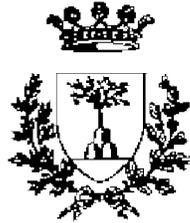


Università degli Studi di Ferrara



INTRODUZIONE DELLA  
MECCANICA QUANTISTICA

*Dott. Mirco Andreotti*

A.A. 2008/2009



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>iv</b>
<b>1 Introduzione storica mirata</b>	<b>1</b>
1.1 L'atomo di Rutherford . . . . .	2
1.2 Quantizzazione dell'energia . . . . .	2
1.2.1 Quantizzazione dell'atomo: l'atomo di Bohr . . . . .	2
1.2.2 Effetto fotoelettrico e quanti di luce . . . . .	4
1.2.3 Osservazioni sulla quantizzazione dell'energia . . . . .	5
1.3 Comportamento corpuscolare della luce . . . . .	5
1.3.1 Esperimenti con singoli fotoni . . . . .	6
1.3.2 Osservazioni sulla natura della luce . . . . .	7
1.4 Comportamento ondulatorio della materia . . . . .	8
1.4.1 Diffrazione e interferenza di elettroni . . . . .	8
1.4.2 Esperimenti con singoli elettroni . . . . .	9
1.5 Dualità onda-corpuscolo . . . . .	9
1.5.1 Onde elettromagnetiche e fotoni . . . . .	10
1.5.2 Particelle e onde di materia . . . . .	10
1.5.3 Microscopico e macroscopico: effetti ondulatori a confronto . . . . .	10
1.6 La meccanica ondulatoria e l'interpretazione di Copenaghen . . . . .	11
1.7 La contraddizione del dualismo onda-corpuscolo . . . . .	11
1.8 La MQ in tasca: l'effetto tunnel . . . . .	13
1.9 Conclusioni parte introduttiva . . . . .	14
<b>2 Costruzione delle basi della MQ</b>	<b>15</b>
2.1 Misura di polarizzazione dei fotoni . . . . .	15
2.2 Esperimenti sequenziali di polarizzazione della luce . . . . .	18
2.2.1 Stati ortogonali . . . . .	18
2.2.2 Un ragionamento non corretto . . . . .	19
2.2.3 Osservazioni su E-x-y e E-x'-y . . . . .	19
2.3 Il principio di sovrapposizione degli stati . . . . .	20

---

2.4	Il processo di misura in MQ . . . . .	21
2.5	Il principio di indeterminazione di Heisenberg . . . . .	22
2.6	Approfondimenti sul formalismo . . . . .	23
2.7	Conclusione della parte di costruzione della MQ . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>25</b>
<b>A</b>	<b>Effetto fotoelettrico</b>	<b>27</b>
<b>B</b>	<b>Effetto Compton</b>	<b>29</b>
<b>C</b>	<b>Microscopico e macroscopico</b>	<b>31</b>
<b>D</b>	<b>Gli orbitali dell'atomo di idrogeno</b>	<b>33</b>
	<b>Appendice</b>	<b>35</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>36</b>
	<b>Elenco delle figure</b>	<b>37</b>

# Introduzione

La nascita della meccanica quantistica è caratterizzata da un percorso evolutivo durato circa una trentina di anni, durante il quale si incontrano pensieri, idee, modelli, interpretazioni e concetti *transitori* che si sono rivelati a volte sbagliati, a volte corretti. L'aspetto fondamentale di questa evoluzione è stato la necessità di dover abbandonare i ragionamenti intuitivo-classici e adottare un nuovo modo di pensare al fine di formulare una interpretazione coerente delle evidenze sperimentali.

Al fine di formulare una presentazione della meccanica quantistica più moderna si è cercato di costruire un percorso che tocchi gli argomenti più importanti per la nascita e lo sviluppo della teoria con i giusti riferimenti storici e i dovuti approfondimenti. Oltre a rendere consapevoli gli studenti delle bizzarre idee che scaturiscono dai fatti storici, ci proponiamo di realizzare insieme a loro un'esperienza reale che metta in evidenza come il ragionamento intuitivo-classico non sia in grado di interpretare correttamente i risultati di esperimenti di polarizzazione dei fotoni. Ne segue quindi una costruzione di nuovi concetti, quelli della meccanica quantistica, che permettono un'interpretazione coerente degli esperimenti.

Presentiamo un percorso storico mirato ad analizzare i nodi cruciali che hanno portato alla costruzione della meccanica quantistica, corredato da analisi e curiosità di fenomeni fondamentali. Segue un percorso in cui proponiamo di interpretare gli esperimenti di polarizzazione della luce e di costruirne, insieme agli studenti, una teoria coerente che ne interpreti i fenomeni. Durante questa analisi si propone il confronto fra i ragionamenti intuitivo-classici e le assunzioni quantomeccaniche.

Nella terza ed ultima parte riportiamo le conclusioni, gli allegati al percorso didattico per approfondimenti di vario genere e la bibliografia e sitografia.

In tutta la dissertazione faremo uso dell'abbreviazione MQ per intendere Meccanica Quantistica.



# Capitolo 1

## Introduzione storica mirata

In questa introduzione storica mirata cerchiamo di seguire in parte un percorso storico al fine di far condividere agli studenti le stesse perplessità che hanno provato i fisici protagonisti della MQ. In questa introduzione vogliamo concentrarci su quelli che riteniamo essere i fenomeni e le situazioni che poi hanno permesso di introdurre i concetti fondamentali della MQ e di percorrere la giusta strada per la costruzione della MQ moderna. Presentiamo infatti alcuni esperimenti che permettono in modo inequivocabile di trarre importanti conclusioni specialmente in merito alla natura degli oggetti quantistici. Ci riferiamo agli esperimenti con singole particelle, i quali non si collocano cronologicamente nel percorso storico tradizionale, ma sono un'ottima fonte di comprensione. Durante il percorso suggeriamo alcuni approfondimenti svolti nelle appendici, altri approfondimenti suggeriti, alcuni dei quali possono essere oggetto di corsi di eccellenza o approfondimenti extra.

In questo capitolo proponiamo anzitutto l'atomo di Rutherford, quindi seguono i primi fenomeni che hanno reso necessario dover introdurre una discretizzazione (quantizzazione) dell'energia. In questo ambito trattiamo l'atomo di Bohr come esempio importante di introduzione di ipotesi non classiche. Segue poi la trattazione di quei fenomeni che mostrano un comportamento corpuscolare della luce, comportamento che è bene evidenziare diverso dall'idea corpuscolare della luce che aveva Newton, infatti se ne possono verificare risultati piuttosto bizzarri se pensati in termini di fisica classica. Il percorso procede con la presentazione e l'interpretazione di quei fenomeni che invece mostrano un comportamento ondulatorio della materia. Mettendo quindi insieme il comportamento come onda e/o corpuscolo di luce e materia si può trattare la dualità onda-corpuscolo, per la quale riteniamo opportuno sottolineare l'incoerenza nell'uso di una interpretazione a volte ondulatoria, altre volte corpuscolare. Si vuole infatti mostrare come la MQ diventa coerente nel momento in cui si interpreta l'onda come una funzione che esprime la probabilità di un oggetto microscopico di trovarsi in un certo stato.

## 1.1 L'atomo di Rutherford

Uno dei primi segnali dell'inadeguatezza della fisica classica nel descrivere i fenomeni microscopici si incontra nel modello atomico secondo Rutherford. Tra il 1908 e il 1911 Rutherford interpreta i risultati sperimentali ottenuti da urti fra particelle  $\alpha$  e atomi con un modello atomico, il quale rappresenta l'atomo come costituito da un nucleo carico positivamente, nel quale è concentrata quasi tutta la massa dell'atomo, circondato da elettroni che gli orbitano attorno in analogia al sistema solare, come rappresentato in Fig.1.1.

Ci si rende facilmente conto che un sistema così pensato, in termini di elettromagnetismo classico, non ha ragione di esistere in quanto l'elettrone orbitante è costantemente sottoposto ad una accelerazione centripeta, ma una carica sottoposta ad accelerazione emette luce, il che ci porta a concludere che l'elettrone precipiterebbe in pochissimo tempo verso il nucleo. Con la fisica classica non possiamo quindi spiegare né la stabilità dell'atomo né le sue righe spettrali, come vedremo nel prossimo paragrafo.

Basandosi su questo modello, Bohr propone un modello atomico per il quale propone delle assunzioni non classiche per tenere conto della stabilità e delle righe spettrali, come vedremo nel prossimo paragrafo.

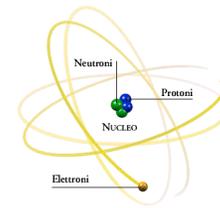


Figura 1.1: Modello atomico di Rutherford.

## 1.2 Quantizzazione dell'energia

In questa sezione esponiamo i fatti che hanno evidenziato la discretizzazione degli scambi di energia fra luce e materia e l'inadeguatezza della fisica classica nel spiegare questi fenomeni.

### 1.2.1 Quantizzazione dell'atomo: l'atomo di Bohr

Esperimenti sull'assorbimento ed emissione di luce da parte di atomi mostrano un comportamento discreto. Per essere più precisi si vede che gli atomi possono assorbire o emettere solo luce di ben determinate lunghezze d'onda. Nello spettro di assorbimento mostrato in Fig.1.2(b) compaiono delle righe nere le quali corrispondono alle lunghezze d'onda della luce assorbita. Le aree colorate si riferiscono alla luce che non è stata assorbita dagli atomi. Analogamente, osservando invece lo spettro di emissione di Fig.1.2(a), possiamo vedere che compaiono solo certe righe di un determinato colore, mentre fra queste non compare nulla. Questo fenomeno evidenzia come gli atomi emettano luce solo di ben determinate lunghezze d'onda. Notiamo inoltre che le righe nere dello spettro di assorbimento sono in corrispondenza con le righe di emissione.

Queste osservazioni fanno pensare che gli atomi si possono presentare in stati energetici ben precisi e i salti di energia fra i diversi stati producono assorbimento o emissione di luce di una precisa lunghezza d'onda, corrispondente alla differenza di energia fra gli stati. Le righe spettrali nel visibile dell'atomo di idrogeno trovano una regolarità nella seguente formula empirica

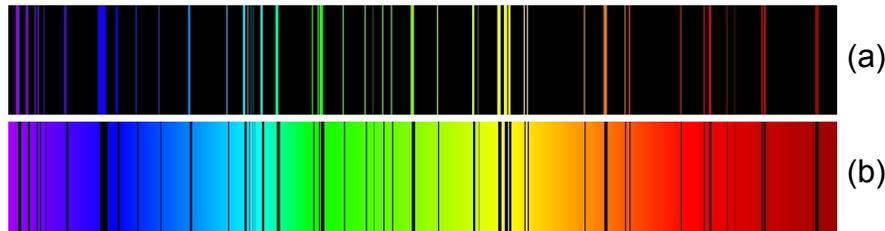


Figura 1.2: (a) Spettro di emissione del Hg, (b) spettro di assorbimento [14].

proposta da Balmer nel 1885<sup>1</sup>:

$$\nu \propto \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (1.1)$$

dove  $R$  é la cosiddetta costante di Rydberg e  $m$  é un numero intero, maggiore di 2, in corrispondenza del quale si determina la frequenza di una riga spettrale.

Ci si rende facilmente conto che il modello atomico di Rutherford, oltre a non tenere conto della stabilit  degli atomi, non pu  nemmeno essere usato per tenere conto delle righe spettrali.

Un modello atomico pensato per descriverne il comportamento discreto é quello ideato da Bohr nel 1913, nel quale si ipotizza l'esistenza di orbite privilegiate, sulle quali l'elettrone non irraggia. Ogni orbita privilegiata é circolare e caratterizzata da un momento angolare dell'elettrone rispetto al nucleo proporzionale ad un numero intero  $n$ :

$$l_n = mv_n r_n \propto n$$

Da questa relazione si evince che sia la velocit  dell'elettrone, sia il raggio dell'orbita, sono funzioni del numero intero  $n$ . Considerando il sistema nucleo-elettrone interagenti secondo la forza di Coulomb si pu  determinare l'energia posseduta dall'elettrone su una data orbita in funzione del numero intero  $n$ , la quale risulta:

$$E_n \propto -\frac{1}{n^2}$$

Ogni numero intero  $n$  identifica quindi un livello energetico dell'atomo di idrogeno. L'energia della riga spettrale emessa a seguito di una transizione da un livello energetico ad un altro risulta essere della forma:

$$\Delta E_{nm} \propto \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \quad (1.2)$$

Si pu  notare facilmente come questa relazione sia del tutto analoga alla relazione proposta da Balmer, se ammettiamo che la frequenza della luce emessa sia proporzionale all'energia corrispondente. Questa assunzione sar  approfondita nel prossimo paragrafo. Con le opportune costanti di proporzionalit  si verifica l'uguaglianza fra la serie di Balmer 1.1 e la serie 1.2 determinata con il modello atomico di Bohr, quindi con questo modello si spiegano le righe spettrali e la stabilit 

<sup>1</sup>Le relazioni di quantizzazione che presentiamo in questo paragrafo sono riportate solo sottoforma di andamenti, in quanto in questo modo riteniamo di alleggerire la trattazione dell'argomento.

degli atomi.

Il concetto fondamentale che caratterizza il modello atomico di Bohr é l'introduzione delle orbite privilegiate, le quali non trovano nessun sostegno nella fisica classica. Questo é un chiaro esempio di un modello che rappresenta un sistema microscopico e che deve quindi poggiare su ipotesi che non hanno nessuna spiegazione classica.

**Approfondimento.** Un approfondimento da proporre agli studenti potrebbe essere quello di studiare l'esperimento di Frank-Hertz con l'uso delle *applet* che abbiamo indicato nel Cap.?? dalla fonte [13].

### 1.2.2 Effetto fotoelettrico e quanti di luce

Una ulteriore ipotesi di discretizzazione dell'energia la troviamo nei lavori di Einstein del 1905 per la costruzione della teoria che descrive l'effetto fotoelettrico. Per effetto fotoelettrico si intende l'emissione di elettroni da un materiale a seguito dell'incidenza di luce. Sperimentalmente si verifica che l'energia cinetica degli elettroni emessi non dipende assolutamente dall'intensità della luce incidente, e questo in termini classici é un fatto insolito in quanto noi sappiamo benissimo che se ci illuminiamo una mano con una luce piú intensa proviamo una sensazione di maggior calore, quindi maggiore energia. Allora come si spiega il fatto che aumentando l'intensità di luce incidente, quindi aumentando l'energia fornita, non aumenti anche l'energia cinetica degli elettroni emessi? All'aumentare dell'intensità di luce si nota solo un aumento del numero di elettroni emessi, ma non un aumento della loro energia cinetica.

Un aumento dell'energia cinetica degli elettroni emessi si verifica solo a seguito di un aumento della frequenza della luce incidente. Inoltre si verifica che un aumento della frequenza non corrisponde ad un aumento del numero di elettroni.

Per spiegare questo fenomeno Einstein ipotizza che la luce sia composta da pacchetti (quanti) di energia dipendenti dalla frequenza della luce secondo la legge

$$E = h\nu$$

dove  $\nu$  é la frequenza e  $h$  é la costante di Planck <sup>2</sup>.

In questa visione ogni pacchetto di energia va ad incidere su un solo elettrone e maggiore é l'energia del pacchetto, quindi la frequenza della luce, maggiore sará l'energia cinetica dell'elettrone. A questo punto un aumento di intensità significa un aumento del numero di pacchetti di energia, quindi un aumento del numero di elettroni estratti.

Per frequenze al di sotto di un certo valore non si verifica l'effetto fotoelettrico, questo si spiega con il fatto che l'elettrone é legato al materiale, quindi per renderlo libero il pacchetto

---

<sup>2</sup> $h = 6.6260693 \times 10^{-34}$  Js.

di luce deve avere una energia tale da vincere questo legame. In questi termini l'energia contenuta nel quanto di luce in parte serve per vincere l'energia di legame dell'elettrone, mentre il resto va in energia cinetica. Questo si riassume nella seguente espressione per l'energia cinetica dell'elettrone:

$$E = h\nu - W$$

dove  $W$  é l'energia di estrazione dell'elettrone che dipende dal materiale usato. La presenza del potenziale di estrazione é evidenziata dal fatto che l'emissione di elettroni si verifica solo al di sopra di una certa frequenza di soglia  $\nu > W/h$ .

**Approfondimento svolto.** Come approfondimento per lo studio dell'effetto fotoelettrico proponiamo in App.A la descrizione dell'apparato sperimentale e delle misure che si possono effettuare, facendo anche uso di un'applet per la simulazione dell'esperimento.

### 1.2.3 Osservazioni sulla quantizzazione dell'energia

Gli argomenti trattati nei precedenti paragrafi mostrano fenomeni che per essere spiegati devono adottare l'ipotesi di energia discreta, o meglio quantizzata. In particolare dai precedenti fenomeni si evince che gli scambi di energia tra luce e materia avvengono per quantità discrete, mentre nei fenomeni macroscopici siamo abituati a trattare con scambi di energia, e in generale con variabili fisiche, che possono variare con continuità. Da qui nasce il problema di formalizzare una teoria in grado di descrivere variabili fisiche quantizzate, cosa che la fisica classica o l'elettromagnetismo non sono in grado di fare. Gli elementi che abbiamo finora analizzato non sono però ancora sufficienti per una comprensione del mondo microscopico.

## 1.3 Comportamento corpuscolare della luce

Già ponendo l'attenzione sui fenomeni di scambio di energia fra luce e materia si é manifestato un comportamento della luce che non può essere spiegato con la teoria ondulatoria dell'elettromagnetismo. Infatti immaginare un'onda elettromagnetica in un qualche modo discreta ci risulta un po' difficile.

Tipicamente nella trattazione della natura corpuscolare della luce si é soliti presentare anche l'effetto Compton. Dato che questo fenomeno é stato un'ulteriore conferma della natura corpuscolare della luce, collocato cronologicamente circa 18 anni dopo l'ipotesi di Einstein sull'effetto fotoelettrico, lo proponiamo come approfondimento svolto in App.B.

In questo paragrafo studiamo come i tipici esperimenti di interferenza e diffrazione della luce mostrino in realtà una natura corpuscolare della luce. Noteremo però che questa natura corpuscolare della luce é ben diversa dall'idea corpuscolare di Newton.

### 1.3.1 Esperimenti con singoli fotoni

Consideriamo tipici esperimenti di interferenza e diffrazione della luce che dovrebbero essere familiari agli studenti. Senza entrare nei dettagli ricordiamo che negli esperimenti con le due fenditure o con un'unica fenditura di dimensione confrontabile con la lunghezza d'onda della luce si formano sullo schermo le figure di interferenza o diffrazione. Queste figure possono essere predette e calcolate tenendo conto dell'interferenza fra i singoli punti sulle fenditure considerati come sorgenti puntiformi (onde elementari di Huygens) di onde luminose.

Dalle precedenti considerazioni abbiamo visto che possiamo considerare la luce, anziché come un'onda, come una sorta di grandinata di fotoni. Immaginiamo ora di poter eseguire uno di questi esperimenti utilizzando però fotoni singoli, i quali uno alla volta incontrano l'ostacolo (una o più fenditure) e vanno ad impressionare uno schermo simile ad una pellicola fotografica. L'esperimento consiste quindi nell'inviare singolarmente tanti fotoni ed analizzare le figure che si formano sullo schermo. Sappiamo che se avessimo a che fare con luce monocromatica normale dovremmo visualizzare le figure di interferenza tipiche di questi esperimenti.

Prima di analizzare i risultati sperimentali ci chiediamo cosa ci aspettiamo di vedere da un simile esperimento eseguito con singoli fotoni. Se i fotoni fossero corpuscoli classici, come i corpuscoli che intendeva Newton, allora sullo schermo all'inizio avremmo solo alcuni punti, poi avremmo delle zone di luce e di ombra come ci aspettiamo dall'ottica geometrica. I risultati sperimentali, di non facile reperibilità [18][19], dimostrano che i fotoni non sono corpuscoli che si comportano classicamente, infatti all'inizio vediamo sí solo alcuni punti, e questi suggeriscono una natura corpuscolare della luce, mentre in seguito vedremo un maggiore addensamento di punti in quelle zone in cui compaiono proprio le zone luminose della figura di interferenza. Dopo molto tempo, ossia dopo che tanti fotoni hanno colpito lo schermo, quello che si ottiene é proprio la tipica figura di interferenza. Riportiamo in Fig.1.3 le immagini ottenute da uno degli esperimenti con singoli fotoni trattati in [19], dalle quali possiamo notare il formarsi delle figure di interferenza e l'aspetto corpuscolare dell'impatto di fotoni.

Il fatto che i singoli fotoni si vadano a depositare sullo schermo secondo la figura di diffrazione, farebbe pensare a fotoni che interferiscono fra di loro come le onde corrispondenti, però questi fotoni sono inviati singolarmente, quindi sono indipendenti gli uni dagli altri. Come si spiega allora che i fotoni attraversano le fenditure come se sapessero come si sono depositati sullo schermo quelli già passati e quelli che ancora devono passare? Inoltre un singolo fotone non crea nessuna figura di diffrazione, ma solo un punto sullo schermo<sup>3</sup>. Risulta chiaro a questo punto che i fotoni sono sí qualche sorta di corpuscolo, ma assolutamente non si comportano secondo le leggi classiche. Il loro comportamento non si può descrivere in modo logico con le leggi della fisica classica.

---

<sup>3</sup>É importante sottolineare che la dimensione del punto sullo schermo non é la dimensione del fotone, in quanto lo schermo può avere una sua granularità.

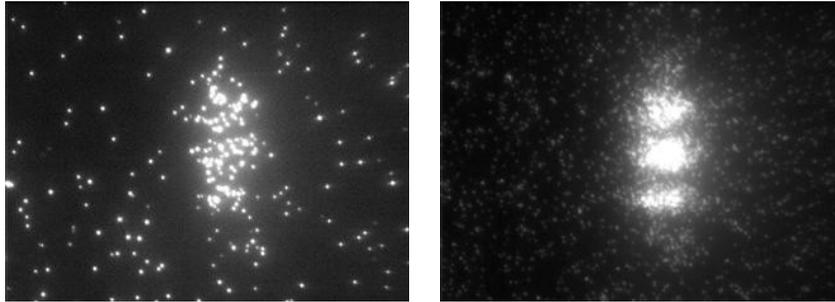


Figura 1.3: Immagini ottenute da un esperimento di interferenza con fotoni singoli [19]. Le due immagini sono ottenute con tempi di esposizione diversi.

Notiamo però uno stretto legame fra la descrizione ondulatoria e la natura corpuscolare della luce, infatti i corpuscoli evidenziano un comportamento in accordo con la figura di diffrazione ottenuta in termini di interferenza delle onde della descrizione ondulatoria. Detto in altri termini i fotoni si vanno a disporre secondo la figura di diffrazione che è calcolata considerando la luce come un'onda elettromagnetica.

### 1.3.2 Osservazioni sulla natura della luce

Dalle precedenti considerazioni abbiamo visto come la luce sembri comportarsi in alcuni casi come un'onda e in altri casi come un corpuscolo. Abbiamo però evidenziato con l'esperimento della doppia fenditura che c'è una connessione fra il comportamento corpuscolare e ondulatorio, ecco quindi che non è corretto dire che la luce si possa comportare come un'onda oppure come un corpuscolo a seconda dei casi. A questo punto possiamo piuttosto dire che possiamo studiare il comportamento della luce in termini ondulatori, oppure in termini di corpuscoli non classici.

La meccanica quantistica ci illuminerà riguardo questa corrispondenza onda-corpuscolo, possiamo però già fare alcune osservazioni preliminari. La figura di diffrazione ci dá informazioni riguardo le zone in cui incide più o meno luce. Interpretando questa visione in termini di fotoni possiamo dire che la figura di diffrazione contiene le informazioni riguardo a dove è più o meno probabile che si verifichi l'impatto dei fotoni sulla lastra. La funzione matematica che descrive la figura di diffrazione può quindi essere interpretata come una funzione di probabilità di impatto dei fotoni. Vista in questi termini, la figura di diffrazione ottenuta dall'interferenza delle onde fornisce la probabilità di trovare in una certa zona sullo schermo il fotone incidente. Trattando quindi con un singolo fotone possiamo solo dire con quale probabilità questo inciderà in un punto piuttosto che in un altro. L'utilizzo di tanti fotoni rende significativamente statistico l'esperimento e si ottiene una distribuzione di punti di impatto che corrispondono proprio alla figura di diffrazione. Vogliamo quindi evidenziare tre importanti fatti, i quali ci saranno utili anche nel seguito:

1. la natura ondulatoria e corpuscolare della luce è riconducibile ad un'unica interpretazione;

2. i corpuscoli che compongono la luce non seguono le leggi della fisica classica, ma devono essere trattati con una descrizione ondulatoria;
3. la descrizione ondulatoria deve essere vista come una descrizione in cui l'onda non è altro che una funzione che esprime una certa probabilità di trovare il corpuscolo con certi valori di variabili fisiche, quali per esempio posizione ed impulso.

Da questo schema diciamo quindi che la luce è composta di una qualche sorta di ente fisico che associamo a un corpuscolo, che chiamiamo fotone. Nel quadro che qui abbiamo costruito non ci è consentito sapere che cosa effettivamente sono questi oggetti, né possiamo sapere cosa effettivamente avviene quando questi per esempio attraversano una doppia fenditura etc etc. In termini di probabilità però possiamo prevederne i risultati con molta precisione.

## 1.4 Comportamento ondulatorio della materia

Affrontiamo ora un altro bizzarro comportamento del mondo microscopico. Con le argomentazioni che seguono vedremo come anche le particelle possono essere interpretate in termini di onde. Fu de Broglie che per primo nel 1924, analogamente alla dualità onda-corpuscolo della luce avanzò l'ipotesi che potesse esistere la stessa dualità anche per le particelle materiali, come gli elettroni per esempio. Vediamo quindi quali furono in seguito le evidenze sperimentali di tale ipotesi.

### 1.4.1 Diffrazione e interferenza di elettroni

I primi esperimenti che permisero di evidenziare un comportamento ondulatorio degli elettroni furono compiuti da Davisson e Germer, negli anni attorno al 1927, con la riflessione degli elettroni da parte di metalli. Dall'analisi degli angoli di riflessione degli elettroni ci si rese conto che il comportamento trovato non poteva essere spiegato in termini di leggi classiche. La riflessione sembrava preferire certi angoli ad altri, in pratica era una riflessione selettiva. La distribuzione degli angoli poteva però essere interpretata in termini di interferenza di qualche tipo di onde, in maniera del tutto analoga con la luce.

Successivi esperimenti in cui fasci di elettroni venivano inviati contro sottili fogli metallici e analizzati oltre questi, compiuti da G. P. Thomson, Rupp e altri, mostrarono fenomeni di diffrazione del tutto analoghi ai fenomeni di diffrazione che si ottengono con la luce.

Tali risultati sperimentali sembrano confermare la dualità onda-corpuscolo per le particelle materiali ipotizzata da de Broglie.

### 1.4.2 Esperimenti con singoli elettroni

Sappiamo che gli elettroni sono particelle, però abbiamo visto dagli esperimenti di interferenza e diffrazione che in queste condizioni sembrano comportarsi come onde. Mostriamo ora i risultati dell'interferenza di singoli elettroni nell'interazione con una doppia fenditura, in stretta analogia con quanto visto per la luce. Supponiamo quindi di inviare verso una doppia fenditura degli elettroni singolarmente e analizziamo quello che visualizziamo sullo schermo in tempi diversi, come mostrato in Fig.1.4. Notiamo che nelle prime immagini, nelle quali pochi elettroni sono stati inviati, possiamo distinguere abbastanza bene i punti di impatto dei singoli elettroni. Nelle ultime immagini invece continuiamo a vedere i punti dovuti all'impatto, ma siamo inoltre in grado di distinguere una figura di interferenza in cui alcune zone sono più popolate da impatti, mentre altre zone sono molto meno interessate.

Come visto per gli esperimenti con singoli fotoni, possiamo concludere da questi risultati che anche gli elettroni sono corpuscoli che si comportano secondo leggi che non sono quelle classiche, ma piuttosto dobbiamo utilizzare una descrizione ondulatoria, che anche in questo caso è in stretta relazione con la probabilità di trovare un elettrone intorno ad una certa posizione e con un certo impulso.

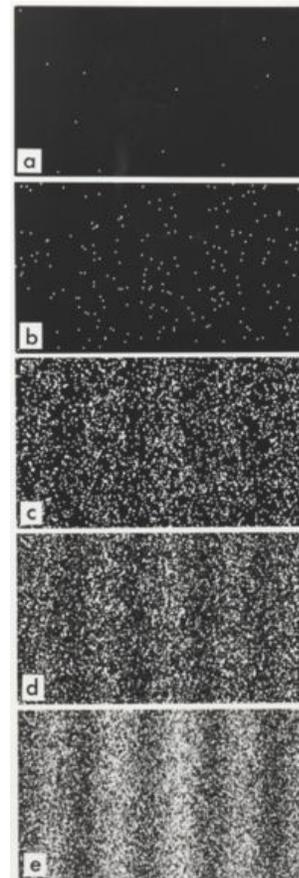


Figura 1.4: Esperimento della doppia fenditura con elettroni singoli. In sequenza temporale la formazione della figura di interferenza.

## 1.5 Dualità onda-corpuscolo

Seguendo le idee maturate dall'analisi dei precedenti comportamenti di luce e particelle materiali possiamo formalizzare la corrispondenza onda-corpuscolo in termini di grandezze cinematiche. L'idea fondamentale di questa corrispondenza è che ad ogni onda di lunghezza d'onda  $\lambda$  possiamo far corrispondere una particella di impulso  $p = h/\lambda$  e, dualmente, ad ogni particella con un certo impulso possiamo associare un'onda con una ben determinata lunghezza d'onda. Per comprendere meglio lo sviluppo di questa idea ripercorriamo brevemente e fissiamo le idee su quanto visto in precedenza.

### 1.5.1 Onde elettromagnetiche e fotoni

Per quanto riguarda il comportamento corpuscolare della luce possiamo associare ad un'onda elettromagnetica della forma  $E(x, t) = E \sin((2\pi/\lambda)(ct - x))$  un fotone che si muove nella direzione di propagazione dell'onda con velocità pari a  $c$  e con energia  $E = h\nu$ , dove  $\nu = c/\lambda$ . L'espressione dell'impulso del fotone non può essere determinata dalla relazione  $p = \sqrt{2mE}$ , in quanto avendo a che fare con fotoni che si muovono alla velocità della luce si devono utilizzare le leggi della relatività ristretta, quindi per il fotone possiamo determinare l'impulso con la relazione <sup>4</sup>  $p = E/c = h/\lambda$ .

La corrispondenza duale consiste nell'associare ad un fotone di impulso  $p$  un'onda elettromagnetica con lunghezza d'onda  $\lambda = h/p$ .

Possiamo quindi riepilogare la dualità onda elettromagnetica-fotone con le seguenti corrispondenze:

$$\begin{aligned} \text{Onda em con } \lambda &\longmapsto \text{Fotone con } p = \frac{h}{\lambda} \\ \text{Fotone con } p &\longmapsto \text{Onda em con } \lambda = \frac{h}{p} \end{aligned}$$

### 1.5.2 Particelle e onde di materia

Analogamente a quanto visto per i fotoni si può pensare per le particelle materiali, come per esempio elettroni, protoni, neutroni etc etc. Quindi ad una particella con impulso dato  $p$  possiamo associare un'onda di materia, secondo la teoria delle onde materiali di de Broglie (1924), di lunghezza d'onda  $\lambda = h/p$ . Conoscendo la massa della particella in considerazione possiamo scrivere, in approssimazione classica per basse velocità, quindi senza considerare il caso relativistico,  $p = mv$ , quindi la lunghezza d'onda sarà  $\lambda = h/(mv)$ . In modo duale ad un'onda di materia con lunghezza d'onda  $\lambda$  possiamo associare una particella di impulso  $p = h/\lambda$ .

Riepiloghiamo quindi la dualità particella-onda di materia con le seguenti corrispondenze:

$$\begin{aligned} \text{Onda di materia con } \lambda &\longmapsto \text{Particella con } p = \frac{h}{\lambda} \\ \text{Particella con } p &\longmapsto \text{Onda di materia con } \lambda = \frac{h}{p} \end{aligned}$$

### 1.5.3 Microscopico e macroscopico: effetti ondulatori a confronto

Come esercizio da svolgere insieme agli studenti può essere interessante confrontare gli effetti ondulatori fra sistemi microscopici e macroscopici. Quello che si vuole mettere in evidenza con l'approfondimento descritto in App.C è il fatto che con sistemi macroscopici non possiamo renderci conto degli effetti ondulatori, come invece si verificano del mondo microscopico.

<sup>4</sup>Intuitivamente possiamo comprendere questa espressione notando che abbiamo diviso un'energia (la quale contiene una velocità al quadrato) per una velocità, quindi dimensionalmente torna con l'espressione di un impulso.

Nell'approfondimento mettiamo infatti in evidenza come la lunghezza d'onda dell'onda associata ad un tipico sistema microscopico, un elettrone accelerato, sia circa 13-14 ordini di grandezza piú piccola della lunghezza d'onda dell'onda associata ad un sistema macroscopico, come può essere un proiettile. Nel primo sistema infatti calcoliamo  $\lambda \approx 10^{-10} - 10^{-11} m$ , mentre nel secondo otteniamo  $\lambda \approx 10^{-34} m$ .

## 1.6 La meccanica ondulatoria e l'interpretazione di Copenaghen

A seguito delle idee che vogliono associare ad ogni particella un'onda, Schrödinger (1925) fornisce una trattazione matematica impeccabile dei fenomeni microscopici in termini ondulatori, da cui il nome meccanica ondulatoria, la quale permette la descrizione di tutti questi fenomeni in termini di onde. Le onde con cui abbiamo a che fare sono le soluzioni dell'equazione di Schrödinger.

Tutti i fisici convinti della natura ondulatoria della materia vedono nella funzione d'onda proprio l'onda di materia. Questa interpretazione non è propriamente coerente, in quanto si incontrano alcune difficoltà nell'accettare valide certe particolari soluzioni dell'equazione di Schrödinger<sup>5</sup>; inoltre rimane ancora insoluta la questione di come conciliare le evidenze corpuscolari con la trattazione ondulatoria.

Nello stesso periodo, attorno al 1925-1927, Heisenberg e Bohr formulano una teoria della MQ basata sull'interpretazione probabilistica, la quale prende anche il nome di interpretazione di Copenaghen. Fra l'interpretazione di Copenaghen e quella ondulatoria nasce una disputa su quale sia la giusta interpretazione alla luce del fatto che le due formulazioni risultano equivalenti. Analizziamo nel seguito questa questione.

## 1.7 La contraddizione del dualismo onda-corpuscolo

In questo ambito usiamo i termini particelle e corpuscoli, i quali sono presi in prestito dal mondo macroscopico, infatti quando ci riferiamo a sistemi microscopici in termini di corpuscoli intendiamo che questi oggetti hanno nella loro natura qualcosa che si assomiglia al corpuscolo macroscopico. Abbiamo avuto modo di vedere questa natura negli esperimenti con singole particelle, anche se i singoli punti visti sullo schermo non rappresentano le dimensioni dei corpuscoli in esame. Il fatto di parlare di particelle o corpuscoli non deve quindi farci pensare alle particelle come a delle palline materiali nel senso classico. Le particelle sono infatti una qualche sorta di ente fisico che non obbedisce alle leggi classiche.

Dai precedenti argomenti trattati emerge come la luce e piú in generale anche le particelle come elettroni sembrano mostrare a volte comportamenti corpuscolari, altre volte comportamen-

<sup>5</sup>Si pensi per esempio all'interpretazione dell'urto fra due elettroni come un urto fra due pacchetti d'onda.

ti ondulatori. Ci rendiamo conto che questa doppia natura del mondo microscopico non trova nè una spiegazione logica, nè un quadro teorico coerente per poter trattare tali fenomeni.

Risulta infatti inconcepibile capire come possano un fotone o un elettrone a volte comportarsi come un'onda, altre volte comportarsi come un corpuscolo. Inoltre nel momento in cui si studia un fenomeno microscopico, come possiamo scegliere se trattarlo come un fenomeno ondulatorio o particellare a priori senza prima aver visto i risultati?

Anche conciliare l'idea che ad ogni corpuscolo possiamo associare un'onda risulta difficile, in quanto, per esempio, un'onda è un'ente con una estensione spaziale infinita, mentre un corpuscolo dal punto di vista classico è un ente ben definito.

A conciliare la natura corpuscolare e il comportamento ondulatorio furono le idee di Born, il quale fornì un'interpretazione coerente, oggi generalmente accettata, che ora noi cerchiamo di costruire basandoci sugli aspetti importanti che sono stati trattati nei paragrafi precedenti.

Anzitutto notiamo che in tutti i fenomeni che abbiamo visto descritti in termini ondulatori, se analizzati approfonditamente, appare sempre una sorta di carattere corpuscolare degli oggetti con cui abbiamo a che fare. Si ricordi per esempio gli esperimenti con i singoli fotoni e con i singoli elettroni. Ciò che emerge da queste esperienze è che nel momento in cui abbiamo a che fare con una singola particella che interagisce con qualcosa non possiamo determinare nessun legame con quella che potrebbe essere l'onda associata a tale particella. Infatti un elettrone che attraversa una fenditura lascerà sullo schermo un punto, ma non produrrà da solo nessuna figura di diffrazione. La figura di diffrazione abbiamo visto che inizia a formarsi solo quando sullo schermo si ha un grande numero di elettroni incidenti. Ecco quindi che il carattere ondulatorio inizia ad evidenziarsi solo quando stiamo trattando con esperimenti in cui vi sono un gran numero di particelle interagenti.

Il collegamento fra la particella e l'onda associata sta nel fatto di considerare questa onda come una pura funzione matematica che esprime la probabilità che la particella in esame si comporti in un certo modo. Vediamo infatti che l'intensità della figura di diffrazione o interferenza è direttamente collegata al numero di particelle che hanno colpito quelle ben determinate zone. Ecco quindi che considerando il processo collettivo con tante particelle siamo in grado di determinare le probabilità che queste incidano in una zona piuttosto che in un'altra, semplicemente guardando al numero di particelle nelle zone interessate.

La visione moderna della meccanica quantistica è quindi quella di avere a che fare con qualche sorta di corpuscolo, chiamate particelle, il cui comportamento può essere predetto dalle leggi della meccanica quantistica in termini probabilistici. In altre parole le leggi della MQ forniscono la probabilità che una particella ha di trovarsi in un certo stato a seguito di una certa interazione

con altri oggetti. Che cosa effettivamente avvenga durante l'interazione nella MQ, né altre teorie riescono a spiegarlo.

La meccanica quantistica fornisce quindi delle previsioni e dei risultati in termini di probabilità che sono in perfetto accordo con i risultati sperimentali. Risulta chiaro che se si considera un esperimento con una singola particella si potrà verificare poco delle previsioni della meccanica quantistica, in quanto l'esperimento deve essere statisticamente significativo.

**Approfondimento svolto.** Come approfondimento da svolgere con gli studenti in merito all'interpretazione probabilistica della MQ presentiamo in App.D cosa sono gli orbitali dell'atomo di idrogeno, come devono essere interpretati e li confrontiamo con la definizione che spesso viene usata in corsi base di chimica.

## 1.8 La MQ in tasca: l'effetto tunnel

Come approfondimenti per concludere questa introduzione della MQ si possono proporre agli studenti le varie applicazioni della MQ nelle tecnologie di uso quotidiano e non. A questo proposito menzioniamo qui solo l'effetto tunnel, in quanto lo riteniamo un altro fenomeno bizzarro della MQ, che però si trova in dispositivi elettronici molto comuni.

Immaginiamo la situazione classica di un corpo che si muove di moto rettilineo uniforme e deve superare un dislivello di una certa altezza nel campo gravitazionale. Sappiamo con certezza che se l'energia cinetica posseduta dal corpo è maggiore della differenza di energia potenziale fra i due livelli determinati dal dislivello, allora il corpo supererà questo. Differentemente se l'energia cinetica è minore allora il corpo non sarà in grado di superare il dislivello, quindi invertirà il moto e tornerà indietro.

Una situazione analoga in MQ in cui una particella incontra una barriera di potenziale non mostra il comportamento classico visto sopra. Vi sono due aspetti alquanto bizzarri.

Il primo si verifica quando l'energia cinetica della particella è inferiore all'energia della barriera di potenziale. In questa situazione può verificarsi con una certa probabilità che la particella sia in grado di superare la barriera di potenziale. Questo fenomeno viene comunemente chiamato effetto tunnel, in quanto si visualizza questo comportamento come un varco che si crea e lascia passare la particella. Questa è solo una rappresentazione, in quanto nessuno sa cosa realmente accade quando si verifica questo.

Il secondo fenomeno si verifica quando l'energia cinetica è superiore all'energia della barriera di potenziale. In questo caso c'è una certa probabilità che la particella non superi la barriera di

potenziale e ritorni indietro invertendo il moto.

Anche questo fenomeno è alquanto bizzarro, eppure l'effetto tunnel è, per esempio, sfruttato nei MOSFET, dispositivi elettronici largamente usati nelle EEPROM che si possono trovare in vari sistemi elettronici come i ricevitori telepass e altri ancora.

## **1.9 Conclusioni parte introduttiva**

Con questa parte introduttiva dovremmo aver dato modo agli studenti di prendere familiarità con le stranezze della MQ e di approcciarsi a questa senza avere la pretesa di spiegare in modo intuitivo-classico i fenomeni coinvolti.

## Capitolo 2

# Costruzione delle basi della MQ

Dopo aver affrontato il precedente percorso che ci ha introdotto alla meccanica quantistica, dovremmo aver preso un minimo di familiarità con le stranezze, dal punto di vista classico, del mondo microscopico. Possiamo quindi affrontare quelli che sono i concetti fondamentali della meccanica quantistica, concetti che sono ovviamente non riconducibili a situazioni classiche. Vogliamo quindi qui introdurre il principio di sovrapposizione degli stati, il principio di indeterminazione di Heisenberg e il processo di misura nella meccanica quantistica.

Senza voler usare un formalismo matematico che potrebbe complicare la comprensione dei concetti, possiamo tentare di introdurre questi argomenti analizzando un esempio in particolare e cercare poi di generalizzare quanto si evince. Gli esempi che più si addicono a questa introduzione possono essere o gli esperimenti di Stern-Gerlach oppure gli esperimenti sulla polarizzazione della luce. Diciamo che esperimenti sulla polarizzazione della luce potrebbero essere più familiari agli studenti e potrebbero anche essere riprodotti in laboratorio senza necessità di strumenti particolarmente complessi e costosi, si veda per esempio [21]. L'esperimento di Stern-Gerlach porta gli studenti completamente in un mondo quantomeccanico, difficilmente è realizzabile in laboratorio, anche se si può far uso delle diverse e interessanti *applet* interattive che si trovano su internet, come per esempio [15]. L'esperimento di Stern-Gerlach potrebbe essere argomento di un corso di eccellenza o di un approfondimento specifico.

In analogia con l'introduzione del testo di Sakurai [2] e con il Cap.1 Par.2 del testo di Dirac [3], ci proponiamo di introdurre la meccanica quantistica con gli esperimenti di polarizzazione della luce, anziché utilizzare gli esperimenti di Stern-Gerlach.

### 2.1 Misura di polarizzazione dei fotoni

Inviando un fascio di luce non polarizzata di intensità  $I$  su un filtro polaroid, come in Fig.2.1, notiamo che in uscita da questo si ha un fascio di luce polarizzata secondo la direzione del filtro e di

intensità pari a  $I/2$ <sup>1</sup>, cioè alla metà del fascio incidente. La situazione si ripropone identicamente qualunque sia l'orientazione del filtro, purché la luce incidente non sia polarizzata.

Visto che in uscita dal filtro l'intensità di luce risulta inferiore a quella incidente, significa che il filtro esegue una sorta di operazione di selezione della polarizzazione della luce incidente. Dobbiamo precisare che questo risultato non significa che metà della luce incidente ha polarizzazione per esempio lungo  $x$ , in quanto se ripetiamo l'esperimento secondo altre due orientazioni diverse, per esempio  $x'$  e  $x''$ , notiamo sempre che l'intensità in uscita è  $I/2$ . Quindi se questa fosse una misura della quantità di luce incidente polarizzata in quella specifica direzione ci ritroveremo una intensità incidente totale pari a  $3/2I$ , risultato che è in contraddizione con l'ipotesi iniziale.



Figura 2.1: Polarizzazione di un fascio di luce.

Per poter chiarire meglio la situazione riprendiamo le idee corpuscolari della luce viste nel capitolo precedente. Seguendo queste idee d'ora in poi considereremo i fasci di luce con cui abbiamo a che fare come fasci di fotoni. Per tenere conto della polarizzazione della luce assumiamo che ciascun fotone si possa presentare in un certo stato di polarizzazione. Quindi un fascio di luce polarizzata in una direzione sarà costituito solo da fotoni polarizzati in quella certa direzione. Un fascio di luce non polarizzato sarà in un qualche modo costituito da fotoni che hanno diverse polarizzazioni. L'intensità del fascio di luce sarà proporzionale al numero di fotoni che incidono per unità di tempo.

Per rappresentare lo stato di polarizzazione del fotone usiamo la notazione dei ket, i quali sono *contenitori* di informazioni sullo stato del sistema fisico trattato. Per esempio un fotone con polarizzazione lungo  $x$  sarà rappresentato dal ket:

$$|P_x\rangle$$

Vogliamo far notare che all'interno delle parentesi del ket possiamo inserire anche altre informazioni, se per esempio sappiamo che questo fotone ha impulso  $p$  possiamo rappresentare lo stato del fotone con il ket

$$|P_x, p\rangle$$

Per i nostri scopi indicheremo solo gli stati di polarizzazione.

Riprendiamo ora la questione dell'azione del filtro polaroid ragionando in termini di fotoni. Una prima ipotesi potrebbe essere quella di vedere l'azione del filtro, che chiamiamo  $F_x$  se in direzione  $x$ , come una selezione dei soli fotoni con polarizzazione  $|P_x\rangle$ . Questa ipotesi indica che

<sup>1</sup>Nell'ipotesi ideale in cui l'efficienza del filtro polaroid sia del 100%.

il fascio incidente è composto per metà da fotoni nello stato  $|P_x\rangle$ , il che può non sembrare strano. Intuiamo che questa interpretazione non è corretta nel momento in cui ripetiamo l'esperimento orientando diversamente il filtro. Per schematizzare la situazione immaginiamo di inviare per ogni esperimento 100 fotoni che fanno riferimento al fascio di luce non polarizzato e che quindi indichiamo essere nello stato generico  $|P_?\rangle$ , quindi eseguiamo gli esperimenti qui illustrati:

$$100 \text{ fotoni } |P_?\rangle \rightarrow \boxed{F_x} \rightarrow 50 \text{ fotoni } |P_x\rangle \quad (2.1)$$

$$100 \text{ fotoni } |P_?\rangle \rightarrow \boxed{F_{x'}} \rightarrow 50 \text{ fotoni } |P_{x'}\rangle \quad (2.2)$$

$$100 \text{ fotoni } |P_?\rangle \rightarrow \boxed{F_{x''}} \rightarrow 50 \text{ fotoni } |P_{x''}\rangle \quad (2.3)$$

$$(2.4)$$

Ogni esperimento è caratterizzato da 100 fotoni iniziali per i quali non conosciamo la polarizzazione e sono chiaramente diversi da esperimento a esperimento. Vogliamo notare inoltre che i fotoni iniziali sono prodotti tutti nello stesso modo indipendentemente dall'esperimento, quindi in fase di produzione di fotoni non se ne può decidere la polarizzazione.

**Qualcosa di strano.** Che i fotoni iniziali siano diversi da esperimento a esperimento non vi è dubbio, risulta però molto strano capire come in ciascun esperimento proprio la metà dei fotoni inviati abbia la stessa polarizzazione selezionata dal filtro. Ciò che riportiamo non è un caso singolo, ma si ottiene ogni volta che si ripetono gli esperimenti con una qualsiasi direzione di polarizzazione.

**Ipotesi iniziale sbagliata.** Il ragionamento intuitivo<sup>2</sup> qui presentato non ci permette di interpretare in modo sensato gli esperimenti in quanto l'ipotesi iniziale è sbagliata. È cioè sbagliato pensare che il fascio iniziale sia composto per metà da fotoni polarizzati in una certa direzione, infatti abbiamo visto che cambiando arbitrariamente direzione il risultato non cambia e la sorgente di fotoni non può di certo adattarsi all'orientazione del filtro con il quale non ha nulla a che fare.

Per poter formalizzare una costruzione coerente con i risultati qui esposti dobbiamo analizzare altri esperimenti che mostriamo nella prossima sezione.

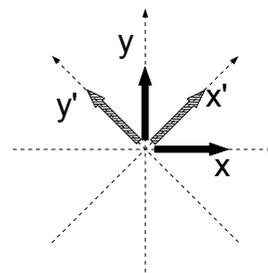


Figura 2.2: Direzione di polarizzazione dei fotoni. La direzione di propagazione dei fotoni è ortogonale al piano  $xy$ . Gli assi  $x$  e  $y$  sono ortogonali come lo sono  $x'$  e  $y'$ .  $x'$  ha la stessa direzione della bisettrice del primo quadrante.

<sup>2</sup>Sottolineiamo il fatto che il ragionamento qui presentato ha seguito una linea logica come siamo abituati nella fisica classica. Da qui un primo segno che l'intuizione classica non è adeguata per spiegare meccanica quantistica.

## 2.2 Esperimenti sequenziali di polarizzazione della luce

Immaginiamo di preparare esperimenti con filtri Polaroid sequenziali. Usiamo a questo scopo i filtri  $F_x$ ,  $F_y$  e  $F_{x'}$ , i quali selezionano lo stato di polarizzazione lungo l'asse  $x$ ,  $y$  e  $x'$  come rappresentato in Fig.2.2.

Eseguiamo ora due esperimenti con filtri sequenziali che per comodità chiamiamo E-x-y e E-x-x'-y.

**E-x-y.** Nel primo esperimento usiamo due filtri disposti come in Fig.2.3(a). Filtriamo inizialmente il fascio di luce non polarizzato con un  $F_x$ , successivamente il fascio in uscita da  $F_x$  viene filtrato con un  $F_y$ .

**E-x-x'-y.** Nel secondo esperimento usiamo tre filtri disposti come in Fig.2.3(b). Il fascio non polarizzato viene filtrato con un  $F_x$ , quindi in uscita da questo filtriemo con un  $F_{x'}$  e infine filtriemo con un  $F_y$ .

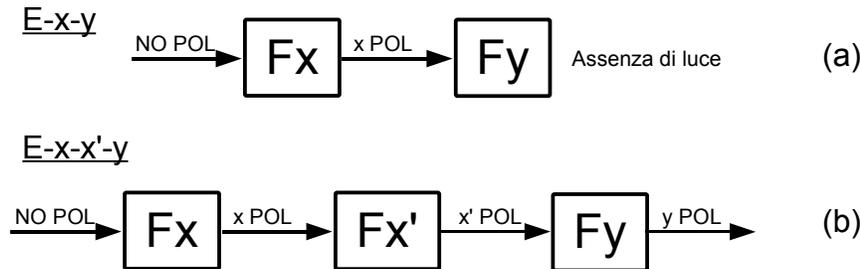


Figura 2.3: Esperimenti sequenziali di polarizzazione della luce. (a) Esperimento sequenziale E-x-y in cui in sequenza si applica un filtro  $F_x$  seguito da un filtro  $F_y$ . (b) Esperimento sequenziale E-x-x'-y in cui si susseguono i filtri  $F_x$ ,  $F_{x'}$  e  $F_y$ .

### 2.2.1 Stati ortogonali

Dall'esperimento E-x-y possiamo concludere che se un fotone è nello stato  $|P_x\rangle$  (uscendo da  $F_x$ ) allora non può essere nello stato  $|P_y\rangle$ , in quanto in uscita dal secondo filtro non c'è luce. È vero anche il viceversa e lo si può verificare con un esperimento E-y-x. Allora i due stati  $|P_x\rangle$  e  $|P_y\rangle$  si escludono a vicenda, possiamo quindi dire che questi due stati sono ortogonali come lo sono i vettori lungo  $x$  e lungo  $y$ <sup>3</sup>. Nella rappresentazione dei ket, due stati si dicono ortogonali quando

<sup>3</sup>In questo caso si può richiamare in parallelo l'ortogonalità di due vettori nel piano. Due vettori sono ortogonali se il loro prodotto scalare è nullo, cioè  $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$ .

il prodotto fra il bra <sup>4</sup> di uno e il ket dell'altro è nullo <sup>5</sup>:

$$\langle P_x | P_y \rangle = 0$$

Ammettendo di poter esprimere un fotone in uno stato con più polarizzazioni come per esempio  $|P_x, P_{x'}\rangle$ , vista l'ortogonalità precedente possiamo affermare con certezza che lo stato  $|P_x, P_y\rangle$  non esiste in quanto  $|P_x\rangle$  e  $|P_y\rangle$  sono ortogonali.

Vogliamo far notare inoltre che  $|P_x\rangle$  è ortogonale solo a  $|P_y\rangle$ , infatti ripetendo l'esperimento con un secondo filtro diverso da  $F_y$  avremmo sempre dei fotoni in uscita, quindi i due stati  $|P_x\rangle$  e  $|P_{x'}\rangle$  non si escludono a vicenda e si dicono non ortogonali.

### 2.2.2 Un ragionamento non corretto

Analizzando il secondo esperimento E-x-x'-y scopriamo altri bizzarri comportamenti. Anzitutto vediamo che in uscita del terzo filtro abbiamo fotoni, nonostante questo selezioniamo uno stato ortogonale a quello dei fotoni in uscita del primo filtro. Questa volta però c'è un elemento in più fra i due filtri. Ammettiamo, come fatto sopra che il fotone in uscita dal secondo filtro sia nello stato  $|P_x, P_{x'}\rangle$ , in quanto questo fotone è stato selezionato sia da  $F_x$  che da  $F_{x'}$ . Ma allora, procedendo con questo ragionamento, possiamo dire che il fotone in uscita dal terzo filtro sarà nello stato  $|P_x, P_{x'}, P_y\rangle$ . Questo non è possibile in quanto un fotone non può trovarsi contemporaneamente nei due stati ortogonali  $|P_x\rangle$  e  $|P_y\rangle$ , quindi la rappresentazione  $|P_x, P_{x'}, P_y\rangle$  non è corretta. Risulta non essere corretta nemmeno la rappresentazione  $|P_x, P_{x'}\rangle$ , in quanto se lo fosse non dovremmo vedere nessun fotone in uscita dal terzo filtro essendo quelli in entrata nella polarizzazione ortogonale a quella selezionata.

Il ragionamento qui esposto ci porta a concludere che gli stati di polarizzazione  $|P_x, P_{x'}\rangle$  e  $|P_x, P_{x'}, P_y\rangle$  non possono esistere. Lo stesso si conclude considerando anche qualsiasi altra combinazione dei filtri.

### 2.2.3 Osservazioni su E-x-y e E-x-x'-y

Un prima osservazione sull'esperimento E-x-x'-y mette in evidenza che all'uscita di ciascun filtro l'intensità di luce (quindi il numero di fotoni) è sempre la metà di quella in entrata al medesimo filtro. Sembra quindi che in corrispondenza di ogni filtro si verifichi proprio quello che si verifica con un singolo filtro. Nella configurazione di questo esperimento sembra quindi che in corrispondenza di ciascun filtro non vi sia nessuna influenza dai filtri precedenti in termini di frazione di fotoni selezionati, nel senso che quelli che escono sono sempre la metà di quelli che entrano.

<sup>4</sup>Il bra non è altro che il ket 'rovesciato'.  $\langle P_x |$  è il bra corrispondente al ket  $|P_x\rangle$

<sup>5</sup>Il prodotto fra due stati  $|\alpha\rangle$  e  $|\beta\rangle$  si rappresenta con  $\langle\alpha|\beta\rangle$ . È da questa rappresentazione fra parentesi, bracket in inglese, da cui derivano i nomi bra-ket.

Una seconda osservazione, che nasce dal confronto fra i due esperimenti E-x-y e E-x-x'-y, è che la presenza del filtro  $F_{x'}$  nel secondo sembra modificare lo stato  $|P_x\rangle$  dei fotoni entranti, in quanto in uscita da questo ricompaiono fotoni nello stato  $|P_y\rangle$ , il quale era stato escluso dal primo filtro. L'azione del filtro  $F_{x'}$  è quindi quella di disturbare i fotoni facendo loro variare lo stato di polarizzazione  $|P_x\rangle$ .

Queste osservazioni ci saranno utili nel seguito per costruire la teoria che ci permette di interpretare correttamente i risultati ottenuti da questi esperimenti.

## 2.3 Il principio di sovrapposizione degli stati

I risultati ottenuti dai precedenti esperimenti trovano un'interpretazione corretta e coerente se consideriamo gli stati ortogonali  $|P_x\rangle$  e  $|P_y\rangle$  come stati di base con cui poter rappresentare per mezzo di una loro combinazione un qualsiasi altro stato di polarizzazione. Lo stesso discorso vale se consideriamo la coppia  $|P_{x'}\rangle$  e  $|P_{y'}\rangle$  e in generale qualsiasi altra coppia di stati ortogonali.

Seguendo questa idea lo stato  $|P_{x'}\rangle$  può essere visto come una sovrapposizione degli stati  $|P_x\rangle$  e  $|P_y\rangle$ , in quanto abbiamo visto dall'esperimento E-x-x'-y che lo stato  $|P_{x'}\rangle$  ha una componente con polarizzazione  $|P_y\rangle$ . Se avessimo ripetuto un esperimento analogo E-x-x'-x avremmo trovato che  $|P_{x'}\rangle$  ha anche una componente con polarizzazione  $|P_x\rangle$ . Analogamente il ragionamento funziona se usiamo come base i ket  $|P_{x'}\rangle$  e  $|P_{y'}\rangle$  per rappresentare  $|P_x\rangle$  e  $|P_y\rangle$ .

Matematicamente possiamo rappresentare questa sovrapposizione con la seguente notazione <sup>6</sup> :

$$|P_{x'}\rangle = c_x |P_x\rangle + c_y |P_y\rangle$$

$$|P_x\rangle = c_{x'} |P_{x'}\rangle + c_{y'} |P_{y'}\rangle$$

dove i  $c$  sono coefficienti che indicano come si sovrappongono i due stati ortogonali. Più precisamente il loro quadrato indica la probabilità di ottenere lo stato di base nel momento in cui si esegue la misura di quella polarizzazione. Per esempio misurando la polarizzazione  $P_x(P_y)$  di un fotone nello stato  $|P_{x'}\rangle$  si avrà una probabilità pari a  $c_x^2(c_y^2)$  di ottenere proprio  $P_x(P_y)$ . Chiaramente la misura di polarizzazione assume significato statistico quanto si ripete su un grande numero di fotoni, come è stato fatto negli esperimenti precedenti. Da esperimenti simili possiamo determinare i coefficienti, infatti considerando un fascio di fotoni nello stato  $|P_{x'}\rangle$  incidenti su un filtro  $F_x$  ne vediamo uscire solo 1/2 di quelli entranti, quindi  $c_x = 1/\sqrt{2}$ . Siccome quando misuriamo  $|P_x\rangle$  o otteniamo proprio questo o non otteniamo nulla perché il fotone è nello stato ortogonale  $|P_y\rangle$ , la somma delle due probabilità deve essere 1, cioè:

$$c_x^2 + c_y^2 = 1$$

<sup>6</sup>Per maggiore chiarezza si può fare un richiamo alla composizione dei vettori nel piano:  $\vec{V} = V_x\vec{x} + V_y\vec{y}$ , con  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$  vettori di base.

Con questa formulazione siamo in grado di rappresentare un qualsiasi stato di polarizzazione come una sovrapposizione di due stati di polarizzazione di base, i quali sono sempre ortogonali. Questo concetto prende il nome di principio di sovrapposizione e viene applicato in tutta la meccanica quantistica per tutte le variabili che caratterizzano uno stato di un sistema, normalmente chiamate osservabili.

Bisogna precisare che un qualsiasi stato, sovrapposizione di stati di base, è sempre riferito ad un singolo fotone. Quindi è assolutamente sbagliato interpretare la sovrapposizione come una composizione mista del fascio di fotoni considerato, anche alla luce delle contraddizioni che abbiamo incontrato prima nell'ipotizzare questa situazione. Sbagliato è anche cercare di interpretare la sovrapposizione con l'idea che il fotone sia in uno stato intermedio fra i due, in quanto quando si esegue la misura si ottiene o l'uno o l'altro ma mai un valore intermedio.

Si deve inoltre precisare che il concetto di sovrapposizione degli stati della MQ non ha nessuna analogia nella fisica classica. Abbiamo infatti visto che non è stato possibile determinare questo concetto con ragionamenti intuitivi basati sulla fisica classica. Non è possibile fornire una interpretazione intuitiva del concetto di sovrapposizione basato sulle idee classiche e deve essere accettato alla luce del fatto che è l'unica interpretazione coerente per spiegare i risultati sperimentali.

## 2.4 Il processo di misura in MQ

Approfondiamo il concetto di sovrapposizione degli stati considerando i processi di misura in MQ. A tale proposito introduciamo una variante ai filtri visti finora. Visto che  $|P_x\rangle$  e  $|P_y\rangle$  sono due stati ortogonali possiamo pensare di costruire un dispositivo <sup>7</sup> che esegua una misura di polarizzazione che chiamiamo  $P_{xy}$ , ossia tale dispositivo fornirà come risultato della misura di polarizzazione o lo stato  $|P_x\rangle$  oppure lo stato  $|P_y\rangle$  <sup>8</sup>. I due stati ortogonali, che formano una base e che sono i possibili risultati della misura  $P_{xy}$  sono detti autostati dell'osservabile  $P_{xy}$ .

Da quanto visto nei precedenti esperimenti eseguendo la misura  $P_{xy}$  su un fotone nello stato  $|P_{x'}\rangle$  avremo il 50% di probabilità di trovare l'autostato  $|P_x\rangle$  e il 50% di probabilità di trovare l'autostato  $|P_y\rangle$ , in virtù della sovrapposizione degli stati. La misura fornirà quindi uno dei due autostati e il fotone dopo la misura sarà nello stato che ne è risultato.

Riepilogando, prima della misura il fotone è nello stato  $|P_{x'}\rangle = 1/\sqrt{2}|P_x\rangle + 1/\sqrt{2}|P_y\rangle$ , mentre dopo la misura sarà in uno dei due autostati dell'osservabile  $P_{xy}$ . Quindi il processo di misura ha

<sup>7</sup>Un dispositivo di questo tipo si potrebbe realizzare con la calcite, la quale divide un fascio di luce non polarizzato secondo due polarizzazioni ortogonali.

<sup>8</sup>Possiamo vedere tale ampliamento come una aggiunta alla misura  $F_x$  eseguita con filtro  $F_x$ , infatti in questa misura il fotone usciva solo nello stato  $|P_x\rangle$ , mentre lo stato  $|P_y\rangle$  veniva eliminato. Con la misura  $P_{xy}$  non lo eliminiamo ma semplicemente lo distinguiamo.

modificato lo stato iniziale  $|P_{x'}\rangle$  in un autostato di  $P_{xy}$ .

Un processo di misura in meccanica quantistica fornisce sempre come risultato uno degli autostati dell'osservabile che si misura. Il fatto bizzarro da un punto di vista classico è che è il processo di misura stesso a modificare lo stato del sistema in uno degli autostati. Il processo di misura in MQ implica un'interazione fra l'apparato di misura e il sistema che si sta osservando. Questo risulta chiaro dall'esempio qui considerato.

La MQ non spiega <sup>9</sup> quale sia il meccanismo per cui l'atto della misura fa saltare il sistema in un autostato della osservabile che si sta misurando, è però in grado di fornire la probabilità che dalla misura risulti un certo autostato.

Vogliamo inoltre evidenziare il fatto che la misura  $P_{xy}$ , per quanto visto dagli esperimenti precedenti, fa perdere qualsiasi informazione riguardo al risultato della precedente misura di polarizzazione  $|P_{x'}\rangle$ , infatti lo stesso risultato si avrebbe se la polarizzazione iniziale fosse  $|P_{y'}\rangle$ . Quindi la misura  $P_{xy}$  fa perdere le informazioni di una precedente misura  $P_{x'y'}$  e questo fatto sarà approfondito nella prossima sezione.

## 2.5 Il principio di indeterminazione di Heisenberg

Dall'evidente esempio dell'esperimento E-x-x'-y e con l'ampliamento introdotto nel precedente paragrafo, risulta chiaro che non possiamo conoscere simultaneamente i risultati delle misure di  $P_{xy}$  e  $P_{x'y'}$ . Infatti se misuriamo  $P_{xy}$  di un fotone che sia in un autostato di  $P_{x'y'}$  (per esempio  $|P_{x'}\rangle$ ), dopo la misura questo sarà in un autostato di  $P_{xy}$  (per esempio  $|P_x\rangle$ ), il quale altro non è che una sovrapposizione degli autostati di  $P_{x'y'}$  (seguendo l'esempio  $|P_x\rangle = 1/\sqrt{2}|P_{x'}\rangle + 1/\sqrt{2}|P_{y'}\rangle$ ), che è uno stato necessariamente diverso da quello iniziale.

Questa indeterminazione a seguito di una misura si verifica ogni volta che consideriamo quelle osservabili che in MQ sono dette incompatibili e si chiama principio di indeterminazione di Heisenberg. In meccanica quantistica due, o più, osservabili incompatibili non possono essere misurate contemporaneamente, quindi non si possono conoscere contemporaneamente. L'atto di misura di una osservabile modifica lo stato del sistema con conseguente perdita della conoscenza dello stato in termini di ogni altra osservabile incompatibile.

Nel caso dei fotoni considerati come esempio le osservabili  $P_{xy}$  e  $P_{x'y'}$  sono incompatibili, quindi non sarà mai possibile determinare fotoni in ipotetici stati  $|P_x, P_{x'}\rangle$ ,  $|P_x, P_{y'}\rangle$ ,  $|P_y, P_{x'}\rangle$  e  $|P_y, P_{y'}\rangle$ . Questi ipotetici stati stanno a significare che il fotone dovrebbe essere contemporanea-

<sup>9</sup>Questo è un interrogativo al quale non si ha nessuna risposta certa. Ci sono alcune teorie che cercano di spiegare questo meccanismo in termini di molti universi, ma qui andiamo ben oltre l'obiettivo di questo percorso.

mente in due stati di polarizzazione diversi, per esempio lo stato  $|P_x, P_{x'}\rangle$  significa che il fotone è polarizzato sia lungo  $x$  sia lungo  $x'$ . In quest'ottica si comprende meglio l'errore del ragionamento proposto nella sezione 2.2.2.

A titolo informativo riportiamo l'espressione piú famosa del principio di indeterminazione Heisenberg ottenuto da estensioni del principio di indeterminazione applicato in MQ a osservabili continue. Ampliando la trattazione della MQ alle osservabili continue posizione ( $x$ ) e impulso ( $p$ ) si scopre che queste sono osservabili incompatibili, quindi anche per loro vale il principio di indeterminazione di Heisenberg che esplicitiamo nel seguito.

**Indeterminazione posizione-impulso.** Il principio di indeterminazione di Heisenberg applicato alla posizione e all'impulso di una particella quantistica è formulato come segue:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \quad (2.5)$$

dove  $\Delta x$  e  $\Delta p_x$  sono rispettivamente l'incertezza sulla misura della posizione  $x$  e l'incertezza sulla misura della componente dell'impulso  $p_x$ . Risulta chiaro che se conosciamo con estrema precisione  $x$ , quindi  $\Delta x \approx 0$ , allora avremo una completa indeterminazione della componente dell'impulso  $p_x$ , cioè  $\Delta p_x \rightarrow \infty$ , e viceversa. Negli esperimenti reali si conoscono con le corrispondenti incertezze, che soddisfano alla 2.5, sia l'impulso che la posizione.

**Indeterminazione energia-tempo.** Nella letteratura compare spesso anche il principio di indeterminazione energia-tempo, il quale è però di natura diversa dal principio qui esposto, in quanto il tempo in MQ è un parametro e non una osservabile, quindi non è di fatto il principio di indeterminazione riferito alle osservabili incompatibili. Riportiamo comunque per completezza tale principio:

$$\Delta E \Delta t \cong \hbar \quad (2.6)$$

Questa relazione è responsabile dell'effetto tunnel visto nel Par.1.8

## 2.6 Approfondimenti sul formalismo

Al fine di acquisire un po' di dimestichezza e per maggiori chiarimenti del formalismo qui sviluppato, si possono proporre agli studenti altre esperienze di laboratorio sulla polarizzazione della luce. Per esempio si potrebbero affrontare esperimenti con filtri sequenziali ad inclinazioni variabili e non solo con variazioni di  $45^\circ$  come finora abbiamo visto. Se il tempo non dovesse permettere ulteriori esperimenti si possono sempre idealizzare questi e trasformarli in esercitazioni da svolgere con gli studenti. Possiamo quindi proporre esercizi con stati del fotone sovrapposizione arbitraria di autostati e dai coefficienti determinare le relative probabilità.

In generale per prendere dimestichezza con problemi di polarizzazione dei fotoni non riteniamo sia necessario dover pressare con molti esercizi. Fissati i concetti gli esercizi dovrebbero essere affrontabili senza grosse difficoltà.

## **2.7 Conclusione della parte di costruzione della MQ**

Con la costruzione delle basi della MQ che abbiamo proposto in questo capitolo riteniamo di aver trasmesso agli studenti un esempio molto importante di come si costruiscono le fondamenta di una teoria o in generale le interpretazioni di certi fenomeni. In questo percorso gli studenti si sono dovuti confrontare con spiegazioni che sembravano intuitivamente corrette, ma che alla fine si sono rivelate false per l'interpretazione dei fenomeni visti.

Al fine di valutare la comprensione di questo percorso da parte degli studenti proponiamo la verifica sommativa riportata in App.??.

## Capitolo 3

# Conclusioni

Un percorso didattico dovrebbe concludersi con le osservazioni dell'esito del lavoro svolto in classe, quindi concludere questa dissertazione a priori senza una prova diretta non è certo facile.

Assecondare le indicazioni ministeriali e tentare nello stesso tempo di formulare un percorso piú moderno che guardi all'interno dei concetti e dei fenomeni fondamentali non è semplice, infatti abbiamo dovuto effettuare scelte ben precise. Le difficoltà nascono soprattutto nelle poche ore a disposizione e quindi nella inevitabile scelta degli argomenti da svolgere a scapito di altri che devono essere trascurati.

Riteniamo comunque che il percorso storico mirato qui proposto sia stato pensato soprattutto per focalizzare l'attenzione dei ragazzi su quelli che sono stati i mattoni fondamentali per lo sviluppo della meccanica quantistica. Con questo percorso si dovrebbe essere in grado di preparare, almeno un minimo, gli studenti ad un pensiero quantomeccanico. La seconda parte dell'intervento didattico fa forza proprio sullo scontro fra il ragionamento intuitivo-classico e quantomeccanico. Abbiamo infatti evidenziato e dimostrato ampiamente come i ragionamenti intuitivo-classici non siano in grado di interpretare i risultati che si ottengono da semplici esperimenti di polarizzazione della luce. Da qui abbiamo dimostrato la necessità di un nuovo modo di pensare e ragionare, fuori dagli schemi classici, ma che riesce ad interpretare i bizzarri comportamenti quantomeccanici. Il fatto piú interessante è che tutto questo può essere svolto insieme agli studenti guidandoli nel ragionamento.

Abbiamo voluto inoltre approfondire il concetto di dualità onda-corpuscolo, onde evitare che ci si fossilizzi su un concetto che è stato molto importante per lo sviluppo della MQ, ma che di per sé necessita di una interpretazione coerente come quella fornita dalla MQ moderna.

Questo percorso didattico vuole far scontrare gli studenti con i comportamenti quantomeccanici, ma allo stesso tempo li vuole rendere mentalmente elastici in modo da adattarsi al ragiona-

mento quantomeccanico.

Il lavoro qui presentato è sicuramente ambizioso, ma il percorso seguito è fluido, segue un filo logico basato su fatti evidenti e fortunatamente non è contorto come il vero percorso che hanno dovuto intraprendere i fisici e gli scienziati protagonisti della MQ. Per verificare l'esito di questo percorso è comunque necessaria un'azione diretta in classe.

## Appendice A

# Effetto fotoelettrico

L'effetto fotoelettrico viene studiato con un apparato rappresentato schematicamente in Fig.A.1(a) composto da due elettrodi ai quali viene applicata una tensione positiva o negativa. Su uno dei due elettrodi viene fatta incidere la luce. Eseguendo la misura di corrente in funzione della tensione applicata agli elettrodi si vede dalla Fig.A.1(b) che per un certo valore negativo di tensione  $V_s$ , detto anche potenziale di arresto, la corrente si annulla; questo significa che il campo elettrico applicato frena completamente gli elettroni. La misura del potenziale di arresto per diverse frequenze della luce incidente, come riportato in Fig.A.1(c), indica che gli elettroni acquistano energie cinetiche differenti a seconda della frequenza. Potrebbe essere istruttivo presentare ai

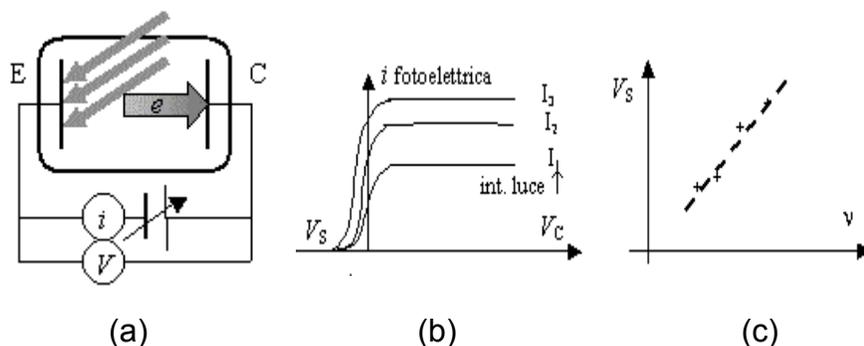


Figura A.1: (a) schematizzazione dell'apparato sperimentale per lo studio dell'effetto fotoelettrico; (b) Corrente in funzione della tensione applicata per diverse intensità di luce e indicazione del potenziale di arresto  $V_s$ ; (c) potenziale di arresto in funzione della frequenza della luce incidente

ragazzi l'applet riportata in Fig.A.2, con la quale è possibile riprodurre l'esperimento fotoelettrico descritto sopra e in particolare si può capire il significato del potenziale di arresto, si possono tracciare grafici delle varie grandezze e si possono scegliere diversi tipi di materiale.

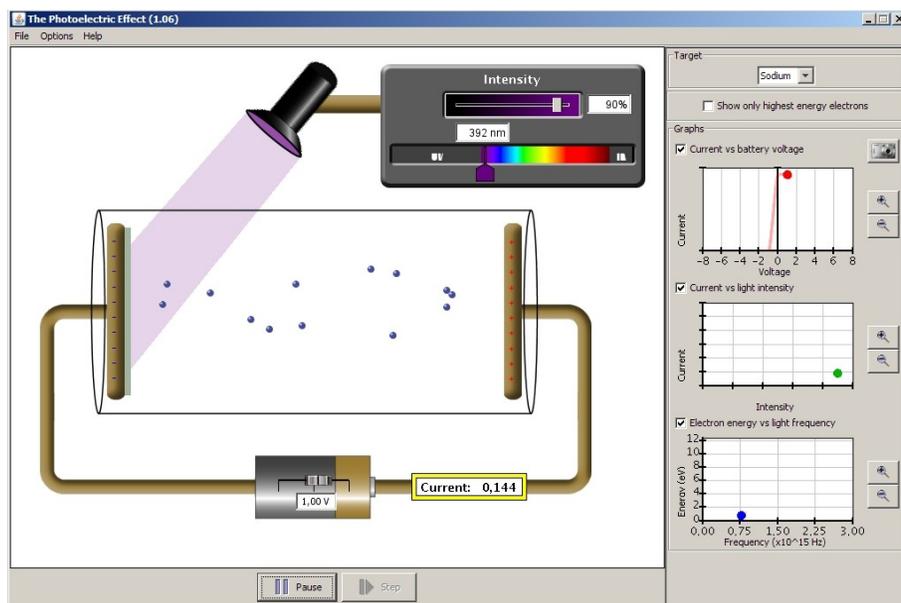


Figura A.2: Applet effetto fotoelettrico, reperibile da [15]

## Appendice B

# Effetto Compton

In questo approfondimento trattiamo l'effetto Compton mettendo in evidenza come tale processo non si possa spiegare in termini di elettromagnetismo classico. Proponiamo quindi la trattazione classica che non risulta in accordo con i risultati sperimentali e la trattazione cinematica da un punto di vista corpuscolare.

L'effetto Compton si verifica quando si investe un elettrone con raggi X<sup>1</sup>.

**Trattazione classica.** Cerchiamo di studiare qualitativamente cosa succede in questa situazione facendo uso dell'elettromagnetismo classico. Una onda elettromagnetica è individuata da un campo elettrico oscillante nello spazio e nel tempo in direzione ortogonale alla direzione di propagazione. Facendo incidere un'onda elettromagnetica su un elettrone libero, questo si metterà ad oscillare con la stessa frequenza dell'onda a seguito del campo elettrico oscillante. Come conseguenza del moto oscillatorio l'elettrone emetterà un'onda elettromagnetica sferica della stessa frequenza dell'onda incidente. Eseguendo quindi una scansione su un determinato arco di circonferenza, per esempio alla destra dell'elettrone, con un rivelatore di frequenza di onde elettromagnetiche dovremmo determinare un andamento costante in funzione dell'angolo. In pratica l'elettrone emette in tutte le direzioni un'onda elettromagnetica della stessa frequenza dell'onda incidente.

**Risultati sperimentali.** Quello che risulta invece dagli esperimenti reali, realizzati per la prima volta da Arthur Compton nel 1923, è una dipendenza della lunghezza d'onda della luce emessa in funzione dell'angolo rispetto alla direzione di incidenza dei raggi X. Tale dipendenza risulta espressa dalla seguente relazione:

$$\lambda' - \lambda = \lambda_c(1 - \cos \theta) \quad (\text{B.1})$$

dove  $\lambda$  è la lunghezza d'onda dell'onda incidente,  $\lambda'$  è la lunghezza d'onda dell'onda diffusa all'angolo  $\theta$ , mentre  $\lambda_c$  è una costante empirica che risulta essere pari a  $2.41 \cdot 10^{-10}$  cm.

---

<sup>1</sup>onda elettromagnetica di lunghezza d'onda compresa nell'intervallo  $10^{-12} - 10^{-9}$  m

Appare chiaro che i risultati ottenuti dagli esperimenti non si possono spiegare in termini di elettromagnetismo classico, in quanto non sono in accordo con le previsioni teoriche.

**Trattazione corpuscolare.** Seguendo le idee sviluppate nei precedenti paragrafi possiamo però ottenere una previsione concorde con i risultati sperimentali. Immaginiamo un'onda elettromagnetica come composta da pacchetti di energia  $E = h\nu = hc/\lambda$ . Facciamo ora una ulteriore ipotesi, immaginiamo che ognuno di questi pacchetti di energia possa essere identificato come una sorta di corpuscolo, che d'ora in poi chiameremo fotone, il quale si propaga nella direzione di propagazione dell'onda incidente. Possiamo a questo punto reinterpretare l'effetto Compton come l'urto elastico fra il fotone e l'elettrone bersaglio, considerando queste particelle come puntiformi. Non entriamo nei dettagli dei calcoli, in quanto per ottenere il risultato corretto dovremmo applicare la cinematica relativistica <sup>2</sup>, ma forniamo una guida per trattare il problema. Questo urto viene trattato allo stesso modo in cui si trattano gli urti elastici in meccanica classica, facendo però uso della cinematica relativistica. Quindi si applica la conservazione dell'energia e dell'impulso prima e dopo l'urto e si sceglie un arbitrario angolo  $\theta$  di diffusione del fotone rispetto alla direzione del fotone incidente, come rappresentato in Fig.B.1. Da questo semplice esercizio si ricava la relazione B.1, in accordo con i risultati sperimentali.

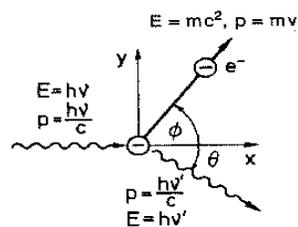


Figura B.1: Effetto Compton.

<sup>2</sup>Lo studio con la cinematica relativistica può essere affrontato insieme agli studenti come una delle varie verifiche formative

## Appendice C

# Microscopico e macroscopico

Consideriamo un sistema microscopico quale potrebbe essere un elettrone accelerato da un campo elettrico, come per esempio avviene nel tubo catodico del televisore. Lasciamo per il momento indicata la differenza di potenziale elettrico  $V$  alla quale è sottoposto l'elettrone e calcoliamo la lunghezza d'onda dell'onda materiale corrispondente considerando l'elettrone che si muove dopo aver accelerato.

Per calcolare la lunghezza d'onda dobbiamo conoscere l'impulso dell'elettrone, essendo  $\lambda = \frac{h}{p}$ . L'impulso si può determinare dall'energia cinetica dell'elettrone con la relazione

$$p = \sqrt{2mE}$$

mentre l'energia cinetica sarà l'energia acquisita dall'accelerazione imposta dalla differenza di potenziale, quindi  $E = eV$ . Sostituendo tutto possiamo esprimere la lunghezza d'onda dell'elettrone con la seguente relazione:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meV}} = \frac{6.6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{\sqrt{2 \cdot 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \sqrt{V}}} = \frac{1.23 \cdot 10^{-9} \text{ m}}{\sqrt{V}}$$

considerando per esempio un intervallo di  $V \approx 10^2 - 10^4 \text{ V}$  otteniamo che l'intervallo corrispondente per la lunghezza d'onda è dell'ordine  $\lambda \approx 10^{-10} - 10^{-11} \text{ m}$ , la quale risulta dello stesso ordine di grandezza della lunghezza d'onda dei raggi X.

Consideriamo ora un sistema macroscopico come potrebbe essere per esempio un proiettile sparato da un fucile. Un proiettile avrà una massa dell'ordine di  $m \approx 10^{-2} \text{ kg}$  e una velocità di circa  $v \approx 10^2 \text{ m/s}$ . L'impulso lo possiamo calcolare, quindi possiamo esprimere la corrispondente lunghezza d'onda con la seguente relazione:

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6.6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{10^{-2} \cdot 10^2 \text{ kg(m/s)}} \approx 10^{-34} \text{ m}.$$

Notiamo subito che la lunghezza d'onda del proiettile è circa 13-14 ordini di grandezza più piccola della lunghezza d'onda dell'elettrone. È proprio questa enorme differenza che ci permette di dire che gli effetti ondulatori negli oggetti macroscopici sono trascurabili e soprattutto non possono essere percepiti dai noi.

## Appendice D

# Gli orbitali dell'atomo di idrogeno

Per comprendere meglio la funzione d'onda come funzione di probabilità, proponiamo l'esempio dell'atomo di idrogeno trattato dalla meccanica quantistica con l'equazione di Schrödinger. Non affronteremo nessun tipo di calcolo, ma cerchiamo di seguire quello che si dovrebbe fare. L'atomo di idrogeno è costituito da un protone e un elettrone, impostiamo quindi nell'equazione di Schrödinger il potenziale di interazione fra queste due cariche elettriche. La funzione d'onda soluzione dell'equazione in questione è una funzione legata alla probabilità di trovare l'elettrone in un certo punto *attorno* al protone.

La funzione che propriamente esprime la probabilità di trovare l'elettrone in un certo punto è il modulo quadro  $|\psi|^2$  della funzione d'onda  $\psi$ . Questa probabilità è funzione delle coordinate spaziali, quindi vista in tre dimensioni possiamo rappresentarla come una nuvola di punti. Nelle zone in cui i punti sono molto densi significa che abbiamo grande probabilità di trovare l'elettrone, mentre nelle zone in cui la densità di punti è piccola avremo poca probabilità di trovare l'elettrone. Un altro modo di visualizzare la densità di probabilità è quello di associare alle zone con maggior densità un colore più luminoso di quello usato nelle zone con minore densità, come per esempio riportato in Fig.D.1.

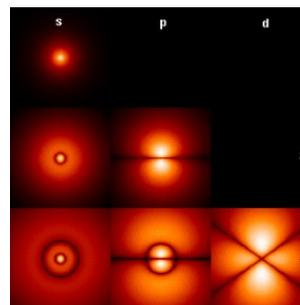


Figura D.1: Rappresentazione in scala di colori degli orbitali dell'atomo di idrogeno.

Queste funzioni di probabilità di cui stiamo qui parlando sono gli orbitali atomici, vedi Fig.D.1, molto comunemente usati in chimica. Spesso per esempio l'orbitale  $1s$  viene rappresentato come una sfera, questo è un errore, in quanto la funzione d'onda che descrive tale orbitale ha simmetria sferica, ma non si annulla in modo brusco in corrispondenza di una certa superficie sferica, si annullerà all'aumentare della distanza dal protone. Tipicamente questi orbitali, come anche gli altri, sono rappresentati come solidi, per esempio una sfera, in quanto si considera solo quella

regione di spazio in cui è possibile trovare l'elettrone con una probabilità del 90%. Le regioni che interessano il rimanente 10% non vengono rappresentate.

# Bibliografia

- [1] Sito della Zanichelli 'Liceo Scientifico e Scientifico - tecnologico Brocca - LA PROVA SCRITTA DI FISICA'  
<http://www.zanichelli.it/materiali/brocca/index.html>
- [2] J. J. Sakurai, 'Meccanica quantistica moderna', Zanichelli 1996.
- [3] P. A. M. Dirac, 'I principi della meccanica quantistica', Bollati Boringhieri 1958.
- [4] M. Born, 'Fisica atomica', Boringhieri 1976.
- [5] C. Rossetti, 'Istituzioni di fisica teorica: introduzione alla meccanica quantistica', Levrotto & Bella, Torino, 1990.
- [6] L. D. Landau, E. M. Lifšits, 'Meccanica quantistica-Teoria non relativistica', Editori Riuniti, Edizioni Mir, 1999.
- [7] A. S. Davidov, 'Meccanica quantistica', Edizioni Mir, 1981.
- [8] E. Hecht, 'Optics', Addison-Wesley, Seconda edizione, 1987.
- [9] L. Lovitch, S. Rosati, 'Fisica generale', Volume 2, Casa Editrice Ambrosiana, 1997.
- [10] Edizione Italiana del Project Physics Course, 'Progetto fisica', Volume 3 del 1990 e Volume B 1992, Zanichelli.
- [11] A. Caforio, A. Ferilli, 'Le leggi della fisica', Volume 2, Le Monnier 2005.
- [12] Johannes Kofler, Caslav Brukner<sup>1</sup>, 'Classical world arising out of quantum physics under the restriction of coarse-grained measurements', Phys. Rev. Lett. 99, 180403 (2007).  
<http://arxiv.org/abs/quant-ph/0609079>
- [13] Applet dell'esperimento di Frank-Hertz,  
<http://perg.phys.ksu.edu/vqm/software/online/vqm/html/FranckHertz.html>
- [14] Sito con *applet* per la visualizzazione degli spettri di tutti gli elementi,  
<http://jersey.uoregon.edu/vlab/elements/Elements.html>

- [15] Sito internet dell'Università del Colorado ricco di interessanti simulazioni di fisica. Le *applet* sono anche scaricabili,  
<http://phet.colorado.edu/new/index.php>
- [16] Siti internet con *applet* per la simulazione dell'effetto Compton, il primo non é interattivo, ma simula random, nel secondo si possono impostare i parametri:  
[http://www.student.nada.kth.se/~f93-jhu/phys\\_sim/compton/Compton.htm](http://www.student.nada.kth.se/~f93-jhu/phys_sim/compton/Compton.htm)  
<http://ww2.unime.it/weblab/ita/compton/compton.htm>
- [17] Sito internet con *applet* per la simulazione di onde:  
<http://www.quantum-physics.polytechnique.fr/>.
- [18] Lloyd M. Davis, 'Interference between Resolvable Wavelengths with Single-Photon-Resolved Detection', Phys. Rev. Lett., Vol. 60, Num 13, pag.1258-1261, 28 Marzo 1988.
- [19] Sito internet che espone esperimenti di interferenza eseguiti con fotoni singoli.  
<http://www.optica.tn.tudelft.nl/education/photons.asp>
- [20] Sito web dell'Università di Udine, Unitá di ricerca in didattica della fisica: 'Introduzione alla fisica quantistica'. In questa unitá si tratta la polarizzazione dei fotoni.  
<http://www.fisica.uniud.it/URDF/ffc/quanto/materiali/conzato1.htm>
- [21] Sito documentazione dell'esperimento interattivo di ottica, presentato a 'Sperimentando 2002' dalla classe 2A, ITIS Euganeo di Este. Referente: prof. A.Vianello. 'Aspetti quantistici di un fascio di fotoni'  
[http://www.itiseuganeo.it/sperimentando/2002/S2002\\_do.htm](http://www.itiseuganeo.it/sperimentando/2002/S2002_do.htm)
- [22] Sito AIP dedicato alla storia di Heisenberg  
<http://www.aip.org/history/heisenberg/p01.htm>

# Elenco delle figure

1.1	Modello atomico di Rutherford. . . . .	2
1.2	Spettro del Hg. . . . .	3
1.3	Esperimento di interferenza con fotoni singoli. . . . .	7
1.4	Esperimento della doppia fenditura con elettroni singoli. . . . .	9
2.1	Polarizzazione di un fascio di luce. . . . .	16
2.2	Direzioni di polarizzazione dei fotoni. . . . .	17
2.3	Esperimenti sequenziali di polarizzazione della luce. . . . .	18
A.1	Effetto fotoelettrico, apparato e misure. . . . .	27
A.2	Applet effetto fotoelettrico. . . . .	28
B.1	Effetto Compton. . . . .	30
D.1	Orbitali dell'atomo H. . . . .	33