3.18

Esempio 3.10

Il metodo di Cross può essere usato vantaggiosamente quando si abbiano, per uno o più nodi della struttura, movimenti impressi, e quindi noti. Studiare, ad es., la trave continua a due campate uguali della fig. 3.19, per la quale l'appoggio interno subisce lo spostamento δ.

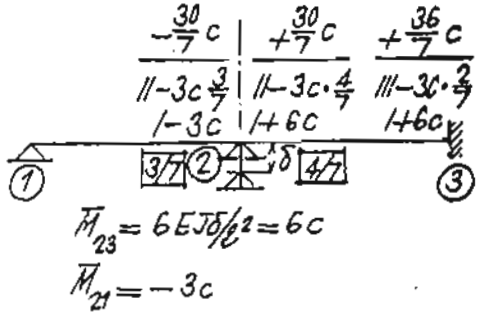


Fig. 3.19

Soluzione

Quando si considera impedito di ruotare il nodo 2 e si fa avvenire

lo spostamento, i momenti d'incastro perfetto valgono:

$$I_{21} = -3\,EJ\delta/l^2 \,, \qquad I_{23} = +6\,EJ\delta/l^2 \quad ;$$

quindi si equilibra il nodo 2 nel modo solito.

3.3. METODO DELL'EQUILIBRIO: STRUTTURE CON I NODI LIBERI SOLTANTO DI TRASLARE

3.3.1. Per lo studio di strutture soggette ad azioni orizzontali, frequentemente le approssimazioni sono buone considerando le travi indeformabili rispetto ai ritti, ossia i nodi liberi soltanto di traslare.

Ovviamente le equazioni risolventi del tipo [3.2] possono essere ricavate facendo avvenire un movimento per volta. Ma se si tratta di un telaio con le colonne prismatiche, può essere utilizzata l'equazione tipica [3.11] di equilibrio alla traslazione per le travi, ponendo in essa tutte nulle le rotazioni φ dei nodi delle stesse travi, e ottenendo pertanto:

$$P_j - \sum_i \bar{T}_{ji} - 12 \sum_a \frac{R_{ji}}{l_{ji}} \gamma_{ji} + 12 \sum_b \frac{R_{ji}}{l_{ji}} \gamma_{ji} = 0 \,, \qquad [3.18]$$

ove, può essere opportuno ricordarlo, la prima somma è da estendere a tutti gli elementi che si collegano alla travata j; la seconda a quelli compresi tra le travate j e l'inferiore a; la terza a quelli tra le travate j e la superiore b.

Calcolate le quantità $\gamma = \delta/l$, è poi facile, mediante le solite relazioni [3.8], [3.9], risalire alle azioni interne applicate agli estremi dei ritti:

$$T_{ja} = \bar{T}_{ja} + 12\,R\,\gamma_{ia}/l \,, \qquad M_{ja} = \bar{M}_{ja} - 6\,R\,\gamma_{ia} \,,$$

$$T_{jb} = \bar{T}_{jb} - 12\,R\,\gamma_{ib}/l \,, \qquad M_{jb} = \bar{M}_{jb} - 6\,R\,\gamma_{ib} \,. \qquad [3.19]$$

Esempio 3.11

Studiare il telaio della fig. 3.20, considerando le travi 4-5, 6-7 indeformabili rispetto ai piedritti.

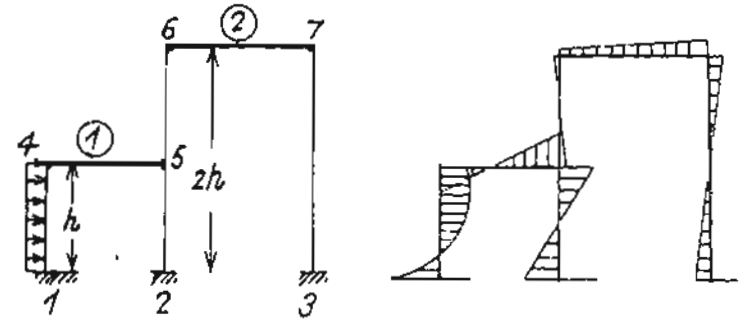


Fig. 3.20

Soluzione

Indichiamo con δ_1, δ_2 le traslazioni delle travi 1,2. Essendo $\gamma_{14} = \gamma_{25} = \delta_1/h$, $\gamma_{56} = (\delta_2 - \delta_1)/h$, $\gamma_{37} = \delta_2/2h$, l'equazione di equilibrio [3.18] fornisce per le travi 1,2:

$$\frac{qh}{2} - 12\,R \cdot 2\,\delta_1/h^2 + 12\,R\,(\delta_2 - \delta_1)/h^2 = 0 \,,$$

$$-12\left[R(\delta_2 - \delta_1)h^2 + (R/2)(1/2\,h)\,\delta_2/2\,h\right] = 0 \,;$$

quindi si ottiene

$$\delta_1 = 0{,}03947\ qh^4/EJ \,, \qquad \delta_2 = 0{,}03509\ qh^4/EJ \,.$$

I momenti flettenti si calcolano con la [3.19], e si ricava ad es.:

$$M_{41} = qh^2/12 - 6\,R\,\gamma_{41} = (0{,}0833 - 0{,}2368)qh^2 = -0{,}1535\ qh^2 \,,$$

$$M_{14} = (-0{,}0833 - 0{,}2368)qh^2 = -0{,}3201\ qh^2 \,.$$

3.3.2. Rigidezza alla traslazione e distribuzione di una forza tra più aste aventi rigidezza alla traslazione nota

a) - Data una trave A-B, pensiamo di imprimere al suo estremo A la traslazione $\delta_{ab} = 1$ lungo una data direzione, considerando l'altro estremo B impedito di spostarsi e la stessa sezione A impedita di ruotare; definiamo rigidezza alla traslazione U_{ab} la forza correlativa a detto spostamento.

Alcuni casi sono di semplice e ricorrente soluzione. Se l'asta prismatica della fig. 3.21 ha l'estremità B incastrata, alla forza P conseguono i momenti, poichè la sezione A dev'essere considerata impedita di ruotare $(Pl^2/2EJ - \bar{M}_{ab}l/EJ = 0)$:

$$\bar{M}_{ab} = \bar{M}_{ba} = -Pl/2 \quad , \qquad [3.20]$$

sinistrogiri se la forza è rivolta verso destra; pertanto la freccia vale

$$f = Pl^3/3EJ - \bar{M}_{ab}l^2/2EJ = Pl^3/12EJ \quad . \qquad [3.21]$$

e ponendo $f = 1$ risulta

$$U_{ab} = 12EJ/l^3 \quad . \qquad [3.22]$$

Se l'estremo B è incernierato (fig. 3.21) si ha invece:

$$\bar{M}_{ab} = -Pl \quad , \qquad [3.23]$$

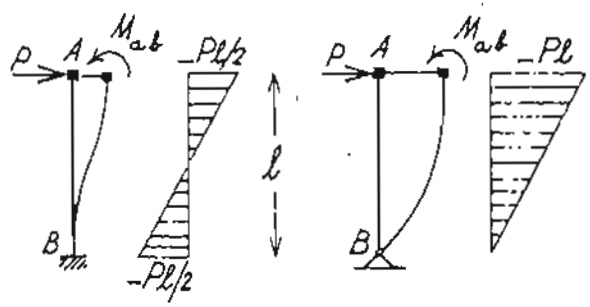


Fig. 3.21

$f = Pl^3/3EJ$; per cui, ponendo al solito $f = 1$,

$$U_{ab} = 3EJ/l^3 \quad . \qquad [3.24]$$

Per un'asta A-B la rigidezza alla traslazione lungo il suo asse vale

$$U_{ab} = EA/l \quad . \qquad [3.25]$$

b) - Consideriamo una trave j indeformabile, che collega più aste ad essa ortogonali aventi rigidezza alla traslazione nota, soggetta a una forza P_j assiale (fig. 3.22).

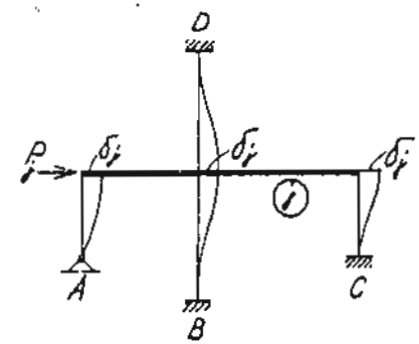


Fig. 3.22

Lo spostamento δ_j della trave dev'essere uguale, per congruenza, allo spostamento relativo degli estremi delle varie aste; quindi per ciascuna di esse, ricordando la definizione di rigidezza alla traslazione, lo sforzo tagliante vale

$$\begin{aligned} P_{ja} &= U_{ja}\delta_j \\ P_{jb} &= U_{jb}\delta_j \\ &\dots \\ P_{jn} &= U_{jn}\delta_j \quad . \end{aligned} \qquad [a]$$

Ma per l'equilibrio della trave j alla traslazione si deve avere

$$P_j = \sum_{i=1}^{n} P_{ji} = 0 \,, \qquad [b]$$

quindi, sommando membro a membro le relazioni [a], si ottiene

$$\delta_j = \frac{P_j}{\sum_i U_{ji}} \,, \qquad [3.26]$$

e per una qualunque asta s, utilizzando la relativa espressione,

$$P_{js} = P_j \frac{U_{js}}{\sum_i U_{ji}} \,; \qquad [3.27]$$

ossia il carico esterno si ripartisce tra le varie aste proporzionalmente alle rispettive rigidezze alla traslazione.

Esempio 3.12

Studiare il telaio della fig. 3.23 avente la trave 1-2 indeformabile rispetto ai ritti, e soggetto al carico orizzontale P.

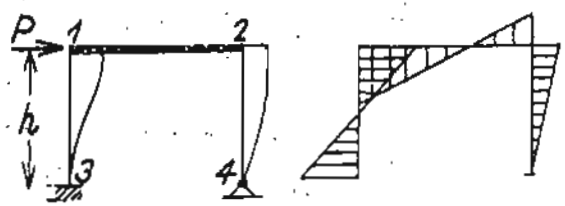


Fig. 3.23

Soluzione

$U_{13} = 12\, EJ/h^3$, $\qquad U_{24} = 3\, EJ/h^3$,

$T_{13} = P \frac{12}{12+3} = \frac{4}{5} P$, $\qquad T_{24} = P \frac{3}{12+3} = \frac{P}{5}$,

$\bar{M}_{13} = \bar{M}_{31} = -T_{13}\, h/2 = -\frac{2}{5} Ph$, $\qquad \bar{M}_{24} = -T_{24}\, h = -\frac{Ph}{5}$.

Esempio 3.13

Il medesimo telaio dell'esempio precedente ha il piedritto 1-3 caricato uniformemente (fig. 3.24).

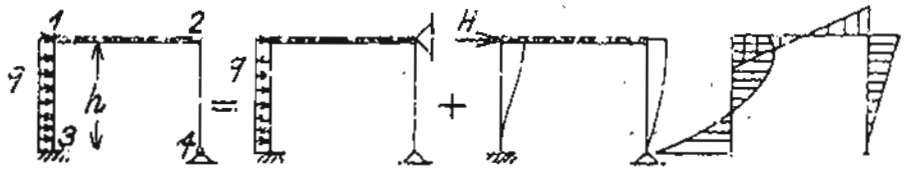


Fig. 3.24

Soluzione

Pensiamo in una prima fase il telaio sottoposto al carico, con la trave 1-2 impedita di spostarsi mediante un appoggio ausiliario (che sviluppa la reazione $H = -qh/2$); poi consideriamo il telaio soggetto alla reazione cambiata di segno. Sovrapponendo gli effetti, e utilizzando l'esempio precedente si ottiene:

$$\bar{M}_{13} = qh^2/12 \ (1^a \text{ fase}) - \frac{2}{5}\frac{qh^2}{2} = -\frac{7}{60}\, qh^2 \,,$$

$$\bar{M}_{31} = -qh^2/12 - \frac{2}{5}\frac{qh^2}{2} = -\frac{17}{60}\, qh^2 \,,$$

$$\bar{M}_{24} = -qh^2/10 \,.$$

c) - Telai con nodi impediti di ruotare, sottoposti a forze orizzontali applicati lungo le travate

Facendo riferimento alla struttura indicata nella fig. 3.25, le colonne di un medesimo piano j hanno le sezioni estreme che subiscono un uguale spostamento relativo; quindi la forza applicata alla travata j di tale piano (che coincide con lo sforzo di taglio complessivo di una ideale sezione che intersechi tutte le colonne inferiori) vale, facendo riferimento al caso indicato, $T_j = P_1 + P_2$. La forza T_j dev'essere ripartita, secondo la [3.27], proporzionalmente alle rigidezze alla traslazione delle colonne; ma nell'espressione che definisce le rigidezze sono comuni i valori di E, di $l = h_j$ e del coefficiente numerico, quindi la ripartizione può essere eseguita in parti proporzionali ai momenti d'inerzia J_j delle sezioni dei vari ritti del medesimo piano; e, ad esempio, per l'asta a risulta

$$T_a = T_j \frac{J_a}{\sum_i J_i} , \qquad \bar{M}_{ba} = \bar{M}_{ab} = - T_a \frac{h_j}{2} . \qquad [3.28]$$

essendo la somma estesa a tutte le aste dello stesso piano j.

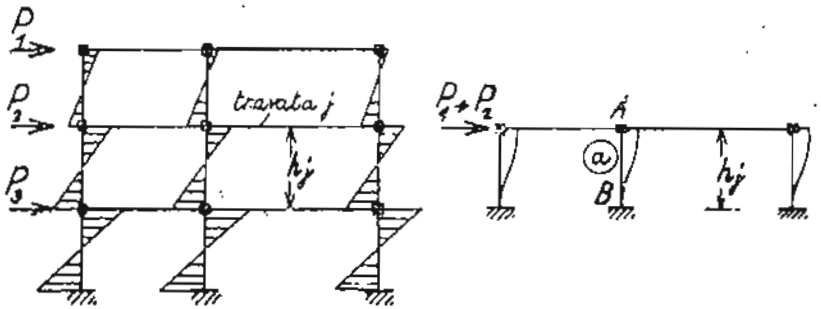


Fig. 3.25

Ovviamente l'osservazione fatta vale anche quando il telaio sia soggetto a forze orizzontali agenti anche non in corrispondenza dei nodi, essendo sufficiente, per applicare le cose dette, ricorrere ad appoggi ausiliari che provvisoriamente blocchino gli spostamenti orizzontali.

Utilizzando le rigidezze alla traslazione è immediato il calcolo della deformata del telaio che ha i nodi liberi di traslare ma non di ruotare; infatti lo spostamento relativo di una travata j rispetto alla sottostante $j-1$ vale, per la [3.26],

$$\delta_{j,j-1} = T_j / \sum_i \nu_{ji} . \qquad [3.29]$$

essendo T_j lo sforzo tagliante "del piano" in questione.

Vedremo che l'ipotesi di travate indeformabili rispetto ai ritti fornisce in pratica, frequentemente, risultati di soddisfacente approssimazione, almeno finchè la rigidità EJ/l delle travi non sia inferiore a quella delle colonne.

3.3.3. La trave Vierendeel avente i nodi liberi soltanto di traslare

a) - Sono travi costituite da due correnti in genere rettilinei, collegati da aste verticali (montanti). Una soluzione approssimata può essere ottenuta considerando i nodi liberi soltanto di traslare (montanti indeformabili rispetto alle aste dei correnti): gli errori, come constateremo in seguito (par. 3.7), sono in genere piccoli, in corrispondenza di un nodo, se la rigidità del montante non è inferiore a quelle delle aste dei correnti; il calcolo "esatto", ammesso che valga la pena di farlo, è molto semplice se i due correnti sono uguali (par.3.4.3); ma s'intende che può essere eseguito, sempre col metodo "dell'equilibrio", anche senza queste limitazioni, oppure impiegando il metodo "della congruenza".

Per la soluzione approssimata di nodi liberi soltanto di traslare nulla è da aggiungere, a parte qualche osservazione, a quanto è già stato detto a proposito dei telai (par. 3.3.2c).

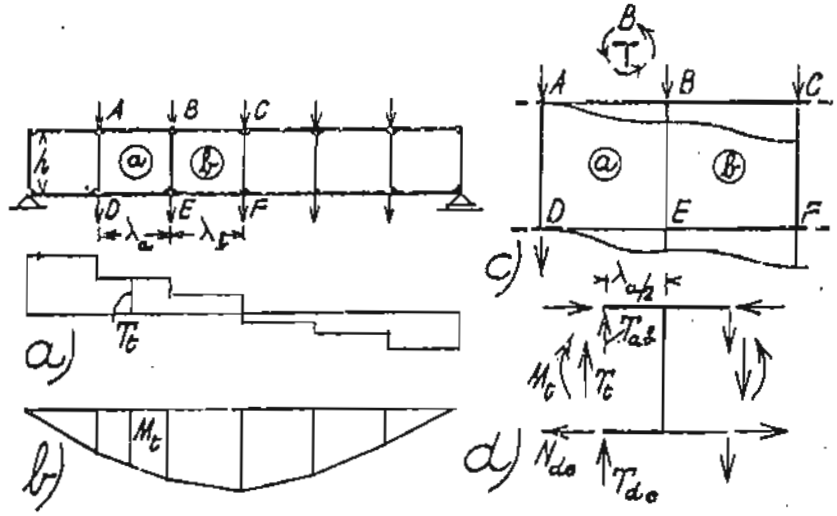


Fig. 3.26

b) - Innanzi tutto notiamo che se, come di solito avviene, le estremità sono appoggiate, è immediato il calcolo delle reazioni degli appoggi, quindi dei diagrammi degli sforzi taglianti (T_t) e dei

momenti flettenti (M_t)(fig. 3.26); azioni interne che riguardano l'intera trave. Per le cose già viste (par. 3.3.2c), lo sforzo di taglio T_t relativo a una generica maglia $\underline{a}$ si ripartisce proporzionalmente ai momenti d'inerzia delle sezioni delle due aste A-B, D-E dei correnti:

$$T_{ab} = T_t \frac{J_{ab}}{J_{ab} + J_{de}} , \qquad T_{de} = T_t \frac{J_{de}}{J_{ab} + J_{de}} ; \qquad [3.30]$$

e i momenti flettenti delle sezioni estreme delle stesse aste valgono:

$$\bar{M}_{ab} = \bar{M}_{ba} = - T_{ab} \lambda_a/2 , \quad \bar{M}_{de} = \bar{M}_{ed} = - T_{de} \lambda_a/2 , \qquad [3.31]$$

ovviamente sinistrogiri (basta considerare la deformata), se il totale sforzo tagliante T_t è positivo secondo la convenzione consueta adottata per le travi nella Scienza delle costruzioni ([3.3]).

Per ogni asta dei due correnti il momento flettente è nullo nella mezzeria del campo corrispondente; quindi, nella mezzeria, il momento totale M_t può essere fornito dalla trave per mezzo soltanto degli sforzi assiali:

$$N_{ab} = - N_{de} = - M_t/h , \qquad [3.32]$$

i quali, ovviamente, comprimono il corrente superiore e tendono quello inferiore, se M_t è positivo ([3.3]).

Noti i momenti agli estremi delle aste orizzontali, risultano

([3.3]) Lo sforzo tagliante è positivo se provoca un incremento positivo del momento flettente (a sua volta positivo se comprime il lembo superiore della trave).

definiti i momenti agli estremi dei montanti dovendo aversi, per l'equilibrio giratorio ad es. del nodo B (positivi i momenti destrogiri per le sezioni estreme delle aste):

$$- M_{bc} - M_{be} - M_{ba} = 0 \quad ; \qquad [3.33]$$

e infine, risultano determinati gli sforzi taglienti dai momenti, ad es.:

$$T_{be} = (M_{be} + M_{eb})/h \quad . \qquad [3.34]$$

e anche gli sforzi assiali.

Esempio 3.14

Studiare la trave Vierendeel della fig. 3.27 supponendo i nodi liberi soltanto di traslare e uguali i due correnti.

Soluzione

Le azioni totali valgono evidentemente (considerando i momenti totali M_t nelle mezzerie dei campi):

$$T_{ta} = 4,5\ P \ , \qquad T_{tb} = 3\ P \ , \qquad T_{tc} = 1,5\ P \ , \qquad T_{td} = 0 \ ;$$

$$M_{ta} = 2,25\ P\lambda \ , \qquad M_{tb} = V\ 1,5\lambda - 1,5\ P\lambda/2 = 6\ P\lambda \ ,$$

$$M_{tc} = 8,25\ P\lambda \ , \qquad M_{td} = 9\ P\lambda \ .$$

Tagli e momenti degli estremi delle aste dei correnti, per le [3.30], [3.31]:

$$T_{12} = T_{56} = T_{ta}/2 = 2,25\ t, \qquad T_{23} = 1,5\ P, \qquad T_{24} = 0,75\ P \ ;$$

$$M_{12} = M_{21} = -1,125\ P\lambda \ , \qquad M_{23} = M_{32} = -0,75\ P\lambda \ ,$$

$$M_{34} = M_{43} = 0,375\ P\lambda \ , \qquad M_{44} = 0 \ .$$

Sforzi assiali delle aste dei correnti ($h = \lambda$); dalla relazione [3.32]:

$$N_{12} = -N_{56} = M_{ta}/h = -2,25\ P \ , \qquad N_{23} = -6\ P \ ,$$

$$N_{34} = -8,25\ P \ , \qquad N_{44} = -9\ P \ .$$

Momenti agli estremi dei montanti; per la [3.3]:

$$-M_{15} - M_{12} = 0 \;, \qquad M_{15} = 1{,}125\ Pa \quad \text{(destrogiro per l'estremità 1-5)};$$

$$-M_{26} - M_{21} - M_{23} = 0 \;, \qquad M_{26} = (1.125 + 0{,}75)Pa = 1{,}875\ Pa \;;$$

$$M_{37} = 1{,}125\ Pa \;, \qquad M_{48} = 0{,}375\ Pa \;.$$

Tagli agli estremi dei montanti:

$$T_{15} = 2M_{15}/h = 2{,}25\ P \;, \qquad T_{26} = 3{,}75\ P \;,$$

$$T_{37} = 2{,}25\ P \;; \qquad T_{48} = 0{,}75\ P \;.$$

Alcuni diagrammi delle sollecitazioni sono riportati nella figura 3.27.

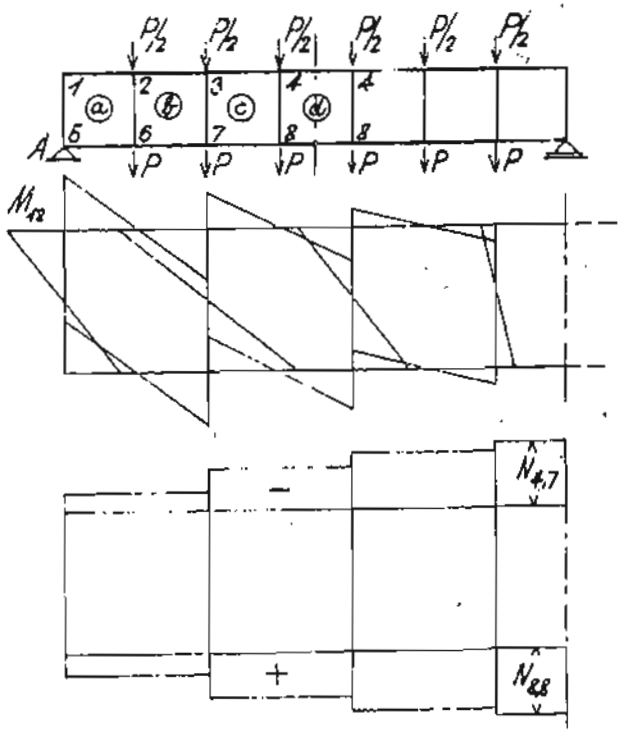


Fig. 3.27

c) - Osservazioni

Le travi Vierendeel debbono essere adeguatamente controventate per impedire sbandamenti laterali.

L'esame dei diagrammi delle sollecitazioni relative all'esempio svolto consente alcuni semplici rilievi, d'altronde deducibili dalle formule precedentemente ricavate:

- le azioni flessionali sia delle aste dei correnti, sia dei montanti, dipendendo dallo sforzo di taglio T_t, tendono ad attenuarsi verso il centro della trave, quando è poco diversa l'ampiezza delle maglie;
- viceversa sono crescenti gli sforzi assiali, che dipendono dal momento M_t;
- lo sforzo tagliante dei montanti è in genere particolarmente intenso verso gli estremi della trave.

Le travi Vierendeel sono sensibilmente più onerose delle corrispondenti travature reticolari, e vengono di solito impiegate quando, a causa della necessità di campi liberi, non può essere accettato l'ingombro dovuto alla presenza delle aste diagonali.

Nel calcolo precedentemente illustrato, non si è tenuto ovviamente conto dell'influenza derivante dalla deformazione per effetto dello sforzo assiale dei correnti; ma per la trave appoggiata agli estremi, ossia esternamente isostatica, tale influenza è al solito assai modesta (più per le sollecitazioni che per le deformazioni), purchè le maglie non abbiano altezza molto piccola rispetto alla loro luce.

Più estese notizie in merito allo stato di sollecitazione e di deformazione si possono trovare ad es. nell'op. cit. nella nota a pag. 3.1.

3.4. METODO DELL'EQUILIBRIO: STRUTTURA AVENTE I NODI CHE RUOTANO E SI SPOSTANO

3.4.1. Si è già accennato che le due classi di casi esaminate nei precedenti paragr. 3.2, 3.3 hanno in pratica notevole importanza; osservazioni sui procedimenti semplificativi verranno fatte nel par. 3.7. Tuttavia, quando lo studio non possa venire effettuato con tali limitazioni, l'impiego dei coefficienti di rigidezza e delle equazioni [3.1] consente la soluzione di qualunque caso.

S'intende che procedimenti iterativi possono venire adottati per telai, con numero qualsiasi di piani e di colonne, aventi i nodi che ruotano e si spostano ([3.4]). Un caso particolare rilevante, per il quale il procedimento "alla Cross" resta molto semplice, verrà illustrato nel punto seguente.

3.4.2. Telai a due stilate uguali, soggetti ad azioni antisimmetriche

Può essere opportuna un'osservazione preliminare.

Per un'asta J-A, incastrata in A e soggetta in J a un solo momento M (fig. 3.28a) si ha la rotazione $\varphi_j = Ml/EJ = M/R$; quindi la rigidezza alla rotazione (che tiene conto anche dello spostamento) vale

$$W = R \quad ; \qquad [3.35]$$

e il coefficiente di trasmissione in A, essendo il diagramma dei momenti costante e in particolare $M_{aj} = -M$, risulta

$$c = -1 \, . \qquad [3.36]$$

Premesso ciò, consideriamo il telaio della fig. 3.28b, sottoposto a due coppie antimetriche M_j ; evidentemente nulla cambia considerando la struttura dimezzata della fig. 3.28c. Se pensiamo di mantenere tutti i nodi, salvo quello J, impediti di ruotare con morsetti (ma liberi di spostarsi), è facile ripartire il momento M_j, perchè le colonne J-A, J-B, essendo nullo il taglio, si trovano precisamente nelle condizioni illustrate dianzi per la mensola isolata; per cui le rigidezze alla rotazione delle aste collegate in J valgono:

$$W_{ja} = R_{ja} \, , \quad W_{jb} = R_{jb} \, , \quad W_{jc} = 3EJ_{jc}/(l/2) = 6R_{jc} \, , \qquad [3.37]$$

e il momento M_j può essere ripartito proporzionalmente ad esse.

Il passaggio al caso generale è allora facile. Consideriamo ad es. lo stesso telaio soggetto a carichi orizzontali (fig.3.26d) o, ciò che è lo stesso, mezzo telaio con carichi dimezzati. Se

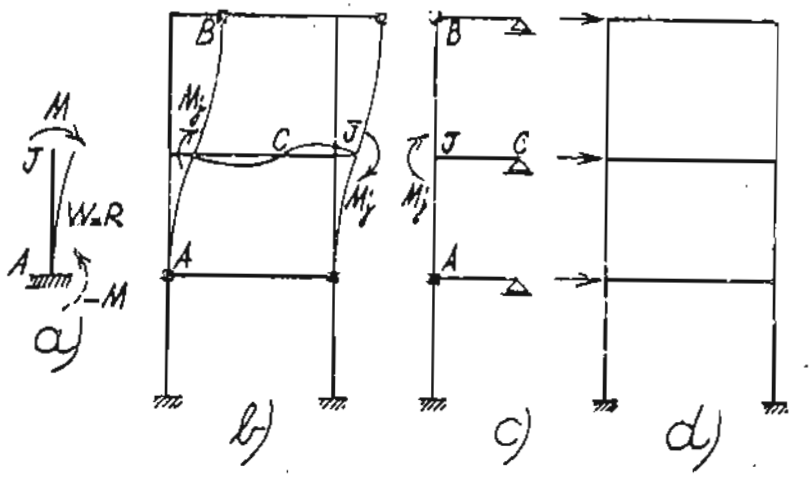


Fig. 3.28

immaginiamo in una prima fase i nodi liberi soltanto di traslare, sappiamo facilmente calcolare i momenti d'incastro I alle estremità dei ritti (par. 3.3.2c); poi pensiamo di equilibrare un nodo alla volta, ripartendo la relativa $-\sum I$ proporzionalmente alle rigidezze [3.37], e tenendo presente che i momenti trasmessi sono uguali e contrari ai momenti ripartiti.

È chiaro quindi che si può ripetere la stessa operazione di equilibramento e di trasmissioni per ciascun nodo, e che la velocità di convergenza è assai elevata perchè, pensando per es. travi e ritti di uguale rigidità R, ad ogni ripartizione i momenti di trasmissione (ossia i disturbi sui nodi adiacenti) valgono soltanto 1/8 del momento squilibrato.

Notiamo infine che, se alla base le estremità sono incernierate, i pilastri inferiori hanno rigidezza alla rotazione nulla.

([3.4]) Si può vedere, per es., l'op. cit. nella nota 3.1, par. 3.1.1.

Esempio 3.15

Il telaio della fig. 3.29, sottoposto a un carico orizzontale, ha le aste di uguale rigidità.

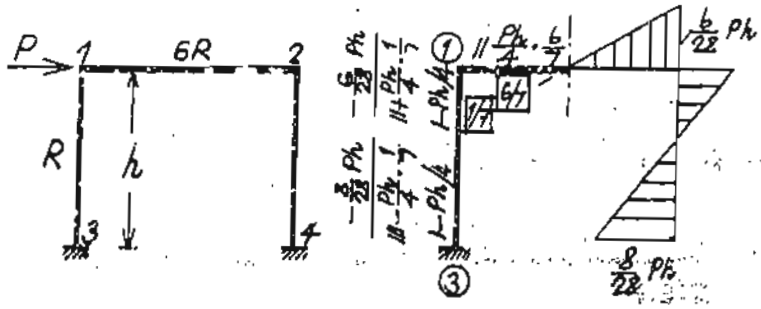


Fig. 3.29

Soluzione

Nella prima fase, considerando il nodo 1 impedito soltanto di ruotare, i momenti d'incastro in sommità e alla base del piedritto valgono:

$$I_{13} = I_{31} = -Ph/4 \quad .$$

Rigidezze e coefficienti di ripartizione:

$$W_{12} = 6R \ , \qquad W_{13} = R \ ;$$

$$\rho_{12} = 6/7 \ , \qquad \rho_{13} = 1/7 \ .$$

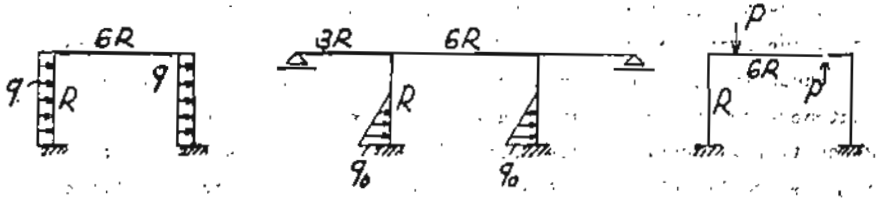


Fig. 3.30

Valori dei momenti e relativo diagramma sono indicati nella stessa figura; in tale caso con una sola ripartizione si ottengono i valori definitivi.

In modo del tutto simile si possono studiare condizioni di carico antimetriche per i ritti e per la trave, quali quelle indicate nella fig. 3.30: si considerano in una prima fase i nodi 1, 2 impediti soltanto di ruotare; poi il momento d'incastro si ripartisce proporzionalmente alle rigidezze, che per i ritti valgono in ogni caso R.

Esempio 3.16

Studiare il telaio della fig. 3.31.

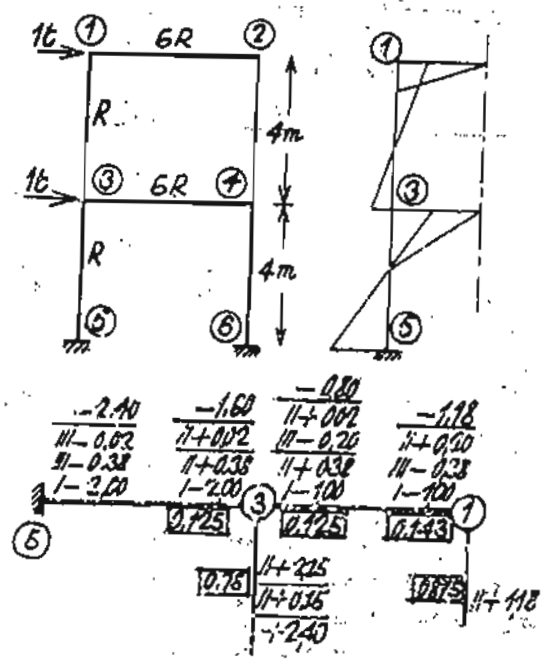


Fig. 3.31

Soluzione

Considerando i nodi impediti soltanto di ruotare, i momenti d'incastro alle estremità dei ritti valgono

$$I_{35} = I_{53} = -\frac{(1+1)}{2}\,\frac{h_{35}}{2} = -2{,}00 \text{ tm} \ , \qquad I_{13} = I_{31} = -1{,}00 \text{ tm} \ .$$

Rigidezze e coefficienti di ripartizione:

$$W_{12} = W_{34} = 6R \ , \qquad W_{13} = W_{35} = R \ ;$$

$$\rho_{34} = 6/8 = 0{,}75 \ , \qquad \rho_{35} = \rho_{31} = 1/8 = 0{,}125 \ ,$$

$$\rho_{12} = 6/7 = 0{,}857 \ , \qquad \rho_{13} = 1/7 = 0{,}143 \ .$$

La prima ripartizione è stata effettuata per il nodo 3: la somma dei momenti I vale -3,00 tm; poi tale somma, cambiata di segno, viene moltiplicata per i coefficienti di ripartizione (0,75; 0,125; 0,125) ottenendo i momenti I (+2,25; +0,38; +0,38). Il nodo 3 è ora equilibrato. Si passa al nodo 1 e si ripartisce la relativa somma del momento d'incastro e del momento III cambiato di segno [-(-1,00-0,38)], ottenendo i momenti II (+1,16; +0,20). E così di seguito. Il procedimento e il diagramma dei momenti sono indicati nella stessa figura.

3.4.3. Trave Vierendeel con i correnti uguali

Quando la rigidità $R_m = EJ_m/h$ dei montanti è inferiore a quella EJ_c/λ delle aste dei correnti, l'ipotesi dei nodi che traslano soltanto (par. 3.3.3) può dar luogo a sensibili errori. Però l'affinamento del calcolo è semplice se i correnti sono uguali, e quanto è stato esposto nel par. 3.3.3 costituisce la fase preliminare necessaria per la determinazione dei momenti d'incastro perfetto. Calcolati questi, può poi essere applicato il procedimento visto nel punto precedente per i telai a due stilate uguali e soggetti a carichi orizzontali: l'identità delle due strutture è evidente quando si consideri la trave Vierendeel ruotata di 90°, soggetta ai carichi e alle reazioni degli appoggi.

3.5. IL METODO DELLA CONGRUENZA (O DELLE FORZE)

Per gli opportuni confronti col metodo "dell'equilibrio", ci limitiamo a richiamare tale procedimento, già ampiamente illustrato nel corso di Scienza delle costruzioni; esso, come si è accennato (cap. II), può essere conveniente quando la struttura abbia un limitato numero di incognite staticamente indeterminate.

a) - Le equazioni di congruenza espresse con i coefficienti di deformabilità

Una struttura iperstatica che presenta n gradi di indeterminazione statica può essere resa isostatica sopprimendo un corrispondente numero di vincoli esterni e interni, ed applicando al loro posto le relative reazioni incognite X_i, da determinare con le condizioni di dar luogo a una deformazione della stessa struttura congruente e compatibile con la presenza dei vincoli eliminati.

In una generica posizione della struttura principale isostatica (soggetta alle azioni esterne e a quelle incognite X_i), dove è stato praticato uno dei tagli per rimuovere la connessione iperstatica, indichiamo con a_{jo} il movimento, per effetto dei carichi, correlativo all'azione X_j messa in evidenza dallo stesso taglio; con a_{ji} il movimento a_j conseguente a una generica altra azione $X_i = 1$; movimenti che sono ritenuti positivi se hanno segno concorde con quello assunto per l'azione X_j. Allora le condizioni di congruenza sono esprimibili nella forma (gli indici non significano più una posizione, ma una diretta dipendenza tra azioni e movimenti; si pensano nulli cedimenti dei vincoli e distorsioni, per i quali è semplice il relativo apporto nelle equazioni):

$$
\begin{aligned}
&a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1j}X_j + \dots + a_{1n}X_n + a_{1o} = 0 \\
&\dots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \dots \\
&a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + \dots + a_{ij}X_j + \dots + a_{in}X_n + a_{io} = 0 \\
&\dots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \dots \\
&a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \dots + a_{nj}X_i + \dots + a_{nn}X_n + a_{no} = 0 \,;
\end{aligned}
\qquad [3.38]
$$

e sono sostanzialmente le equazioni di Müller Breslau.

I coefficienti a_{ji} e i termini noti a_{jo} possono essere calcolati applicando il principio dei lavori virtuali. Le loro espressioni valgono, omettendo la deformazione per gli sforzi taglianti,

$$
a_{jo} = \frac{r}{n}\left\{\int_s M'_{yj}M_{yo}\,ds/EJ_y + \int_s M'_{zj}M_{zo}\,ds/EJ_z + \int_s M'_{tj}M_{to}\,ds/GJ_t + \int_s N'_j N_o\,ds/EA\right\}, \qquad [3.39]
$$

$$
a_{ij} = \frac{\Sigma}{n}\left\{\int_s M'_{yi}M'_{yj}\,ds/EJ_y + \int_s M'_{zi}M'_{zj}\,ds/EJ_z + \int_s M'_{ti}M'_{tj}\,ds/GJ_t + \int_s N'_i N'_j\,ds/EA\right\}. \qquad [3.40]
$$

avendo indicato con $(M'_{yj}, \ldots, N'_j)$ le componenti dell'azione interna in una generica sezione riferite a una terna di assi ortogonali (di cui y,z sono da assumere paralleli agli assi principali della stessa sezione), per effetto dell'azione virtuale $X_j = 1$ correlativa al movimento a_j; $(M_{yo}, \ldots, N_o)$ le analoghe sollecitazioni provocate dalle azioni esterne; $(M'_{yi}, \ldots, N'_o)$ le sollecitazioni provocate da una generica azione $X_i = 1$ agente in i. Gli integrali sono evidentemente da calcolare per l'intero sviluppo s di ciascun elemento strutturale. Le somme debbono essere estese alle m membrature componenti la struttura principale isostatica, con l'avvertenza, quando si calcola a_{jj}, di includere nella somma anche la membratura soggetta a X_j, se essa (ad esempio un'asta di un traliccio) è stata resa inattiva per ottenere la configurazione principale.

S'intende che coefficienti di deformabilità per elementi strutturali costituiti da travi prismatiche possono essere frequentemente dedotti da formule note. A tale proposito si ricorda che la rotazione dell'estremità A di una trave prismatica AB appoggiata può venire calcolata con l'espressione

$$\varphi_a = \frac{l}{6EJ}\left(-2\bar{M}_a + \bar{M}_b\right) ,$$

avendo indicato con $\bar{M}_a$, $\bar{M}_b$ i momenti d'incastro perfetto supposti destrogiri e applicati alla trave cambiati di segno, quindi sinistrogiri. E per la trave con un'estremità A appoggiata e l'altra B incastrata,

$$\varphi_a = -\frac{\bar{M}_a l}{4EJ} .$$

b) - Il metodo "della congruenza" si presenta particolarmente conveniente per strutture simmetriche, a numero di campate dispari, sollecitate antimetricamente (es. 3.17): infatti nelle sezioni di mezzeria, dovendo le sollecitazioni mantenere il carattere di antimetria, può sussistere soltanto (qualora in mezzeria non sia applicata una coppia esterna) lo sforzo tagliante che, se è staticamente indeterminato, può essere calcolato con la correlativa condizione di congruenza.

Per le stesse strutture sollecitate in modo spaziale, il metodo è in genere conveniente se lo stato di sollecitazione è simmetrico.

Esempio 3.17

Studiare col metodo della congruenza il telaio della fig. 3.32.

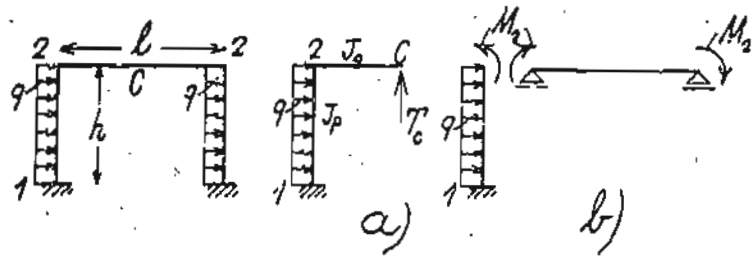


Fig. 3.32

Soluzione

Praticata una sezione in C, lo sforzo tagliante T_c (staticamente indeterminato) è calcolabile con la condizione di congruenza che lo spostamento verticale v_c sia nullo, ad opera del carico esterno q e dello stesso taglio T_c.

L'equazione può risultare un po' più semplice dividendo il telaio dalla trave, e mettendo in evidenza l'unica incognita staticamente indeterminata M_2, calcolabile con la condizione che vi si spettata la continuità angolare (fig. 3.32b):

$$\frac{qh^3}{6EJ_p} - \frac{M_2 h}{EJ_p} = \frac{M_2 l}{6EJ_t} .$$

Stati coattivi antimetrici possono essere studiati con la medesima semplicità. Così, ad es., per lo stesso telaio mente un ritto soggetto a Δt e l'altro a $-\Delta t$, la precedente equazione di congruenza risulta (fig. 3.33):

$$\frac{M_2 h}{EJ_p} + \frac{2\alpha_t h \Delta t}{l} = \frac{M_2 l}{6EJ_t} .$$

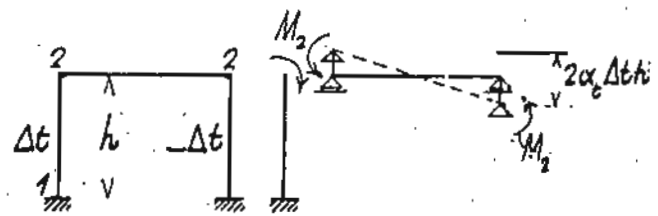


Fig. 3.33

c) - <u>Il sistema dei movimenti indipendenti espresso in funzione delle forze esterne</u>

Data una struttura iperstatica, dopo aver risolto il problema staticamente indeterminato, si è in grado di calcolare, applicando ancora per esempio il principio dei lavori virtuali (i diagrammi delle sollecitazioni effettive sono ora noti), gli n movimenti indipendenti dei nodi che definiscono la deformata di una struttura. E se con $F_1, \dots, F_n$ si indicano le forze correlative a tali movimenti, si può scrivere, pensando la struttura caricata soltanto nei nodi,

$$
\begin{aligned}
a_1 &= c_{11}F_1 + c_{12}F_2 + \dots + c_{1j}F_j + \dots + c_{1n}F_n \\
&\dots \\
a_i &= c_{i1}F_1 + c_{i2}F_2 + \dots + c_{ij}F_j + \dots + c_{in}F_n \\
&\dots \\
a_n &= c_{n1}F_1 + c_{n2}F_2 + \dots + c_{nj}F_j + \dots + c_{nn}F_n \ ,
\end{aligned}
\qquad [3.4]
$$

avendo indicato con c_{ji} il generico coefficiente di deformabilità, ossia il movimento j prodotto dalla forza unitaria correlativa a un altro qualunque movimento i. Tale sistema corrisponde a quello [3.1]. Vedremo in seguito le proprietà, in termini matriciali, che legano i due sistemi, i quali stabiliscono in veste duale le dipendenze tra cause e relativi effetti.

Quando i carichi non agiscono soltanto nei nodi, basta di solito, per calcolare i movimenti degli stessi nodi, considerare le forze $F_0 - \bar{F}$ al posto delle sole F.

3.6. CENNI SULL'IMPIEGO DELLE MATRICI NELL'ANALISI DELLE STRUTTURE

3.6.1. Premessa

Nello studio delle strutture con molte iperstatiche, quindi con elevato numero di incognite, si rende pressoché indispensabile il ricorso agli elaboratori elettronici. Il corretto impiego di tali potenti mezzi di calcolo - in grado com'è noto di memorizzare decine di migliaia di istruzioni o dati, e di svolgere operazioni semplici nell'ordine di tempo del microsecondo - richiede però il ricorso a tecniche di programmazione particolari, sostanzialmente basate sul concetto di rendere il più possibile automatiche le varie sequenze di calcolo che accompagnano lo studio della struttura.

Il ricorso all'algebra delle matrici e di alcuni particolari schemi operativi facilita, come risulterà chiaro in seguito, la stesura dei programmi di calcolo ([3.5]).

Nei punti seguenti esporremo alcuni brevi cenni dei più salienti algoritmi a tutt'oggi di corrente impiego ([3.6]); è da notare però fin d'ora che i concetti esposti nei precedenti paragrafi non cambiano per nulla, e che cambia solamente il modo di presentare le varie sequenze di operazioni.

In quanto segue si presuppone la conoscenza dei fondamenti dell'algebra delle matrici.

3.6.2. Matrice delle rigidezze e matrice delle deformabilità

Il sistema [3.1] lega il vettore $\{a\}$ dei movimenti indipendenti a quello $\{F\}$ delle forze esterne mediante una relazione del tipo:

$$[K]\,\{\alpha\} = \{F\} \quad , \qquad [3.42]$$

dove $[K]$ è la matrice quadrata dei coefficienti k_{ij} a suo tempo definiti.

Tale matrice, che è simmetrica, prende il nome di matrice delle rigidezze dell'intera struttura: in essa dunque il generico coefficiente k_{ij} rappresenta, per definizione, la forza F_i (correlativa al movimento α_i) dovuta al solo movimento $\alpha_j = 1$;

Una volta nota la matrice delle rigidezze di una struttura, risolvendo il sistema [3.42] si ricavano i movimenti α , e da questi è poi semplice anche risalire allo stato di sollecitazione dell'intera struttura.

Se la numerazione dei movimenti α è attuata in modo accorto, a parte altri possibili vantaggi, $[K]$ è in genere una matrice a banda; proprietà questa che, come è noto, rende possibili alcune semplificazioni in ordine alle tecniche di risoluzione dei sistemi di equazioni lineari, consentendo così, con l'impiego degli elaboratori, di risolvere agevolmente problemi contenenti anche varie centinaia di incognite.

(3.5) Un programma di calcolo è una sequenza di istruzioni di macchina tale da specificare in modo compiuto tutte le operazioni di calcolo che il programmatore intende far eseguire alla macchina. Le istruzioni di macchina sono scritte con particolari codici che possono variare a seconda del tipo di calcolatore.

(3.6) Per una più ampia trattazione, si può vedere, per es., il cap. XV dell'op. cit. nella nota 3.1.

b) Il sistema [3.4] lega il vettore delle forze $\{F\}$ al vettore dei movimenti indipendenti mediante una relazione lineare del tipo:

$$[C]\,\{F\} = \{\alpha\} \quad . \qquad [3.43]$$

La matrice quadrata $[C]$, formata con i coefficienti di deformabilità, prende il nome di "matrice delle deformabilità".

Dalla [3.43], per inversione si ha:

$$\{F\} = [C]^{-1}\,\{\alpha\} \quad ,$$

e confrontando tale relazione con la [3.42] si deduce immediatamente:

$$[K] = [C]^{-1} \quad .$$

La matrice delle rigidezza è strettamente connessa col metodo dell'equilibrio; quella delle deformabilità con il procedimento duale della congruenza.

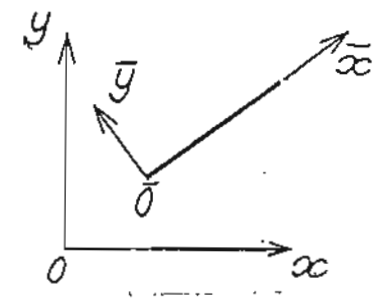
Le considerazioni seguenti verranno sviluppate con riferimento al metodo dell'equilibrio, quindi alle matrici delle rigidezze; ma s'intende che considerazioni analoghe si potrebbero formulare anche per il metodo della congruenza. Tuttavia il primo modo di procedere è in genere preferibile per un'impostazione generale del calcolo, soprattutto per il fatto che esso non richiede, in relazione alla struttura da studiare, la scelta della più opportuna configurazione principale.

Per i simboli in seguito adottati valgono i seguenti riferimenti:

$\bar{x}$, $\bar{y}$ riferimento locale (fig. 3.35);

x, y riferimento generale o globale;

$\{\bar{S}\}_r$ azioni applicate alle sezioni estreme di un'asta generica r nel riferimento locale (fig. 3.36);



$\{\bar{\beta}\}_r$ movimenti delle sezioni estreme di un'asta generica r nel riferimento locale;

$\{S\}_r$ $\{\beta\}_r$, $\{\alpha\}$ azioni e movimenti nel riferimento generale (fig. 3.37);

$[\bar{k}]_r$ matrice delle rigidezze di un'asta generica nel riferimento locale;

$[k]_r$ matrice delle rigidezze di un'asta generica nel riferimento generale;

Fig. 3.35

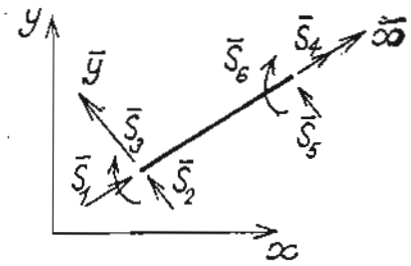


Fig. 3.36

$[K]$ matrice delle rigidezze dell'intera struttura;

$[A]$ matrice di trasformazione.

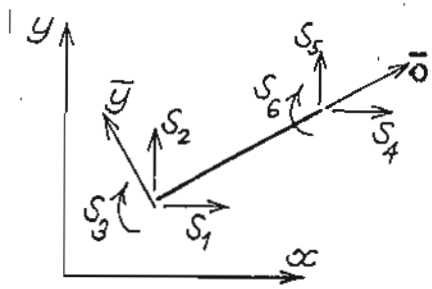


Fig. 3.37

3.6.3. Matrice delle rigidezze dell'elemento strutturale isolato nel riferimento locale

La precedente definizione di matrice delle rigidezze può ovviamente applicarsi anche all'elemento strutturale isolato, e più precisamente ad ogni singola asta (ad asse rettilineo o curvo) componente un'assegnata struttura. La convenienza di tale definizione emergerà con chiarezza quando mostreremo come sia possibile, con operazioni semplici, risalire dalle matrici delle rigidezze delle singole aste a quella dell'intera struttura.

Si consideri allora, tanto per fissare le idee, l'asta rettilinea di sezione costante rappresentata nella fig. 3.38 e siano $\{\bar{S}\}$ le azioni interne applicate alle estremità e $\{\bar{\beta}\}$ i movimenti correlativi (riferimento locale); se l'asta

è caricata solo nel piano, sia le azioni interne, sia i movimenti correlativi sono complessivamente sei ([3.7]).

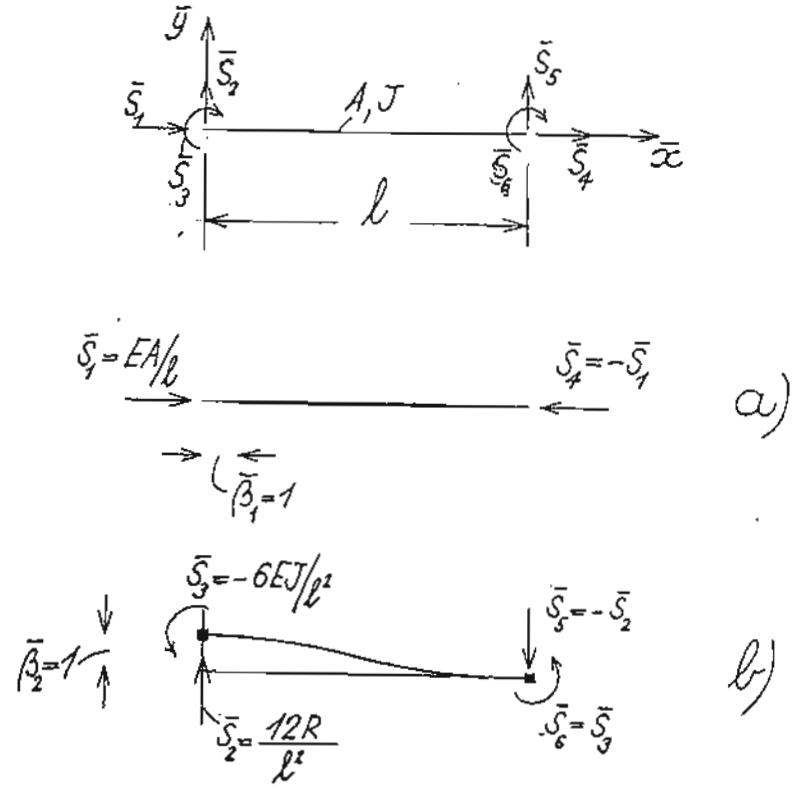


Fig. 3.38

Per definizione, il generico coefficiente k_{ij} della matrice delle rigidezze rappresenta la forza correlativa al movimento $\bar{\beta}_i$ causata dal movimento $\bar{\beta}_j = 1$, essendo tutti gli altri movimenti nulli: allora è semplice generare i vari coefficienti della matrice, tenuta presente la loro definizione. Ad esempio, con riferimento alla fig. 3.38a, ponendo $\bar{\beta}_1 = 1$ e nulli tutti gli altri movimenti risulta:

$$k_{11} = \frac{EA}{l}, \quad k_{21} = k_{23} = 0, \quad k_{41} = -\frac{EA}{l}, \quad k_{51} = k_{61} = 0.$$

In modo analogo imprimendo il movimento unitario $\bar{\beta}_2$, si ottiene (fig. 3.38b):

$$k_{12} = 0 \,, \quad k_{22} = \frac{12\,EJ}{l^3} \,, \quad k_{32} = -\frac{6\,EJ}{l^2} \,, \ \ldots$$

In definitiva la matrice delle rigidezze, del generico elemento $\underline{r}$, ovviamente d'ordine 6 x 6, acquista la

(3.7) Le grandezze S e β sono soprassegnate per significare che sono relative al sistema di riferimento locale $\bar{x}$, $\bar{y}$. Si rammenta inoltre che forze e spostamenti sono positivi se equiversi con gli assi; coppie e rotazioni positive se destrogire.

forma (R = EJ/l):

$$[\bar{k}]_r = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \bar{\beta}_1 & \bar{\beta}_2 & \bar{\beta}_3 & \ldots & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} EA/l & & & & & \\ 0 & 12\,R/l^2 & & \text{simm.} & & \\ 0 & -6\,R/l & 4\,R & & & \\ -EA/l & 0 & 0 & EA/l & & \\ 0 & -12\,R/l^2 & 6\,R/l & 0 & 12\,R/l^2 & \\ 0 & -6\,R/l & 2\,R & 0 & 6\,R/l & 4\,R \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \bar{S}_1 \\ \bar{S}_2 \\ \bar{S}_3 \\ \bar{S}_4 \\ \bar{S}_5 \\ \bar{S}_6 \end{array}$$

E' evidente che nel caso di un'asta caricata in modo qualsiasi il vettore $\{\bar{S}\}$, e quindi anche $\{\bar{\beta}\}$, è d'ordine 12; infatti per ciascuna sezione d'estremità occorre considerare lo sforzo normale, due sforzi taglianti, due momenti flettenti e il momento torcente. Quindi la matrice delle rigidezze, d'ordine 12 x 12, ha 144 coefficienti; è sufficiente però, data la simmetria, calcolare soltanto $\frac{144}{2} + 6 = 78$.

Con qualche complicazione, ma non concettuale, sarebbe possibile calcolare matrici delle rigidezze di aste di sezione variabile o ad asse non rettilineo.

3.6.4. Matrice delle rigidezze dell'elemento strutturale isolato nel riferimento globale

Nello studio delle strutture conviene adottare un unico sistema di riferimento (globale o generale) e calcolare, con riferimento a questo, le varie matrici delle rigidezze delle aste; risulterà così particolarmente semplice risalire alla definizione di matrice delle rigidezze dell'intera struttura.

A tale scopo si consideri nuovamente l'asta della fig. 3.39 e siano {S} e {β} rispettivamente le azioni e i movimenti riferiti al sistema generale (3.8).

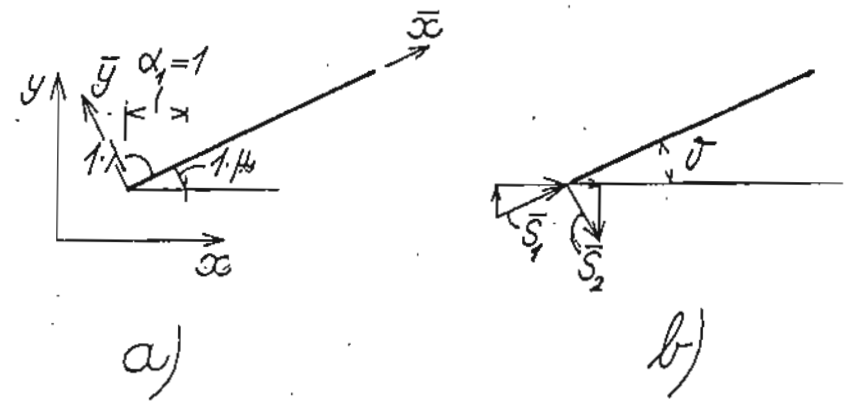


Fig. 3.39

Per costruire direttamente i vari coefficienti della matrice delle rigidezze (sistema generale), occorre imporre separatamente uguali ad uno i vari movimenti α, e per ciascuno di essi calcolare il vettore {S} che ne consegue (i movimenti β della estremità delle aste, riferiti al sistema generale, vengono indicati con α quando si vuole

dare evidenza al fatto che non riguardano un riferimento locale).

Si consideri, ad esempio, $a_1 = 1$. Decomposto tale movimento secondo le direzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$, si ricava ($\lambda = \cos\theta$, $\mu = \text{sen}\,\theta$):

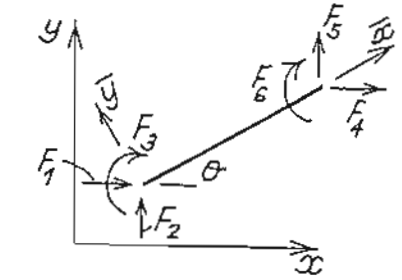
$$\bar{S}_1 = \frac{EA}{l}\lambda\,, \qquad \bar{S}_2 = -\frac{12\,R}{l^2}\mu\,, \qquad \bar{S}_3 = \frac{6\,R}{l}\mu\,, \ \ldots\,;$$

occorre poi proiettare le azioni $\bar{S}$ nelle direzioni $\underline{x}$ e $\underline{y}$, per ottenere le azioni S nel riferimento globale; svolgendo tali operazioni si ottiene:

$$S_1 = \frac{EA}{l}\lambda^2 + \frac{12R}{l^2}\mu^2\,, \qquad S_2 = -\frac{12R}{l^2}\mu\lambda + \frac{EA}{l}\lambda\mu\,, \qquad S_3 = \frac{6R}{l}\mu\,.$$

Analoghe operazioni occorre svolgere per tutti i restanti movimenti; a conti fatti, la matrice delle rigidezze prende la forma riportata nella tabella seguente:

	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{EA}{l}\lambda^2 + \frac{12R}{l^2}\mu^2$					
2	$\frac{EA}{l}\lambda\mu - \frac{12R}{l^2}\lambda\mu$	$\frac{EA}{l}\mu^2 + \frac{12R}{l^2}\lambda^2$				
3	$\frac{6\,R}{l}\mu$	$-\frac{6\,R}{l}\lambda$	$4\,R$			
4	$-\frac{EA}{l}\lambda^2 - \frac{12R}{l^2}\mu^2$	$-\frac{EA}{l}\lambda\mu + \frac{12R}{l^2}\lambda\mu$	$-\frac{6R}{l}\mu$	$\frac{EA}{l}\lambda^2 + \frac{12R}{l^2}\mu^2$		
5	$-\frac{EA}{l}\lambda\mu + \frac{12R}{l^2}\lambda\mu$	$-\frac{EA}{l}\mu^2 - \frac{12R}{l^2}\lambda^2$	$\frac{6R}{l}\lambda$	$\frac{EA}{l}\lambda\mu - \frac{12R}{l^2}\lambda\mu$	$\frac{EA}{l}\mu^2 + \frac{12R}{l^2}\lambda^2$	
6	$\frac{6\,R}{l}\mu$	$-\frac{6\,R}{l}\lambda$	$2\,R$	$-\frac{6\,R}{l}\mu$	$\frac{6\,R}{l}\lambda$	$4\,R$



$\lambda = \cos\theta$

$\mu = \text{sen}\,\theta$

Fig. 3.40

Dopo quanto è stato accennato risulta concettualmente facile l'estensione del procedimento per la valutazione della matrice delle rigidezze di aste di sezione variabile o ad asse curvo.

Il procedimento illustrato prende il nome "ordinario"; per altri modi di procedere, sostanzialmente equivalenti, ma di automaticità più spinta, si rimanda alla letteratura tecnica specializzata ([3.9]).

([3.8]) Si noti che in questo caso le azioni $\{S\}$ perdono in parte il significato di caratteristiche di sollecitazione.

([3.9]) Si può vedere, ad es. l'op. cit. nella nota 3.1.

3.6.5. Il passaggio dai movimenti $\bar{\beta}$ nel riferimento locale ai movimenti β nel riferimento globale. L'analoga operazione per le forze

a) Si consideri la fig. 3.41. E' subito evidente che fra i movimenti $\{\bar{\beta}\}$ e i movimenti $\{\beta\}$ intercorrono le seguenti relazioni:

$$\bar{\beta}_1 = \beta_1\lambda+\beta_2\mu \ , \qquad \bar{\beta}_2 = -\beta_1\mu+\beta_2\lambda \ , \qquad \bar{\beta}_3 = \beta_3, \ldots \qquad (a)$$

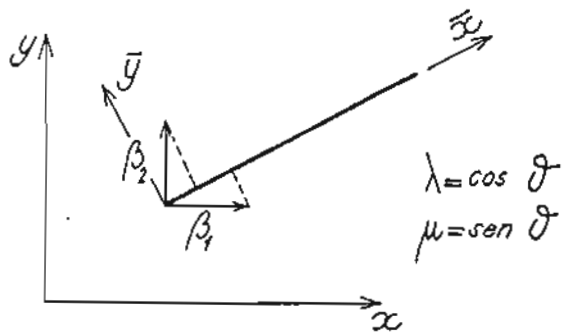


Fig. 3.41

In forma matriciale possiamo porre:

$$[A]_r\{\beta\} = \{\bar{\beta}\} \qquad [3.44]$$

dove la matrice $[A]_r$, detta di trasformazione, ha la composizione seguente:

$$\begin{bmatrix} \lambda & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E' facile l'estensione al caso spaziale: in tal caso $[A]_r$ sarebbe una matrice 12 x 12.

Si riconosce subito che anche per la trasformazione delle forze sussiste la relazione

$$[A_r]\{S\} = \{\bar{S}\} \qquad [3.45]$$

b) E' possibile adottare un modo di procedere più automatico, del quale può convenire dare un cenno.

Ricordiamo una semplice relazione. Sia dato un vettore $\{\bar{x}\} = [\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3]$ riferito a un sistema di assi coordinati $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$. Adottando un secondo sistema a_1, a_2, a_3, è possibile definire la matrice R dei coseni direttori; la quale gode della proprietà $R^T = R^{-1}$; allora si ha che il predetto vettore riferito al secondo sistema, ossia $\{x\} = [x_1x_2x_3]^T$, è legato alla sua forma originaria dalla relazione

$$\bar{x} = Rx \ , \qquad x = R^T\bar{x} \qquad (b)$$

Pertanto, relativamente a un insieme di aste, per il quale k sia la matrice di rigidezza di una generica asta, si ha:

$$\bar{\beta} = R\beta \ (\text{quindi } \beta = R^T\bar{\beta}) \ , \qquad S = R^T\bar{S} = R^T\bar{k}\bar{\beta} = R^T\bar{k}R\beta \ ; \qquad (c)$$

ma $S = k\beta$, quindi

$$k = R^T \bar{k} R \qquad (d)$$

3.6.6. Matrice delle rigidezze di un insieme di travi. Operazioni di somma delle singole matrici delle rigidezze

Si consideri una generica struttura e sia $\{\alpha\}$ il vettore dei movimenti indipendenti, movimenti che ovviamente sono riferiti al sistema globale: in genere si fanno coincidere i movimenti β (per le estremità delle aste, nel riferimento generale) con i movimenti α, imponendo implicitamente le condizioni di congruenza; naturalmente i movimenti α vengono numerati, alle volte con indici che tengono conto sia dell'ordine numerale, sia della loro posizione. Valutata per ogni asta, come si è visto, la matrice delle rigidezze nel riferimento globale, il generico coefficiente k_{ij} della matrice delle rigidezze dell'intera struttura si ottiene sommando i corrispondenti coefficienti delle singole matrici; l'operazione di somma è naturale conseguenza della definizione stessa del coefficiente k_{ij} e la somma stessa è lecita perchè le azioni S sono per tutte le aste riferite ad un unico sistema, quindi gli indici hanno un ruolo importante nel calcolo dei coefficienti di rigidezza complessivi; ma alle volte la scelta dei simboli risponde all'opportunità di rendere più agevole rendersi conto dove è applicata l'azione, nonchè della natura di questa.

Nel seguito indicheremo con $[K]$ la matrice delle rigidezze dell'intera struttura.

Una volta composta la matrice delle rigidezze dell'intera struttura, si tratta di imporre le condizioni di vincolo delle particolari aste esternamente vincolate. E' evidente, a tale proposito, che i movimenti impediti non compaiono nel sistema di equazioni [3.42], e pertanto le corrispondenti righe della matrice $[K]$ devono essere soppresse, s'intende assieme alle corrispondenti colonne (perchè queste rappresenterebbero le forze $\{S\}$ conseguenti ai movimenti dei vincoli, che in realtà sono nulli).

Osservazioni analoghe varrebbero se si volesse trascurare la deformazione assiale delle aste; semplificazione questa che, come si è avuto modo di ricordare nel cap. II, è frequentemente lecita.

3.6.7. L'IMPIEGO DELLE MATRICI NEL METODO DELL'EQUILIBRIO. LE VARIE FASI DI CALCOLO

Si consideri nuovamente una generica struttura comunque caricata. In una prima fase si pensano tutti i movimenti dei nodi impediti e si valutano le somme delle reazioni dei vincoli ausiliari. Si considera quindi la struttura scarica con applicate nei nodi le somme delle reazioni dei vincoli ausiliari cambiate di segno: reazioni che nel seguito verranno indicate con F_I.

Successivamente, essendo stati calcolati i coefficienti delle matrici delle rigidezze delle singole aste (prima coi riferimenti locali poi con quello generale), si costruisce la matrice delle rigidezze dell'intera struttura applicando le considerazioni svolte nel precedente paragrafo; e naturalmente si impongono le condizioni di vincolo, sopprimendo in modo opportuno righe e colonne. Costruita la matrice $[K]$ si risolve il sistema di equazioni:

$$[K]\{\alpha\} = \{F\} \qquad (\text{con } F = F_e - F_I) \quad ,$$

ottenendo così i valori delle incognite α (movimenti dei nodi). Noti i movimenti, si tratta di risalire alle azioni interne S, poi alle $\bar{S}$. A tal fine, tenute presenti le considerazioni dei precedenti paragrafi, per la generica asta $\underline{r}$ risulta, per effetto dei soli α:

$$\{\bar{S}\}_r = [A]_r[k]_r\{\alpha\}_r \quad ,$$

dove il vettore $\{\alpha\}_r$ rappresenta i movimenti delle sezioni di estremità dell'asta in esame; e s'intende che operando in tale modo è anche implicito il calcolo delle reazioni vincolari. Alle sollecitazioni $\bar{S}$ così calcolate vanno naturalmente sommate quelle presenti nella prima fase di calcolo, conseguenti ai carichi applicati lungo le stesse aste con i movimenti $\bar{\alpha}$ nulli.

3.7.1. Osservazioni introduttive

a) I metodi di calcolo che abbiamo esaminato sono evidentemente tutti approssimati, perchè alla base di essi sono state sempre introdotte alcune ipotesi semplificatrici. Tuttavia per poter disporre di procedimenti adatti alle esigenze pratiche, soprattutto per il proporzionamento di massima delle strutture, o per il calcolo delle costruzioni d'importanza corrente, può essere conveniente far ricorso a ulteriori semplificazioni oltre a quelle classiche, dando origine a procedimenti che diremo quindi semplificativi. Ovviamente è possibile escogitare un gran numero di tali procedimenti; e qui ci limiteremo ad accennare a quelli di impiego più frequente, che d'altronde non scaturiranno da concetti nuovi.

Prima di accingerci a questioni particolari, può essere opportuna qualche osservazione introduttiva.

b) Evidentemente le condizioni di carico accidentale da prendere in considerazione debbono essere quelle che provocano in ciascuna delle sezioni da verificare le più gravose sollecitazioni. Tralasciando le considerazioni sui carichi mobili e sulle relative linee d'influenza che son proprie alla teoria dei ponti, per le strutture correnti si è soliti considerare un numero assai ridotto di sezioni caratteristiche (in genere in prossimità degli appoggi e in mezzeria), quindi un numero ridotto di schemi di carico accidentale; schemi nei quali la distribuzione del carico - qualora non sussistano diverse ben definite prescrizioni - viene assunta uniforme, ed ovviamente esteso a quei tratti o intere campate per i quali la presenza del sovraccarico provoca un peggioramento della sollecitazione che viene esaminata.

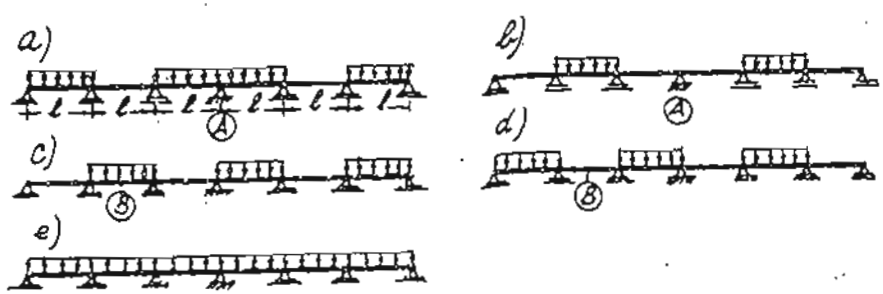


Fig. 3.42

Così, ad esempio, per la trave continua della fig. 3.42a, gli schemi a),b) provocano nella sezione A rispettivamente il massimo momento negativo (tese le fibre superiori) e positivo; quelli c),d), i momenti massimi positivo e negativo per la sezione "in campata" B.

Giova tuttavia ricordare che, in genere, le campate delle strutture continue non possono essere molto numerose (cinque o sei al massimo), dovendo evitare eccessive lunghezze per non dar luogo a troppo elevati movimenti causati da variazioni termiche, quindi a difficoltà sia per la notevole larghezza che deve essere attribuita ai "giunti di dilatazione" (par. 3.8), sia per l'intollerabile inasprimento (quando la trave sia collegata ai piedritti) degli stati di sollecitazione coattivi. E che inoltre, quando le campate abbiano luci e carichi poco differenti, i pesi accidentali agenti al di là delle campate adiacenti a quella comprendente la sezione in esame provocano effetti abbastanza limitati: ad es. per la stessa trave continua della fig. 3.42, allo schema di carico a) corrisponde $M_A = -0{,}115\ ql^2$; mentre per lo schema e) di caricamento generale si ottiene $M_A = -0{,}087\ ql^2$, con la differenza del 24% ($^{3.10}$); per cui alle volte - tenendo presente che, per le sollecitazioni complessive, si attenuano gli errori relativi ai soli carichi accidentali (che sono in genere minori di quelli permanenti) - i momenti negativi massimi sugli appoggi vengono calcolati approssimativamente per il carico esteso a tutte le campate.

c) Può essere opportuno osservare anche, a proposito dell'impiego opportuno di attendibili procedimenti semplificativi e delle inevitabili approssimazioni cui debbono sottostare quelli più affinati nello studio delle ossature degli edifici, che frequentemente il disarmo di una campata viene eseguito prima di costruire le strutture superiori (e alle volte anche le campate adiacenti); per cui almeno una parte dei pesi permanenti in realtà non agisce sulla struttura intera. Inoltre la presenza dei muri divisori e dei collegamenti spaziali, nonchè la difficoltà di definire con precisione la parte dei solai collaborante con le travi, possono influenzare sensibilmente il gioco delle congruenze delle deformazioni, dal quale dipendono gli stati di sollecitazione per le strutture staticamente indeterminate.

Infine conviene aver presente che, relativamente a tali condizioni di congruenza espresse per le strutture di c.a., sono approssimati anche i valori delle rigidezze flessionali che si ottengono prescindendo dalle inevitabili fessure; però queste, se sono capillari e non frequenti, influenzano poco il diagramma momenti-deformazioni, tracciato supponendo le sezioni totalmente reagenti.

3.7.2. Telai, soggetti a carichi verticali, aventi lo stato di sollecitazione poco influenzato dagli spostamenti dei nodi

a) Spesso, per la presenza di strutture "di controventamento" atte ad assorbire le azioni orizzontali, o per numero rilevante di colonne (a titolo orientativo superiore a 3), è possibile trascurare gli spostamenti dei nodi, per effetto dei carichi verticali, anche quando la struttura non sia perfettamente simmetrica, e non sia tale la condizione di carico. Ciò si verifica frequentemente per i telai di edifici destinati ad abitazione; e relativamente ad essi è inoltre da osservare, volendo procedere rigorosamente, che a causa della consueta complessità della struttura e del numero notevole di sezioni da verificare, dovrebbe venire esaminato un numero molto elevato di possibili disposizioni di carico; per cui - ci riferiamo a costruzioni di tipo non particolare - di solito è opportuno il ricorso a schemi semplificati, soprattutto, come si è detto, nella fase dei proporzionamenti degli elementi strutturali.

b) In virtù delle osservazioni riportate nel punto precedente (principalmente dell'influenza modesta dei carichi accidentali applicati alle campate non adiacenti a quella in esame, e del fatto che essi sono minori di quelli permanenti, specialmente per le costruzioni di c.a.), si è soliti, per i momenti massimi relativi alle travi, segmentare l'intero sistema in vari telai elementari (fig. 3.43); estendendo poi i risultati ottenuti per la travata di un piano a quelle dei piani immediatamente superiore e inferiore, poichè in genere si modificano non fortemente i rapporti delle rigidezze delle varie membrature.

(3.10) L'osservazione vale per i massimi dei valori assoluti. Infatti per M_A positivo (fig. 3.42b) si otterrebbe valore nullo escludendo i carichi sulle campate al di là di quelle adiacenti.

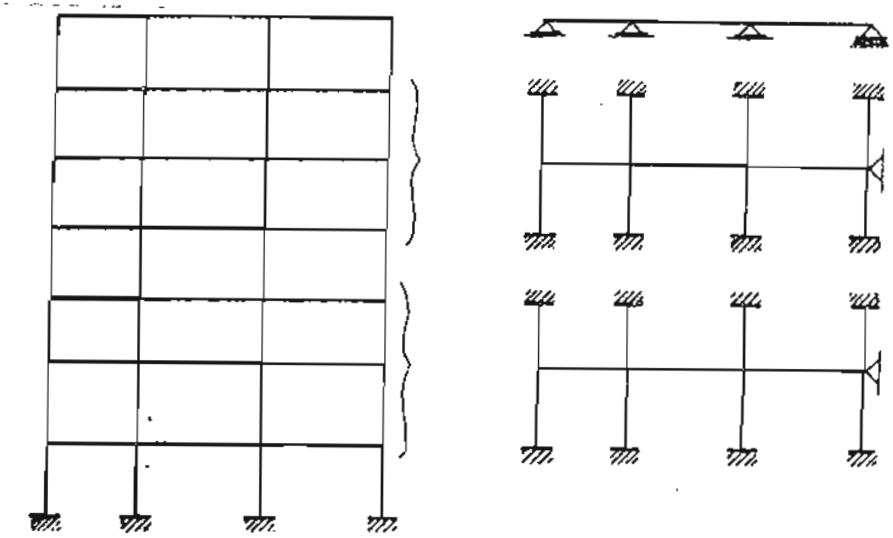


Fig. 3.43

Per ogni telaio semplice occorre poi considerare, oltre ai pesi propri, le più importanti disposizioni del carico variabile (fig. 3.44): ad esempio quella b), che fornisce il massimo momento positivo per le campate 1-2, 3-4; la c), per il momento positivo massimo della campata 2-3; la d), per il momento negativo massimo della sez. A [per i vari momenti negativi viene alle volte considerata l'unica condizione e), aumentando poi i risultati del 10÷20 per cento]. Ed è chiaro che tutti tali schemi possono venire risolti (avendo supposto la trascurabilità degli spostamenti dei nodi) col metodo di Cross; e che, via via che ci si sposta verso i piani inferiori, lo stato di sollecitazione di una campata si approssima sempre più a quello degli estremi incastrati perfettamente ($M_{inc.} = -q\,l^2/12$, $M_{mezz.} = q\,l^2/24$).

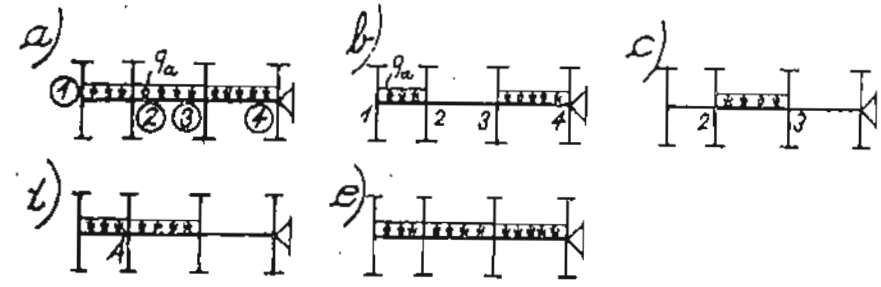


Fig. 3.44

Risolti i vari schemi semplificati, è poi facile tracciare i diagrammi dei momenti considerando ogni campata idealmente separata dal resto, appoggiata e soggetta, oltre che ai carichi, ai momenti calcolati ai suoi estremi (fig. 3.45). Tali diagrammi sono

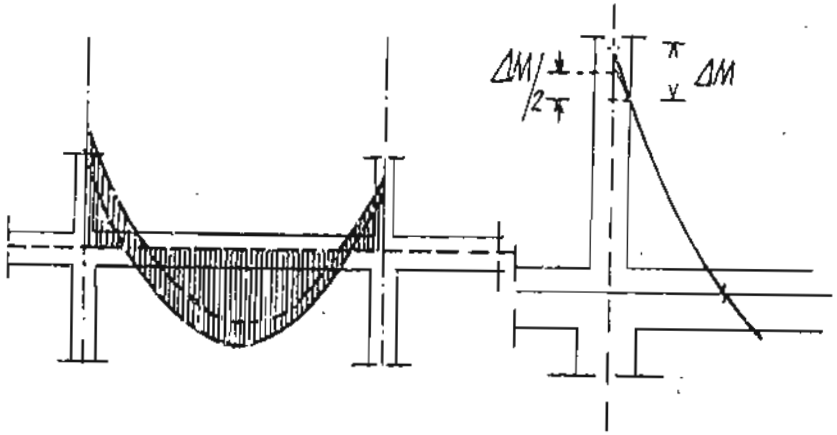


Fig. 3.45

da ritenere in genere accettabili per i tratti soggetti a momenti negativi (tese le fibre superiori); mentre di solito è opportuno maggiorare le loro ordinate positive, pensando che i valori teorici dei momenti applicati agli estremi possano in realtà venire attenuati da varie cause aleatorie, o comunque di problematica valutazione (cedimenti relativi delle fondazioni; deformazioni viscose, maggiormente sensibili per le parti più sollecitate; riprese dei getti e fessurazioni per le travi di c.a.; movimenti, consentiti ad es. dai bulloni, agli estremi delle travi metalliche, ecc.). Per cui in genere la parte positiva del diagramma dei momenti viene tracciata attribuendo valori un po' ridotti rispetto a quelli calcolati (ad es. moltiplicandoli per 0,8)([3.11]). Per quanto poi riguarda i momenti massimi negativi, in genere si considerano i valori in corrispondenza degli assi; oppure, nel caso che la larghezza dell'appoggio sia non piccola rispetto alla luce, si fa riferimento, all'interno del tratto appoggiato, anzichè all'andamento calcolato supponendo l'appoggio puntiforme, a un fittizio andamento parabolico che raggiunge sull'asse l'incremento (rispetto ai valori sui lembi) pari a $\Delta M/2$ (fig. 3.45).

c) Ovviamente questi criteri semplificativi possono essere utilizzati anche per il calcolo delle stilate, per le quali, essendo pressoinflesse, la rigorosa determinazione della più gravosa condizione di carico sarebbe, per le strutture di c.a., molto laboriosa (dovendo verificare le sollecitazioni massime sia per il calcestruzzo, sia per l'armatura).

Per una <u>stilata esterna</u> ai massimi sforzi normali possono essere associati i momenti calcolabili per lo schema della fig.3.46a, col carico accidentale su tutte le campate [di solito nel computo degli sforzi N occorre tener conto dei pesi della muratura di facciata ([3.12])]. Per ottenere invece M_{max}, N_{min} ad esempio per la sezione A (fig. 3.46b), ci si può approssimativamente riferire alla disposizione del carico indicata nella stessa fig. 3.46b: per tale disposizione, tuttavia, il momento non è molto diverso da quello calcolato per lo schema precedente (fig. 3.46a).

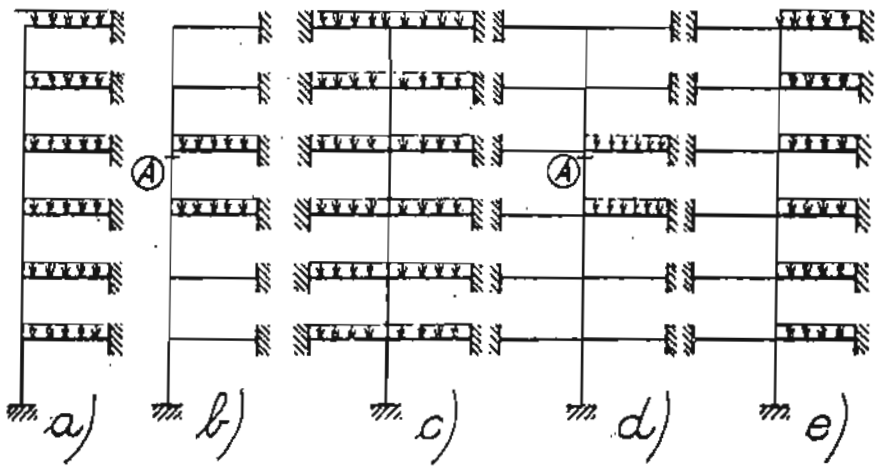


Fig. 3.46

Analogamente per <u>una stilata interna</u>: la condizione di carico completo c) fornisce N_{max} con momenti flettenti trascurabili, se le luci delle due campate collegate alle colonne sono poco diverse tra loro. Invece, ad esempio, la condizione di carico d) provoca nella sezione A momento sensibile e sforzo assiale molto limitato: ma il momento non è molto diverso da quello che si ottiene per

la disposizione e) del carico; per cui conviene fare riferimento a quest'ultima condizione, col vantaggio di poter definire approssimativamente con un solo schema i valori massimi dei momenti flettenti per tutti gli elementi della stilata in esame.

(3.11) In genere, nei casi correnti, è opportuno, per il momento massimo, non scendere al di sotto della metà del valore che si avrebbe ritenendo la campata semplicemente appoggiata.

(3.12) Di mattoni forati e dello spessore di 30 cm, pari a ~ 300 kg/m² (senza aperture).

Relativamente al calcolo degli sforzi assiali si è soliti mitigare l'ipotesi del completo carico accidentale agente su tutti i piani. Precisamente, in conformità delle norme, per gli edifici comprendenti più di 3 piani e per le relative fondazioni, si ritengono caricati al massimo, oltre alla copertura, i due piani soggetti a maggiori azioni accidentali; per gli altri piani, ordinati secondo l'entità di dette azioni, i sovraccarichi vengono ridotti progressivamente del 10%, 20%, 30%, 40%, 50%, restando poi costante la riduzione del 50% per i rimanenti piani.

3.7.3. Telai, soggetti a carichi orizzontali, aventi lo stato di sollecitazione poco influenzato dalle rotazioni dei nodi

Per telai che non abbiano un numero di piani elevato o le travi comprese nello spessore dei solai, le sezioni delle travi, che sono prevalentemente inflesse, hanno in genere momenti d'inerzia J molto maggiori delle sezioni dei piedritti, per i quali la compressione è la sollecitazione di solito dominante. Accade allora, purchè si abbia

$$R_{piedr.} \leq R_{travi} ,$$

che, supponendo le travi indeformabili rispetto alle colonne, si ottengono risultati bene approssimati con calcoli molto semplici.

Vedemmo tale procedimento di calcolo nel par. 3.3.3, e non ci staremo quindi a ripetere: così per i piedritti A-B, B-C del telaio della fig. 3.47 si ottiene, supponendo uguali le sezioni delle colonne di uno stesso piano

$$\bar{M}_{ab} = \bar{M}_{ba} = -\frac{3,5}{4}\,\frac{3,4}{2} = -1,49 \text{ tm}, \qquad \bar{M}_{bc} = \bar{M}_{cb} = -\frac{4,5}{4}\,\frac{3,4}{2} = -1,91 \text{ tm};$$

quindi, equilibrando il nodo B alla rotazione, e supponendo che la somma dei momenti $(\bar{M}_{ba} + \bar{M}_{bc})$, cambiata di segno, si ripartisca tra le due travi B-D, B-E proporzionalmente alle loro rigidità R (e se le sezioni sono uguali, inversamente alle rispettive lunghezze), si ottiene approssimativamente $(1/l_{bd} = 0,17\ m^{-1},\ 1/l_{be} = 0,25)$

$$M_{bd} = -(-1,49 - 1,91)\,\frac{0,17}{(0,17+0,25)} = +1,38, \qquad M_{be} = +2,02 \text{ tm},$$

e possono quindi venire tracciati i vari diagrammi dei momenti (fig. 3.47b).

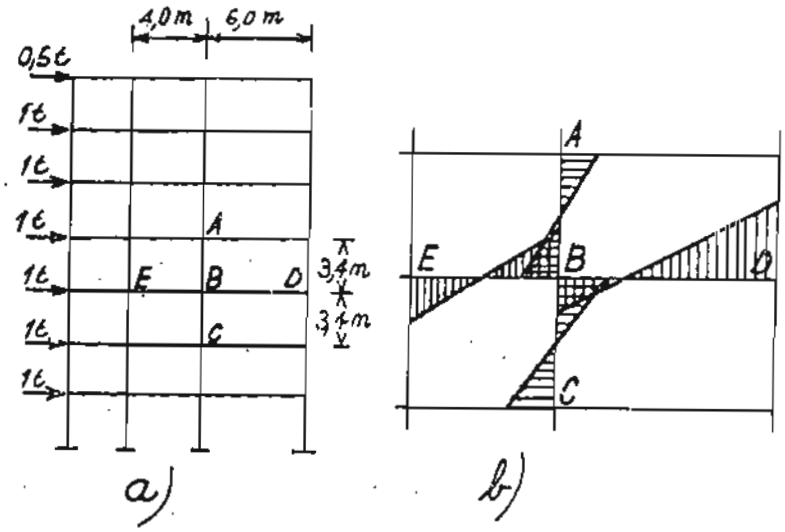


Fig. 3.47

Può essere opportuno ricordare il caso semplice del portale soggetto a un carico orizzontale (es. 3.15), per rendersi in qualche modo conto degli errori che si possono compiere adottando l'ipotesi delle travi indeformabili rispetto ai ritti. Infatti, considerando i nodi impediti di ruotare, si ha (fig. 3.48)

$$\bar{M}_{13} = \bar{M}_{31} = -Ph/4 = -\frac{7}{28}\,Ph \quad ;$$

mentre attribuendo ai piedritti e alla trave la medesima rigidità R,

$$M_{13} = -\frac{6}{28}\,Ph, \qquad M_{31} = -\frac{8}{28}\,Ph.$$

Gli errori sono quindi, per $R_p = R_t = R$, considerando la trave indeformabile, rispettivamente di $1 \cdot 100/6 = 16{,}7\%$ e di $100/8 = 12{,}5\%$.

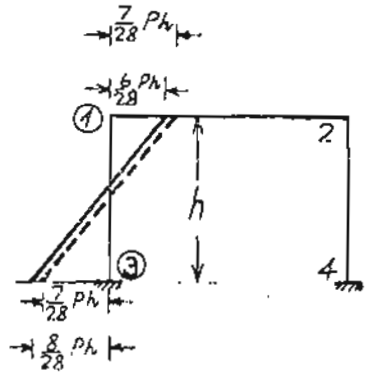


Fig. 3.48

3.7.4. Telai per i quali occorre considerare tanto le rotazioni quanto gli spostamenti dei nodi

Valori delle sollecitazioni frequentemente bene approssimati si possono trovare, in tale caso, utilizzando entrambi i procedimenti esposti nei due punti 3.7.3 e 3.7.2. Le varie fasi del calcolo sono le seguenti (fig. 3.49):

1) Si applicano al telaio i carichi, considerando tutti i suoi nodi incastrati perfettamente.
2) Si considera il telaio con i nodi impediti di ruotare ma liberi di traslare, soggetto, se esistono, alle componenti orizzontali $\bar{H}$ delle reazioni d'incastro applicate cambiate di segno.
3) Pensando impediti gli spostamenti dei nodi in virtù di appoggi ausiliari, si consentono le rotazioni dei vari nodi, applicando il metodo di Cross.
4) Calcolate le reazioni ΔH degli appoggi ausiliari (dovute ai vari momenti II e III), si applicano al telaio le stesse ΔH cambiate di segno, considerando ancora i nodi liberi di traslare ma non di ruotare.
5) Si sommano i momenti calcolati nelle 4 fasi, ottenendo i valori approssimati definitivi.

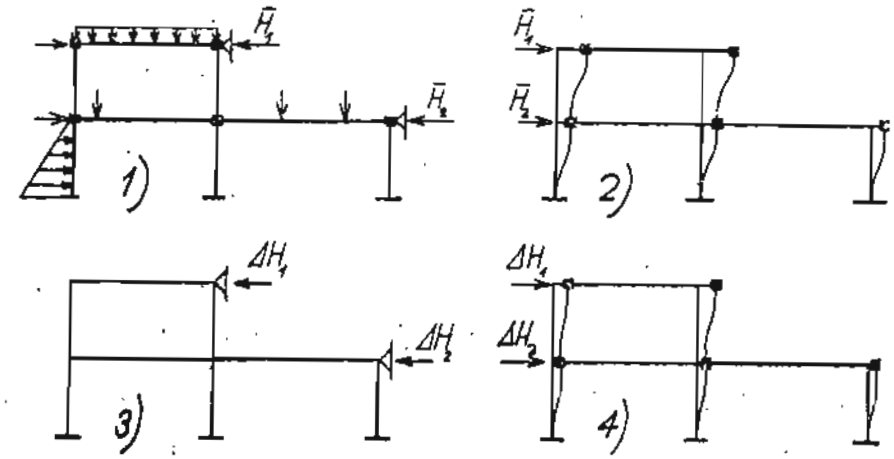


Fig. 3.49

L'approssimazione dei risultati è legata all'ipotesi che si introduce nella 4ª fase (ipotesi che non viene più rimossa) di travi indeformabili rispetto ai piedritti; quindi sappiamo che i risultati sono in genere sufficientemente approssimati se $R_p \leq R_t$. Tale modo di procedere corrisponde a una parziale applicazione del metodo di Grinter (1932).

Esempio 3.18

Studiare il telaio della fig. 3.50 con il procedimento del par. 3.7.4. Le aste hanno uguale rigidità R.

Soluzione

I momenti d'incastro perfetto pari a $\bar{M}_{23} = -Pab^2/l^2 = -2{,}67$ tm e $\bar{M}_{32} = +Pa^2b/l^2 = +1{,}33$ tm sono segnati (distinti al solito col numero romano I) nella fig. 3.50a.

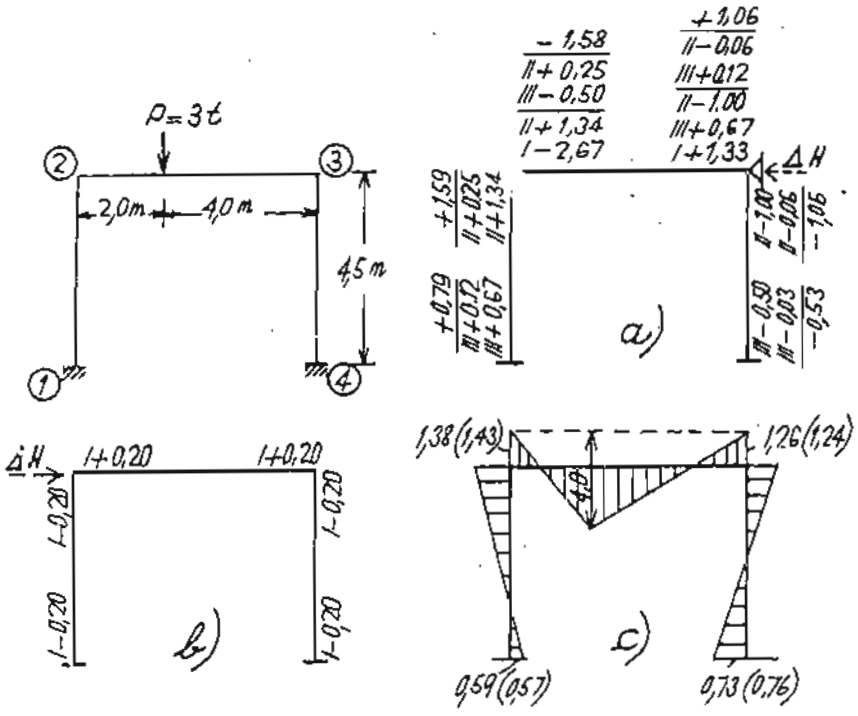


Fig. 3.50

La seconda fase in tale caso è nulla, poichè mancano carichi orizzontali.

Il procedimento secondo Cross è indicato nella stessa fig.a; la reazione dell'appoggio ausiliario vale (i piedritti sono lunghi 4,5 m)

$$\Delta H = -\frac{(1,59+0,79-1,06-0,53)}{4,5} = -0,18,t \text{ (rivolta verso sinistra).}$$

L'azione ΔH, cambiata di segno, rivolta quindi verso destra, provoca i momenti (fig. b):

$$\bar{M}_{21} = \bar{M}_{12} = \bar{M}_{34} = \bar{M}_{43} = -0,18 \cdot 4,5/4 = -0,20 \text{ tm} .$$

Nella fig. c sono riportati i valori complessivi e il diagramma dei momenti; tra parentesi sono segnati anche i valori "esatti".

3.8. OSSERVAZIONI E NOTIZIE PRATICHE [3.13]

a) Le strutture ricorrenti per edifici con numero di piani non molto elevato sono in sostanza costituite dagli impalcati, o solai, e dall'ossatura portante propriamente detta; e mentre questa è il più delle volte interamente gettata in opera, i solai sono in genere costituiti da elementi in gran parte prefabbricati. Rispetto ad altri procedimenti costruttivi che fanno ricorso ad elementi interamente prefabbricati, o a tecniche di esecuzione che richiedono l'impiego di grandi casseri standardizzati, l'esecuzione dei getti in opera con casseri di tipo tradizionale presenta l'evidente vantaggio di una notevole versatilità, per cui appare tuttora giustificata la frequente adozione di tale modo di costruire.

I solai di tipo più diffuso sono quelli con armatura principale unidirezionale. Per il modo stesso con cui i solai sono concepiti, la struttura portante viene ad essere costituita da telai disposti in piani ortogonali alla direzione dei travetti.

Per le costruzioni di c.a. lo spessore dei solai è di norma dell'ordine di 1/25 della luce e tale limitazione è in pratica suggerita dalla necessità di rendere accettabili le deformazioni; di conseguen-

[3.13] Per più ampie notizie si possono vedere i capp. IV, V, VI, VII del vol. II, parte 2ª (Pozzati-Caccoli) dell'opera Teoria e tecnica delle strutture, ed. UTET, cit. nella nota 3.1. Le presenti osservazioni sono per gran parte tratte da detta opera.

za la luce dei solai non può essere troppo elevata, perchè ciò comporterebbe, oltre a un aumento dei costi, spessori notevoli, quindi un aumento dell'altezza del fabbricato. Di norma, salvo casi del tutto particolari, le luci dei solai con sovraccarichi dell'ordine di 200÷400 kg/m^2, sono dell'ordine di 4÷6 m, dimensioni queste che fra l'altro possono corrispondere a quelle dei vani. Le luci delle travi, e quindi l'interasse dei pilastri, sono in parte condizionate dalla distribuzione degli ambienti, in parte anche da ragioni economiche e dall'opportunità di limitare le sollecitazioni nelle travi stesse e conseguentemente la loro altezza; orientativamente possono variare fra 4 e 8 m circa; nei casi più frequenti sono poco diverse da quelle dei solai.

b) Per edifici a pianta rettangolare allungata, con larghezza del corpo di fabbrica dell'ordine di 10÷12 m, come spesso si ha per abitazioni, è consuetudine disporre i telai in direzione longitudinale: di solito due laterali e uno interno, o "di spina"; quest'ultimo non necessariamente in corrispondenza della mezzeria del fabbricato (fig. 3.51). Con tale disposizione si ha il vantaggio di utilizzare i telai laterali per portare il peso delle pareti esterne di tamponamento; di potere spesso celare il telaio "di spina" entro il muro longitudinale interno, e ridurre tanto sensibilmente l'ingrasse dei pilastri da riuscire spesso a contenere l'altezza delle travi entro lo spessore del solaio, evitando sia il deturpamento, in assenza del muro, di nervature sporgenti all'interno dei vani, sia i sensibili oneri delle casseforme.

Fig. 3.51

La disposizione dei telai in direzione longitudinale - che è fra le più diffuse - presenta l'inconveniente, dal punto di vista strettamente statico, che le maggiori complessive azioni orizzontali, conseguenti alla spinta del vento, o ripartite lungo il lato più lungo del fabbricato, agiscono nella direzione di minor rigidezza della struttura. Ma per fabbricati comprendenti non più di 5 o 6 piani l'azione del vento non ha in genere rilevanza rispetto allo stato di sollecitazione conseguente ai carichi verticali; ciò soprattutto perchè, a parte casi particolari, la struttura è solitamente controventata in modo molto efficace dai muri trasversali e dalle pareti che delimitano i vani delle scale o degli ascensori. E' opportuno tuttavia osservare che, con l'aumentare dell'altezza del fabbricato, o meglio della sua snellezza (rapporto fra altezza e larghezza), se non si provvede a un adeguato dimensionamento delle strutture di controventamento, una soluzione strutturale che comprenda soltanto telai longitudinali non è sostanzialmente corretta dal punto di vista statico, e occorre sistemare i telai nei piani trasversali.

Se i sovraccarichi e le luci sono elevate, i solai con armatura unidirezionale e le corrispondenti travate dei telai possono risultare di altezza eccessiva, ciò che comporta una diminuita utilizzazione del volume costruibile; per tale motivo, e malgrado i maggiori oneri costruttivi, può convenire allora, se i campi sono pressochè quadrati, far ricorso a solai aventi un funzionamento a lastra (ad esempio solai misti con nervature incrociate), oppure all'inserimento di travi secondarie; s'intende che in tale caso deve essere doppio l'ordito dei telai, di modo che ciascun campo di solaio risulti sostenuto lungo tutto il contorno.

Onde evitare costose forature dei solai, occorre prevedere in precedenza i passaggi per le condutture.

c) Per le ossature dei fabbricati possono avere notevole importanza gli <u>effetti delle variazioni termiche</u>. Purtroppo tale problema è complesso e vedremo che non è possibile giungere a regole abbastanza generali, essendo, ad esempio, sostanzialmente diverse le conseguenze provocate in una costruzione da azioni stagionali o giornaliere, e diverse le valutazioni da fare a seconda che le strutture siano di acciaio o di calcestruzzo.

Riferendoci alle nostre più ricorrenti condizioni climatiche, le temperature medie caratterizzanti le stagioni fredde, miti e calde possono essere assunte orientativamente pari a 0, 15, 25°C; e pari a -10 e +35°C i possibili valori estremi attinti dalle temperature giornaliere. Ovviamente le variazioni termiche, che sono causa di stati di sollecitazione, dovrebbero corrispondere agli scarti tra i citati valori e la temperatura che approssimativamente si verifica al tempo del montaggio o dell'esecuzione della struttura dell'edificio; ma già la sola definizione di questo dato fondamentale appare problematica, essendo in generale impossibile, durante l'elaborazione del progetto, conoscere sia la data d'inizio e la durata dei lavori, sia le condizioni climatiche in cui questi si svolgeranno; inoltre la struttura presenta forma e condizioni di vincolo mutevoli mentre viene costruita. Per cui, anche soltanto da questo primo cenno, si comprende come sia inevitabile adottare nei calcoli dati medi e fare riferimento a quanto viene indicato dall'esperienza; tanto più che altre e più delicate questioni, riguardanti il comportamento plastico e viscoso dei materiali, e soprattutto del calcestruzzo, possono avere determinante influenza sugli effetti provocati dalla temperatura.

Inoltre, per quanto riguarda le strutture di calcestruzzo armato, è da considerare che le variazioni termiche negative - anche se alle volte si considerano un po' più attenuate di quelle positive, per il riscaldamento operato durante le stagioni fredde - aggravano le importanti conseguenze dei ritiri dei getti; conseguenze che, come è già stato ricordato, vengono assimilate, per il calcolo delle sollecitazioni, appunto a quelle di una variazione termica negativa ([3.14]).

Le variazioni giornaliere della temperatura sono di solito poco risentite dalle costruzioni di calcestruzzo, a causa del fatto che esse agiscono per brevi tempi e che il calcestruzzo ha scarsissima conducibilità; per cui, se i getti non hanno spessori molto sottili, e a parte le strutture di copertura, esse hanno influenza molto limitata. E' chiaro che le cose sono diverse per le costruzioni metalliche, almenochè esse non siano protette dalle pareti di tamponamento, soprattutto nei confronti della diretta esposizione al sole.

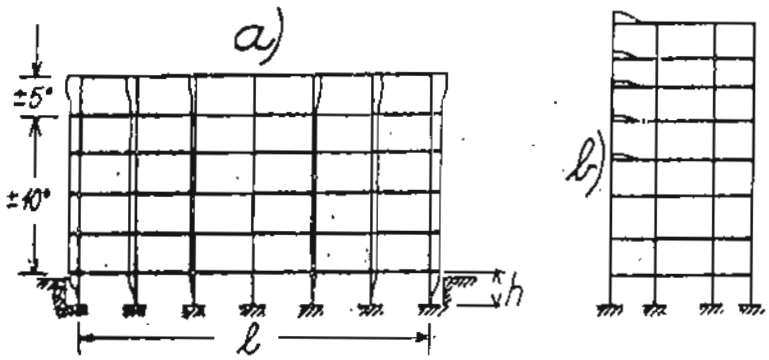


Fig. 3.52

Per effetto delle variazioni termiche ovviamente si modificano le dimensioni degli elementi strutturali. Le travi, dilatandosi come è indicato nella fig. 3.52 (s'intende che gli spostamenti possono avere anche segno opposto), inflettono inevitabilmente i piedritti ([3.15]); ed è chiaro che, essendo le fondazioni (anche se costituite da travi continue) pressochè insensibili alle variazioni della temperatura a causa della protezione esercitata dal terreno, i più elevati effetti si concentrano là dove le sezioni estreme delle colonne sono costrette a subire i maggiori spostamenti relativi: quindi alla base, tra le fondazioni e il primo piano; e in sommità, tra l'ultimo piano e la copertura. Per questa, benchè protetta, si possono di solito raggiungere temperature molto diverse da quelle dei piani sottostanti, soprattutto nelle stagioni calde a causa del calore per irraggiamento; e il fatto ha in genere particolare rilevanza per le costruzioni a setti. I movimenti relativi degli estremi dei pilastri crescono spostandosi verso l'esterno, per cui lo stato di sollecitazione investe più fortemente le membrature di rive; inoltre, a parità di spostamenti relativi, sono i pilastri più rigidi, ossia quelli inferiori, ad essere maggiormente sollecitati.

Per limitare gli stati di sollecitazione conseguenti alle variazioni termiche, è opportuno segmentare i fabbricati eccessivamente estesi mediante <u>giunti di dilatazione</u>. La distanza che conviene adottare nel disporre i giunti dipende dal tipo di fabbricato, dalla natura delle pareti di tamponamento e, s'intende, dal clima; di norma essa non supera i 50 m, ma non è detto che, attenendosi a tali indicazioni, gli effetti siano trascurabili, e regole assolute non possono essere date.

E' opportuno suddividere, mediante giunti, in varie parte i fabbricati che presentano in pianta forma sparsa, o blocchi di altezze molto diverse tra loro.

Il modo più naturale e sicuro di realizzare un giunto è di sdoppiare da cima a fondo una stilata e di interrompere i relativi solai, lasciando (per i casi ordinari, e se non si temono avvicinamenti delle due parti divise a causa di movimenti del terreno) un intervallo vuoto di circa 2 cm (fig. 3.53).

Un tipo di giunto meno soddisfacente e poco diffuso, funzionante per strisciamento, è quello della fig. 3.53b, in cui la trave è interrotta mediante due appoggi scorrevoli realizzati, ad esempio, interponendo, tra le superfici d'appoggio, lamierini grafitati o piastre di gomma sintetica.

([3.14]) Le norme italiane prescrivono di assumere, a causa del ritiro, qualora non si adottino additivi speciali, le seguenti dilatazioni (negative): $40 \cdot 10^{-5}$ (calc. non armato); $30 \cdot 10^{-5}$ (con armat. $\leq 1\%$); $20 \cdot 10^{-5}$ (con armat. $> 1\%$); ciò per getti maturati in ambienti di normale umidità e per spessori intorno ai 20 cm.

([3.15]) I coefficienti di dilatazione termica del calcestruzzo e dell'acciaio sono poco diversi, e costanti per le consuete variazioni della temperatura dovute al clima. Generalmente si assume $\alpha_t \cong 1,1 \cdot 10^{-5}$; quindi, ad esempio, un'asta lunga 10 m, per una variazione di 10°C si allunga di $\alpha_t l \Delta t = 1,1 \cdot 10^{-5} \cdot 10^4 \cdot 10 = 1,1$ mm. Le norme italiane prescrivono di adottare,

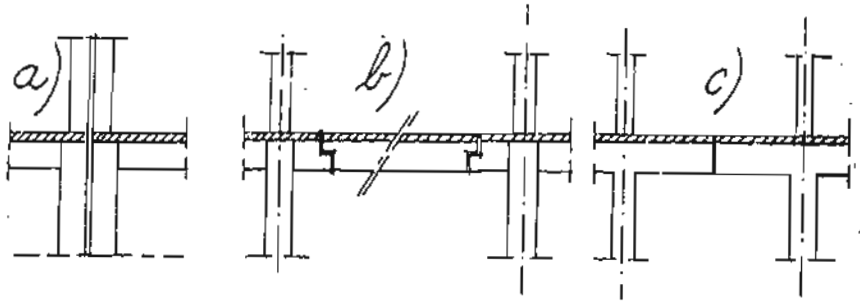


Fig. 3.53

Infine il giunto può essere realizzato, se si dispone di una campata di modesta luce, tagliando la trave a metà e facendo sporgere i due tratti a sbalzo.

E' opportuno tener presente che i giunti di dilatazione comportano delicati problemi per la copertura, dovendo assicurare la sua impermeabilizzazione.

Le considerazioni sinora svolte sono relative ai movimenti indotti dalla temperatura; questi debbono poi essere utilizzati nel calcolo delle sollecitazioni, e qui cominciano, per le strutture di c.a., le più serie incertezze, perchè, adottando l'ipotesi dell'elasticità lineare, e per il modulo di elasticità i consueti valori, si ottengono in genere risultati più gravosi, alle volte molto più gravosi, di quelli effettivi, avendo in innumerevoli esperienze riscontrato che spesso nessun serio inconveniente si è prodotto là dove con tale genere di calcoli erano invece da prevedere gravi conseguen

per le costruzioni di c.a., ± 10°C o ± 15°C, a seconda che le strutture siano o no direttamente esposte alle azioni atmosferiche.

ze. La ragione di tale comportamento viene fatta risalire a varie cause, specialmente per quanto riguarda le variazioni termiche stagionali, che si affermano in tempi molto lunghi: cause in sostanza riconducibili al fatto che, con il graduale aumento delle sollecitazioni, si manifesta sempre più marcata la tendenza del materiale a far corrispondere, a uguali aumenti di dilatazioni, incrementi di tensioni sempre più tenui, per il prodursi di deformazioni sia plastiche, sia viscose.

In seguito a tali considerazioni, spesso viene adottato un modulo di elasticità secante, corrispondente a un fittizio diagramma σ-ε lineare, congiungente l'origine col punto finale (risultante da tutte le deformazioni accumulatesi per le varie cause).

Così, ad esempio nel caso indicato nella fig. 3.52a (con h = 3 m, l/2 = 20 m), per il pilastro di riva di calcestruzzo armato, avente la sezione di 60 x 50 cm, si otterrebbe, considerando i nodi impediti di ruotare e assumendo $E = 10^5$ kg/cm², $\Delta t = 10°$:

$$M = 6\,EJ\,(\alpha_t \tfrac{1}{2}\Delta t)/h^2 = 12 \cdot 10^5 \text{ kg cm},$$

cui corrisponde una tensione del calcestruzzo di circa 40 kg/cm².

d) Nelle strutture intelaiate di c.a. che non siano soggette ad azioni orizzontali di particolare rilevanza - com'è ad esempio il caso degli edifici non in zona sismica, aventi altezza e snellezza limitate - i pilastri sono elementi essenzialmente soggetti a sforzo normale. In ogni caso i pilastri devono essere convenientemente armati perchè, se anche il calcolo non pone in evidenza effetti sensibili per momenti flettenti, molteplici sono le cause, frequentemente trascurate anche perchè d'incerta valutazione, che possono indurre stati flessionali.

L'attuale normativa italiana prescrive che l'area A_a della sezione dell'armatura deve soddisfare le seguenti limitazioni, indicando con A l'area dell'effettiva sezione di calcestruzzo, e A_{min} quella della sezione di calcestruzzo strettamente necessaria (definita come rapporto fra lo sforzo normale applicato alla sezione e il valore della tensione normale ammissibile per solo sforzo normale):

$$A_a \geq 0{,}6\% \, A_{min}, \qquad A_a \geq 0{,}3\% \, A, \qquad A_a \leq 5\% \, A;$$

l'ultima limitazione trova giustificazione nella circostanza, rilevata sperimentalmente, che sezioni eccessivamente armate manifestano premature crisi di resistenza, essenzialmente per instabilità delle armature compresse e la conseguente disgregazione del calcestruzzo che le ricopre (fig. 3.54).

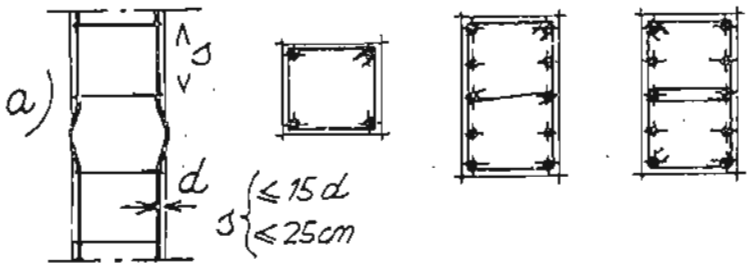


Fig. 3.54

Da ciò discende l'importanza che hanno le staffe nel prevenire l'instabilità dei ferri compressi; come mostra la figura, è opportuno staffare non soltanto le barre disposte in corrispondenza degli angoli della sezione, ma anche quelle situate lungo i lati; ed essendo l'intervallo delle staffe in relazione al diametro delle barre, è anche opportuno, onde evitare fra l'altro staffe con passo eccessivamente ravvicinato, adottare diametri delle sezioni dei ferri non troppo piccoli (la normativa italiana vieta, fra l'altro, l'impiego di barre con diametro inferiore a 12 mm per le strutture gettate in opera).

La configurazione tipica delle armature dei pilastri è schematicamente rappresentata nella fig. 3.55; il raccordo fra le barre dei due pilastri è bene che sia effettuato con inclinazioni orientativamente non superiori a 1:5, e in caso contrario può essere opportuno raffittire le staffe; la sovrapposizione delle armature è solitamente dell'ordine di 30 volte il diametro delle barre, qualora si tratti di pilastri prevalentemente compressi.

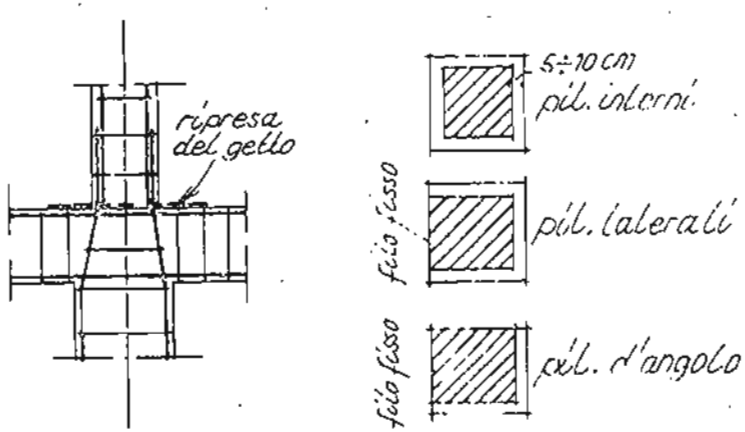


Fig. 3.55

Per ragioni costruttive, in parte connesse con la difficoltà di effettuare i getti, è inoltre opportuno non adottare sezioni di lato inferiore a 25÷20 cm; possibilmente vanno evitate sezioni di forma irregolare o molto allungata.

Passando da un piano a quello inferiore, i pilastri aumentano di solito le dimensioni della loro sezione (fig. 3.55); inoltre i pilastri di uno stesso piano sono in genere diversamente sollecitati. Si dovrebbe quindi avere una grande varietà di dimensioni; ma in pratica, onde evitare forti costi di casserature, si fissa un certo numero di sezioni, scegliendo poi nei vari casi quelle più idonee. Per i pilastri interni, le variazioni si possono ottenere variando due o quattro lati, in modo da lasciare inalterato l'asse; per i pilastri di riva o d'angolo si presenta sovente la necessità di mantenere invariato per l'intera altezza del fabbricato il filo esterno, per cui l'accrescimento della sezione non può essere simmetrico (fig. 3.55). Ciò comporta eccentricità relative degli assi e l'insorgere di azioni flessionali localizzate. In genere, se la variazione delle dimensioni è dell'ordine di non più di 10 cm, tali eccentricità dan luogo a trascurabili conseguenze, qualora siano efficacemente contrastati gli spostamenti provocati dalle coppie.

E' chiaro che i piedritti esterni, e in particolare i piedritti d'angolo, hanno sforzi assiali in genere sensibilmente inferiori a quelli delle colonne interne; però sono soggetti ad azioni flessionali superiori.

e) Passando alle <u>ossature di acciaio</u>, puo' essere infine opportuno richiamare l'attenzione su alcuni aspetti ricorrenti nel progetto e nel calcolo delle strutture metalliche degli edifici: 1) Le strutture metalliche forniscono un esempio tipico di strutture prefabbricate, venendo i vari elementi strutturali costruiti in officina e collegati in opera; quindi è di fondamentale importanza standardizzarle il più possibile evitando piante irregolari, collegamenti fra membrature principali e secondarie non ad angolo retto, e ripetendo il maggior numero di volte luci di solai e lunghezze di elementi. 2) I collegamenti, che costituiscono uno dei problemi più delicati, possono essere "rigidi" o "a cerniera", e la scelta del primo o del secondo tipo comporta in genere sensibili ripercussioni tanto sulla concezione strutturale, quanto sui costi di produzione. 3) La necessità di limitare sia le frecce dei solai e delle travi, sia gli

spostamenti orizzontali conseguenti al vento; e alle volte quest'esigenza non consente di attingere appieno le resistenze del materiale, rendendo più proficuo l'impiego dell'acciaio tipo 1 (anche nei confronti della sicurezza alla stabilità dell'equilibrio), poichè il valore del modulo di elasticità risente poco della qualità dell'acciaio. 4) L'importanza fondamentale delle verifiche alla stabilità dell'equilibrio, nei confronti di fenomeni sia locali, sia generali; questi ultimi di più difficile intuizione e più complessa indagine. 5) Per la forte conducibilità del materiale, la notevole importanza delle variazioni termiche giornaliere (oltre s'intende a quelle stagionali) nei confronti sia dei movimenti, sia anche, quando la struttura sia staticamente indeterminata, delle sollecitazioni; per cui la protezione dall'azione diretta del sole acquista notevole rilievo. 6) Necessari presidi nei confronti del pericolo di incendi.

Gli impalcati, quando le maglie abbiano lati di lunghezze non eccessive (orientativamente dell'ordine di 5÷8 m) e tra loro paragonabili, vengono di solito realizzati con travi principali e secondarie: su queste ultime, che ovviamente hanno direzione ortogonale a quella dei telai, si appoggiano i solai di lamiera ondulata, sui quali viene poi gettato calcestruzzo alleggerito, o calcestruzzo normale, alle volte collaborante con la stessa lamiera (fig. 3.56).

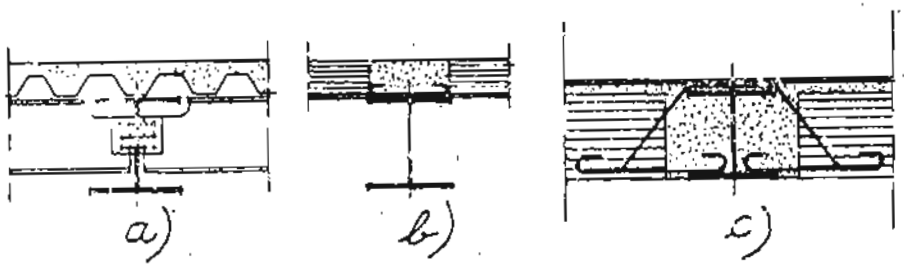


Fig. 3.56

Per le travi, sia principali, sia secondarie, correntemente si impiegano profilati a doppio T della serie IPE e HE (di solito HEA e HEB ([3.16]); raramente rinforzati con piatti o del tipo pesante HEM, non economico per elementi inflessi). Le nervature secondarie di

solito, per semplicità, vengono collegate a quelle principali mediante semplici unioni resistenti a sforzo tagliante; sono quindi più rari i collegamenti di tipo "rigido" (v. cap. 4).

I solai, come si è già accennato, sono realizzati in genere con lamiera grecata (fig. 3.56) riempita con calcestruzzo, di solito collegata all'estradosso delle nervature mediante punti di saldatura, per realizzare un certo grado di controventamento all'atto di montaggi, fase delicata della costruzione. Quando le dimensioni delle maglie sono dell'ordine di 5 m, può essere vantaggioso realizzare gli impalcati senza travi secondarie con solai misti di acciaio e calcestruzzo (fig. 3.56 b,c); comprendendo, quando sia possibile, le travi nello spessore degli stessi solai, si realizza, oltre a un risparmio di spazio, anche la protezione delle nervature dal pericolo di incendi, contro i quali tutte le strutture metalliche debbono essere obbligatoriamente protette in conformità della Circolare ministeriale n. 91 del 14 ottobre 1961 ("Norme di sicurezza per la protezione contro il fuoco dei fabbricati a struttura in acciaio destinati ad uso civile").

Le travi non debbono risultare eccessivamente deformabili; occorre quindi verificare che le frecce provocate dai carichi accidentali non superino (per i piani abitabili) 1/1000 delle rispettive luci.

Per i pilastri, dovendo le verifiche di resistenza tener conto della stabilità dell'equilibrio per sforzo assiale, le sezioni più convenienti sono del tipo a doppio T della serie HE, avendo esse i

([3.16]) I profilati IPE hanno l'altezza h variabile da 80 a 600 mm; la larghezza b delle ali da 46 a 220 mm; lo spessore s dell'anima da 4 a 12 mm.

Per i profilati HEA:

h = 100÷600 mm; b = 100÷300 mm; s = 5÷13 mm.

Per i profilati HEB:

h = 100÷600 mm; b = 100÷300 mm; s = 6÷15 mm.

Per i profilati HEM (produz. it.):

h = 120÷310 mm; b = 100÷290 mm; s = 12÷18 mm.

raggi d'inerzia principali non molto diversi tra loro; le tre gamme di diverso peso dei profilati HE spesso consentono di mantenere uguali gli ingombri; in presenza di sforzi normali elevati si può fare ricorso a sezioni composte.

Per le costruzioni metalliche hanno particolare importanza i collegamenti: si definiscono convenzionalmente "a nodi rigidi", quelli che non consentono apprezzabili rotazioni relative degli estremi delle membrature unite in uno stesso nodo; "con nodi a cerniera", o "semirigidi", quelli che praticamente consentono invece le rotazioni. In quest'ultimo caso - spesso conveniente, perchè facilita i montaggi, evitando delicate saldature in opera - occorre disporre con sicurezza di adeguati sistemi di controventamento sia "verticali" sia "di piano".

All'illustrazione dei principali tipi di collegamento è dedicato il successivo capitolo.

3.9. CENNI SULLE STRUTTURE PREFABBRICATE ([3.17])

a) L'impiego di elementi prefabbricati consente notevoli vantaggi, tra i quali, in particolare, quelli di ridurre i tempi di fabbricazione, di industrializzare la costruzione e di potere usare materiali aventi caratteristiche meccaniche elevate con buona garanzia di uniformità; per contro, risulta in genere minore il grado di monoliticità delle strutture e diventano essenziali i problemi della stabilità dell'equilibrio e del comportamento viscoso del calcestruzzo. Inoltre si hanno delicate questioni in merito all'esecuzione e alla maturazione dei getti, frequentemente di piccolo spessore; nonchè alla posa in opera e al trasporto dei pezzi prefabbricati. E relativamente a tale ultimo aspetto, essendo molto importante il contenimento dei pesi propri, viene largamente impiegato, quando sia possibile, il calcestruzzo alleggerito (γ = 1,1 ÷ 1,8 t/m^3, R'_{bk} = 200-300 kg/cm^2). In linea di massima, comunque, i problemi relativi alla statica delle costruzioni prefabbricate, pur tenendo conto della loro peculiarità, vengono sostanzialmente affrontati con i consueti criteri.

Per quanto riguarda le tipologie, a parte gli elementi impiegati nell'edilizia industriale (travi a doppia pendenza, volte corrugate, volte a Π, v. fig. 3.57), è opportuna una distinzione tra strutture ad ossatura portante e strutture a pannelli.

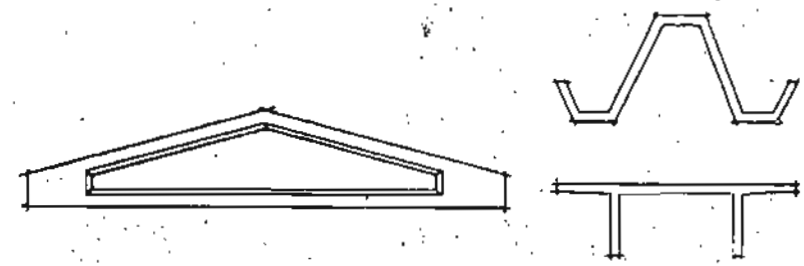


Fig. 3.57

Le prime vengono realizzate con gli elementi propri delle strutture gettate in opera, cioè travi e pilastri (nella fig. 3.58 sono indicate alcune soluzioni tipiche); si comprende la notevole impor

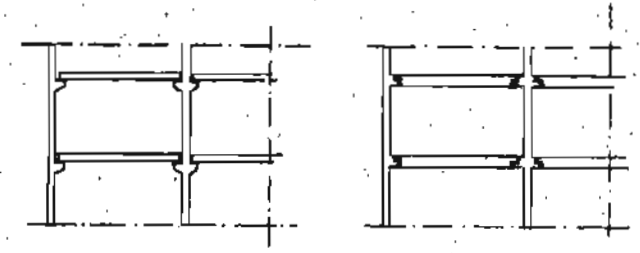


Fig. 3.58

([3.17]) Per un più approfondito esame del problema, si veda il cap. III dell'op. cit. di POZZATI-CECCOLI.

tanza, come d'altronde per tutte le strutture prefabbricate, del problema dei collegamenti, ai quali è demandato l'essenziale compito di trasmettere le sollecitazioni tra i vari elementi strutturali, e assai spesso di assicurare la generale stabilità della costruzione: in fig. 3.59 sono indicate schematicamente, a titolo di esempio, possibili soluzioni per il collegamento tra pilastri e di una trave con un pilastro. In ogni caso è chiaro che, con questa

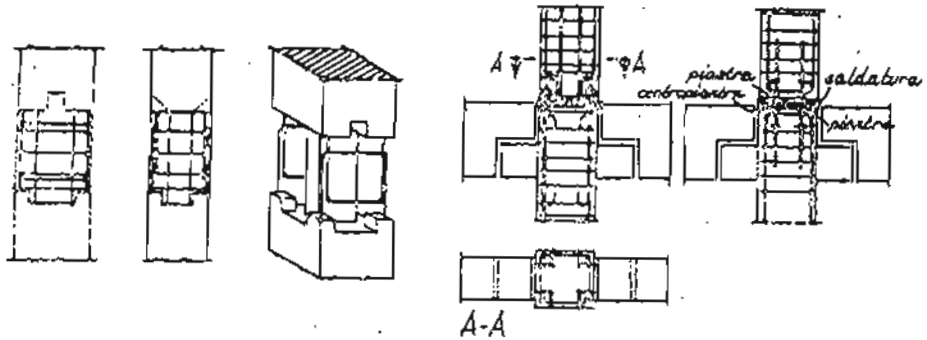


Fig. 3.59

tecnica, si realizzano strutture portanti del tipo a telaio, per le quali si applicano in maniera immutata i criteri di calcolo illustrati nei paragrafi precedenti; tuttavia particolare attenzione va posta nella progettazione e nell'esecuzione dei giunti, ed è opportuno prevedere elementi di irrigidimento efficaci (ad esempio il nucleo scale e ascensori), soprattutto quando si temono azioni orizzontali sensibili.

c) Le strutture a pannelli ([3.18]) sono costituite dall'assemblaggio di elementi piani, di forma rettangolare, impiegati sia per la realizzazione dei solai, sia per le pareti verticali. Gli elementi orizzontali sono per molti aspetti analoghi ai pannelli di solaio prefabbricati, da tempo in uso nelle costruzioni realizzate in opera; e in sostanza si tratta di pannelli portanti di calcestruzzo, variamente alleggeriti con fori (comodi per il passaggio di canalizzazioni), oppure con blocchi di polistirolo o di laterizio (fig. 3.60a). Gli elementi verticali sono diversi a seconda che

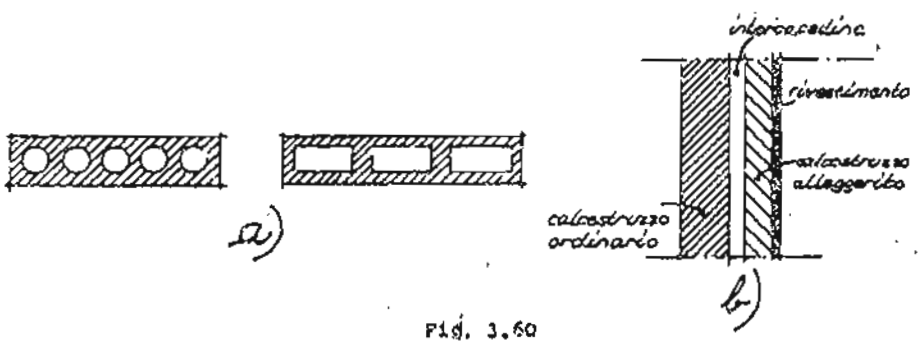


Fig. 3.60

ad essi sia attribuita una funzione portante o di tamponamento: nel primo caso si impiegano pannelli multistrato in cui, insieme con materiali adatti a garantire il necessario isolamento termico ed acustico, si ricorre al calcestruzzo ordinario per far fronte alla trasmissione delle sollecitazioni assiali e flessionali (fig. 3.60b); nel secondo si impiegano sovente pannelli monostrato di calcestruzzo alleggerito.

Particolarmente importante è, come abbiamo già accennato, il problema dei giunti: per il collegamento dei pannelli orizzontali si effettuano sigillature con calcestruzzo gettato in opera (fig. 3.61a), in modo da creare la possibilità di trasmissione di limitati sforzi di taglio tra i vari elementi accostati (efficace, a questo scopo, è la presenza di armature sporgenti dai pannelli,

([3.18]) Il calcolo delle strutture a pannelli è disciplinato dalla circolare n. 6090 del Ministero dei Lavori Pubblici, "Norme per la progettazione, il calcolo, la esecuzione ed il collaudo di costruzioni con strutture prefabbricate in zona asismiche e sismiche".

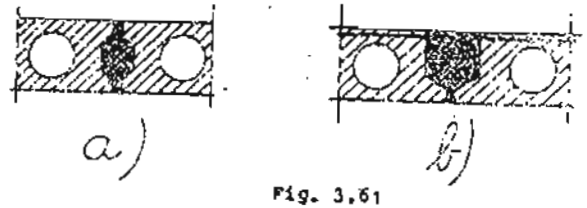


Fig. 3.61

v. fig. 3.61b); ed è chiaro che a tali tipi di giunto può essere sostanzialmente affidato il compito di consentire sia la ripartizione dei carichi verticali tra i pannelli, sia di irrigidire gli orizzontamenti, in modo che essi possano funzionare a lastra nel proprio piano e riportare le azioni orizzontali sulle pareti di controventamento ([3.19]).

I giunti verticali sono chiamati a trasmettere le azioni taglianti derivanti dai carichi verticali e orizzontali (fig. 3.62):

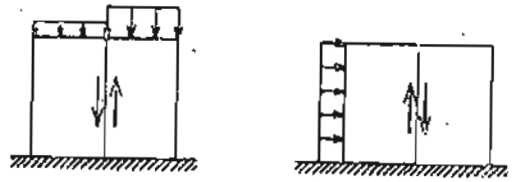


Fig. 3.62

possono essere "a semplice incatenamento"(fig.3.63a), non potendo così ottenere una sicura trasmissione delle sollecitazioni, perchè il ritiro dei getti favorisce il distacco delle superficie a contatto e perchè le armature di cucitura hanno una lunghezza di sovrapposizione relativamente modesta; oppure "organizzati" (fig. 3.63b), ossia corrugando i bordi contrapposti in modo da assicurare la trasmissione degli sforzi di taglio mediante un comportamento di una sorta di traliccio, di cui le aste compresse sono costituite dal calcestruzzo e quelle tese dall'armatura ([3.20]).

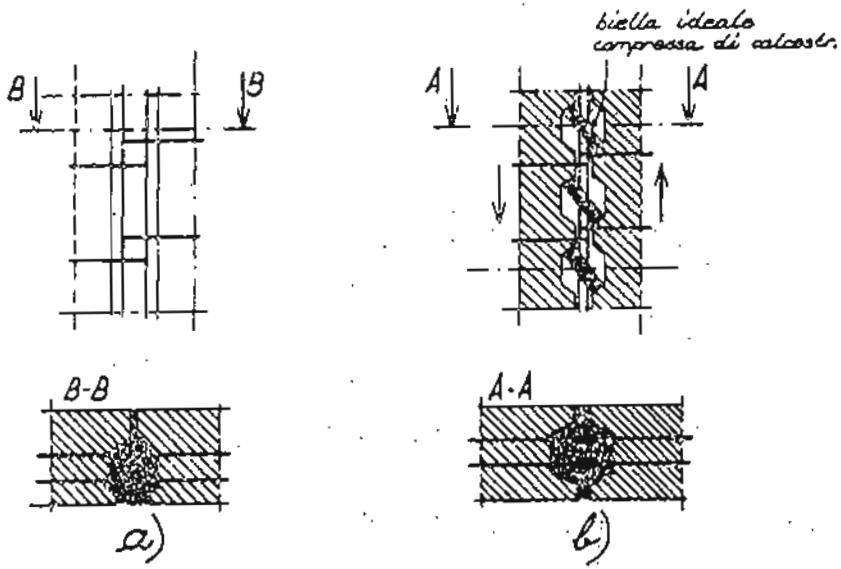


Fig. 3.63

In genere per i pannelli verticali soggetti a sollecitazione di pressoflessione ([3.21]) dev'essere eseguita, oltre alla verifica di resistenza, quella di stabilità, valutata in genere prescindendo dall'eccentricità degli sforzi assiali; però il carico critico viene poi limitato convenientemente, mettendo in conto la snellezza del pannello (funzione della geometria dello stesso pannello e delle caratteristiche del materiale costituente) e un'eccentricità di progetto, determinata con relazioni semiempiriche (si vedano le istruzioni citate nella nota 3.18). Ovviamente, oltre alla stabilità del singolo elemento, è essenziale la stabilità del complesso; e per essa le norme consigliano di effettuare indagini accurate, mettendo in conto, tra l'altro, la possibilità che, a seguito di un evento eccezionale (esplosione, urto di veicoli, ecc.), venga meno la funzione portante di un qualsiasi pannello avente le dimensioni di un vano.

([3.19]) A questo scopo è essenziale la realizzazione di un cordolo perimetrale armato, cioè di una cintura per il solaio, detta chieve elastica.

([3.20]) Condizionato dall'efficacia dei giunti verticali è il comportamento delle pareti piane a pannelli soggette ad azioni orizzontali; solamente nel caso di giunti organizzati si può fare affidamento su di un comportamento monolitico dell'intera parete; diversamente occorre riferirsi alle mensole elementari costituenti idealmente la parete.

([3.21]) Le cause di eccentricità possono essere strutturali (appoggio eccentrico dei pannelli orizzontali, centratura non perfetta dello strato di ripartizione) e accidentali (difetti di planarità dei pannelli, disomogeneità del materiale, ecc.). Le istruzioni citate nella nota 3.18 forniscono in proposito precise indicazioni.

Capitolo 4

COLLEGAMENTI PER LE STRUTTURE METALLICHE E VINCOLI([4.1])

4.1. PREMESSA AL CALCOLO DEI COLLEGAMENTI

Le strutture metalliche vengono in genere realizzate mediante assemblaggio in opera di elementi realizzati in precedenza, sia provenienti direttamente dalle acciaierie, sia già parzialmente composti in officina.

Le tecniche di collegamento acquistano pertanto particolare importanza, risultando da esse fortemente influenzato il comportamento statico del complesso strutturale e le modalità di realizzazione dell'opera; di riflesso, rilevante è la loro incidenza sul costo globale della costruzione.

Il primo elementare meccanismo di collegamento, ottenuto inserendo spine o chiavi passanti nei fori corrispondenti dei pezzi da unire, è tuttora diffuso tramite l'impiego di chiodi e di bulloni, che possono consentire di ottenere uno stretto serraggio degli elementi a contatto; negli ultimi decenni si è parallelamente sviluppata la tecnica della saldatura.