Lezione 15

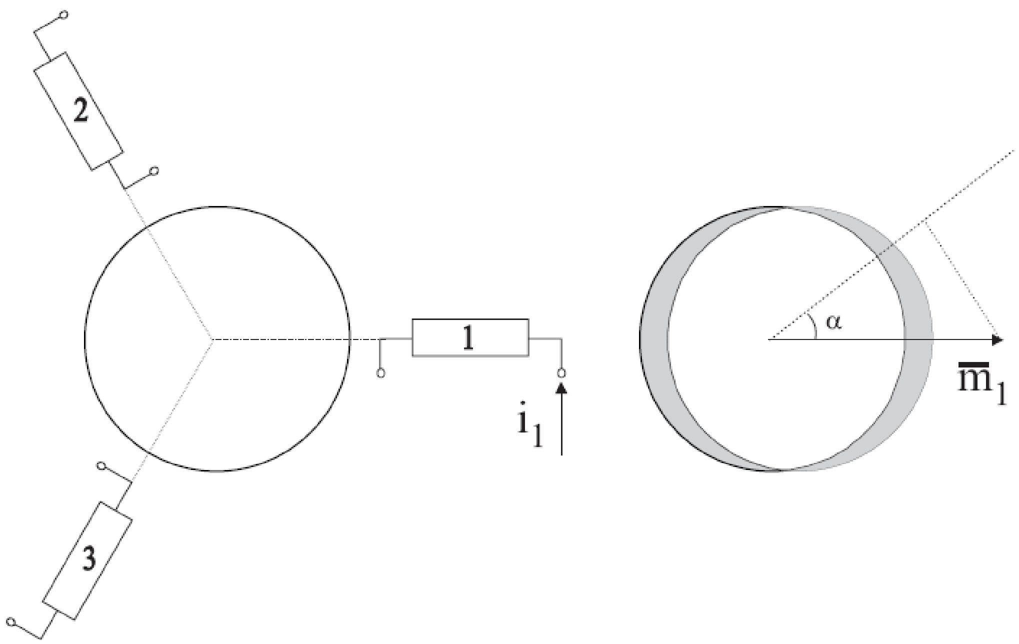
Brushless Sinusoidale

Rappresentazione vettoriale (simbolica)

- Corrente e forza magnetomotrice

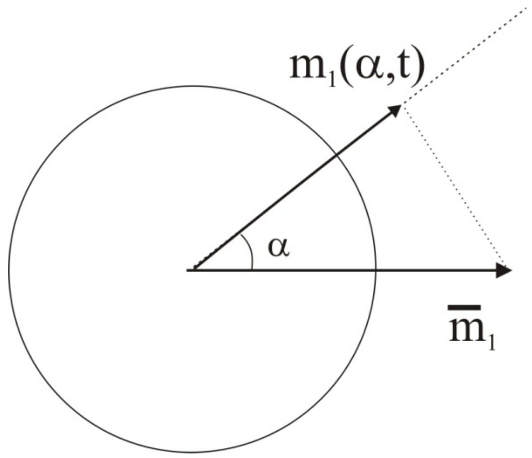
Se si alimenta la *fase1* $i1$, al traferro si ha una distribuzione di f.m.m. sinusoidale, per quello visto in precedenza. Si può supporre che questo andamento sia rappresentato da un vettore: $\overline{m}_1$

$$m_1 = F_1 I$$



F_1: è il valore massimo della funzione di distribuzione dei conduttori, 1° armonica

I : il valore della corrente.



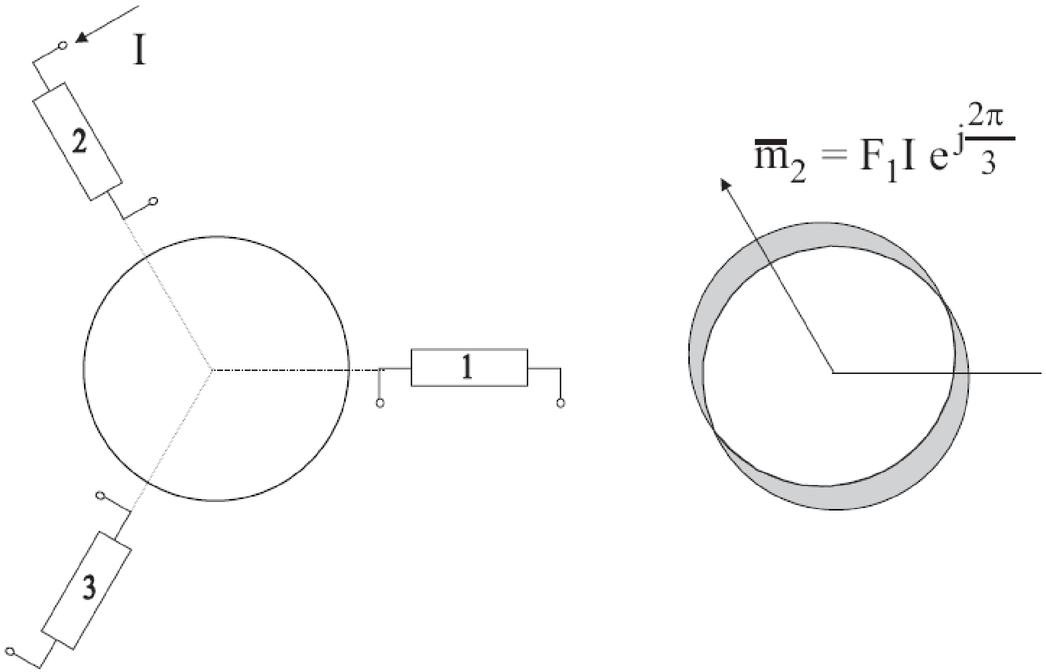
$$m_1(\alpha) = F_1(\alpha)\, i_1 = F_1\, i_1 \cos\alpha \quad \Longrightarrow \quad m_1(\alpha,t) = F_1 \cos\alpha\, i_1(t)$$

La proiezione di $\vec{m}_1$ lungo qualsiasi direzione fornisce il valore della f.m.m. lungo quella stessa direzione.

Se si alimenta la fase 2, sempre con I, si può rappresentare la f.m.m. con un vettore *m*2, con la stessa ampiezza $F_1 I$, ma sfasato di 120°:

$$\overline{m}_2 = F_1 I e^{j\frac{2}{3}\pi}$$

$e^{j\frac{2}{3}\pi}$ è un operatore che ruota il vettore di 120°.



Posto: $a = e^{j\frac{2}{3}\pi}$ e $a^2 = e^{j\frac{4}{3}\pi}$

$$\overline{m} = \overline{m}_1 + \overline{m}_2 + \overline{m}_3 = F_1(i_1 + a i_2 + a^2 i_3) = F_1(\bar{i}_1 + \bar{i}_2 + \bar{i}_3)$$

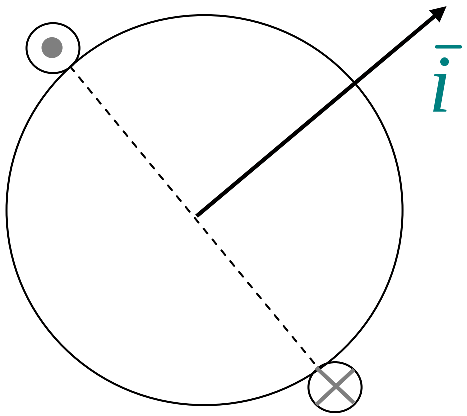
dato che $(i_1 + i_2 + i_3) = 0$

$$\bar{i} = \frac{2}{3}(\bar{i}_1 + \bar{i}_2 + \bar{i}_3) \quad \Longrightarrow \quad \overline{m} = \frac{3}{2} F_1 \bar{i}$$

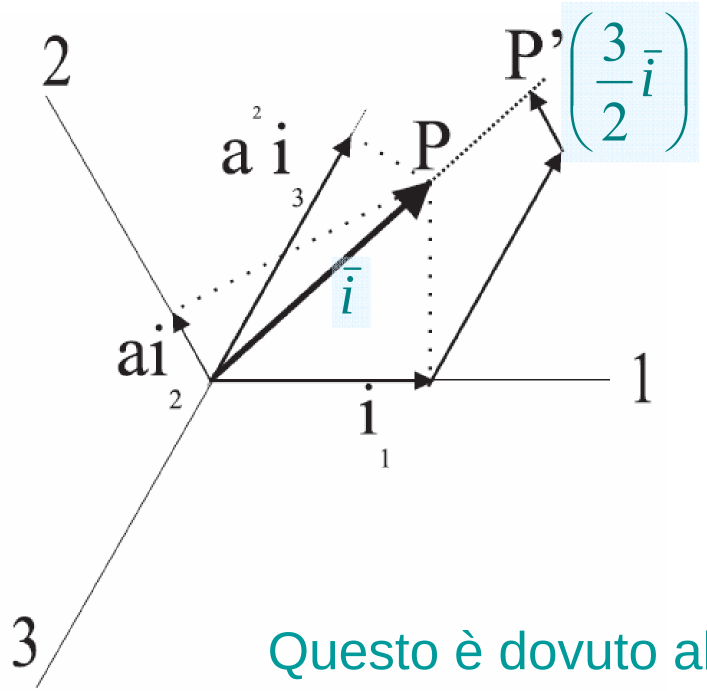
$\bar{i}$ è il vettore rappresentativo delle correnti delle fasi.

Il campo magnetico prodotto dall'effetto combinato di i_1, i_2, i_3, è equivalente a quello di un ipotetico avvolgimento il cui asse è la direzione di $\bar{i}$

$$\overline{m} = \frac{3}{2} F_1 \bar{i}$$



La scelta del vettore *[i]* è dovuto al fatto che le sue proiezioni, sui tre assi 1, 2, 3 sono le correnti i_1, i_2, i_3.



Vediamo che la somma dei 3 vettori

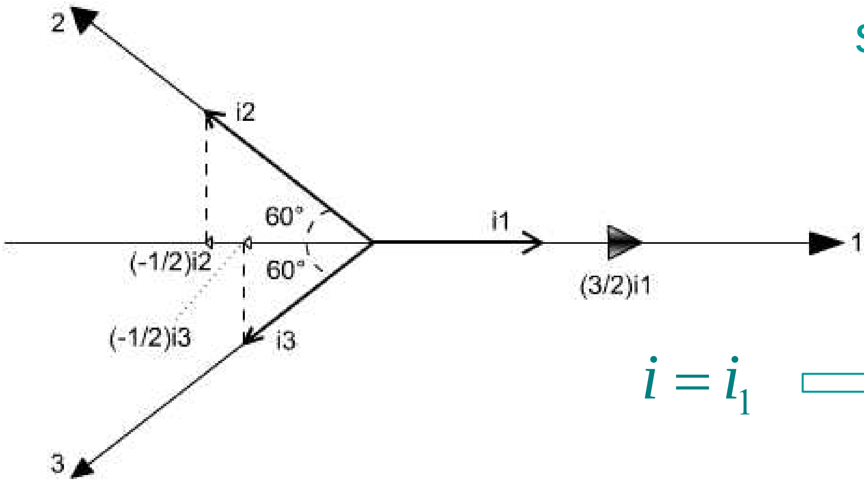
$i_1, ai_2, a^2 i_3$ porta nel punto P' $\rightarrow \left(\frac{3}{2}\bar{i}\right)$

e non in P.

Questo è dovuto al fatto che il vettore $\left(\frac{3}{2}\bar{i}\right)$ è un vettore nello spazio che sta su un piano $(i_1 + i_2 + i_3) = 0$, e per questo rappresentabile nel piano, ma naturalmente le dimensioni non sono le stesse.

Infatti per esempio, se consideriamo che il vettore $\bar{i}_1 + \bar{i}_2 + \bar{i}_3$

si trovi sull'asse 1:



$$i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

$$i = i_1 \quad \Longrightarrow \quad i_2 = i_3 = \frac{1}{2} i_1 = \frac{1}{2} i$$

Le componenti di $\bar{i}_2$ e $\bar{i}_3$ ortogonali all'asse 1 si devono annullare, altrimenti il vettore risultante non sarebbe sull'asse 1, quindi la somma delle proiezioni dei vettori che rappresentano le 3 correnti (i_1, i_2, i_3 *vedi figura*) sull'asse 1 è data da:

$$-\frac{1}{2} i_2 - \frac{1}{2} i_3 + i_1 = -\frac{1}{2}(-i_1) + i_1 = \frac{1}{2} i + i = \frac{3}{2} i$$

cioè il vettore $\bar{i}$ amplificato di un fattore $\frac{3}{2}$

Spiegazione della rappresentazione vettoriale

E' UNA SCELTA DI COMODO, LE GRANDEZZE IN REALTA' SONO SCALARI

Non facciamo nessuna considerazione sulla variazione delle grandezze in funzione del tempo.

Normalmente in elettrotecnica si considera un caso particolare che è quello a regime dove le correnti di fase sono:

$$i_1 = i \cos \omega_e t$$

$$i_2 = i \cos(\omega_e t - \frac{2}{3}\pi)$$

$$i_3 = i \cos(\omega_e t - \frac{4}{3}\pi)$$

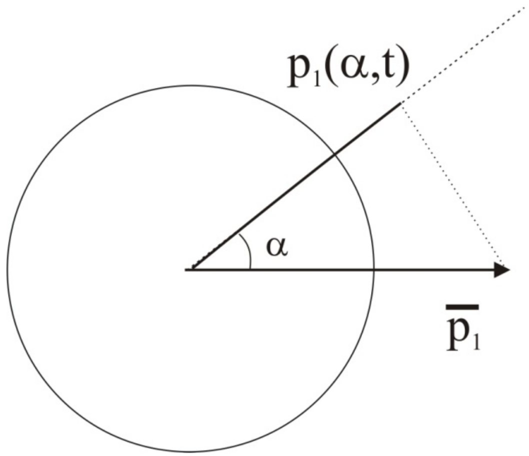
In questo caso il vettore risultante ruota su un cerchio (i costante) con pulsazione ω_e, invece nel caso generale il vettore risultante può assumere un valore qualsiasi sul piano.

Vogliamo determinare un modello valido in generale: TRANSITORIO.

2 ipotesi per la rappresentazione vettoriale di un sistema trifasico nel piano:

1) la distribuzione spaziale deve essere simmetrica e sinusoidale

2) la somma delle componenti deve essere = 0 (es: $i_1 + i_2 + i_3 = 0$)



Simmetrica mi permette di dire che le tre grandezze sono sfasate di 120° nel piano, e sinusoidale che posso definire un vettore la cui proiezione lungo un direzione mi dà il valore di quella grandezza lungo la stessa direzione.

La corrente non ha una distribuzione sinusoidale, infatti per questo abbiamo considerato la $F(\alpha)$, e quindi la $F(\alpha)I \rightarrow$ la *f.m.m.* che ha la distribuzione sinusoidale (consideriamo solo la prima armonica).

La proprietà sinusoidale di $F(\alpha)$ la inglobiamo nella corrente, dato che quello che ci interessa è la *f.m.m.* che produce il flusso e quindi la coppia.

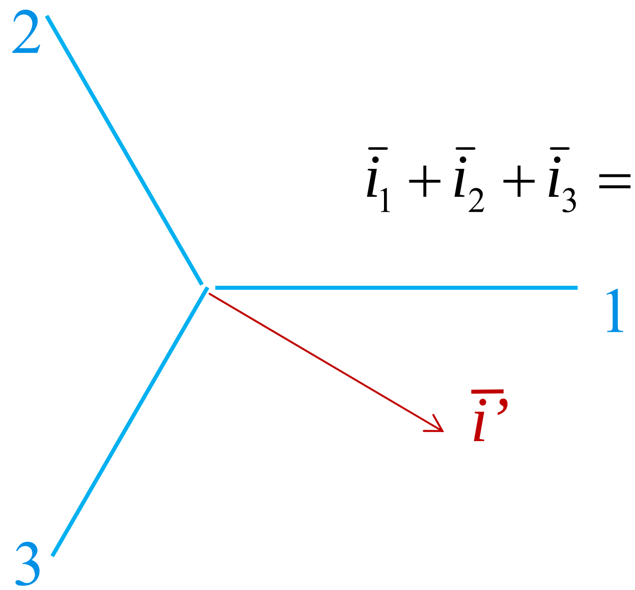
$$\overline{m} = \frac{3}{2} F_1 \bar{i} \qquad \bar{i} = \frac{2}{3}(\bar{i}_1 + \bar{i}_2 + \bar{i}_3)$$

Vediamo il motivo perché la somma vettoriale delle tre correnti è un vettore più lungo:

$$\bar{i}_1 + \bar{i}_2 + \bar{i}_3 = \bar{i}' \qquad \bar{i} = \frac{2}{3}\bar{i}'$$

Infatti è il vettore i le cui proiezioni lungo i tre assi sul piano sono le tre correnti i_1, i_2, i_3 .

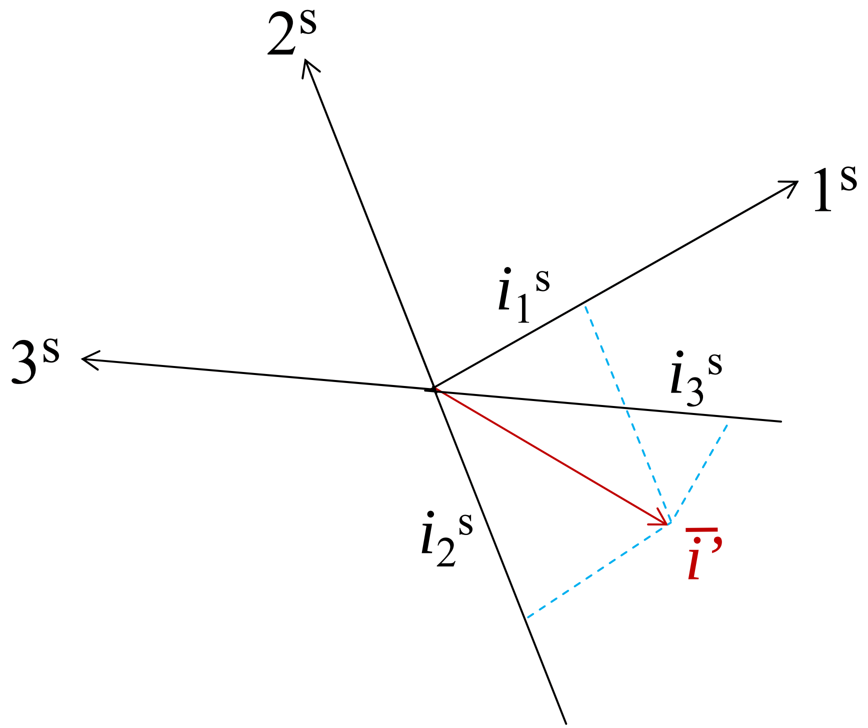
Piano $i_1 + i_2 + i_3 = 0$ dove sono rappresentate le tre correnti di fase i_1, i_2, i_3, che sono la proiezione del vettore i sui tre assi sfasati di 120° (che sono i tre assi di simmetria delle tre fasi del motore), ma la somma vettoriale delle tre correnti è un vettore più lungo pari a i'.



$$\bar{i}_1 + \bar{i}_2 + \bar{i}_3 = \bar{i}'$$

In realtà le tre correnti devono essere rappresentate nello spazio, le cui coordinate sono: 1^s, 2^s, 3^s

Il vettore i' rappresentato nello spazio, si trova nel piano $i_1 + i_2 + i_3 = 0$ (x+y+z=0)



le proiezioni di i sulle coordinate spaziali 1^s, 2^s, 3^s, sono : $i_1{}^s$, $i_2{}^s$, $i_3{}^s$

Però in questo caso possiamo dire: $\bar{i}_1^{\,S} + \bar{i}_2^{\,S} + \bar{i}_3^{\,S} = \bar{i}'$

Quindi la somma vettoriale delle tre correnti nello spazio e nel piano danno sempre il vettore i'

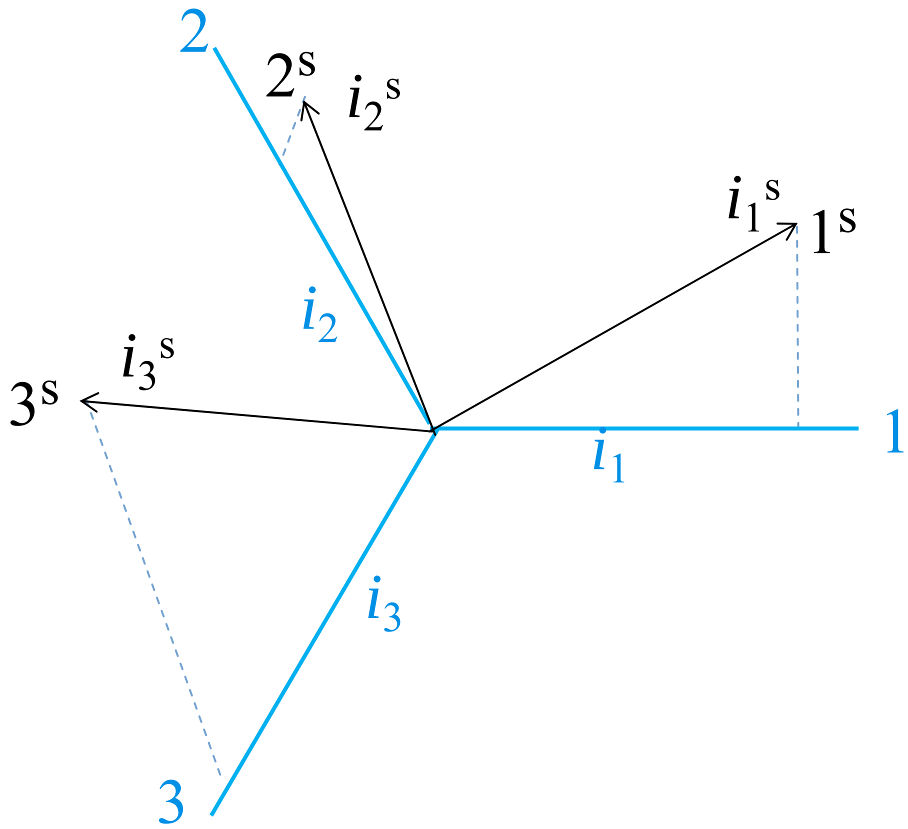
$$\bar{i}_1^S + \bar{i}_2^S + \bar{i}_3^S = \bar{i}' \qquad \bar{i}_1 + \bar{i}_2 + \bar{i}_3 = \bar{i}'$$

Dato che il vettore risultante i' deve essere sul piano $i_1 + i_2 + i_3 = 0$ (x+y+z=0), contribuiscono solo le componenti presenti sullo stesso piano.

La conclusione è che se le componenti ortogonali di i_1^s, i_2^s, i_3^s al piano $i_1 + i_2 + i_3 = 0$ si annullano, le tre correnti i_1, i_2, i_3. sono le proiezioni di i_1^s, i_2^s, i_3^s.

Naturalmente il passaggio inverso, dalla risultante alle componenti, è permesso solo nello spazio.

Le proiezioni dei tre assi coordinati dello spazio sul piano $i_1 + i_2 + i_3 = 0$ (x+y+z=0) sono proprio i tre assi sfasati di 120° elettrici sui quali sono riferite le nostre grandezze trifasiche:



Quindi le correnti nel piano i_1, i_2, i_3, possono essere considerate come la proiezioni delle correnti definite nello spazio: i_1^s, i_2^s, i_3^s

Quindi se ricavo le correnti nel piano i_1, i_2, i_3, come proiezioni delle correnti nello spazio i_1^S, i_2^S, i_3^S,ottengo:

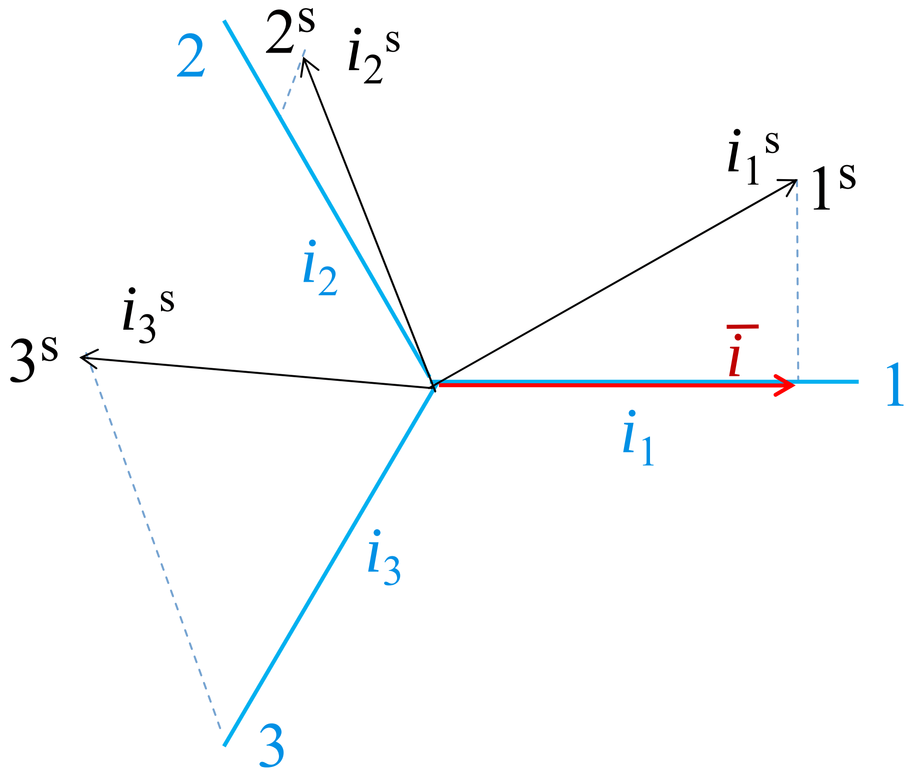
$$i_1^S \quad \rightarrow \quad i_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}\, i_1^S$$

$$i_2^S \quad \rightarrow \quad i_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}\, i_2^S$$

$$i_3^S \quad \rightarrow \quad i_3 = \sqrt{\frac{2}{3}}\, i_3^S$$

Facciamo l'esempio, stavolta nello spazio, che il vettore i si trovi sull'asse 1:

$$\bar{i} = \frac{2}{3}\bar{i}'$$



$$i_1^S = \sqrt{\frac{3}{2}}\, i_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}\, i$$

$$i_2^S = \sqrt{\frac{3}{2}}\, i_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{1}{2}\, i$$

$$i_3^S = \sqrt{\frac{3}{2}}\, i_3 = -\sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{1}{2}\, i$$

$$i_1^S + i_2^S + i_3^S = 0$$

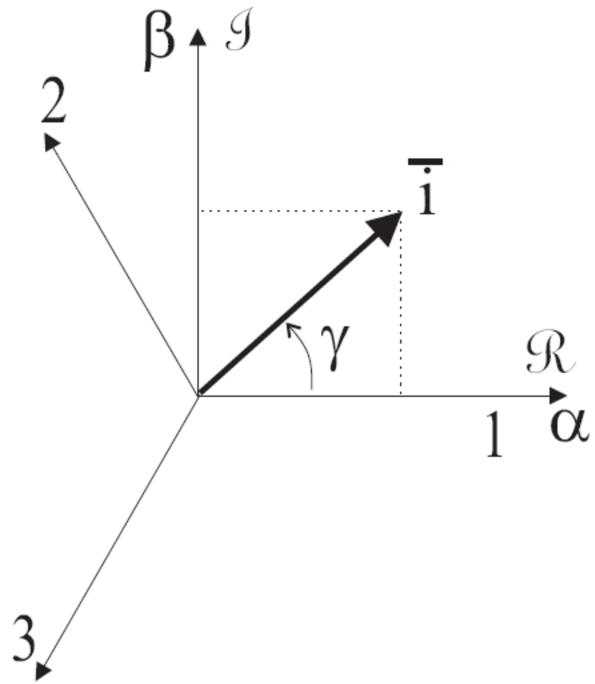
Il modulo del vettore risultante delle correnti nello spazio è:

$$\left| \bar{i}_1^S + \bar{i}_2^S + \bar{i}_3^S \right| = \sqrt{\left(i_1^S\right)^2 + \left(i_2^S\right)^2 + \left(i_3^S\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}i^2 + \frac{1}{4}\frac{3}{2}i^2 + \frac{1}{4}\frac{3}{2}i^2} = i\sqrt{\frac{3}{2} + \frac{3}{4}} = i\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}i$$

Le somme vettoriali $\bar{i}_1^S + \bar{i}_2^S + \bar{i}_3^S$ e $\bar{i}_1 + \bar{i}_2 + \bar{i}_3$ danno lo stesso vettore $\bar{i}'$ mentre nello spazio lo stesso vettore mi da le componenti i_1^S, i_2^S, i_3^S, nel piano occorre utilizzare il vettore $\bar{i} = \frac{2}{3}\bar{i}'$ perché altrimenti non otterrei come proiezione i_1, i_2, i_3

- Nel piano si può rappresentare il vettore $\overline{i}$ tramite un sistema di due assi cartesiani, con un numero complesso, oppure come somma di 3 vettori (le cui direzioni sono le proiezioni nel piano dei tre assi dello spazio):



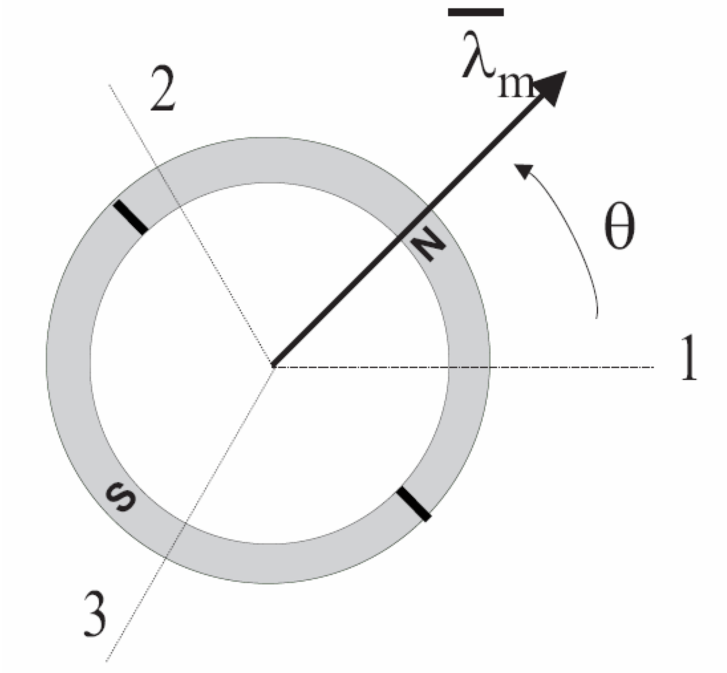
$$\overline{i} = \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\cos\gamma \\ i\sin\gamma \end{bmatrix}$$

$$\overline{i} = i_\alpha + j i_\beta$$

$\overline{i} = \frac{2}{3}(i_1 + a\, i_2 + a^2 i_3)$, con $a = e^{j\frac{2\pi}{3}}$

- Flusso concatenato $\overline{\lambda_m}$

Si può effettuare lo stesso discorso della f.m.m. Si può supporre che il flusso concatenato con i tre avvolgimenti: $\lambda_{1m}, \lambda_{2m}, \lambda_{3m}$, siano le proiezioni di un vettore $\overline{\lambda_m}$ sui tre assi. Esse, e quindi anche il vettore rappresentativo, sono funzioni di θ.



Considerando solo la 1^a armonica in θ, dato che le terze armoniche non danno contributo alla coppia, le tre componenti sono:

$$\lambda_{1m}(\theta) = K\ \cos(\theta)$$
$$\lambda_{2m}(\theta) = K\ \cos(\theta - \frac{2\pi}{3})$$
$$\lambda_{3m}(\theta) = K\ \cos(\theta - \frac{4\pi}{3})$$

Andando a sommare i tre valori otteniamo:

$$\lambda_{1m}(\theta) + \lambda_{2m}(\theta) + \lambda_{3m}(\theta) = K[\cos\theta + \cos(\theta - \frac{2}{3}\pi) + \cos(\theta - \frac{4}{3}\pi)] =$$

$$= K[\cos\theta - \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta] = 0$$

Ne segue che $\lambda_{1m} + \lambda_{2m} + \lambda_{3m} = 0$ e quindi $\overline{\lambda_m}$ stà sullo stesso piano di $\bar{i}$ e posso rappresentare $\overline{\lambda_m}$ come:

$$\overline{\lambda_m} = \frac{2}{3}(\lambda_{1m} + a\,\lambda_{2m} + a^2\lambda_{3m})$$

per le stesse considerazioni fatte su $\bar{i}$.

Concludendo si può ricavare che anche il flusso totale $\bar{\lambda}$ stà sullo stesso piano, dato che:

$$\bar{\lambda} = L_{eq}\bar{i} + \overline{\lambda_m}$$

Essendo L_{eq} uno scalare. Naturalmente nell'ipotesi di circuito magnetico lineare.

- Comando di tipo sinusoidale

L'espressione della coppia erogata dai tre avvolgimenti è data da:

$$T = p\left(i_1 \frac{d\lambda_{1m}}{d\theta} + i_2 \frac{d\lambda_{2m}}{d\theta} + i_3 \frac{d\lambda_{3m}}{d\theta}\right) = p[i]^t \frac{d[\lambda_m]}{d\theta} = p\,\bar{i} \times \frac{d\bar{\lambda}_m}{d\theta}$$

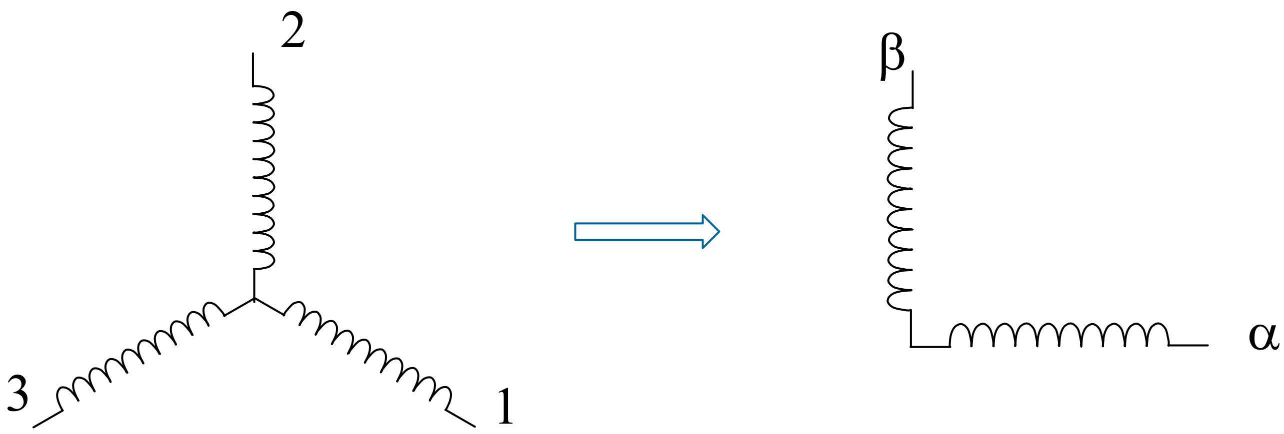
L'espressione rappresenta il prodotto interno di due vettori nello spazio a tre dimensioni.

Il vettore $\frac{d[\lambda_m]}{d\theta}$ come $[\lambda_m]$, nell'ipotesi fatta di trascurare le terze armoniche, stà sullo stesso piano di $[i]$, dato che:

$$\sum_j \frac{d\lambda_{jm}}{d\theta} = 0 \qquad T = p[i]^t \frac{d[\lambda_m]}{d\theta} \quad \rightarrow \quad T = p\,\bar{i} \times \frac{d\bar{\lambda}_m}{d\theta}$$

TRIFASE $\Longleftrightarrow$ BIFASE

Vogliamo passare dalla descrizione di un sistema trifasico 1, 2, 3 ad uno bifasico α, β, questo può essere fatto perché tutte le grandezze trifasiche si trovano sullo stesso piano (x+y+z=0).



Per descrivere in modo rigoroso il passaggio da un sistema all'altro occorre trovare l'espressione della coppia in un sistema e trasformarla nell'altro, ed imporre l'uguaglianza della potenza oppure delle grandezze in gioco.

Per passare da un sistema a tre fasi ad uno a due fasi, qualcosa deve cambiare.

Sistema Trifasico

$$P_{m_{123}} = T_{m_{123}}\,\omega_m = (i_1 \frac{d\lambda_{1m}}{d\theta}\omega_m + i_2 \frac{d\lambda_{2m}}{d\theta}\omega_m + i_3 \frac{d\lambda_{3m}}{d\theta}\omega_m) = P_{m_1} + P_{m_2} + P_{m_3}$$

Supponiamo di essere in condizioni stazionarie ω=cost., allora il contributo è equamente ripartito tra le tre fasi (simmetria).

Possiamo dire che la potenza media erogata dalle tre fasi Pmj, è la stessa per ogni fase j (con j =1,2,3).

$$P_{m_{123}} = P_{m_1} + P_{m_2} + P_{m_3} = 3P_{m_1}$$

Sistema Bifasico

$$P_{m_{\alpha\beta}} = T_{m_{\alpha\beta}}\,\omega_m = \left(i_\alpha \frac{d\lambda_{\alpha m}}{d\theta}\omega_m + i_\beta \frac{d\lambda_{\beta m}}{d\theta}\omega_m\right) = P_{m_\alpha} + P_{m_\beta}$$

Supponiamo di essere in condizioni stazionarie ω=cost., allora il contributo è equamente ripartito tra le due fasi (simmetria).

Possiamo dire che la potenza media erogata dalle due fasi $P m\alpha$, $P m\beta$, è la stessa.

$$P_{m_{\alpha\beta}} = P_{m\alpha} + P_{m\beta} = 2P_{m\alpha}$$

Nel passaggio fra i due sistemi, posso fare due scelte, o mantengo la potenza o mantengo le componenti.

1) Potenza costante

Con questa scelta mantengo la stessa espressione di potenza nei due sistemi Trifasico e Bifasico, e quindi anche la stessa espressione di coppia:

$$T_m\,\omega_m = P_m = 3P_{m_1} = 2P_{m_\alpha} \quad \Longrightarrow \quad P_{m_\alpha} = \frac{3}{2}P_{m_1}$$

$$P_{m_\alpha} = \frac{d\lambda_{\alpha m}}{d\theta}i_\alpha\omega_m = \frac{3}{2}\frac{d\lambda_{1m}}{d\theta}i_1\omega_m = P_{m_1}$$

$$\frac{d\lambda_{\alpha m}}{d\theta}i_\alpha = \frac{3}{2}\frac{d\lambda_{1m}}{d\theta}i_1 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{d\lambda_{\alpha m}}{d\theta} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}\dfrac{d\lambda_{1m}}{d\theta} \\[2ex] i_\alpha = \sqrt{\dfrac{3}{2}}i_1 \end{cases}$$

Nel sistema bifasico avrò delle grandezze maggiorate di √(3/2) rispetto al trifasico.

Es.: le correnti misurate nel sistema trifasico (quello reale) devono essere moltiplicate per √(3/2) per ottenere quelle nel sistema bifasico.

$$i_b = \sqrt{\frac{3}{2}} i_T \quad \Longrightarrow \quad i_{eff} = \frac{i_T}{\sqrt{2}} = \frac{i_b}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{i_b}{\sqrt{3}}$$

Non c'è corrispondenza fisica fra quello che si misura nel sistema reale e le componenti nel sistema bifasico, occorre sempre considerare √(3/2) e √(2/3) .

2) Componenti uguali

Si preferisce che le componenti nel piano corrispondano a quelle nello spazio:

componenti nel bifasico = componenti nel trifasico

$$\frac{d\lambda_{\alpha m}}{d\theta} = \frac{d\lambda_{1m}}{d\theta} \qquad i_\alpha = i_1 \qquad \Longrightarrow \qquad P_{m\alpha} = P_{m1}$$

$$P_{m_{\alpha\beta}} = P_{m\alpha} + P_{m\beta} = 2P_{m\alpha} \qquad P_{m_{123}} = P_{m_1} + P_{m_2} + P_{m_3} = 3P_{m_1}$$

$$P_{m_{\alpha\beta}} \neq P_{m123}$$

$$P_m = P_{m_{123}} = 3P_{m_1} = 3P_{m\alpha} = \frac{3}{2} 2P_{m\alpha} = \frac{3}{2} P_{m\alpha\beta}$$

$$P_m = P_{m_{123}} = \frac{3}{2} P_{m\alpha\beta}$$

Per far tornare i conti quando si calcola la potenza meccanica nel sistema bifasico occorre introdurre la costante 3/2 e questo è valido anche per la coppia:

$$T_m \, \omega_m = T_{m_{123}} \, \omega_m = P_{m_{123}} = \frac{3}{2} P_{m\alpha\beta} = \frac{3}{2} T_{m\alpha\beta} \, \omega_m$$

$$\boxed{T_m = \frac{3}{2} T_{m\alpha\beta} \qquad\qquad P_m = \frac{3}{2} P_{m\alpha\beta}}$$

Es.: le correnti misurate nel sistema trifasico (quello reale) corrispondono a quelle definite nel sistema bifasico.

$$i_b = i_T \qquad \Longrightarrow \qquad i_{eff} = \frac{i_T}{\sqrt{2}} = \frac{i_b}{\sqrt{2}}$$

Nel passaggio dallo spazio al piano, mantenere l'espressione di coppia inalterata significa mantenere inalterata la lunghezza dei vettori.

$$T = \frac{3}{2} p \bar{i} \times \frac{d\overline{\lambda_m}}{d\theta}$$

$$\bar{i} = i\, e^{j\alpha} = i_\alpha + j i_\beta = \tfrac{2}{3}(i_1 + a\, i_2 + a^2 i_3)$$

$$\overline{\lambda_m} = \lambda_m\, e^{j\theta} = \lambda_{\alpha m} + j\lambda_{\beta m} = \tfrac{2}{3}(\lambda_{1m} + a\lambda_{2m} + a^2\lambda_{3m})$$

$\overline{\lambda_m}$ è funzione di θ, intrinsecamente. Motore

$\overline{i}$ è impostato dal controllo (sincrono). Controllo

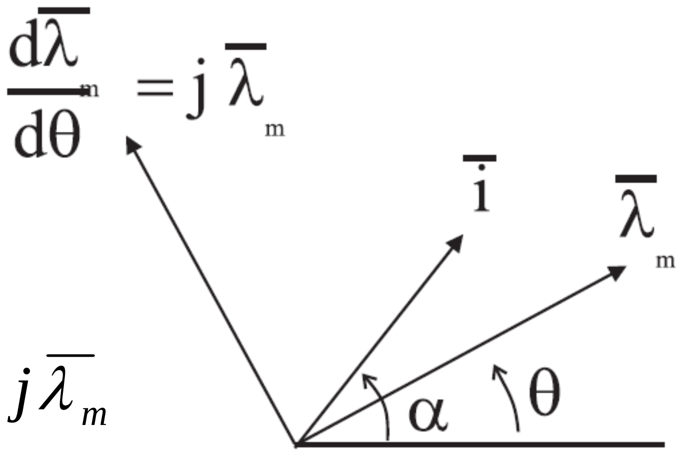
$$\overline{\lambda}_m = \lambda_m e^{j\theta}$$

$$\frac{d\overline{\lambda}_m}{d\theta} = \frac{d\left(\lambda_m e^{j\theta}\right)}{d\theta} = \frac{d\lambda_m}{d\theta} e^{j\theta} + \lambda_m \frac{d\, e^{j\theta}}{d\theta} = j\lambda_m e^{j\theta} = j\overline{\lambda}_m$$

Il modulo λ_m è costante: $\lambda_m = K = \frac{2\pi}{3} r l \frac{N}{p} B_0$

I vettori $\overline{\lambda_m}$ e $\frac{d\overline{\lambda_m}}{d\theta}$ sono ortogonali tra loro, e di pari ampiezza (λ_m).

$$\frac{d\overline{\lambda}_m}{d\theta} = j\overline{\lambda}_m$$



$$T = \frac{3}{2}\,p\,\overline{i} \times \frac{d\overline{\lambda}_m}{d\theta} = \frac{3}{2}\,p\,\overline{i} \times j\overline{\lambda}_m$$

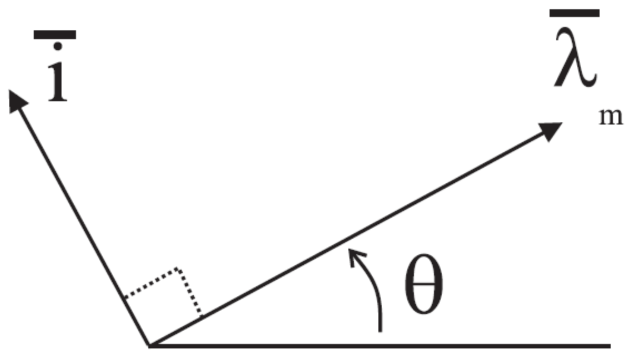
$$T = \frac{3}{2}\,p\,i\lambda_m \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{3}{2}\,p\,i\lambda_m\left[-\,sen\,(\theta - \alpha)\right]$$

$$T = \frac{3}{2}\,p\,i\lambda_m\,sen\,(\alpha - \theta)$$

La coppia può essere scritta:

$$T = \frac{3}{2} p \left| \overline{\lambda}_m \wedge \overline{i} \right| \quad \Longrightarrow \quad T = \frac{3}{2} p \lambda_m i \sin(\alpha - \theta)$$

L'angolo $(\alpha - \theta)$ sarà fissato COSTANTE dal controllo (feedback) e pari a $\frac{\pi}{2}$ (max. T)

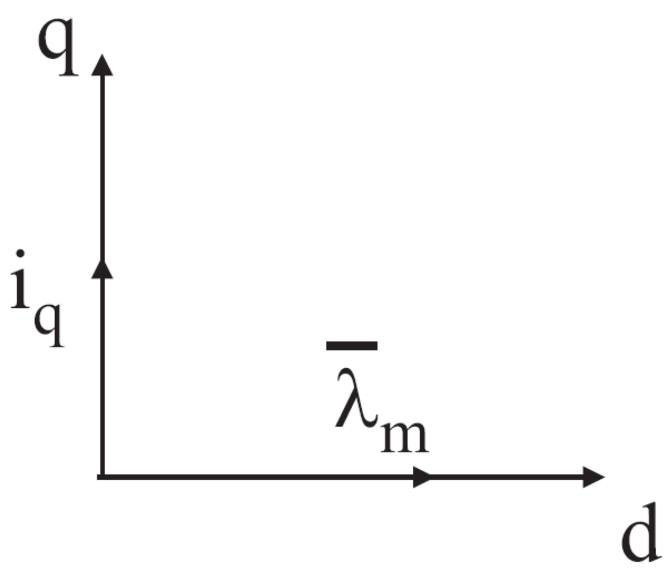


Entrambi i vettori $\overline{\lambda_m}(\theta)$ e $\overline{i}(\theta)$ sono funzioni di θ

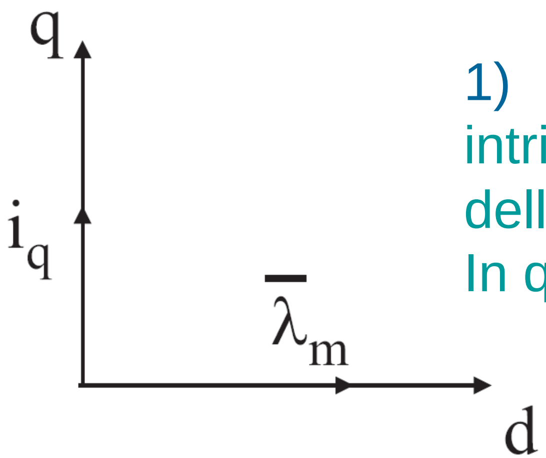
La coppia: $T(t) = \frac{3}{2} p \lambda_m i(t)$, viene regolata nel tempo variando il valore $i(t)$.

La situazione è simile al motore in corrente continua: $T(t) = K_\Phi i_a(t)$

Si ci riferisce normalmente ad un sistema di riferimento sincrono con il rotore: assi (d, q)



Si sceglie l'asse d allineato con il vettore $\overline{\lambda}$, e quindi $\overline{i}$ coincide con la componente q:



1) Caratteristica del motore: λm è una caratteristica intrinseca del motore, se non si fa un'esatta misura della posizione, d non è diretto su λm: ripple di coppia. In questo caso è solo un problema di misura.

2) Caratteristica del controllo: imporre che la corrente sia in quadratura rispetto a d , e quindi che $id=0$ è un problema di controllo.

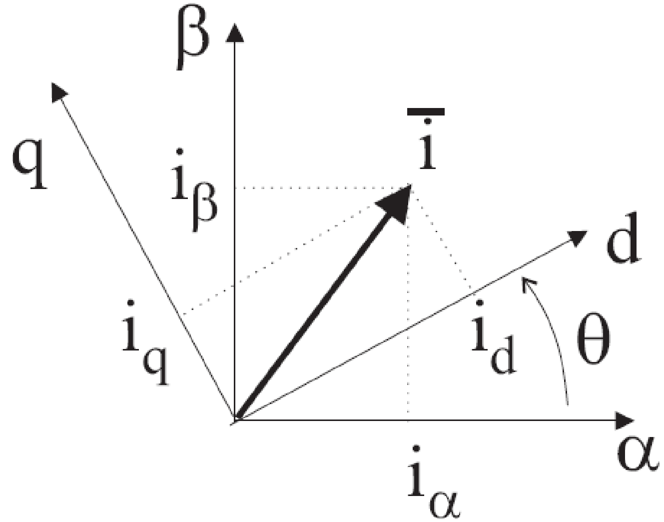
$$T = \frac{3}{2} p \lambda_m i_q$$

Con questa scelta abbiamo la coppia massima (a parità di componenti).

In questo sistema di riferimento la iq è continua e non dipende da θ.

- Per portarsi sugli assi rotanti (d,q) si possono individuare "trasformazioni matriciali", che operano direttamente sulle componenti del vettore.

Trasformazione (Park)
$$assi\ fissi\ (\alpha, \beta) \longleftrightarrow assi\ rotanti\ (d, q)$$



$$\begin{cases} I_d = I_\alpha \cos\theta + I_\beta \sin\theta \\ I_q = -I_\alpha \sin\theta + I_\beta \cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} I_d \\ I_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_\alpha \\ I_\beta \end{bmatrix}$$

La matrice inversa di $A(\theta)$ è pari alla sua trasposta:

$$A(\theta) = \left[\begin{array}{cc} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{array} \right]$$

$$A^{-1}(\theta) = A^{t}(\theta) = \left[\begin{array}{cc} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{array} \right]$$

Si ha quindi:

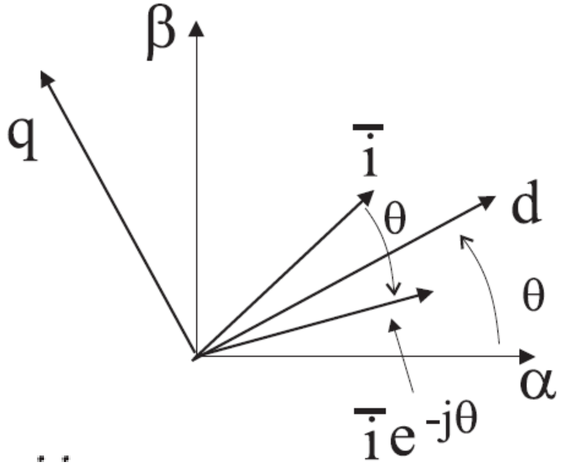
$$\left[\begin{array}{c} I_d \\ I_q \end{array} \right] = A(\theta) \left[\begin{array}{c} I_\alpha \\ I_\beta \end{array} \right] \qquad \left[\begin{array}{c} I_\alpha \\ I_\beta \end{array} \right] = A^{t}(\theta) \left[\begin{array}{c} I_d \\ I_q \end{array} \right]$$

L'operatore $A(\theta)$ trasforma le coordinate dello stesso vettore, da un sistema di riferimento (α, β) all'altro (d, q)

L'operatore $e^{-j\theta}$, applicato ad un vettore, lo ruota di $(-\theta)$ rispetto allo stesso sistema di riferimento:

$$A(\theta) \longleftrightarrow e^{-j\theta}$$

$$A^t(\theta) \longleftrightarrow e^{j\theta}$$



$$\overline{i_{dq}} = i_d + j i_q$$

$$\overline{i_{\alpha\beta}} = i_\alpha + j i_\beta$$

$$\Rightarrow \quad \overline{i_{dq}} = e^{-j\theta}\overline{i_{\alpha\beta}}$$

infatti: $i_d + j i_q = (\cos\theta - j\sin\theta)(i_\alpha + j i_\beta) =$

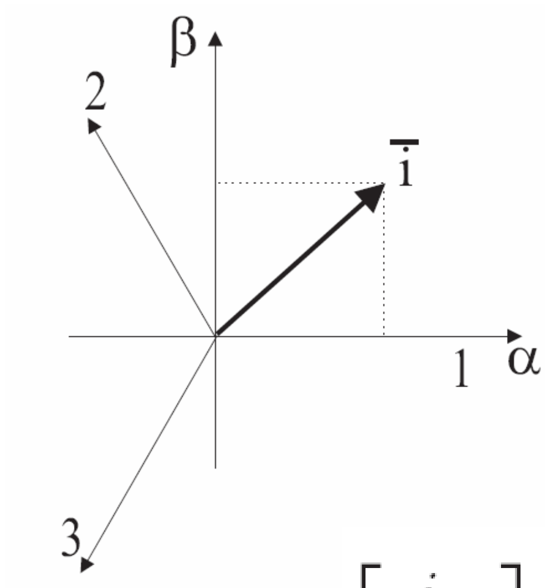
$$i_\alpha \cos\theta + i_\beta \sin\theta + j(-i_\alpha \sin\theta + i_\beta \cos\theta)$$

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix}$$

Trasformazione (Clarke)

$trifase\ (1,2,3) \longleftrightarrow bifase\ (\alpha,\beta)$

Nell'ipotesi di conservare l'ampiezza delle componenti:



$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix}$$

La trasformazione inversa è:

$$\begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$$

Il coefficiente $\frac{2}{3}$ è stato inserito affinchè:

$\frac{2}{3}BB^t =$ Identità