



Università degli Studi di Ferrara

SCUOLA DI SPECIALIZZAZIONE PER L'INSEGNAMENTO SECONDARIO  
SEDE DI FERRARA

INDIRIZZO Fisico-Informatico-Matematico

CLASSE A049 – Fisica e Matematica

CICLO VIII

DIRETTORE della Scuola: Prof. Roberto Greci

COORDINATORE della Sede di Ferrara: Prof. Luciana Bellatalla

**INTRODUZIONE DELLA MECCANICA QUANTISTICA  
NELLA SCUOLA SECONDARIA SUPERIORE**

TESI DI SPECIALIZZAZIONE ALL'INSEGNAMENTO SECONDARIO

**Specializzando**

Dott. Mirco Andreotti

**Supervisore**

Prof. Davide Neri

**Relatore**

Dott. Diego Bisero

Anno Accademico 2007/2008



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>v</b>
<b>I Premesse</b>	<b>1</b>
<b>1 Inquadramento della MQ nella scuola</b>	<b>3</b>
1.1 Le indicazioni dei programmi ministeriali . . . . .	3
1.1.1 Licei di ordinamento: classico e scientifico . . . . .	3
1.1.2 Piano Nazionale per l'Informatica . . . . .	4
1.1.3 Commissione Brocca . . . . .	4
1.2 La MQ nell'esame di stato . . . . .	5
1.3 Seguire le indicazioni ufficiali . . . . .	6
<b>2 La MQ nei libri di testo e su internet</b>	<b>7</b>
2.1 I testi universitari . . . . .	7
2.2 I testi per la scuola . . . . .	8
2.3 Le fonti su internet . . . . .	9
2.3.1 Approfondimenti storici . . . . .	9
2.3.2 Applet e simulazioni di MQ . . . . .	9
<b>3 Metodologie didattiche</b>	<b>11</b>
3.1 Ruolo disciplinare e inquadramento storico . . . . .	11
3.2 Metodologie del percorso didattico . . . . .	12
<b>II Intervento didattico</b>	<b>13</b>
<b>4 Premesse per l'intervento didattico</b>	<b>15</b>
4.1 Destinatari . . . . .	15
4.2 Prerequisiti . . . . .	15
4.3 Obiettivi dell'intervento didattico . . . . .	16
4.4 Scelta dei Contenuti . . . . .	17

4.4.1	Tempi dell'intervento didattico . . . . .	18
<b>5</b>	<b>Introduzione storica mirata</b>	<b>21</b>
5.1	L'atomo di Rutherford . . . . .	22
5.2	Quantizzazione dell'energia . . . . .	22
5.2.1	Quantizzazione dell'atomo: l'atomo di Bohr . . . . .	22
5.2.2	Effetto fotoelettrico e quanti di luce . . . . .	24
5.2.3	Osservazioni sulla quantizzazione dell'energia . . . . .	25
5.3	Comportamento corpuscolare della luce . . . . .	25
5.3.1	Esperimenti con singoli fotoni . . . . .	26
5.3.2	Osservazioni sulla natura della luce . . . . .	27
5.4	Comportamento ondulatorio della materia . . . . .	28
5.4.1	Diffrazione e interferenza di elettroni . . . . .	28
5.4.2	Esperimenti con singoli elettroni . . . . .	29
5.5	Dualità onda-corpuscolo . . . . .	29
5.5.1	Onde elettromagnetiche e fotoni . . . . .	30
5.5.2	Particelle e onde di materia . . . . .	30
5.5.3	Microscopico e macroscopico: effetti ondulatori a confronto . . . . .	30
5.6	La meccanica ondulatoria e l'interpretazione di Copenaghen . . . . .	31
5.7	La contraddizione del dualismo onda-corpuscolo . . . . .	31
5.8	La MQ in tasca: l'effetto tunnel . . . . .	33
5.9	Conclusioni parte introduttiva . . . . .	34
<b>6</b>	<b>Costruzione delle basi della MQ</b>	<b>35</b>
6.1	Misura di polarizzazione dei fotoni . . . . .	35
6.2	Esperimenti sequenziali di polarizzazione della luce . . . . .	38
6.2.1	Stati ortogonali . . . . .	38
6.2.2	Un ragionamento non corretto . . . . .	39
6.2.3	Osservazioni su E-x-y e E-x'-y . . . . .	39
6.3	Il principio di sovrapposizione degli stati . . . . .	40
6.4	Il processo di misura in MQ . . . . .	41
6.5	Il principio di indeterminazione di Heisenberg . . . . .	42
6.6	Approfondimenti sul formalismo . . . . .	43
6.7	Conclusione della parte di costruzione della MQ . . . . .	44
<b>III</b>	<b>Conclusioni, appendici e bibliografia</b>	<b>45</b>
<b>7</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>47</b>

---

<b>A</b>	<b>Verifica sommativa</b>	<b>49</b>
A.1	Testo della verifica . . . . .	49
A.2	Griglia di valutazione . . . . .	50
<b>B</b>	<b>Effetto fotoelettrico</b>	<b>51</b>
<b>C</b>	<b>Effetto Compton</b>	<b>53</b>
<b>D</b>	<b>Microscopico e macroscopico</b>	<b>55</b>
<b>E</b>	<b>Gli orbitali dell'atomo di idrogeno</b>	<b>57</b>
	<b>Appendice</b>	<b>59</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>60</b>
	<b>Elenco delle figure</b>	<b>61</b>
	<b>Elenco delle tabelle</b>	<b>63</b>



# Introduzione

La nascita della meccanica quantistica è caratterizzata da un percorso evolutivo durato circa una trentina di anni, durante il quale si incontrano pensieri, idee, modelli, interpretazioni e concetti *transitori* che si sono rivelati a volte sbagliati, a volte corretti. L'aspetto fondamentale di questa evoluzione è stato la necessità di dover abbandonare i ragionamenti intuitivo-classici e adottare un nuovo modo di pensare al fine di formulare una interpretazione coerente delle evidenze sperimentali.

Da queste premesse ci si rende conto che la trattazione della meccanica quantistica nella scuola secondaria superiore richiede sicuramente una scelta del percorso da proporre agli studenti mirata a far ripercorrere in modo fluido i concetti e fenomeni fondamentali che hanno caratterizzato lo sviluppo di questa teoria fino a raggiungere quella che è l'interpretazione moderna e scientificamente accettata.

Sarebbe impensabile voler riproporre un percorso storico completo della meccanica quantistica caratterizzato da ipotesi coerenti, ma anche da altre che poi si sono rivelate non coerenti. Con l'intento di voler ripercorrere in dettaglio tutte le strade che hanno caratterizzato lo sviluppo storico della MQ si rischia di creare confusione nella mente degli studenti. L'introduzione storica tradizionale, spesso adottata all'università e su molti libri di testo, deve essere abilmente snellita per poterla proporre nella scuola.

Un altro concetto molto importante da tenere in considerazione nella presentazione della meccanica quantistica è la dualità onda-corpuscolo, per il quale è molto importante andare oltre la teoria di de Broglie al fine di non rimanere ancorati ad una idea che non si può collocare nell'ambito di una teoria coerente.

Riteniamo che oggi la presentazione della meccanica quantistica debba essere più vicina ad una formulazione moderna, in quanto questa teoria è conosciuta bene sia nei suoi successi che nei suoi limiti. Inoltre oggi la meccanica quantistica la possiamo trovare in alcune apparecchiature di uso abbastanza comune, quindi si dovrebbe riuscire ad arrivare ad un livello in cui sia possibile parlare tanto di effetto fotoelettrico quanto di velocità media di un'automobile.

Secondo queste idee, il lavoro proposto in questa dissertazione vuole mettere molto di più in evidenza i pochi punti cruciali che hanno permesso la costruzione della meccanica quantistica

piuttosto che il contorno di idee e concetti transitori. Con ciò non vogliamo sostenere di eliminare le idee transitorie, quindi il percorso storico della meccanica quantistica, ma di cercare di dar loro il giusto peso, soprattutto per evidenziare gli aspetti piú importanti. Secondo il punto di vista di questa dissertazione è controproducente volersi fossilizzare per esempio sul concetto della dualità onda-corpuscolo secondo de Broglie, in quanto necessita di una interpretazione e collocazione coerente nell'ambito della teoria.

Al fine di formulare una presentazione della meccanica quantistica piú moderna si è cercato di costruire un percorso che tocchi gli argomenti piú importanti per la nascita e lo sviluppo della teoria con i giusti riferimenti storici e i dovuti approfondimenti. Oltre a rendere consapevoli gli studenti delle bizzarre idee che scaturiscono dai fatti storici, ci proponiamo di realizzare insieme a loro un'esperienza reale che metta in evidenza come il ragionamento intuitivo-classico non sia in grado di interpretare correttamente i risultati di esperimenti di polarizzazione dei fotoni. Ne segue quindi una costruzione di nuovi concetti, quelli della meccanica quantistica, che permettono un'interpretazione coerente degli esperimenti.

Questa dissertazione è suddivisa in tre parti.

Nella prima parte analizziamo i programmi ministeriali e gli esami di stato in modo da inquadrare e programmare il percorso didattico. Proponiamo inoltre un'analisi della trattazione della meccanica quantistica in alcuni libri di testo e suggeriamo la consultazione di alcuni testi universitari, dai quali poter prendere spunto per una migliore organizzazione della presentazione dell'argomento. Viene quindi proposta una breve analisi di alcune fonti internet ricche di spunti storici e simulazioni di esperimenti. Infine presentiamo le metodologie didattiche che guidano questo lavoro.

Nella seconda parte presentiamo in dettaglio l'intervento didattico, il quale consiste di due percorsi propedeutici. Il primo un percorso storico mirato ad analizzare i nodi cruciali che hanno portato alla costruzione della meccanica quantistica, corredato da analisi e curiosità di fenomeni fondamentali. Nel secondo percorso proponiamo di interpretare gli esperimenti di polarizzazione della luce e di costruirne, insieme agli studenti, una teoria coerente che ne interpreti i fenomeni. Durante questa analisi si propone il confronto fra i ragionamenti intuitivo-classici e le assunzioni quantomeccaniche.

Nella terza ed ultima parte riportiamo le conclusioni, gli allegati al percorso didattico per approfondimenti di vario genere e la bibliografia e sitografia.

In tutta la dissertazione faremo uso dell'abbreviazione MQ per intendere Meccanica Quantistica.

**Parte I**

**Premesse**



# Capitolo 1

## Inquadramento della MQ nella scuola

In questo primo capitolo ci proponiamo di analizzare le indicazioni dei programmi ministeriali in materia di trattazione della MQ nella scuola secondaria superiore. Ci occuperemo inoltre di valutare quali sono stati i temi di MQ proposti all'esame di stato negli ultimi anni. La valutazione dei programmi ministeriali e dei temi assegnati possono guidarci nella scelta degli argomenti per l'introduzione della MQ nella scuola. Proponiamo inoltre alcune considerazioni di carattere disciplinare e storico della MQ nella scuola.

### 1.1 Le indicazioni dei programmi ministeriali

In questa sezione riportiamo in sintesi le indicazioni dei programmi ministeriali per i licei di ordinamento, PNI e Brocca.

#### 1.1.1 Licei di ordinamento: classico e scientifico

**Liceo classico.** Per il liceo classico di ordinamento non è prevista dai programmi ministeriali alcuna trattazione della MQ.

**Liceo scientifico.** Dai programmi ministeriali è indicato di fornire cenni sul comportamento ondulatorio, interferenza e diffrazione della luce nella classe IV. Per la classe V i programmi indicano cenni sulle onde elettromagnetiche e sulla costituzione della materia: molecole, atomi, nuclei ed elettroni.

Ci si rende conto dalle indicazioni per il liceo scientifico che non è possibile poter affrontare l'argomento MQ in modo abbastanza dettagliato, in quanto si parla di fornire solo cenni al riguardo. Diciamo che comunque un percorso a tappe sintetico centrato sui fatti basilari e sui con-

cetti fondamentali della MQ potrebbe essere affrontato, con lo scopo di fornire principalmente i concetti piú importanti e sconcertanti della MQ.

### 1.1.2 Piano Nazionale per l'Informatica

**Indicazioni liceo scientifico PNI.** Nei programmi ministeriali è previsto lo sviluppo dell'argomento struttura della materia, tema 5, nel triennio, per il quale sono previsti anche argomenti che vanno oltre l'introduzione della meccanica quantistica. Oltre alle basi della meccanica quantistica si parla di stato solido, nucleo e radioattività, reazioni nucleari, tipi di interazione e particelle elementari. La prima parte di questo tema segue la tradizionale introduzione storica della meccanica quantistica, infatti gli argomenti sono posti nel seguente ordine: spettroscopia; effetto termoelettrico; corpo nero ed ipotesi di Planck; effetto fotoelettrico e ipotesi di Einstein; ipotesi di de Broglie: dualità onda-corpuscolo; modelli atomici (Rutherford, Bohr, de Broglie): validità e limiti; principio di indeterminazione-effetto tunnel.

Nell'approfondimento a questo tema le indicazioni ministeriali propongono di sottolineare come nodo cruciale la dualità onda-corpuscolo.

Nella formulazione moderna della MQ questa dualità non è propriamente un nodo cruciale, in quanto i concetti su cui si basa la MQ sono diversi. Che la dualità onda-corpuscolo sia un passaggio obbligato per una qualsiasi introduzione storica è scontato, però poi deve essere approfondito, chiarito e quindi interpretato coerentemente nell'ambito della teoria. È necessario quindi andare oltre l'interpretazione che veniva data negli anni venti, proponendo l'interpretazione coerente fornita da Born.

A parte questa osservazione, per il PNI i programmi ministeriali danno ampio spazio sia ad una trattazione approfondita, quanto ad una introduzione che non sia di livello divulgativo. Rimane comunque sempre l'ostacolo delle sole 3 ore settimanali di fisica, con le quali si rimane limitati ad una scelta mirata dei contenuti da svolgere.

### 1.1.3 Commissione Brocca

**Indicazioni per gli indirizzi classico.** Nel tema 3 si prevedono gli argomenti quanti, materia e radiazione in linea con gli argomenti trattati nel PNI.

**Indicazioni per gli indirizzi linguistico e socio-psico-pedagogico.** Il tema 3 prevede gli argomenti interazione forte e debole, dall'atomo al nucleo, con la solita introduzione della struttura della materia seguita da approfondimenti sulle interazioni forti e deboli.

**Indicazioni per gli indirizzi scientifico e scientifico-tecnologico.** Nel tema 5 si prevedono gli argomenti quanti, materia e radiazione con la tradizionale introduzione storica dei quanti fino

all'interpretazione probabilistica della funzione d'onda. Seguono poi argomenti facoltativi come principio di indeterminazione, nuclei, reazioni nucleari etc etc.

**Indicazioni per gli indirizzi chimico, elettrotecnica e automazione, elettronica e telecomunicazioni, informatico e telematico, meccanico, tessile, costruzioni, territorio, agroindustriale, e biologico.** Nel tema 3 si prevedono gli argomenti quanti, materia e radiazione con la solita introduzione, ma con una trattazione completa del percorso. Per ogni indirizzo specifico si approfondiscono o meno differenti argomenti come stato solido o altro.

**Indicazioni per gli indirizzi economico aziendale, linguistico aziendale.** Non è previsto l'argomento MQ.

In generale per gli indirizzi Brocca in cui è prevista la MQ, è possibile affrontare l'argomento in modo abbastanza approfondito. Chiaramente si dovrà tenere conto dei diversi indirizzi di specializzazione al fine di approfondire o meno un argomento piuttosto che un altro. Comunque un'introduzione approfondita della MQ è fattibile e pone una base di partenza per successivi approfondimenti degli argomenti più specifici richiesti dall'indirizzo.

## 1.2 La MQ nell'esame di stato

In questa sezione vogliamo fare un'analisi dei temi inerenti la MQ proposti agli esami di stato, al fine di tenere conto di quelli che sono gli argomenti più ricorrenti per inquadrare poi le parti da approfondire nell'ambito dell'introduzione della MQ.

I testi degli esami di stato dal 1996 al 2006 per il Liceo Scientifico Sperimentale Brocca sono stati reperiti dal sito della Zanichelli[1]. Dalla consultazione di questi temi l'argomento più ricorrente risulta essere l'effetto fotoelettrico, seguito dall'effetto Compton e dall'effetto termioionico. Si trova anche un tema sull'esperimento della doppia fenditura con la luce e sull'eccitazione e diseccitazione degli atomi. Sono molto ricorrenti anche calcoli della lunghezza d'onda corrispondente ad una certa particella e calcoli di energia di un fotone dalla lunghezza d'onda della luce. Compare anche un esercizio riferito ad un decadimento  $\alpha$ , il quale però richiede calcoli di relatività ristretta e non di MQ.

Nell'esame di stato del 2000 compaiono due quesiti a proposito della dualità onda-corpuscolo che riteniamo opportuno riportare qui, in quanto oggetto di possibili commenti:

- il candidato spieghi il significato dell'espressione *'la radiazione ha un comportamento duale, ondulatorio e corpuscolare'* e descriva un esperimento che ha messo in evidenza il comportamento corpuscolare;

- il candidato spieghi il significato dell'espressione *'fu formulata l'ipotesi che la materia, considerata composta da particelle, potesse presentare caratteristiche ondulatorie'* e descriva un esperimento che ha confermato la realtà di questa ipotesi teorica;

I commenti che potrebbero sorgere guardando questi quesiti sono riferiti alle due espressioni citate. Tali espressioni sembrano fortemente correlate ai suggerimenti visti in precedenza, i quali vengono forniti nei programmi ministeriali riguardo la dualità onda-corpuscolo. Da questi quesiti non risulta chiaro sotto quale punto di vista debbano essere considerate le citazioni riportate. A seconda di come questo argomento viene proposto a scuola ci possiamo aspettare due diverse risposte dagli studenti: o una risposta al quesito che confermi e spieghi l'espressione riportata, oppure una risposta critica e costruttiva che spieghi il significato dell'espressione nell'ambito storico in cui era usata, seguita da un approfondimento che si collega alla visione moderna e scientificamente accettata della MQ. In sè la dualità onda-corpuscolo non si può collocare in una teoria coerente, infatti nel Cap.5 mostreremo come ogni fenomeno quantistico possa essere interpretato in termini di particelle che si comportano secondo le leggi della MQ e l'onda di cui si parla altro non è che un'onda di probabilità direttamente collegata alla probabilità del processo in esame.

Abbiamo ritenuto opportuno fornire queste osservazioni, in quanto spesso nell'affrontare la fisica moderna, non solo la MQ, si rischia di fossilizzarsi molto sull'aspetto storico, con la possibilità di perdere di vista quelli che sono i veri concetti fondamentali sui quali la teoria in questione si fonda. La dualità onda-corpuscolo è un concetto molto importante dal punto di vista del percorso storico che ha fatto nascere la MQ e non deve essere confuso con i concetti base sui quali si costruisce la MQ.

### 1.3 Seguire le indicazioni ufficiali

Come per tutti gli argomenti trattati nella scuola è necessario avere come riferimento le indicazioni dei programmi ministeriali e i temi proposti agli esami di stato, nel caso l'argomento possa essere presente. Seguire questi riferimenti serve a mantenere uno standard nella preparazione degli studenti, ma riteniamo che, per quanto riguarda la fisica moderna, e quindi anche la MQ, sia necessario da parte del docente una organizzazione nella presentazione degli argomenti molto dettagliata e attenta. Molto importante è riconoscere quei concetti che hanno subito delle evoluzioni significative, se veda per esempio la dualità onda-corpuscolo, e quelli che sono alla base della costruzione della MQ.

Si potrebbe pensare ad un percorso sintetico, ma significativo, per introdurre gli studenti alla MQ e affrontare nel seguito, come approfondimenti, quelle idee e quegli argomenti che hanno segnato il percorso storico e che spesso sono in linea con i programmi ministeriali.

## Capitolo 2

# La MQ nei libri di testo e su internet

In questo capitolo proponiamo un sintetica analisi della trattazione della MQ presentata in alcuni libri di testo. In aggiunta ai testi per la scuola secondaria superiore faremo anche riferimento ad alcuni testi universitari, in quanto riteniamo che, nell'affrontare un argomento come la MQ, un insegnante debba prepararsi in modo approfondito al fine di seguire un approccio che sia il piú fluido possibile per gli studenti. È inoltre probabile che un testo per la scuola possa non fornire una visione dell'argomento profonda quanto quella presentata in un testo universitario.

Proponiamo poi alcuni fonti internet dalle quali è possibile ottenere tanti approfondimenti in materia di MQ e molti strumenti utili come *applet* di simulazione di esperimenti e processi quantistici che sarebbero difficili da realizzare praticamente.

### 2.1 I testi universitari

Segnaliamo due testi universitari, di Born [4] e Rossetti [5], consultabili da parte dell'insegnante per avere un approfondito percorso storico che dalla quantizzazione dell'energia porta alla dualità onda-corpuscolo, per terminare con l'interpretazione di Copenaghen, in particolare con l'idea di Born, la quale risulta essere la formulazione della meccanica quantistica come si studia oggi.

Un altro testo, di Sakurai [2], si basa su una *terapia d'urto* di introduzione della meccanica quantistica. Il metodo si basa sull'introduzione intuitiva dei concetti e fenomeni quantomeccanici fondamentali da esperimenti di Stern-Gerlach pensati, per poi passare ad una costruzione matematica rigorosa. Pensare ad una terapia d'urto per l'introduzione della meccanica quantistica nella scuola superiore potrebbe non essere la via migliore, in quanto si corre il rischio di non aver nessun contatto con quello che effettivamente è stato il percorso dei fisici del XX secolo. È molto interessante, comunque, prendere spunto da quanto proposto nel primo capitolo del testo di Sakurai [2], al fine di proporre, dopo un percorso storico, una costruzione dei concetti di base della meccanica quantistica. Questa trattazione sarà infatti oggetto del Cap.6 di questa dissertazione.

## 2.2 I testi per la scuola

Un'attenta valutazione della trattazione della MQ nei libri di testo per la scuola secondaria superiore richiederebbe un lavoro enorme, il quale esula dal contesto di questa dissertazione. Comunque per renderci conto di cosa possiamo incontrare sui libri proponiamo alcune sintetiche osservazioni in merito a due testi scolastici, uno piú recente, il Caforio-Ferilli [11], l'altro piuttosto datato, il testo di fisica del PPC [10].

Nel testo Caforio-Ferilli [11] la prima sezione della parte dedicata alla fisica moderna consiste nel tradizionale percorso storico dello sviluppo della MQ, che parte dalle prime ipotesi di quantizzazione per arrivare all'interpretazione moderna della MQ. Il fatto che ogni argomento cruciale per lo sviluppo della MQ venga affrontato in modo approfondito, è positivo in quanto il libro di testo deve essere completo. Risulta chiaro che sarà poi opera dell'insegnante decidere quali approfondimenti seguire oppure no a seconda delle preferenze e dei tempi dell'intervento didattico. Una obiezione che si potrebbe sostenere riguardo il testo considerato è che sembra non evidenziare quelli che sono i punti cruciali che hanno portato allo sviluppo della MQ come la conosciamo oggi. Per essere piú precisi, il testo pone l'attenzione su molti concetti che interessano anche tutti i vari modelli e proposte di interpretazioni che sono stati intermediari fra la nascita della meccanica dei quanti e la sua formulazione finale. Per esempio si pone molta attenzione all'atomo di Rutherford, al modello di Bohr etc etc. Non sembra però che vengano esaltati quelli che sono i pochi punti cruciali che interessano la MQ.

L'altro testo consultato, il PPC [10], è piuttosto datato e veniva usato negli istituti tecnici e nei licei classici circa 15 anni fa. Anche questo testo ripercorre lo sviluppo storico delle scoperte e degli esperimenti che hanno caratterizzato la MQ. Diciamo che anche in questo testo non si evidenziano abbastanza i sentieri principali che hanno portato alla MQ definitiva, ma si affrontano in dettaglio i soliti argomenti. Un aspetto interessante di questo testo è che vengono presentate molte schede di laboratorio e di applicazioni pratiche della teoria presentata. In generale valgono le stesse osservazioni riportate sopra.

In generale possiamo dire che i libri di testo scolastici presentano il tradizionale percorso storico della MQ, arrivando fino al concetto di probabilità e al principio di indeterminazione. Sembra non si arrivi a formulare o comunque a trattare in modo chiaro il principio di sovrapposizione e i processi di misura nella MQ. È vero che dopo il liceo gli studenti non devono essere dei fisici, ma si potrebbe anche tentare di costruire in modo semplice i concetti base sui quali si costruisce poi tutta la MQ, come abbiamo intenzione di proporre nel seguito di questo lavoro, al fine di far toccare con mano agli studenti le idee fondamentali.

## 2.3 Le fonti su internet

Di fonti su internet che trattano la MQ ce ne sono molte. Chiaramente nel selezionare queste fonti per usarle con gli studenti bisogna valutare attentamente la trattazione di contenuti e sceglierle in base al percorso che si vuole seguire. Per lo sviluppo di certi contenuti è forse meglio affidarsi a testi universitari piuttosto che a internet. Si possono comunque trovare interessanti siti su vari percorsi storici e altri che propongono *applet* molto interessanti. Analizziamo nel seguito le fonti che si sono rivelate più interessanti.

### 2.3.1 Approfondimenti storici

Nel caso si volessero affrontare degli approfondimenti storici sui personaggi che hanno contribuito alla MQ, sulle diverse formulazioni proposte etc etc vogliamo segnalare un sito americano dedicato ad Heisenberg [22], nel quale oltre a trovare molte curiosità riguardo la vita scientifica di Heisenberg si trovano sviluppati vari percorsi interessanti che per esempio mostrano il dibattito fra la formulazione della MQ di Heisenberg e di Schrödinger, il principio di indeterminazione etc etc.

### 2.3.2 Applet e simulazioni di MQ

Per lo sviluppo di questa dissertazione si è ritenuto interessante cercare *applet*, animazioni e simulazioni di esperimenti di MQ in modo da permettere agli studenti almeno di visualizzare come certi esperimenti e fenomeni si manifestino. L'idea di utilizzare le *applet* nasce da due ragioni principali: anzitutto non è né facile né soprattutto economico realizzare esperimenti di MQ in un laboratorio di un liceo. Pensiamo per esempio all'esperimento di Franck-Hertz, il quale potrebbe anche essere realizzato con un'opportuna strumentazione pensata per la didattica, ma ad un costo commerciale che inciderebbe sostanzialmente sul bilancio. In secondo luogo, parlare di un certo esperimento o fenomeno che per gli studenti può risultare difficile da visualizzare in una immagine mentale, può introdurre notevoli difficoltà per uno sviluppo del percorso. Dobbiamo sempre tenere in mente che i concetti della meccanica quantistica sono difficili da assimilare in quanto non possono avere analoghi classici, quindi l'aiuto di *applet* può agevolare questa impresa.

A tale proposito segnaliamo *applet* interessanti, alcune delle quali sono anche utilizzate nello sviluppo dei contenuti. Prima di entrare nei dettagli di alcune *applet* vogliamo segnalare il sito internet dell'Università del Colorado [15] il quale contiene un certo numero di *applet* molto interessanti non solo per la MQ, ma anche per molti altri argomenti di fisica.

#### L'esperimento di Franck-Hertz

L'esperimento di Franck-Hertz potrebbe essere un buon approfondimento per meglio capire la quantizzazione dei livelli energetici. A tale proposito si potrebbe utilizzare l'*applet* reperibile da

[13], nella quale si può scegliere il tipo di gas, variare il campo elettrico e tracciare i grafici relativi all'esperimento.

### **Effetto fotoelettrico**

Nell'introduzione alla MQ è sicuramente un argomento obbligatorio l'effetto fotoelettrico. Per avere una visione d'insieme del fenomeno si può far uso dell'*applet* scaricabile dal sito [15], con la quale è possibile riprodurre l'esperimento fotoelettrico e in particolare si può capire la questione del potenziale di arresto, si possono tracciare grafici delle varie grandezze e si possono scegliere diversi tipi di materiale.

### **Effetto Compton**

Per quanto riguarda l'effetto Compton, si può far riferimento a differenti *applet*, in particolare ne segnaliamo due indicate in bibliografia [16]: il primo non è interattivo, ma simula il processo casualmente indicando i valori delle grandezze cinematiche prima e dopo l'urto, nel secondo si possono impostare i parametri da misurare dopo l'urto.

### **Meccanica ondulatoria**

Nel momento in cui un insegnante decidesse di svolgere approfondimenti riguardo i processi ondulatori, come per esempio sovrapposizione di onde, effetto tunnel in termini di probabilità etc etc si può far riferimento ad una completa collezione di *applet* disponibili al sito [17].

### **L'esperimento di Stern-Gerlach**

Segnaliamo infine un'*applet* molto coreografica per lo studio dell'esperimento di Stern-Gerlach, nella quale è possibile impostare fino a 3 apparati di misura, sceglierne l'orientamento, impostare dei filtri ed eseguire le misure correlate. Tale *applet* disponibile nel sito [15] è anche scaricabile e può essere usata *offline*.

## Capitolo 3

# Metodologie didattiche

In questo capitolo forniamo alcune indicazioni riguardo il ruolo disciplinare della MQ ed un suo inquadramento storico. Proponiamo quindi le metodologie didattiche che vogliamo seguire per la trattazione dell'argomento che verrà presentato nei capitoli seguenti.

### 3.1 Ruolo disciplinare e inquadramento storico

Voler introdurre la MQ nella scuola secondaria superiore, andando oltre la *semplice* esposizione dei fatti che ne hanno caratterizzato la nascita e lo sviluppo, è sicuramente un'impresa ambiziosa. Trattare la meccanica quantistica ad un livello più approfondito nel senso di proporre l'interpretazione coerente dei concetti fondamentali e delle idee importanti può essere un buon metodo per abituare gli studenti ad un modo di pensare elastico. Ciò significa anche mettere alla prova gli studenti, non tanto per valutarli per un voto, quanto per inquadrare ancora meglio le attitudini dei singoli. Nel momento in cui un insegnante si trova ad avere a che fare con una buona classe, allora si può pensare ad un modo di trattare la meccanica quantistica che permetta di costruire insieme agli studenti le basi della teoria come per esempio proponiamo in questa dissertazione. Differentemente se ci si rende conto che una trattazione simile non può essere realizzata, un percorso storico mirato, sempre come proposto in questa dissertazione, potrebbe comunque contribuire a migliorare la formazione degli studenti in quanto inevitabilmente si devono scontrare con idee che escono dal modo di pensare comune.

Va inoltre ricordato che oggi applicazioni della meccanica quantistica le possiamo trovare in apparecchiature elettroniche di uso comune, come per esempio tutte quelle che sono composte dai transistori MOSFET, nei quali si usa l'effetto tunnel.

Da un punto di vista storico la MQ è caratterizzata da molti elementi estremamente interessanti. In primo luogo ripercorrendo le vicende degli scienziati che ne hanno caratterizzato la nascita e lo sviluppo ci si affianca inevitabilmente alla confusione, allo stupore e alle idee, a volte bizzarre, dei protagonisti di questi ultimi cento anni. In secondo luogo un percorso mirato, che metta in luce le principali strade intraprese può rendere conto dell'impresa che hanno dovuto

sostenere i fisici per arrivare alla fisica moderna come la conosciamo oggi e cosa ancora non possiamo spiegare. Indubbiamente sia le vicende che hanno caratterizzato lo sviluppo della MQ, sia le idee che ne sono maturate portano in sè qualcosa di affascinante.

### 3.2 Metodologie del percorso didattico

Per l'introduzione della MQ nella scuola ci proponiamo anzitutto di presentare un percorso storico mirato. Per mirato intendiamo un percorso che ci permetta di introdurre le idee fondamentali che hanno reso necessaria la costruzione di una nuova teoria diversa dalla teoria classica. Inoltre tale percorso deve mettere in evidenza come i concetti che costituiscono la MQ siano strani per il semplice motivo che non ci possono apparire normali, in quanto noi percepiamo la fisica classica e non la quantistica. In secondo luogo il percorso storico deve comunque mettere in evidenza come certe idee formulate nel corso dello sviluppo della MQ abbiano ricevuto una interpretazione corretta solo alla luce di certe particolari idee. Pensiamo per esempio al concetto della dualità onda-corpuscolo che i programmi tanto evidenziano. Questo concetto deve essere ben interpretato, in quanto sostenere che queste entità quantistiche si comportano a volte come onde altre volte come particelle non trova una sua coerenza all'interno della teoria. Quindi l'introduzione storica dovrà essere molto attenta al fine di non scendere nell'uso di concetti più adatti alla divulgazione che alla didattica e dovrà inoltre cercare di non soffermarsi su tutte le innumerevoli strade che sono state intraprese nello sviluppo della MQ.

Nello sviluppo dell'introduzione storica si farà uso di alcune *applet* di MQ che abbiamo indicato nel capitolo precedente, al fine di fornire una visualizzazione del processo considerato e di preparare gli studenti a comprendere e risolvere problemi inerenti l'argomento trattato.

Da un certo punto di vista il percorso storico deve quindi essere snellito, al fine di non condurre gli studenti fuori strada in quanto ci si è soffermati troppo su certi dettagli. Contemporaneamente sarà anche arricchito con una semplice presentazione di alcuni risultati sperimentali, che pur non essendo inseribili in termini di cronologia, lo sono intermini di percorso da seguire per l'estrazione dei concetti fondamentali.

Dopo l'introduzione storica proponiamo la costruzione dei principi di base della meccanica quantistica, da svolgere in completa collaborazione con gli studenti e con l'ausilio del laboratorio. A tale proposito faremo riferimento ad esperimenti di polarizzazione della luce, i quali sono facilmente realizzabili in laboratorio e forniscono risultati utili a costruire le basi della MQ. Trattazioni simili sull'utilizzo della polarizzazione della luce per introdurre la MQ si possono trovare nel testo di Dirac [3], nell'unità di ricerca in didattica della fisica proposta all'Università di Udine [20] e dall'esperimento presentato da un liceo [21].

**Parte II**

**Intervento didattico**



## Capitolo 4

# Premesse per l'intervento didattico

In questo capitolo presentiamo le premesse per l'intervento didattico sulla MQ proposto in questa dissertazione. A tal fine forniamo le indicazioni riguardo i destinatari, gli obiettivi che vogliamo raggiungere, i prerequisiti richiesti, una sintesi dei contenuti che presentiamo e una stima dei tempi dell'intervento didattico.

### 4.1 Destinatari

Dall'analisi dei programmi ministeriali presentata nel Cap.1 possiamo scegliere di svolgere il percorso didattico qui presentato in una classe quinta di un liceo scientifico PNI. In questo abito scolastico è possibile applicare le variazioni previste da questo percorso didattico scegliendo quindi di snellire la parte introduttiva storica per concentrarsi di più nell'introduzione pratica della MQ. Se si volesse svolgere questo percorso in un liceo con sperimentazione Brocca si dovrebbero affrontare certi approfondimenti piuttosto che altri al fine di tenere conto dei possibili argomenti che possono comparire all'esame di stato. Per quanto riguarda le sperimentazioni Brocca dobbiamo notare che per alcuni indirizzi sono previsti specifici approfondimenti della MQ in ambito tecnologico. Per questi corsi il percorso qui proposto deve quindi essere modificato e riadattato ai singoli indirizzi tenendo maggiormente conto dei programmi ministeriali e dell'esame di stato. Il percorso base qui proposto, a seconda delle necessità, può essere arricchito con approfondimenti di vario carattere, per esempio approfondimenti storici, filosofici, oppure approfondimenti di alcuni argomenti particolari.

### 4.2 Prerequisiti

Per come è stato strutturato questo percorso di MQ, riteniamo che gli studenti debbano avere i seguenti prerequisiti:

1. Fisica

- (a) proprietà elementari di elettroni e atomi (elettromagnetismo e chimica);

- (b) basi di ottica geometrica;
- (c) fenomeni di interferenza e diffrazione della luce;
- (d) luce come onda elettromagnetica e spettro elettromagnetico;
- (e) polarizzazione della luce;
- (f) comportamento di cariche elettriche in campi elettrici;
- (g) basi di probabilità e statistica;
- (h) cenni di cinematica relativistica.

## 2. Matematica

- (a) Piano cartesiano;
- (b) vettori nel piano, vettori di base nel piano e loro combinazioni lineari;
- (c) vettori ortogonali e prodotto scalare nel piano;
- (d) vettori linearmente indipendenti e dipendenti nel piano;
- (e) circonferenza goniometrica e funzioni goniometriche.

Non è necessario richiedere che gli studenti abbiano una profonda conoscenza degli argomenti di fisica, in quanto ciò che serve per il nostro scopo è che abbiano in mente i concetti fondamentali che caratterizzano i prerequisiti esposti.

Per quanto riguarda i prerequisiti di matematica è invece necessario che gli studenti abbiano una buona familiarità, in particolare per affrontare la seconda parte del percorso didattico proposto.

L'accertamento dei prerequisiti sarà in parte valutato dagli esiti delle precedenti verifiche e in parte verrà valutato in via informale, nel senso non di verifica o interrogazione ufficiale, ma colloquiando e riepilogando con gli studenti gli argomenti contenuti nei prerequisiti ogni volta che sarà necessario farne uso. Si cercherà in particolare di richiamare e sottolineare quelli che sono gli aspetti necessari per affrontare il nuovo argomento in questione.

## 4.3 Obiettivi dell'intervento didattico

Esponiamo in sintesi quelli che sono gli obiettivi che ci prefiggiamo di raggiungere con lo sviluppo del percorso didattico sulla MQ, suddividendoli in obiettivi generali, trasversali e specifici.

### 1. Obiettivi generali

- (a) Acquisire gli obiettivi specifici previsti per questo percorso didattico;
- (b) comprendere l'utilità della fisica nelle diverse discipline, scientifiche e non;
- (c) comprendere l'utilità di possedere una conoscenza elastica dei fenomeni fisici al fine di comprendere e saper spiegare i fenomeni che si incontrano tutti i giorni;

- (d) riconoscere i fenomeni fisici negli ambiti di tutti i giorni al fine di non pensare la fisica come un groviglio di leggi scritte solo sui libri;

#### 2. Obiettivi trasversali

- (a) Sviluppare l'attitudine alla comunicazione e alla cooperazione con gli altri studenti e con il docente;
- (b) aumentare le proprie conoscenze e la propria preparazione nell'ambito della fisica;
- (c) abituare e approfondire all'osservazione e all'uso dell'intuito e del ragionamento per la schematizzazione;
- (d) sviluppare e ampliare la capacità di riconoscere relazioni logiche e nessi causali;

#### 3. Obiettivi specifici

##### (a) Conoscenze

- i. sviluppo storico, non approfondito, della nascita della meccanica quantistica;
- ii. applicazioni nella vita quotidiana della meccanica quantistica;
- iii. i concetti fondamentali sui quali si costruisce l'argomento e loro formulazione;

##### (b) Competenze

- i. essere in grado di interpretare un fenomeno quantistico con i concetti fondamentali della meccanica quantistica;
- ii. essere in grado di vedere come certe situazioni in meccanica quantistica non possono trovare analogie classiche;

##### (c) Capacità

- i. essere in grado di comprendere e risolvere semplici esercizi di meccanica quantistica con le regole delle probabilità;
- ii. essere in grado di comprendere i problemi e le loro soluzioni in meccanica quantistica.

## 4.4 Scelta dei Contenuti

Il percorso didattico sviluppato nei Cap.5 e Cap.6 è strutturato in due parti.

Nella prima parte, Cap.5, proponiamo un percorso storico mirato ad evidenziare le tappe e i concetti fondamentali che hanno contribuito allo sviluppo della MQ. Questo percorso sarà inoltre corredato da alcuni brevi approfondimenti di certi esperimenti e processi di MQ, i quali non rientrano cronologicamente nel percorso storico, ma che servono per rendere più chiare certe situazioni. Più in dettaglio questa parte inizia con una semplice trattazione dell'atomo di Rutherford, dalla quale risulta evidente l'insorgere delle ipotesi non classiche sulle quali si costruisce il

modello semiclassico dell'atomo di Bohr. Segue quindi la presentazione della nascita delle idee e delle evidenze riguardo gli scambi quantizzati di energia fra luce e materia con la trattazione della spettroscopia atomica e dell'effetto fotoelettrico. In seguito si presenta l'evoluzione verso lo studio del comportamento corpuscolare della luce trattando esperimenti con singoli fotoni e approfondimenti suggeriti. Si procede quindi affrontando i fenomeni ondulatori della materia con riferimento a diffrazione e interferenza di elettroni ed esperimenti con singoli elettroni. Si generalizza quindi la dualità onda-corpuscolo con esercitazioni proposte al fine di confrontare i fenomeni macroscopici con quelli microscopici. Si propongono alcuni cenni storici riguardo l'interpretazione di Schrödinger e di Copenaghen. Si conclude questa prima parte con l'approfondimento sulla dualità onda-corpuscolo e si propongono altri approfondimenti e curiosità riguardo le stranezze della MQ.

Nella seconda parte invece ci proponiamo di costruire insieme agli studenti le basi della MQ, quindi il principio di sovrapposizione, il processo di misura in MQ e il principio di indeterminazione, dai risultati di esperimenti effettuati con la polarizzazione della luce. Tali esperimenti possono essere presentati in modo pensato, oppure se il tempo lo permette, possono anche essere direttamente effettuati in laboratorio, in quanto non richiedono particolare attrezzatura costosa. Al fine di costruire le basi della MQ si propone prima un'interpretazione intuitivo-classica degli esperimenti, la quale rivelandosi poi in contraddizione con i risultati rende necessaria l'introduzione dei concetti quantomeccanici.

#### **4.4.1 Tempi dell'intervento didattico**

Riportiamo nella Tab.4.1 uno schema delle ore impiegate per lo sviluppo di ognuno degli argomenti che compongono questo percorso. I tempi previsti per questo intervento ricoprono un totale di 5-6 settimane se pensiamo ad un liceo con 3 ore settimanali. Il tempo previsto non è poco, ma teniamo in considerazione che stiamo proponendo nella seconda parte un approfondimento che potrebbe essere ridimensionato eliminando il laboratorio.

Attività	Lezione (Ore)	Laboratorio (Ore)	Totale (Ore)
Introduzione storica mirata			
-L'atomo di Rutherford			
-Quantizzazione dell'energia	2	1	3
-Comportamento corpuscolare della luce			
-Comportamento ondulatorio della materia	2	0	2
-Dualità onda-corpuscolo	1	0	1
-La meccanica ondulatoria			
-La contraddizione del dualismo onda-corpuscolo			
-La MQ in tasca: l'effetto tunnel	1	0	1
Costruzione delle basi della MQ			
-Esperimenti sulla polarizzazione e loro interpretazione			
-Il principio di sovrapposizione			
-Il processo di misura in MQ			
-Il principio di indeterminazione	3	2	5
Approfondimenti vari	2	0	2
Verifica sommativa	2	0	2
<b>Totale</b>	<b>13</b>	<b>3</b>	<b>16</b>

Tabella 4.1: Tempi previsti per lo svolgimento del percorso didattico.



## Capitolo 5

# Introduzione storica mirata

In questa introduzione storica mirata cerchiamo di seguire in parte un percorso storico al fine di far condividere agli studenti le stesse perplessità che hanno provato i fisici protagonisti della MQ. In questa introduzione vogliamo concentrarci su quelli che riteniamo essere i fenomeni e le situazioni che poi hanno permesso di introdurre i concetti fondamentali della MQ e di percorrere la giusta strada per la costruzione della MQ moderna. Presentiamo infatti alcuni esperimenti che permettono in modo inequivocabile di trarre importanti conclusioni specialmente in merito alla natura degli oggetti quantistici. Ci riferiamo agli esperimenti con singole particelle, i quali non si collocano cronologicamente nel percorso storico tradizionale, ma sono un'ottima fonte di comprensione. Durante il percorso suggeriamo alcuni approfondimenti svolti nelle appendici, altri approfondimenti suggeriti, alcuni dei quali possono essere oggetto di corsi di eccellenza o approfondimenti extra.

In questo capitolo proponiamo anzitutto l'atomo di Rutherford, quindi seguono i primi fenomeni che hanno reso necessario dover introdurre una discretizzazione (quantizzazione) dell'energia. In questo ambito trattiamo l'atomo di Bohr come esempio importante di introduzione di ipotesi non classiche. Segue poi la trattazione di quei fenomeni che mostrano un comportamento corpuscolare della luce, comportamento che è bene evidenziare diverso dall'idea corpuscolare della luce che aveva Newton, infatti se ne possono verificare risultati piuttosto bizzarri se pensati in termini di fisica classica. Il percorso procede con la presentazione e l'interpretazione di quei fenomeni che invece mostrano un comportamento ondulatorio della materia. Mettendo quindi insieme il comportamento come onda e/o corpuscolo di luce e materia si può trattare la dualità onda-corpuscolo, per la quale riteniamo opportuno sottolineare l'incoerenza nell'uso di una interpretazione a volte ondulatoria, altre volte corpuscolare. Si vuole infatti mostrare come la MQ diventa coerente nel momento in cui si interpreta l'onda come una funzione che esprime la probabilità di un oggetto microscopico di trovarsi in un certo stato.

## 5.1 L'atomo di Rutherford

Uno dei primi segnali dell'inadeguatezza della fisica classica nel descrivere i fenomeni microscopici si incontra nel modello atomico secondo Rutherford. Tra il 1908 e il 1911 Rutherford interpreta i risultati sperimentali ottenuti da urti fra particelle  $\alpha$  e atomi con un modello atomico, il quale rappresenta l'atomo come costituito da un nucleo carico positivamente, nel quale è concentrata quasi tutta la massa dell'atomo, circondato da elettroni che gli orbitano attorno in analogia al sistema solare, come rappresentato in Fig.5.1.

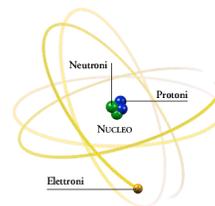


Figura 5.1: Modello atomico di Rutherford.

Ci si rende facilmente conto che un sistema così pensato, in termini di elettromagnetismo classico, non ha ragione di esistere in quanto l'elettrone orbitante è costantemente sottoposto ad una accelerazione centripeta, ma una carica sottoposta ad accelerazione emette luce, il che ci porta a concludere che l'elettrone precipiterebbe in pochissimo tempo verso il nucleo. Con la fisica classica non possiamo quindi spiegare né la stabilità dell'atomo né le sue righe spettrali, come vedremo nel prossimo paragrafo.

Basandosi su questo modello, Bohr propone un modello atomico per il quale propone delle assunzioni non classiche per tenere conto della stabilità e delle righe spettrali, come vedremo nel prossimo paragrafo.

## 5.2 Quantizzazione dell'energia

In questa sezione esponiamo i fatti che hanno evidenziato la discretizzazione degli scambi di energia fra luce e materia e l'inadeguatezza della fisica classica nel spiegare questi fenomeni.

### 5.2.1 Quantizzazione dell'atomo: l'atomo di Bohr

Esperimenti sull'assorbimento ed emissione di luce da parte di atomi mostrano un comportamento discreto. Per essere più precisi si vede che gli atomi possono assorbire o emettere solo luce di ben determinate lunghezze d'onda. Nello spettro di assorbimento mostrato in Fig.5.2(b) compaiono delle righe nere le quali corrispondono alle lunghezze d'onda della luce assorbita. Le aree colorate si riferiscono alla luce che non è stata assorbita dagli atomi. Analogamente, osservando invece lo spettro di emissione di Fig.5.2(a), possiamo vedere che compaiono solo certe righe di un determinato colore, mentre fra queste non compare nulla. Questo fenomeno evidenzia come gli atomi emettano luce solo di ben determinate lunghezze d'onda. Notiamo inoltre che le righe nere dello spettro di assorbimento sono in corrispondenza con le righe di emissione.

Queste osservazioni fanno pensare che gli atomi si possono presentare in stati energetici ben precisi e i salti di energia fra i diversi stati producono assorbimento o emissione di luce di una precisa lunghezza d'onda, corrispondente alla differenza di energia fra gli stati. Le righe spettrali nel visibile dell'atomo di idrogeno trovano una regolarità nella seguente formula empirica

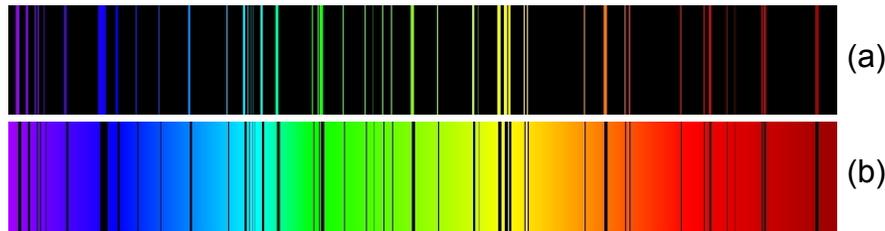


Figura 5.2: (a) Spettro di emissione del Hg, (b) spettro di assorbimento [14].

proposta da Balmer nel 1885<sup>1</sup>:

$$\nu \propto \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (5.1)$$

dove  $R$  é la cosiddetta costante di Rydberg e  $m$  é un numero intero, maggiore di 2, in corrispondenza del quale si determina la frequenza di una riga spettrale.

Ci si rende facilmente conto che il modello atomico di Rutherford, oltre a non tenere conto della stabilit  degli atomi, non pu  nemmeno essere usato per tenere conto delle righe spettrali.

Un modello atomico pensato per descriverne il comportamento discreto é quello ideato da Bohr nel 1913, nel quale si ipotizza l'esistenza di orbite privilegiate, sulle quali l'elettrone non irraggia. Ogni orbita privilegiata é circolare e caratterizzata da un momento angolare dell'elettrone rispetto al nucleo proporzionale ad un numero intero  $n$ :

$$l_n = mv_n r_n \propto n$$

Da questa relazione si evince che sia la velocit  dell'elettrone, sia il raggio dell'orbita, sono funzioni del numero intero  $n$ . Considerando il sistema nucleo-elettrone interagenti secondo la forza di Coulomb si pu  determinare l'energia posseduta dall'elettrone su una data orbita in funzione del numero intero  $n$ , la quale risulta:

$$E_n \propto -\frac{1}{n^2}$$

Ogni numero intero  $n$  identifica quindi un livello energetico dell'atomo di idrogeno. L'energia della riga spettrale emessa a seguito di una transizione da un livello energetico ad un altro risulta essere della forma:

$$\Delta E_{nm} \propto \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \quad (5.2)$$

Si pu  notare facilmente come questa relazione sia del tutto analoga alla relazione proposta da Balmer, se ammettiamo che la frequenza della luce emessa sia proporzionale all'energia corrispondente. Questa assunzione sar  approfondita nel prossimo paragrafo. Con le opportune costanti di proporzionalit  si verifica l'uguaglianza fra la serie di Balmer 5.1 e la serie 5.2 determinata con il modello atomico di Bohr, quindi con questo modello si spiegano le righe spettrali e la stabilit 

<sup>1</sup>Le relazioni di quantizzazione che presentiamo in questo paragrafo sono riportate solo sottoforma di andamenti, in quanto in questo modo riteniamo di alleggerire la trattazione dell'argomento.

degli atomi.

Il concetto fondamentale che caratterizza il modello atomico di Bohr é l'introduzione delle orbite privilegiate, le quali non trovano nessun sostegno nella fisica classica. Questo é un chiaro esempio di un modello che rappresenta un sistema microscopico e che deve quindi poggiare su ipotesi che non hanno nessuna spiegazione classica.

**Approfondimento.** Un approfondimento da proporre agli studenti potrebbe essere quello di studiare l'esperimento di Frank-Hertz con l'uso delle *applet* che abbiamo indicato nel Cap.2 dalla fonte [13].

### 5.2.2 Effetto fotoelettrico e quanti di luce

Una ulteriore ipotesi di discretizzazione dell'energia la troviamo nei lavori di Einstein del 1905 per la costruzione della teoria che descrive l'effetto fotoelettrico. Per effetto fotoelettrico si intende l'emissione di elettroni da un materiale a seguito dell'incidenza di luce. Sperimentalmente si verifica che l'energia cinetica degli elettroni emessi non dipende assolutamente dall'intensità della luce incidente, e questo in termini classici é un fatto insolito in quanto noi sappiamo benissimo che se ci illuminiamo una mano con una luce piú intensa proviamo una sensazione di maggior calore, quindi maggiore energia. Allora come si spiega il fatto che aumentando l'intensità di luce incidente, quindi aumentando l'energia fornita, non aumenti anche l'energia cinetica degli elettroni emessi? All'aumentare dell'intensità di luce si nota solo un aumento del numero di elettroni emessi, ma non un aumento della loro energia cinetica.

Un aumento dell'energia cinetica degli elettroni emessi si verifica solo a seguito di un aumento della frequenza della luce incidente. Inoltre si verifica che un aumento della frequenza non corrisponde ad un aumento del numero di elettroni.

Per spiegare questo fenomeno Einstein ipotizza che la luce sia composta da pacchetti (quanti) di energia dipendenti dalla frequenza della luce secondo la legge

$$E = h\nu$$

dove  $\nu$  é la frequenza e  $h$  é la costante di Planck <sup>2</sup>.

In questa visione ogni pacchetto di energia va ad incidere su un solo elettrone e maggiore é l'energia del pacchetto, quindi la frequenza della luce, maggiore sará l'energia cinetica dell'elettrone. A questo punto un aumento di intensità significa un aumento del numero di pacchetti di energia, quindi un aumento del numero di elettroni estratti.

Per frequenze al di sotto di un certo valore non si verifica l'effetto fotoelettrico, questo si spiega con il fatto che l'elettrone é legato al materiale, quindi per renderlo libero il pacchetto

---

<sup>2</sup> $h = 6.6260693 \times 10^{-34}$  Js.

di luce deve avere una energia tale da vincere questo legame. In questi termini l'energia contenuta nel quanto di luce in parte serve per vincere l'energia di legame dell'elettrone, mentre il resto va in energia cinetica. Questo si riassume nella seguente espressione per l'energia cinetica dell'elettrone:

$$E = h\nu - W$$

dove  $W$  é l'energia di estrazione dell'elettrone che dipende dal materiale usato. La presenza del potenziale di estrazione é evidenziata dal fatto che l'emissione di elettroni si verifica solo al di sopra di una certa frequenza di soglia  $\nu > W/h$ .

**Approfondimento svolto.** Come approfondimento per lo studio dell'effetto fotoelettrico proponiamo in App.B la descrizione dell'apparato sperimentale e delle misure che si possono effettuare, facendo anche uso di un'applet per la simulazione dell'esperimento.

### 5.2.3 Osservazioni sulla quantizzazione dell'energia

Gli argomenti trattati nei precedenti paragrafi mostrano fenomeni che per essere spiegati devono adottare l'ipotesi di energia discreta, o meglio quantizzata. In particolare dai precedenti fenomeni si evince che gli scambi di energia tra luce e materia avvengono per quantità discrete, mentre nei fenomeni macroscopici siamo abituati a trattare con scambi di energia, e in generale con variabili fisiche, che possono variare con continuità. Da qui nasce il problema di formalizzare una teoria in grado di descrivere variabili fisiche quantizzate, cosa che la fisica classica o l'elettromagnetismo non sono in grado di fare. Gli elementi che abbiamo finora analizzato non sono però ancora sufficienti per una comprensione del mondo microscopico.

## 5.3 Comportamento corpuscolare della luce

Già ponendo l'attenzione sui fenomeni di scambio di energia fra luce e materia si é manifestato un comportamento della luce che non può essere spiegato con la teoria ondulatoria dell'elettromagnetismo. Infatti immaginare un'onda elettromagnetica in un qualche modo discreta ci risulta un po' difficile.

Tipicamente nella trattazione della natura corpuscolare della luce si é soliti presentare anche l'effetto Compton. Dato che questo fenomeno é stato un'ulteriore conferma della natura corpuscolare della luce, collocato cronologicamente circa 18 anni dopo l'ipotesi di Einstein sull'effetto fotoelettrico, lo proponiamo come approfondimento svolto in App.C.

In questo paragrafo studiamo come i tipici esperimenti di interferenza e diffrazione della luce mostrino in realtà una natura corpuscolare della luce. Noteremo però che questa natura corpuscolare della luce é ben diversa dall'idea corpuscolare di Newton.

### 5.3.1 Esperimenti con singoli fotoni

Consideriamo tipici esperimenti di interferenza e diffrazione della luce che dovrebbero essere familiari agli studenti. Senza entrare nei dettagli ricordiamo che negli esperimenti con le due fenditure o con un'unica fenditura di dimensione confrontabile con la lunghezza d'onda della luce si formano sullo schermo le figure di interferenza o diffrazione. Queste figure possono essere predette e calcolate tenendo conto dell'interferenza fra i singoli punti sulle fenditure considerati come sorgenti puntiformi (onde elementari di Huygens) di onde luminose.

Dalle precedenti considerazioni abbiamo visto che possiamo considerare la luce, anziché come un'onda, come una sorta di grandinata di fotoni. Immaginiamo ora di poter eseguire uno di questi esperimenti utilizzando però fotoni singoli, i quali uno alla volta incontrano l'ostacolo (una o più fenditure) e vanno ad impressionare uno schermo simile ad una pellicola fotografica. L'esperimento consiste quindi nell'inviare singolarmente tanti fotoni ed analizzare le figure che si formano sullo schermo. Sappiamo che se avessimo a che fare con luce monocromatica normale dovremmo visualizzare le figure di interferenza tipiche di questi esperimenti.

Prima di analizzare i risultati sperimentali ci chiediamo cosa ci aspettiamo di vedere da un simile esperimento eseguito con singoli fotoni. Se i fotoni fossero corpuscoli classici, come i corpuscoli che intendeva Newton, allora sullo schermo all'inizio avremmo solo alcuni punti, poi avremmo delle zone di luce e di ombra come ci aspettiamo dall'ottica geometrica. I risultati sperimentali, di non facile reperibilità [18][19], dimostrano che i fotoni non sono corpuscoli che si comportano classicamente, infatti all'inizio vediamo sí solo alcuni punti, e questi suggeriscono una natura corpuscolare della luce, mentre in seguito vedremo un maggiore addensamento di punti in quelle zone in cui compaiono proprio le zone luminose della figura di interferenza. Dopo molto tempo, ossia dopo che tanti fotoni hanno colpito lo schermo, quello che si ottiene é proprio la tipica figura di interferenza. Riportiamo in Fig.5.3 le immagini ottenute da uno degli esperimenti con singoli fotoni trattati in [19], dalle quali possiamo notare il formarsi delle figure di interferenza e l'aspetto corpuscolare dell'impatto di fotoni.

Il fatto che i singoli fotoni si vadano a depositare sullo schermo secondo la figura di diffrazione, farebbe pensare a fotoni che interferiscono fra di loro come le onde corrispondenti, però questi fotoni sono inviati singolarmente, quindi sono indipendenti gli uni dagli altri. Come si spiega allora che i fotoni attraversano le fenditure come se sapessero come si sono depositati sullo schermo quelli già passati e quelli che ancora devono passare? Inoltre un singolo fotone non crea nessuna figura di diffrazione, ma solo un punto sullo schermo<sup>3</sup>. Risulta chiaro a questo punto che i fotoni sono sí qualche sorta di corpuscolo, ma assolutamente non si comportano secondo le leggi classiche. Il loro comportamento non si può descrivere in modo logico con le leggi della fisica classica.

---

<sup>3</sup>É importante sottolineare che la dimensione del punto sullo schermo non é la dimensione del fotone, in quanto lo schermo può avere una sua granularità.

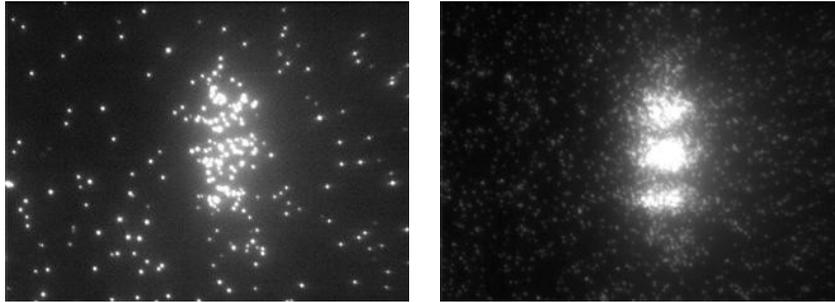


Figura 5.3: Immagini ottenute da un esperimento di interferenza con fotoni singoli [19]. Le due immagini sono ottenute con tempi di esposizione diversi.

Notiamo però uno stretto legame fra la descrizione ondulatoria e la natura corpuscolare della luce, infatti i corpuscoli evidenziano un comportamento in accordo con la figura di diffrazione ottenuta in termini di interferenza delle onde della descrizione ondulatoria. Detto in altri termini i fotoni si vanno a disporre secondo la figura di diffrazione che è calcolata considerando la luce come un'onda elettromagnetica.

### 5.3.2 Osservazioni sulla natura della luce

Dalle precedenti considerazioni abbiamo visto come la luce sembri comportarsi in alcuni casi come un'onda e in altri casi come un corpuscolo. Abbiamo però evidenziato con l'esperimento della doppia fenditura che c'è una connessione fra il comportamento corpuscolare e ondulatorio, ecco quindi che non è corretto dire che la luce si possa comportare come un'onda oppure come un corpuscolo a seconda dei casi. A questo punto possiamo piuttosto dire che possiamo studiare il comportamento della luce in termini ondulatori, oppure in termini di corpuscoli non classici.

La meccanica quantistica ci illuminerà riguardo questa corrispondenza onda-corpuscolo, possiamo però già fare alcune osservazioni preliminari. La figura di diffrazione ci dá informazioni riguardo le zone in cui incide più o meno luce. Interpretando questa visione in termini di fotoni possiamo dire che la figura di diffrazione contiene le informazioni riguardo a dove è più o meno probabile che si verifichi l'impatto dei fotoni sulla lastra. La funzione matematica che descrive la figura di diffrazione può quindi essere interpretata come una funzione di probabilità di impatto dei fotoni. Vista in questi termini, la figura di diffrazione ottenuta dall'interferenza delle onde fornisce la probabilità di trovare in una certa zona sullo schermo il fotone incidente. Trattando quindi con un singolo fotone possiamo solo dire con quale probabilità questo inciderà in un punto piuttosto che in un altro. L'utilizzo di tanti fotoni rende significativamente statistico l'esperimento e si ottiene una distribuzione di punti di impatto che corrispondono proprio alla figura di diffrazione. Vogliamo quindi evidenziare tre importanti fatti, i quali ci saranno utili anche nel seguito:

1. la natura ondulatoria e corpuscolare della luce è riconducibile ad un'unica interpretazione;

2. i corpuscoli che compongono la luce non seguono le leggi della fisica classica, ma devono essere trattati con una descrizione ondulatoria;
3. la descrizione ondulatoria deve essere vista come una descrizione in cui l'onda non è altro che una funzione che esprime una certa probabilità di trovare il corpuscolo con certi valori di variabili fisiche, quali per esempio posizione ed impulso.

Da questo schema diciamo quindi che la luce è composta di una qualche sorta di ente fisico che associamo a un corpuscolo, che chiamiamo fotone. Nel quadro che qui abbiamo costruito non ci è consentito sapere che cosa effettivamente sono questi oggetti, né possiamo sapere cosa effettivamente avviene quando questi per esempio attraversano una doppia fenditura etc etc. In termini di probabilità però possiamo prevederne i risultati con molta precisione.

## 5.4 Comportamento ondulatorio della materia

Affrontiamo ora un altro bizzarro comportamento del mondo microscopico. Con le argomentazioni che seguono vedremo come anche le particelle possono essere interpretate in termini di onde. Fu de Broglie che per primo nel 1924, analogamente alla dualità onda-corpuscolo della luce avanzò l'ipotesi che potesse esistere la stessa dualità anche per le particelle materiali, come gli elettroni per esempio. Vediamo quindi quali furono in seguito le evidenze sperimentali di tale ipotesi.

### 5.4.1 Diffrazione e interferenza di elettroni

I primi esperimenti che permisero di evidenziare un comportamento ondulatorio degli elettroni furono compiuti da Davisson e Germer, negli anni attorno al 1927, con la riflessione degli elettroni da parte di metalli. Dall'analisi degli angoli di riflessione degli elettroni ci si rese conto che il comportamento trovato non poteva essere spiegato in termini di leggi classiche. La riflessione sembrava preferire certi angoli ad altri, in pratica era una riflessione selettiva. La distribuzione degli angoli poteva però essere interpretata in termini di interferenza di qualche tipo di onde, in maniera del tutto analoga con la luce.

Successivi esperimenti in cui fasci di elettroni venivano inviati contro sottili fogli metallici e analizzati oltre questi, compiuti da G. P. Thomson, Rupp e altri, mostrarono fenomeni di diffrazione del tutto analoghi ai fenomeni di diffrazione che si ottengono con la luce.

Tali risultati sperimentali sembrano confermare la dualità onda-corpuscolo per le particelle materiali ipotizzata da de Broglie.

### 5.4.2 Esperimenti con singoli elettroni

Sappiamo che gli elettroni sono particelle, però abbiamo visto dagli esperimenti di interferenza e diffrazione che in queste condizioni sembrano comportarsi come onde. Mostriamo ora i risultati dell'interferenza di singoli elettroni nell'interazione con una doppia fenditura, in stretta analogia con quanto visto per la luce. Supponiamo quindi di inviare verso una doppia fenditura degli elettroni singolarmente e analizziamo quello che visualizziamo sullo schermo in tempi diversi, come mostrato in Fig.5.4. Notiamo che nelle prime immagini, nelle quali pochi elettroni sono stati inviati, possiamo distinguere abbastanza bene i punti di impatto dei singoli elettroni. Nelle ultime immagini invece continuiamo a vedere i punti dovuti all'impatto, ma siamo inoltre in grado di distinguere una figura di interferenza in cui alcune zone sono più popolate da impatti, mentre altre zone sono molto meno interessate.

Come visto per gli esperimenti con singoli fotoni, possiamo concludere da questi risultati che anche gli elettroni sono corpuscoli che si comportano secondo leggi che non sono quelle classiche, ma piuttosto dobbiamo utilizzare una descrizione ondulatoria, che anche in questo caso è in stretta relazione con la probabilità di trovare un elettrone intorno ad una certa posizione e con un certo impulso.

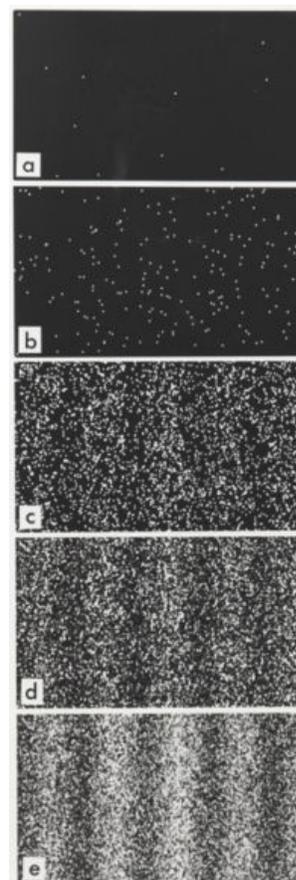


Figura 5.4: Esperimento della doppia fenditura con elettroni singoli. In sequenza temporale la formazione della figura di interferenza.

## 5.5 Dualità onda-corpuscolo

Seguendo le idee maturate dall'analisi dei precedenti comportamenti di luce e particelle materiali possiamo formalizzare la corrispondenza onda-corpuscolo in termini di grandezze cinematiche. L'idea fondamentale di questa corrispondenza è che ad ogni onda di lunghezza d'onda  $\lambda$  possiamo far corrispondere una particella di impulso  $p = h/\lambda$  e, dualmente, ad ogni particella con un certo impulso possiamo associare un'onda con una ben determinata lunghezza d'onda. Per comprendere meglio lo sviluppo di questa idea ripercorriamo brevemente e fissiamo le idee su quanto visto in precedenza.

### 5.5.1 Onde elettromagnetiche e fotoni

Per quanto riguarda il comportamento corpuscolare della luce possiamo associare ad un'onda elettromagnetica della forma  $E(x, t) = E \sin((2\pi/\lambda)(ct - x))$  un fotone che si muove nella direzione di propagazione dell'onda con velocità pari a  $c$  e con energia  $E = h\nu$ , dove  $\nu = c/\lambda$ . L'espressione dell'impulso del fotone non può essere determinata dalla relazione  $p = \sqrt{2mE}$ , in quanto avendo a che fare con fotoni che si muovono alla velocità della luce si devono utilizzare le leggi della relatività ristretta, quindi per il fotone possiamo determinare l'impulso con la relazione<sup>4</sup>  $p = E/c = h/\lambda$ .

La corrispondenza duale consiste nell'associare ad un fotone di impulso  $p$  un'onda elettromagnetica con lunghezza d'onda  $\lambda = h/p$ .

Possiamo quindi riepilogare la dualità onda elettromagnetica-fotone con le seguenti corrispondenze:

$$\begin{aligned} \text{Onda em con } \lambda &\longmapsto \text{Fotone con } p = \frac{h}{\lambda} \\ \text{Fotone con } p &\longmapsto \text{Onda em con } \lambda = \frac{h}{p} \end{aligned}$$

### 5.5.2 Particelle e onde di materia

Analogamente a quanto visto per i fotoni si può pensare per le particelle materiali, come per esempio elettroni, protoni, neutroni etc etc. Quindi ad una particella con impulso dato  $p$  possiamo associare un'onda di materia, secondo la teoria delle onde materiali di de Broglie (1924), di lunghezza d'onda  $\lambda = h/p$ . Conoscendo la massa della particella in considerazione possiamo scrivere, in approssimazione classica per basse velocità, quindi senza considerare il caso relativistico,  $p = mv$ , quindi la lunghezza d'onda sarà  $\lambda = h/(mv)$ . In modo duale ad un'onda di materia con lunghezza d'onda  $\lambda$  possiamo associare una particella di impulso  $p = h/\lambda$ .

Riepiloghiamo quindi la dualità particella-onda di materia con le seguenti corrispondenze:

$$\begin{aligned} \text{Onda di materia con } \lambda &\longmapsto \text{Particella con } p = \frac{h}{\lambda} \\ \text{Particella con } p &\longmapsto \text{Onda di materia con } \lambda = \frac{h}{p} \end{aligned}$$

### 5.5.3 Microscopico e macroscopico: effetti ondulatori a confronto

Come esercizio da svolgere insieme agli studenti può essere interessante confrontare gli effetti ondulatori fra sistemi microscopici e macroscopici. Quello che si vuole mettere in evidenza con l'approfondimento descritto in App.D è il fatto che con sistemi macroscopici non possiamo renderci conto degli effetti ondulatori, come invece si verificano del mondo microscopico.

<sup>4</sup>Intuitivamente possiamo comprendere questa espressione notando che abbiamo diviso un'energia (la quale contiene una velocità al quadrato) per una velocità, quindi dimensionalmente torna con l'espressione di un impulso.

Nell'approfondimento mettiamo infatti in evidenza come la lunghezza d'onda dell'onda associata ad un tipico sistema microscopico, un elettrone accelerato, sia circa 13-14 ordini di grandezza piú piccola della lunghezza d'onda dell'onda associata ad un sistema macroscopico, come può essere un proiettile. Nel primo sistema infatti calcoliamo  $\lambda \approx 10^{-10} - 10^{-11} m$ , mentre nel secondo otteniamo  $\lambda \approx 10^{-34} m$ .

## 5.6 La meccanica ondulatoria e l'interpretazione di Copenaghen

A seguito delle idee che vogliono associare ad ogni particella un'onda, Schrödinger (1925) fornisce una trattazione matematica impeccabile dei fenomeni microscopici in termini ondulatori, da cui il nome meccanica ondulatoria, la quale permette la descrizione di tutti questi fenomeni in termini di onde. Le onde con cui abbiamo a che fare sono le soluzioni dell'equazione di Schrödinger.

Tutti i fisici convinti della natura ondulatoria della materia vedono nella funzione d'onda proprio l'onda di materia. Questa interpretazione non è propriamente coerente, in quanto si incontrano alcune difficoltà nell'accettare valide certe particolari soluzioni dell'equazione di Schrödinger<sup>5</sup>; inoltre rimane ancora insoluta la questione di come conciliare le evidenze corpuscolari con la trattazione ondulatoria.

Nello stesso periodo, attorno al 1925-1927, Heisenberg e Bohr formulano una teoria della MQ basata sull'interpretazione probabilistica, la quale prende anche il nome di interpretazione di Copenaghen. Fra l'interpretazione di Copenaghen e quella ondulatoria nasce una disputa su quale sia la giusta interpretazione alla luce del fatto che le due formulazioni risultano equivalenti. Analizziamo nel seguito questa questione.

## 5.7 La contraddizione del dualismo onda-corpuscolo

In questo ambito usiamo i termini particelle e corpuscoli, i quali sono presi in prestito dal mondo macroscopico, infatti quando ci riferiamo a sistemi microscopici in termini di corpuscoli intendiamo che questi oggetti hanno nella loro natura qualcosa che si assomiglia al corpuscolo macroscopico. Abbiamo avuto modo di vedere questa natura negli esperimenti con singole particelle, anche se i singoli punti visti sullo schermo non rappresentano le dimensioni dei corpuscoli in esame. Il fatto di parlare di particelle o corpuscoli non deve quindi farci pensare alle particelle come a delle palline materiali nel senso classico. Le particelle sono infatti una qualche sorta di ente fisico che non obbedisce alle leggi classiche.

Dai precedenti argomenti trattati emerge come la luce e piú in generale anche le particelle come elettroni sembrano mostrare a volte comportamenti corpuscolari, altre volte comportamenti

<sup>5</sup>Si pensi per esempio all'interpretazione dell'urto fra due elettroni come un urto fra due pacchetti d'onda.

ondulatori. Ci rendiamo conto che questa doppia natura del mondo microscopico non trova nè una spiegazione logica, nè un quadro teorico coerente per poter trattare tali fenomeni.

Risulta infatti inconcepibile capire come possano un fotone o un elettrone a volte comportarsi come un'onda, altre volte comportarsi come un corpuscolo. Inoltre nel momento in cui si studia un fenomeno microscopico, come possiamo scegliere se trattarlo come un fenomeno ondulatorio o particellare a priori senza prima aver visto i risultati?

Anche conciliare l'idea che ad ogni corpuscolo possiamo associare un'onda risulta difficile, in quanto, per esempio, un'onda è un'ente con una estensione spaziale infinita, mentre un corpuscolo dal punto di vista classico è un ente ben definito.

A conciliare la natura corpuscolare e il comportamento ondulatorio furono le idee di Born, il quale fornì un'interpretazione coerente, oggi generalmente accettata, che ora noi cerchiamo di costruire basandoci sugli aspetti importanti che sono stati trattati nei paragrafi precedenti.

Anzitutto notiamo che in tutti i fenomeni che abbiamo visto descritti in termini ondulatori, se analizzati approfonditamente, appare sempre una sorta di carattere corpuscolare degli oggetti con cui abbiamo a che fare. Si ricordi per esempio gli esperimenti con i singoli fotoni e con i singoli elettroni. Ciò che emerge da queste esperienze è che nel momento in cui abbiamo a che fare con una singola particella che interagisce con qualcosa non possiamo determinare nessun legame con quella che potrebbe essere l'onda associata a tale particella. Infatti un elettrone che attraversa una fenditura lascerà sullo schermo un punto, ma non produrrà da solo nessuna figura di diffrazione. La figura di diffrazione abbiamo visto che inizia a formarsi solo quando sullo schermo si ha un grande numero di elettroni incidenti. Ecco quindi che il carattere ondulatorio inizia ad evidenziarsi solo quando stiamo trattando con esperimenti in cui vi sono un gran numero di particelle interagenti.

Il collegamento fra la particella e l'onda associata sta nel fatto di considerare questa onda come una pura funzione matematica che esprime la probabilità che la particella in esame si comporti in un certo modo. Vediamo infatti che l'intensità della figura di diffrazione o interferenza è direttamente collegata al numero di particelle che hanno colpito quelle ben determinate zone. Ecco quindi che considerando il processo collettivo con tante particelle siamo in grado di determinare le probabilità che queste incidano in una zona piuttosto che in un'altra, semplicemente guardando al numero di particelle nelle zone interessate.

La visione moderna della meccanica quantistica è quindi quella di avere a che fare con qualche sorta di corpuscolo, chiamate particelle, il cui comportamento può essere predetto dalle leggi della meccanica quantistica in termini probabilistici. In altre parole le leggi della MQ forniscono la probabilità che una particella ha di trovarsi in un certo stato a seguito di una certa interazione

con altri oggetti. Che cosa effettivamente avvenga durante l'interazione nella MQ, né altre teorie riescono a spiegarlo.

La meccanica quantistica fornisce quindi delle previsioni e dei risultati in termini di probabilità che sono in perfetto accordo con i risultati sperimentali. Risulta chiaro che se si considera un esperimento con una singola particella si potrà verificare poco delle previsioni della meccanica quantistica, in quanto l'esperimento deve essere statisticamente significativo.

**Approfondimento svolto.** Come approfondimento da svolgere con gli studenti in merito all'interpretazione probabilistica della MQ presentiamo in App. E cosa sono gli orbitali dell'atomo di idrogeno, come devono essere interpretati e li confrontiamo con la definizione che spesso viene usata in corsi base di chimica.

## 5.8 La MQ in tasca: l'effetto tunnel

Come approfondimenti per concludere questa introduzione della MQ si possono proporre agli studenti le varie applicazioni della MQ nelle tecnologie di uso quotidiano e non. A questo proposito menzioniamo qui solo l'effetto tunnel, in quanto lo riteniamo un altro fenomeno bizzarro della MQ, che però si trova in dispositivi elettronici molto comuni.

Immaginiamo la situazione classica di un corpo che si muove di moto rettilineo uniforme e deve superare un dislivello di una certa altezza nel campo gravitazionale. Sappiamo con certezza che se l'energia cinetica posseduta dal corpo è maggiore della differenza di energia potenziale fra i due livelli determinati dal dislivello, allora il corpo supererà questo. Differentemente se l'energia cinetica è minore allora il corpo non sarà in grado di superare il dislivello, quindi invertirà il moto e tornerà indietro.

Una situazione analoga in MQ in cui una particella incontra una barriera di potenziale non mostra il comportamento classico visto sopra. Vi sono due aspetti alquanto bizzarri.

Il primo si verifica quando l'energia cinetica della particella è inferiore all'energia della barriera di potenziale. In questa situazione può verificarsi con una certa probabilità che la particella sia in grado di superare la barriera di potenziale. Questo fenomeno viene comunemente chiamato effetto tunnel, in quanto si visualizza questo comportamento come un varco che si crea e lascia passare la particella. Questa è solo una rappresentazione, in quanto nessuno sa cosa realmente accade quando si verifica questo.

Il secondo fenomeno si verifica quando l'energia cinetica è superiore all'energia della barriera di potenziale. In questo caso c'è una certa probabilità che la particella non superi la barriera di

potenziale e ritorni indietro invertendo il moto.

Anche questo fenomeno è alquanto bizzarro, eppure l'effetto tunnel è, per esempio, sfruttato nei MOSFET, dispositivi elettronici largamente usati nelle EEPROM che si possono trovare in vari sistemi elettronici come i ricevitori telepass e altri ancora.

## **5.9 Conclusioni parte introduttiva**

Con questa parte introduttiva dovremmo aver dato modo agli studenti di prendere familiarità con le stranezze della MQ e di approcciarsi a questa senza avere la pretesa di spiegare in modo intuitivo-classico i fenomeni coinvolti.

## Capitolo 6

# Costruzione delle basi della MQ

Dopo aver affrontato il precedente percorso che ci ha introdotto alla meccanica quantistica, dovremmo aver preso un minimo di familiarità con le stranezze, dal punto di vista classico, del mondo microscopico. Possiamo quindi affrontare quelli che sono i concetti fondamentali della meccanica quantistica, concetti che sono ovviamente non riconducibili a situazioni classiche. Vogliamo quindi qui introdurre il principio di sovrapposizione degli stati, il principio di indeterminazione di Heisenberg e il processo di misura nella meccanica quantistica.

Senza voler usare un formalismo matematico che potrebbe complicare la comprensione dei concetti, possiamo tentare di introdurre questi argomenti analizzando un esempio in particolare e cercare poi di generalizzare quanto si evince. Gli esempi che più si addicono a questa introduzione possono essere o gli esperimenti di Stern-Gerlach oppure gli esperimenti sulla polarizzazione della luce. Diciamo che esperimenti sulla polarizzazione della luce potrebbero essere più familiari agli studenti e potrebbero anche essere riprodotti in laboratorio senza necessità di strumenti particolarmente complessi e costosi, si veda per esempio [21]. L'esperimento di Stern-Gerlach porta gli studenti completamente in un mondo quantomeccanico, difficilmente è realizzabile in laboratorio, anche se si può far uso delle diverse e interessanti *applet* interattive che si trovano su internet, come per esempio [15]. L'esperimento di Stern-Gerlach potrebbe essere argomento di un corso di eccellenza o di un approfondimento specifico.

In analogia con l'introduzione del testo di Sakurai [2] e con il Cap.1 Par.2 del testo di Dirac [3], ci proponiamo di introdurre la meccanica quantistica con gli esperimenti di polarizzazione della luce, anziché utilizzare gli esperimenti di Stern-Gerlach.

### 6.1 Misura di polarizzazione dei fotoni

Inviando un fascio di luce non polarizzata di intensità  $I$  su un filtro polaroid, come in Fig.6.1, notiamo che in uscita da questo si ha un fascio di luce polarizzata secondo la direzione del filtro e di

intensità pari a  $I/2$ <sup>1</sup>, cioè alla metà del fascio incidente. La situazione si ripropone identicamente qualunque sia l'orientazione del filtro, purché la luce incidente non sia polarizzata.

Visto che in uscita dal filtro l'intensità di luce risulta inferiore a quella incidente, significa che il filtro esegue una sorta di operazione di selezione della polarizzazione della luce incidente. Dobbiamo precisare che questo risultato non significa che metà della luce incidente ha polarizzazione per esempio lungo  $x$ , in quanto se ripetiamo l'esperimento secondo altre due orientazioni diverse, per esempio  $x'$  e  $x''$ , notiamo sempre che l'intensità in uscita è  $I/2$ . Quindi se questa fosse una misura della quantità di luce incidente polarizzata in quella specifica direzione ci ritroveremo una intensità incidente totale pari a  $3/2I$ , risultato che è in contraddizione con l'ipotesi iniziale.



Figura 6.1: Polarizzazione di un fascio di luce.

Per poter chiarire meglio la situazione riprendiamo le idee corpuscolari della luce viste nel capitolo precedente. Seguendo queste idee d'ora in poi considereremo i fasci di luce con cui abbiamo a che fare come fasci di fotoni. Per tenere conto della polarizzazione della luce assumiamo che ciascun fotone si possa presentare in un certo stato di polarizzazione. Quindi un fascio di luce polarizzata in una direzione sarà costituito solo da fotoni polarizzati in quella certa direzione. Un fascio di luce non polarizzato sarà in un qualche modo costituito da fotoni che hanno diverse polarizzazioni. L'intensità del fascio di luce sarà proporzionale al numero di fotoni che incidono per unità di tempo.

Per rappresentare lo stato di polarizzazione del fotone usiamo la notazione dei ket, i quali sono *contenitori* di informazioni sullo stato del sistema fisico trattato. Per esempio un fotone con polarizzazione lungo  $x$  sarà rappresentato dal ket:

$$|P_x\rangle$$

Vogliamo far notare che all'interno delle parentesi del ket possiamo inserire anche altre informazioni, se per esempio sappiamo che questo fotone ha impulso  $p$  possiamo rappresentare lo stato del fotone con il ket

$$|P_x, p\rangle$$

Per i nostri scopi indicheremo solo gli stati di polarizzazione.

Riprendiamo ora la questione dell'azione del filtro polaroid ragionando in termini di fotoni. Una prima ipotesi potrebbe essere quella di vedere l'azione del filtro, che chiamiamo  $F_x$  se in direzione  $x$ , come una selezione dei soli fotoni con polarizzazione  $|P_x\rangle$ . Questa ipotesi indica che

<sup>1</sup>Nell'ipotesi ideale in cui l'efficienza del filtro polaroid sia del 100%.

il fascio incidente è composto per metà da fotoni nello stato  $|P_x\rangle$ , il che può non sembrare strano. Intuiamo che questa interpretazione non è corretta nel momento in cui ripetiamo l'esperimento orientando diversamente il filtro. Per schematizzare la situazione immaginiamo di inviare per ogni esperimento 100 fotoni che fanno riferimento al fascio di luce non polarizzato e che quindi indichiamo essere nello stato generico  $|P_?\rangle$ , quindi eseguiamo gli esperimenti qui illustrati:

$$100 \text{ fotoni } |P_?\rangle \rightarrow \boxed{F_x} \rightarrow 50 \text{ fotoni } |P_x\rangle \quad (6.1)$$

$$100 \text{ fotoni } |P_?\rangle \rightarrow \boxed{F_{x'}} \rightarrow 50 \text{ fotoni } |P_{x'}\rangle \quad (6.2)$$

$$100 \text{ fotoni } |P_?\rangle \rightarrow \boxed{F_{x''}} \rightarrow 50 \text{ fotoni } |P_{x''}\rangle \quad (6.3)$$

$$(6.4)$$

Ogni esperimento è caratterizzato da 100 fotoni iniziali per i quali non conosciamo la polarizzazione e sono chiaramente diversi da esperimento a esperimento. Vogliamo notare inoltre che i fotoni iniziali sono prodotti tutti nello stesso modo indipendentemente dall'esperimento, quindi in fase di produzione di fotoni non se ne può decidere la polarizzazione.

**Qualcosa di strano.** Che i fotoni iniziali siano diversi da esperimento a esperimento non vi è dubbio, risulta però molto strano capire come in ciascun esperimento proprio la metà dei fotoni inviati abbia la stessa polarizzazione selezionata dal filtro. Ciò che riportiamo non è un caso singolo, ma si ottiene ogni volta che si ripetono gli esperimenti con una qualsiasi direzione di polarizzazione.

**Ipotesi iniziale sbagliata.** Il ragionamento intuitivo<sup>2</sup> qui presentato non ci permette di interpretare in modo sensato gli esperimenti in quanto l'ipotesi iniziale è sbagliata. È cioè sbagliato pensare che il fascio iniziale sia composto per metà da fotoni polarizzati in una certa direzione, infatti abbiamo visto che cambiando arbitrariamente direzione il risultato non cambia e la sorgente di fotoni non può di certo adattarsi all'orientazione del filtro con il quale non ha nulla a che fare.

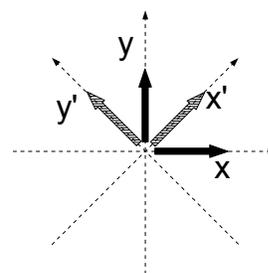


Figura 6.2: Direzione di polarizzazione dei fotoni. La direzione di propagazione dei fotoni è ortogonale al piano  $xy$ . Gli assi  $x$  e  $y$  sono ortogonali come lo sono  $x'$  e  $y'$ .  $x'$  ha la stessa direzione della bisettrice del primo quadrante.

Per poter formalizzare una costruzione coerente con i risultati qui esposti dobbiamo analizzare altri esperimenti che mostriamo nella prossima sezione.

<sup>2</sup>Sottolineiamo il fatto che il ragionamento qui presentato ha seguito una linea logica come siamo abituati nella fisica classica. Da qui un primo segno che l'intuizione classica non è adeguata per spiegare meccanica quantistica.

## 6.2 Esperimenti sequenziali di polarizzazione della luce

Immaginiamo di preparare esperimenti con filtri Polaroid sequenziali. Usiamo a questo scopo i filtri  $F_x$ ,  $F_y$  e  $F_{x'}$ , i quali selezionano lo stato di polarizzazione lungo l'asse  $x$ ,  $y$  e  $x'$  come rappresentato in Fig.6.2.

Eseguiamo ora due esperimenti con filtri sequenziali che per comodità chiamiamo E-x-y e E-x-x'-y.

**E-x-y.** Nel primo esperimento usiamo due filtri disposti come in Fig.6.3(a). Filtriamo inizialmente il fascio di luce non polarizzato con un  $F_x$ , successivamente il fascio in uscita da  $F_x$  viene filtrato con un  $F_y$ .

**E-x-x'-y.** Nel secondo esperimento usiamo tre filtri disposti come in Fig.6.3(b). Il fascio non polarizzato viene filtrato con un  $F_x$ , quindi in uscita da questo filtriemo con un  $F_{x'}$  e infine filtriemo con un  $F_y$ .

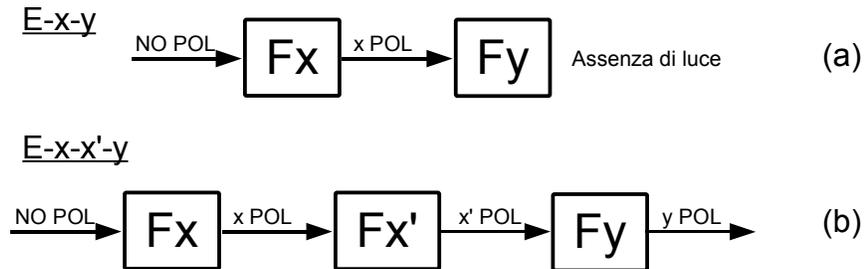


Figura 6.3: Esperimenti sequenziali di polarizzazione della luce. (a) Esperimento sequenziale E-x-y in cui in sequenza si applica un filtro  $F_x$  seguito da un filtro  $F_y$ . (b) Esperimento sequenziale E-x-x'-y in cui si susseguono i filtri  $F_x$ ,  $F_{x'}$  e  $F_y$ .

### 6.2.1 Stati ortogonali

Dall'esperimento E-x-y possiamo concludere che se un fotone è nello stato  $|P_x\rangle$  (uscite da  $F_x$ ) allora non può essere nello stato  $|P_y\rangle$ , in quanto in uscita dal secondo filtro non c'è luce. È vero anche il viceversa e lo si può verificare con un esperimento E-y-x. Allora i due stati  $|P_x\rangle$  e  $|P_y\rangle$  si escludono a vicenda, possiamo quindi dire che questi due stati sono ortogonali come lo sono i vettori lungo  $x$  e lungo  $y$ <sup>3</sup>. Nella rappresentazione dei ket, due stati si dicono ortogonali quando

<sup>3</sup>In questo caso si può richiamare in parallelo l'ortogonalità di due vettori nel piano. Due vettori sono ortogonali se il loro prodotto scalare è nullo, cioè  $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$ .

il prodotto fra il bra <sup>4</sup> di uno e il ket dell'altro è nullo <sup>5</sup>:

$$\langle P_x | P_y \rangle = 0$$

Ammettendo di poter esprimere un fotone in uno stato con più polarizzazioni come per esempio  $|P_x, P_{x'}\rangle$ , vista l'ortogonalità precedente possiamo affermare con certezza che lo stato  $|P_x, P_y\rangle$  non esiste in quanto  $|P_x\rangle$  e  $|P_y\rangle$  sono ortogonali.

Vogliamo far notare inoltre che  $|P_x\rangle$  è ortogonale solo a  $|P_y\rangle$ , infatti ripetendo l'esperimento con un secondo filtro diverso da  $F_y$  avremmo sempre dei fotoni in uscita, quindi i due stati  $|P_x\rangle$  e  $|P_{x'}\rangle$  non si escludono a vicenda e si dicono non ortogonali.

### 6.2.2 Un ragionamento non corretto

Analizzando il secondo esperimento E-x-x'-y scopriamo altri bizzarri comportamenti. Anzitutto vediamo che in uscita del terzo filtro abbiamo fotoni, nonostante questo selezionati uno stato ortogonale a quello dei fotoni in uscita del primo filtro. Questa volta però c'è un elemento in più fra i due filtri. Ammettiamo, come fatto sopra che il fotone in uscita dal secondo filtro sia nello stato  $|P_x, P_{x'}\rangle$ , in quanto questo fotone è stato selezionato sia da  $F_x$  che da  $F_{x'}$ . Ma allora, procedendo con questo ragionamento, possiamo dire che il fotone in uscita dal terzo filtro sarà nello stato  $|P_x, P_{x'}, P_y\rangle$ . Questo non è possibile in quanto un fotone non può trovarsi contemporaneamente nei due stati ortogonali  $|P_x\rangle$  e  $|P_y\rangle$ , quindi la rappresentazione  $|P_x, P_{x'}, P_y\rangle$  non è corretta. Risulta non essere corretta nemmeno la rappresentazione  $|P_x, P_{x'}\rangle$ , in quanto se lo fosse non dovremmo vedere nessun fotone in uscita dal terzo filtro essendo quelli in entrata nella polarizzazione ortogonale a quella selezionata.

Il ragionamento qui esposto ci porta a concludere che gli stati di polarizzazione  $|P_x, P_{x'}\rangle$  e  $|P_x, P_{x'}, P_y\rangle$  non possono esistere. Lo stesso si conclude considerando anche qualsiasi altra combinazione dei filtri.

### 6.2.3 Osservazioni su E-x-y e E-x-x'-y

Un prima osservazione sull'esperimento E-x-x'-y mette in evidenza che all'uscita di ciascun filtro l'intensità di luce (quindi il numero di fotoni) è sempre la metà di quella in entrata al medesimo filtro. Sembra quindi che in corrispondenza di ogni filtro si verifichi proprio quello che si verifica con un singolo filtro. Nella configurazione di questo esperimento sembra quindi che in corrispondenza di ciascun filtro non vi sia nessuna influenza dai filtri precedenti in termini di frazione di fotoni selezionati, nel senso che quelli che escono sono sempre la metà di quelli che entrano.

<sup>4</sup>Il bra non è altro che il ket 'rovesciato'.  $\langle P_x |$  è il bra corrispondente al ket  $|P_x\rangle$

<sup>5</sup>Il prodotto fra due stati  $|\alpha\rangle$  e  $|\beta\rangle$  si rappresenta con  $\langle\alpha|\beta\rangle$ . È da questa rappresentazione fra parentesi, bracket in inglese, da cui derivano i nomi bra-ket.

Una seconda osservazione, che nasce dal confronto fra i due esperimenti E-x-y e E-x-x'-y, è che la presenza del filtro  $F_{x'}$  nel secondo sembra modificare lo stato  $|P_x\rangle$  dei fotoni entranti, in quanto in uscita da questo ricompaiono fotoni nello stato  $|P_y\rangle$ , il quale era stato escluso dal primo filtro. L'azione del filtro  $F_{x'}$  è quindi quella di disturbare i fotoni facendo loro variare lo stato di polarizzazione  $|P_x\rangle$ .

Queste osservazioni ci saranno utili nel seguito per costruire la teoria che ci permette di interpretare correttamente i risultati ottenuti da questi esperimenti.

### 6.3 Il principio di sovrapposizione degli stati

I risultati ottenuti dai precedenti esperimenti trovano un'interpretazione corretta e coerente se consideriamo gli stati ortogonali  $|P_x\rangle$  e  $|P_y\rangle$  come stati di base con cui poter rappresentare per mezzo di una loro combinazione un qualsiasi altro stato di polarizzazione. Lo stesso discorso vale se consideriamo la coppia  $|P_{x'}\rangle$  e  $|P_{y'}\rangle$  e in generale qualsiasi altra coppia di stati ortogonali.

Seguendo questa idea lo stato  $|P_{x'}\rangle$  può essere visto come una sovrapposizione degli stati  $|P_x\rangle$  e  $|P_y\rangle$ , in quanto abbiamo visto dall'esperimento E-x-x'-y che lo stato  $|P_{x'}\rangle$  ha una componente con polarizzazione  $|P_y\rangle$ . Se avessimo ripetuto un esperimento analogo E-x-x'-x avremmo trovato che  $|P_{x'}\rangle$  ha anche una componente con polarizzazione  $|P_x\rangle$ . Analogamente il ragionamento funziona se usiamo come base i ket  $|P_{x'}\rangle$  e  $|P_{y'}\rangle$  per rappresentare  $|P_x\rangle$  e  $|P_y\rangle$ .

Matematicamente possiamo rappresentare questa sovrapposizione con la seguente notazione <sup>6</sup> :

$$|P_{x'}\rangle = c_x |P_x\rangle + c_y |P_y\rangle$$

$$|P_x\rangle = c_{x'} |P_{x'}\rangle + c_{y'} |P_{y'}\rangle$$

dove i  $c$  sono coefficienti che indicano come si sovrappongono i due stati ortogonali. Più precisamente il loro quadrato indica la probabilità di ottenere lo stato di base nel momento in cui si esegue la misura di quella polarizzazione. Per esempio misurando la polarizzazione  $P_x(P_y)$  di un fotone nello stato  $|P_{x'}\rangle$  si avrà una probabilità pari a  $c_x^2(c_y^2)$  di ottenere proprio  $P_x(P_y)$ . Chiaramente la misura di polarizzazione assume significato statistico quanto si ripete su un grande numero di fotoni, come è stato fatto negli esperimenti precedenti. Da esperimenti simili possiamo determinare i coefficienti, infatti considerando un fascio di fotoni nello stato  $|P_{x'}\rangle$  incidenti su un filtro  $F_x$  ne vediamo uscire solo 1/2 di quelli entranti, quindi  $c_x = 1/\sqrt{2}$ . Siccome quando misuriamo  $|P_x\rangle$  o otteniamo proprio questo o non otteniamo nulla perché il fotone è nello stato ortogonale  $|P_y\rangle$ , la somma delle due probabilità deve essere 1, cioè:

$$c_x^2 + c_y^2 = 1$$

<sup>6</sup>Per maggiore chiarezza si può fare un richiamo alla composizione dei vettori nel piano:  $\vec{V} = V_x\vec{x} + V_y\vec{y}$ , con  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$  vettori di base.

Con questa formulazione siamo in grado di rappresentare un qualsiasi stato di polarizzazione come una sovrapposizione di due stati di polarizzazione di base, i quali sono sempre ortogonali. Questo concetto prende il nome di principio di sovrapposizione e viene applicato in tutta la meccanica quantistica per tutte le variabili che caratterizzano uno stato di un sistema, normalmente chiamate osservabili.

Bisogna precisare che un qualsiasi stato, sovrapposizione di stati di base, è sempre riferito ad un singolo fotone. Quindi è assolutamente sbagliato interpretare la sovrapposizione come una composizione mista del fascio di fotoni considerato, anche alla luce delle contraddizioni che abbiamo incontrato prima nell'ipotizzare questa situazione. Sbagliato è anche cercare di interpretare la sovrapposizione con l'idea che il fotone sia in uno stato intermedio fra i due, in quanto quando si esegue la misura si ottiene o l'uno o l'altro ma mai un valore intermedio.

Si deve inoltre precisare che il concetto di sovrapposizione degli stati della MQ non ha nessuna analogia nella fisica classica. Abbiamo infatti visto che non è stato possibile determinare questo concetto con ragionamenti intuitivi basati sulla fisica classica. Non è possibile fornire una interpretazione intuitiva del concetto di sovrapposizione basato sulle idee classiche e deve essere accettato alla luce del fatto che è l'unica interpretazione coerente per spiegare i risultati sperimentali.

## 6.4 Il processo di misura in MQ

Approfondiamo il concetto di sovrapposizione degli stati considerando i processi di misura in MQ. A tale proposito introduciamo una variante ai filtri visti finora. Visto che  $|P_x\rangle$  e  $|P_y\rangle$  sono due stati ortogonali possiamo pensare di costruire un dispositivo <sup>7</sup> che esegua una misura di polarizzazione che chiamiamo  $P_{xy}$ , ossia tale dispositivo fornirà come risultato della misura di polarizzazione o lo stato  $|P_x\rangle$  oppure lo stato  $|P_y\rangle$  <sup>8</sup>. I due stati ortogonali, che formano una base e che sono i possibili risultati della misura  $P_{xy}$  sono detti autostati dell'osservabile  $P_{xy}$ .

Da quanto visto nei precedenti esperimenti eseguendo la misura  $P_{xy}$  su un fotone nello stato  $|P_{x'}\rangle$  avremo il 50% di probabilità di trovare l'autostato  $|P_x\rangle$  e il 50% di probabilità di trovare l'autostato  $|P_y\rangle$ , in virtù della sovrapposizione degli stati. La misura fornirà quindi uno dei due autostati e il fotone dopo la misura sarà nello stato che ne è risultato.

Riepilogando, prima della misura il fotone è nello stato  $|P_{x'}\rangle = 1/\sqrt{2}|P_x\rangle + 1/\sqrt{2}|P_y\rangle$ , mentre dopo la misura sarà in uno dei due autostati dell'osservabile  $P_{xy}$ . Quindi il processo di misura ha

<sup>7</sup>Un dispositivo di questo tipo si potrebbe realizzare con la calcite, la quale divide un fascio di luce non polarizzato secondo due polarizzazioni ortogonali.

<sup>8</sup>Possiamo vedere tale ampliamento come una aggiunta alla misura  $F_x$  eseguita con filtro  $F_x$ , infatti in questa misura il fotone usciva solo nello stato  $|P_x\rangle$ , mentre lo stato  $|P_y\rangle$  veniva eliminato. Con la misura  $P_{xy}$  non lo eliminiamo ma semplicemente lo distinguiamo.

modificato lo stato iniziale  $|P_{x'}\rangle$  in un autostato di  $P_{xy}$ .

Un processo di misura in meccanica quantistica fornisce sempre come risultato uno degli autostati dell'osservabile che si misura. Il fatto bizzarro da un punto di vista classico è che è il processo di misura stesso a modificare lo stato del sistema in uno degli autostati. Il processo di misura in MQ implica un'interazione fra l'apparato di misura e il sistema che si sta osservando. Questo risulta chiaro dall'esempio qui considerato.

La MQ non spiega <sup>9</sup> quale sia il meccanismo per cui l'atto della misura fa saltare il sistema in un autostato della osservabile che si sta misurando, è però in grado di fornire la probabilità che dalla misura risulti un certo autostato.

Vogliamo inoltre evidenziare il fatto che la misura  $P_{xy}$ , per quanto visto dagli esperimenti precedenti, fa perdere qualsiasi informazione riguardo al risultato della precedente misura di polarizzazione  $|P_{x'}\rangle$ , infatti lo stesso risultato si avrebbe se la polarizzazione iniziale fosse  $|P_{y'}\rangle$ . Quindi la misura  $P_{xy}$  fa perdere le informazioni di una precedente misura  $P_{x'y'}$  e questo fatto sarà approfondito nella prossima sezione.

## 6.5 Il principio di indeterminazione di Heisenberg

Dall'evidente esempio dell'esperimento E-x-x'-y e con l'ampliamento introdotto nel precedente paragrafo, risulta chiaro che non possiamo conoscere simultaneamente i risultati delle misure di  $P_{xy}$  e  $P_{x'y'}$ . Infatti se misuriamo  $P_{xy}$  di un fotone che sia in un autostato di  $P_{x'y'}$  (per esempio  $|P_{x'}\rangle$ ), dopo la misura questo sarà in un autostato di  $P_{xy}$  (per esempio  $|P_x\rangle$ ), il quale altro non è che una sovrapposizione degli autostati di  $P_{x'y'}$  (seguendo l'esempio  $|P_x\rangle = 1/\sqrt{2}|P_{x'}\rangle + 1/\sqrt{2}|P_{y'}\rangle$ ), che è uno stato necessariamente diverso da quello iniziale.

Questa indeterminazione a seguito di una misura si verifica ogni volta che consideriamo quelle osservabili che in MQ sono dette incompatibili e si chiama principio di indeterminazione di Heisenberg. In meccanica quantistica due, o più, osservabili incompatibili non possono essere misurate contemporaneamente, quindi non si possono conoscere contemporaneamente. L'atto di misura di una osservabile modifica lo stato del sistema con conseguente perdita della conoscenza dello stato in termini di ogni altra osservabile incompatibile.

Nel caso dei fotoni considerati come esempio le osservabili  $P_{xy}$  e  $P_{x'y'}$  sono incompatibili, quindi non sarà mai possibile determinare fotoni in ipotetici stati  $|P_x, P_{x'}\rangle$ ,  $|P_x, P_{y'}\rangle$ ,  $|P_y, P_{x'}\rangle$  e  $|P_y, P_{y'}\rangle$ . Questi ipotetici stati stanno a significare che il fotone dovrebbe essere contemporanea-

<sup>9</sup>Questo è un interrogativo al quale non si ha nessuna risposta certa. Ci sono alcune teorie che cercano di spiegare questo meccanismo in termini di molti universi, ma qui andiamo ben oltre l'obiettivo di questo percorso.

mente in due stati di polarizzazione diversi, per esempio lo stato  $|P_x, P_{x'}\rangle$  significa che il fotone è polarizzato sia lungo  $x$  sia lungo  $x'$ . In quest'ottica si comprende meglio l'errore del ragionamento proposto nella sezione 6.2.2.

A titolo informativo riportiamo l'espressione più famosa del principio di indeterminazione Heisenberg ottenuto da estensioni del principio di indeterminazione applicato in MQ a osservabili continue. Ampliando la trattazione della MQ alle osservabili continue posizione ( $x$ ) e impulso ( $p$ ) si scopre che queste sono osservabili incompatibili, quindi anche per loro vale il principio di indeterminazione di Heisenberg che esplicitiamo nel seguito.

**Indeterminazione posizione-impulso.** Il principio di indeterminazione di Heisenberg applicato alla posizione e all'impulso di una particella quantistica è formulato come segue:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \quad (6.5)$$

dove  $\Delta x$  e  $\Delta p_x$  sono rispettivamente l'incertezza sulla misura della posizione  $x$  e l'incertezza sulla misura della componente dell'impulso  $p_x$ . Risulta chiaro che se conosciamo con estrema precisione  $x$ , quindi  $\Delta x \approx 0$ , allora avremo una completa indeterminazione della componente dell'impulso  $p_x$ , cioè  $\Delta p_x \rightarrow \infty$ , e viceversa. Negli esperimenti reali si conoscono con le corrispondenti incertezze, che soddisfano alla 6.5, sia l'impulso che la posizione.

**Indeterminazione energia-tempo.** Nella letteratura compare spesso anche il principio di indeterminazione energia-tempo, il quale è però di natura diversa dal principio qui esposto, in quanto il tempo in MQ è un parametro e non una osservabile, quindi non è di fatto il principio di indeterminazione riferito alle osservabili incompatibili. Riportiamo comunque per completezza tale principio:

$$\Delta E \Delta t \cong \hbar \quad (6.6)$$

Questa relazione è responsabile dell'effetto tunnel visto nel Par.5.8

## 6.6 Approfondimenti sul formalismo

Al fine di acquisire un po' di dimestichezza e per maggiori chiarimenti del formalismo qui sviluppato, si possono proporre agli studenti altre esperienze di laboratorio sulla polarizzazione della luce. Per esempio si potrebbero affrontare esperimenti con filtri sequenziali ad inclinazioni variabili e non solo con variazioni di  $45^\circ$  come finora abbiamo visto. Se il tempo non dovesse permettere ulteriori esperimenti si possono sempre idealizzare questi e trasformarli in esercitazioni da svolgere con gli studenti. Possiamo quindi proporre esercizi con stati del fotone sovrapposizione arbitraria di autostati e dai coefficienti determinare le relative probabilità.

In generale per prendere dimestichezza con problemi di polarizzazione dei fotoni non riteniamo sia necessario dover pressare con molti esercizi. Fissati i concetti gli esercizi dovrebbero essere affrontabili senza grosse difficoltà.

## **6.7 Conclusione della parte di costruzione della MQ**

Con la costruzione delle basi della MQ che abbiamo proposto in questo capitolo riteniamo di aver trasmesso agli studenti un esempio molto importante di come si costruiscono le fondamenta di una teoria o in generale le interpretazioni di certi fenomeni. In questo percorso gli studenti si sono dovuti confrontare con spiegazioni che sembravano intuitivamente corrette, ma che alla fine si sono rivelate false per l'interpretazione dei fenomeni visti.

Al fine di valutare la comprensione di questo percorso da parte degli studenti proponiamo la verifica sommativa riportata in App.A.

## **Parte III**

# **Conclusioni, appendici e bibliografia**



## Capitolo 7

# Conclusioni

Un percorso didattico dovrebbe concludersi con le osservazioni dell'esito del lavoro svolto in classe, quindi concludere questa dissertazione a priori senza una prova diretta non è certo facile.

Assecondare le indicazioni ministeriali e tentare nello stesso tempo di formulare un percorso piú moderno che guardi all'interno dei concetti e dei fenomeni fondamentali non è semplice, infatti abbiamo dovuto effettuare scelte ben precise. Le difficoltà nascono soprattutto nelle poche ore a disposizione e quindi nella inevitabile scelta degli argomenti da svolgere a scapito di altri che devono essere trascurati.

Riteniamo comunque che il percorso storico mirato qui proposto sia stato pensato soprattutto per focalizzare l'attenzione dei ragazzi su quelli che sono stati i mattoni fondamentali per lo sviluppo della meccanica quantistica. Con questo percorso si dovrebbe essere in grado di preparare, almeno un minimo, gli studenti ad un pensiero quantomeccanico. La seconda parte dell'intervento didattico fa forza proprio sullo scontro fra il ragionamento intuitivo-classico e quantomeccanico. Abbiamo infatti evidenziato e dimostrato ampiamente come i ragionamenti intuitivo-classici non siano in grado di interpretare i risultati che si ottengono da semplici esperimenti di polarizzazione della luce. Da qui abbiamo dimostrato la necessità di un nuovo modo di pensare e ragionare, fuori dagli schemi classici, ma che riesce ad interpretare i bizzarri comportamenti quantomeccanici. Il fatto piú interessante è che tutto questo può essere svolto insieme agli studenti guidandoli nel ragionamento.

Abbiamo voluto inoltre approfondire il concetto di dualità onda-corpuscolo, onde evitare che ci si fossilizzi su un concetto che è stato molto importante per lo sviluppo della MQ, ma che di per sé necessita di una interpretazione coerente come quella fornita dalla MQ moderna.

Questo percorso didattico vuole far scontrare gli studenti con i comportamenti quantomeccanici, ma allo stesso tempo li vuole rendere mentalmente elastici in modo da adattarsi al ragiona-

mento quantomeccanico.

Il lavoro qui presentato è sicuramente ambizioso, ma il percorso seguito è fluido, segue un filo logico basato su fatti evidenti e fortunatamente non è contorto come il vero percorso che hanno dovuto intraprendere i fisici e gli scienziati protagonisti della MQ. Per verificare l'esito di questo percorso è comunque necessaria un'azione diretta in classe.

# Appendice A

## Verifica sommativa

Anche la verifica sommativa non risulta di facile preparazione. Anzitutto si potrebbe pensare di consultare i problemi usciti negli esami di stato, quindi prendere spunto da questi per preparare gli studenti in questa direzione. Qui però ci proponiamo di formulare una verifica per constatare e valutare la comprensione degli argomenti. Sarà molto importante non cadere in incomprensioni come quelle del tipo: quale è la lunghezza d'onda dell'onda materiale associata ad una particella bla bla bla? Abbiamo studiato che l'onda in questione è una funzione matematica chiamata funzione d'onda, quindi bisognerà essere coerenti e non cadere in esercizi scorretti. Proponiamo quindi i seguenti quesiti.

### A.1 Testo della verifica

Quesito 1. (2 punti)

Si spieghi sinteticamente su quale ipotesi non classica si basa il modello atomico di Bohr.

Quesito 2. (5 punti)

Si consideri un fascio di particelle identiche di massa  $m = 10^{-8} \text{ g}$  che si muovono ad una velocità  $v = 10^5 \text{ m/s}$  verso una fenditura di larghezza  $d$ . Quanto deve essere l'ordine di grandezza della dimensione della fenditura affinché sullo schermo possano risultare evidenti effetti quantistici?

Quesito 3. (3 punti)

Si consideri l'apparato sperimentale per lo studio dell'effetto fotoelettrico. Ci si chiede quanti fotoni al secondo devono incidere sull'elettrodo affinché la corrente fra i due elettrodi dovuta agli elettroni sia  $I \approx 1 \text{ nA}$ . Si supponga di essere nelle condizioni in cui l'effetto fotoelettrico si verifica. Si consideri per semplicità la carica dell'elettrone  $e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ .

Quesito 4. (3 punti)

Si consideri l'effetto fotoelettrico sul sodio, il quale ha un potenziale di estrazione pari a  $W_{Na} = 4.17 \text{ J}$ . Si determini quale è il valore della lunghezza d'onda massima oltre la quale non si verifica

l'effetto fotoelettrico.

Quesito 5. (3 punti)

Per quale motivo un modello atomico in cui l'elettrone ruota attorno al protone non può esistere nella realtà classica? Rispondere sinteticamente in non più di cinque righe.

Quesito 6. (8 punti)

Si consideri un esperimento di polarizzazione sequenziale della luce composto da un primo filtro  $Fx$  e un secondo filtro  $Fx'$ . Supponiamo di avere un singolo fotone in uno stato

$$|\alpha\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |Px\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} |Py\rangle$$

che va ad incidere sul primo filtro. Si determinino le probabilità:

1.  $P_1$  che il fotone esca dal primo filtro; (3 punti)
2.  $P_2$  che il fotone esca dal secondo filtro; (5 punti)

## A.2 Griglia di valutazione

Riportiamo in Tab.A.1 I corrispondenti voti vengono distribuiti seguendo la griglia di corrispon-

Griglia punti		Griglia corrispondenza	
Quesito	Punti	Punti	Voto
Quesito 1	2	0-2	1-2
Quesito 2	5	3-5	3
Quesito 3	3	6-8	4
Quesito 4	3	9-11	5
Quesito 5	3	12-14	6
Quesito 6	(8)	15-17	7
-Domanda 1	3	18-20	8
-Domanda 2	5	21-22	9
<b>Totale punti</b>	<b>24</b>	<b>23-24</b>	<b>10</b>

Tabella A.1: Punteggio verifica sommativa.

denza in Tab.A.1. Per l'attribuzione dei voti consideriamo come intervallo da 3 a 10, per poter dare 10 si richiede l'eccellenza, quindi lasciamo un piccolo margine di un solo punto, cioè con 21 o 22 punti si raggiunge voto 10. Per tutti gli altri voti corrisponde un intervallo di 3 punti.

## Appendice B

# Effetto fotoelettrico

L'effetto fotoelettrico viene studiato con un apparato rappresentato schematicamente in Fig.B.1(a) composto da due elettrodi ai quali viene applicata una tensione positiva o negativa. Su uno dei due elettrodi viene fatta incidere la luce. Eseguendo la misura di corrente in funzione della tensione applicata agli elettrodi si vede dalla Fig.B.1(b) che per un certo valore negativo di tensione  $V_s$ , detto anche potenziale di arresto, la corrente si annulla; questo significa che il campo elettrico applicato frena completamente gli elettroni. La misura del potenziale di arresto per diverse frequenze della luce incidente, come riportato in Fig.B.1(c), indica che gli elettroni acquistano energie cinetiche differenti a seconda della frequenza. Potrebbe essere istruttivo presentare ai ra-

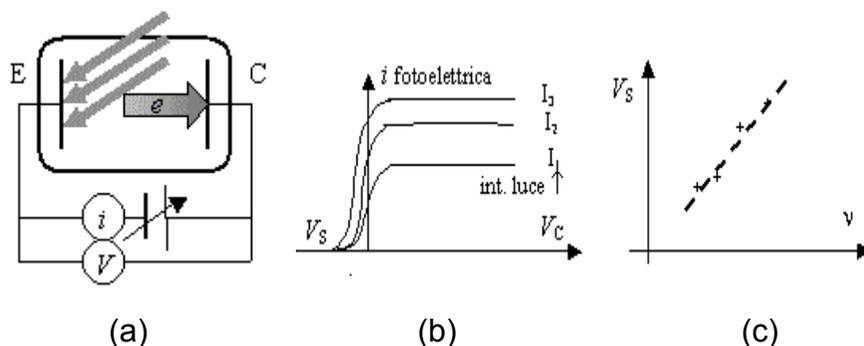


Figura B.1: (a) schematizzazione dell'apparato sperimentale per lo studio dell'effetto fotoelettrico; (b) Corrente in funzione della tensione applicata per diverse intensità di luce e indicazione del potenziale di arresto  $V_s$ ; (c) potenziale di arresto in funzione della frequenza della luce incidente

gazzi l'applet riportata in Fig.B.2, con la quale è possibile riprodurre l'esperimento fotoelettrico descritto sopra e in particolare si può capire il significato del potenziale di arresto, si possono tracciare grafici delle varie grandezze e si possono scegliere diversi tipi di materiale.

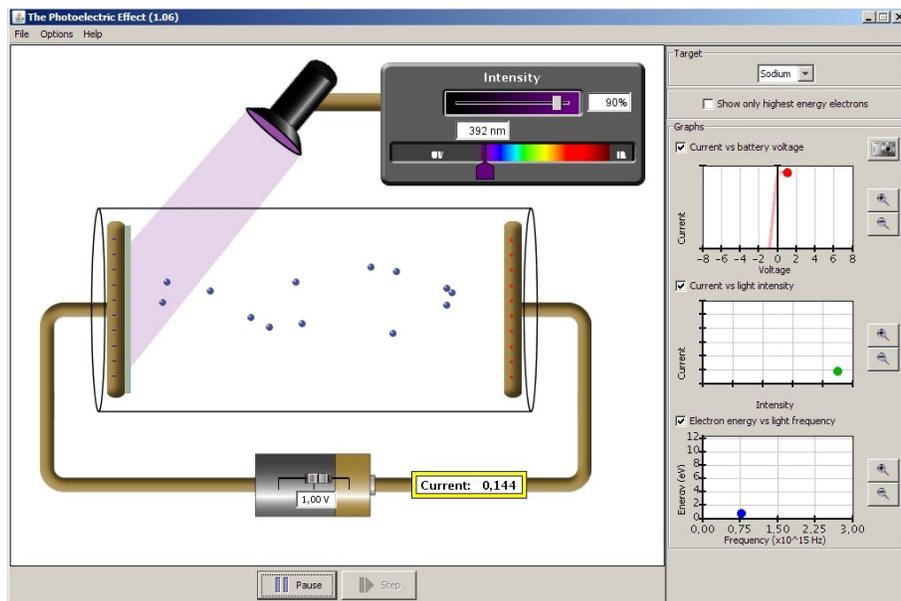


Figura B.2: Applet effetto fotoelettrico, reperibile da [15]

# Appendice C

## Effetto Compton

In questo approfondimento trattiamo l'effetto Compton mettendo in evidenza come tale processo non si possa spiegare in termini di elettromagnetismo classico. Proponiamo quindi la trattazione classica che non risulta in accordo con i risultati sperimentali e la trattazione cinematica da un punto di vista corpuscolare.

L'effetto Compton si verifica quando si investe un elettrone con raggi X <sup>1</sup>.

**Trattazione classica.** Cerchiamo di studiare qualitativamente cosa succede in questa situazione facendo uso dell'elettromagnetismo classico. Una onda elettromagnetica è individuata da un campo elettrico oscillante nello spazio e nel tempo in direzione ortogonale alla direzione di propagazione. Facendo incidere un'onda elettromagnetica su un elettrone libero, questo si metterà ad oscillare con la stessa frequenza dell'onda a seguito del campo elettrico oscillante. Come conseguenza del moto oscillatorio l'elettrone emetterà un'onda elettromagnetica sferica della stessa frequenza dell'onda incidente. Eseguendo quindi una scansione su un determinato arco di circonferenza, per esempio alla destra dell'elettrone, con un rivelatore di frequenza di onde elettromagnetiche dovremmo determinare un andamento costante in funzione dell'angolo. In pratica l'elettrone emette in tutte le direzioni un'onda elettromagnetica della stessa frequenza dell'onda incidente.

**Risultati sperimentali.** Quello che risulta invece dagli esperimenti reali, realizzati per la prima volta da Arthur Compton nel 1923, è una dipendenza della lunghezza d'onda della luce emessa in funzione dell'angolo rispetto alla direzione di incidenza dei raggi X. Tale dipendenza risulta espressa dalla seguente relazione:

$$\lambda' - \lambda = \lambda_c(1 - \cos \theta) \quad (\text{C.1})$$

dove  $\lambda$  è la lunghezza d'onda dell'onda incidente,  $\lambda'$  è la lunghezza d'onda dell'onda diffusa all'angolo  $\theta$ , mentre  $\lambda_c$  è una costante empirica che risulta essere pari a  $2.41 \cdot 10^{-10}$  cm.

---

<sup>1</sup>onda elettromagnetica di lunghezza d'onda compresa nell'intervallo  $10^{-12} - 10^{-9}$  m

Appare chiaro che i risultati ottenuti dagli esperimenti non si possono spiegare in termini di elettromagnetismo classico, in quanto non sono in accordo con le previsioni teoriche.

**Trattazione corpuscolare.** Seguendo le idee sviluppate nei precedenti paragrafi possiamo però ottenere una previsione concorde con i risultati sperimentali. Immaginiamo un'onda elettromagnetica come composta da pacchetti di energia  $E = h\nu = hc/\lambda$ . Facciamo ora una ulteriore ipotesi, immaginiamo che ognuno di questi pacchetti di energia possa essere identificato come una sorta di corpuscolo, che d'ora in poi chiameremo fotone, il quale si propaga nella direzione di propagazione dell'onda incidente. Possiamo a questo punto reinterpretare l'effetto Compton come l'urto elastico fra il fotone e l'elettrone bersaglio, considerando queste particelle come puntiformi. Non entriamo nei dettagli dei calcoli, in quanto per ottenere il risultato corretto dovremmo applicare la cinematica relativistica <sup>2</sup>, ma forniamo una guida per trattare il problema. Questo urto viene trattato allo stesso modo in cui si trattano gli urti elastici in meccanica classica, facendo però uso della cinematica relativistica. Quindi si applica la conservazione dell'energia e dell'impulso prima e dopo l'urto e si sceglie un arbitrario angolo  $\theta$  di diffusione del fotone rispetto alla direzione del fotone incidente, come rappresentato in Fig.C.1. Da questo semplice esercizio si ricava la relazione C.1, in accordo con i risultati sperimentali.

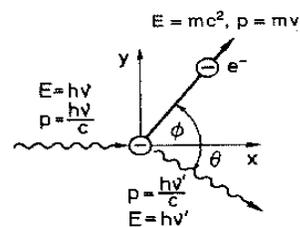


Figura C.1: Effetto Compton.

<sup>2</sup>Lo studio con la cinematica relativistica può essere affrontato insieme agli studenti come una delle varie verifiche formative

## Appendice D

# Microscopico e macroscopico

Consideriamo un sistema microscopico quale potrebbe essere un elettrone accelerato da un campo elettrico, come per esempio avviene nel tubo catodico del televisore. Lasciamo per il momento indicata la differenza di potenziale elettrico  $V$  alla quale è sottoposto l'elettrone e calcoliamo la lunghezza d'onda dell'onda materiale corrispondente considerando l'elettrone che si muove dopo aver accelerato.

Per calcolare la lunghezza d'onda dobbiamo conoscere l'impulso dell'elettrone, essendo  $\lambda = \frac{h}{p}$ . L'impulso si può determinare dall'energia cinetica dell'elettrone con la relazione

$$p = \sqrt{2mE}$$

mentre l'energia cinetica sarà l'energia acquisita dall'accelerazione imposta dalla differenza di potenziale, quindi  $E = eV$ . Sostituendo tutto possiamo esprimere la lunghezza d'onda dell'elettrone con la seguente relazione:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meV}} = \frac{6.6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{\sqrt{2 \cdot 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \sqrt{V}}} = \frac{1.23 \cdot 10^{-9} \text{ m}}{\sqrt{V}}$$

considerando per esempio un intervallo di  $V \approx 10^2 - 10^4 \text{ V}$  otteniamo che l'intervallo corrispondente per la lunghezza d'onda è dell'ordine  $\lambda \approx 10^{-10} - 10^{-11} \text{ m}$ , la quale risulta dello stesso ordine di grandezza della lunghezza d'onda dei raggi X.

Consideriamo ora un sistema macroscopico come potrebbe essere per esempio un proiettile sparato da un fucile. Un proiettile avrà una massa dell'ordine di  $m \approx 10^{-2} \text{ kg}$  e una velocità di circa  $v \approx 10^2 \text{ m/s}$ . L'impulso lo possiamo calcolare, quindi possiamo esprimere la corrispondente lunghezza d'onda con la seguente relazione:

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6.6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{10^{-2} \cdot 10^2 \text{ kg(m/s)}} \approx 10^{-34} \text{ m}.$$

Notiamo subito che la lunghezza d'onda del proiettile è circa 13-14 ordini di grandezza più piccola della lunghezza d'onda dell'elettrone. È proprio questa enorme differenza che ci permette di dire che gli effetti ondulatori negli oggetti macroscopici sono trascurabili e soprattutto non possono essere percepiti dai noi.

## Appendice E

# Gli orbitali dell'atomo di idrogeno

Per comprendere meglio la funzione d'onda come funzione di probabilità, proponiamo l'esempio dell'atomo di idrogeno trattato dalla meccanica quantistica con l'equazione di Schrödinger. Non affronteremo nessun tipo di calcolo, ma cerchiamo di seguire quello che si dovrebbe fare. L'atomo di idrogeno è costituito da un protone e un elettrone, impostiamo quindi nell'equazione di Schrödinger il potenziale di interazione fra queste due cariche elettriche. La funzione d'onda soluzione dell'equazione in questione è un funzione legata alla probabilità di trovare l'elettrone in un certo punto *attorno* al protone.

La funzione che propriamente esprime la probabilità di trovare l'elettrone in un certo punto è il modulo quadro  $|\psi|^2$  della funzione d'onda  $\psi$ . Questa probabilità è funzione delle coordinate spaziali, quindi vista in tre dimensioni possiamo rappresentarla come una nuvola di punti. Nelle zone in cui i punti sono molto densi significa che abbiamo grande probabilità di trovare l'elettrone, mentre nelle zone in cui la densità di punti è piccola avremo poca probabilità di trovare l'elettrone. Un altro modo di visualizzare la densità di probabilità è quello di associare alle zone con maggior densità un colore più luminoso di quello usato nelle zone con minore densità, come per esempio riportato in Fig.E.1.

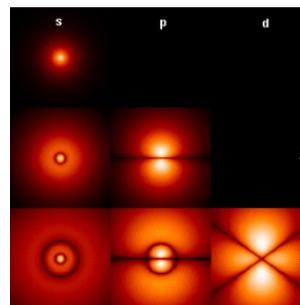


Figura E.1: Rappresentazione in scala di colori degli orbitali dell'atomo di idrogeno.

Queste funzioni di probabilità di cui stiamo qui parlando sono gli orbitali atomici, vedi Fig.E.1, molto comunemente usati in chimica. Spesso per esempio l'orbitale  $1s$  viene rappresentato come una sfera, questo è un errore, in quanto la funzione d'onda che descrive tale orbitale ha simmetria sferica, ma non si annulla in modo brusco in corrispondenza di una certa superficie sferica, si annullerà all'aumentare della distanza dal protone. Tipicamente questi orbitali, come anche gli altri, sono rappresentati come solidi, per esempio una sfera, in quanto si considera solo quella

regione di spazio in cui è possibile trovare l'elettrone con una probabilità del 90%. Le regioni che interessano il rimanente 10% non vengono rappresentate.

# Bibliografia

- [1] Sito della Zanichelli 'Liceo Scientifico e Scientifico - tecnologico Brocca - LA PROVA SCRITTA DI FISICA'  
<http://www.zanichelli.it/materiali/brocca/index.html>
- [2] J. J. Sakurai, 'Meccanica quantistica moderna', Zanichelli 1996.
- [3] P. A. M. Dirac, 'I principi della meccanica quantistica', Bollati Boringhieri 1958.
- [4] M. Born, 'Fisica atomica', Boringhieri 1976.
- [5] C. Rossetti, 'Istituzioni di fisica teorica: introduzione alla meccanica quantistica', Levrotto & Bella, Torino, 1990.
- [6] L. D. Landau, E. M. Lifšits, 'Meccanica quantistica-Teoria non relativistica', Editori Riuniti, Edizioni Mir, 1999.
- [7] A. S. Davidov, 'Meccanica quantistica', Edizioni Mir, 1981.
- [8] E. Hecht, 'Optics', Addison-Wesley, Seconda edizione, 1987.
- [9] L. Lovitch, S. Rosati, 'Fisica generale', Volume 2, Casa Editrice Ambrosiana, 1997.
- [10] Edizione Italiana del Project Physics Course, 'Progetto fisica', Volume 3 del 1990 e Volume B 1992, Zanichelli.
- [11] A. Caforio, A. Ferilli, 'Le leggi della fisica', Volume 2, Le Monnier 2005.
- [12] Johannes Kofler, Caslav Brukner<sup>1</sup>, 'Classical world arising out of quantum physics under the restriction of coarse-grained measurements', Phys. Rev. Lett. 99, 180403 (2007).  
<http://arxiv.org/abs/quant-ph/0609079>
- [13] Applet dell'esperimento di Frank-Hertz,  
<http://perg.phys.ksu.edu/vqm/software/online/vqm/html/FranckHertz.html>
- [14] Sito con *applet* per la visualizzazione degli spettri di tutti gli elementi,  
<http://jersey.uoregon.edu/vlab/elements/Elements.html>

- [15] Sito internet dell'Università del Colorado ricco di interessanti simulazioni di fisica. Le *applet* sono anche scaricabili,  
<http://phet.colorado.edu/new/index.php>
- [16] Siti internet con *applet* per la simulazione dell'effetto Compton, il primo non é interattivo, ma simula random, nel secondo si possono impostare i parametri:  
[http://www.student.nada.kth.se/~f93-jhu/phys\\_sim/compton/Compton.htm](http://www.student.nada.kth.se/~f93-jhu/phys_sim/compton/Compton.htm)  
<http://ww2.unime.it/weblab/ita/compton/compton.htm>
- [17] Sito internet con *applet* per la simulazione di onde:  
<http://www.quantum-physics.polytechnique.fr/>.
- [18] Lloyd M. Davis, 'Interference between Resolvable Wavelengths with Single-Photon-Resolved Detection', Phys. Rev. Lett., Vol. 60, Num 13, pag.1258-1261, 28 Marzo 1988.
- [19] Sito internet che espone esperimenti di interferenza eseguiti con fotoni singoli.  
<http://www.optica.tn.tudelft.nl/education/photons.asp>
- [20] Sito web dell'Università di Udine, Unitá di ricerca in didattica della fisica: 'Introduzione alla fisica quantistica'. In questa unitá si tratta la polarizzazione dei fotoni.  
<http://www.fisica.uniud.it/URDF/ffc/quanto/materiali/conzato1.htm>
- [21] Sito documentazione dell'esperimento interattivo di ottica, presentato a 'Sperimentando 2002' dalla classe 2A, ITIS Euganeo di Este. Referente: prof. A.Vianello. 'Aspetti quantistici di un fascio di fotoni'  
[http://www.itiseuganeo.it/sperimentando/2002/S2002\\_do.htm](http://www.itiseuganeo.it/sperimentando/2002/S2002_do.htm)
- [22] Sito AIP dedicato alla storia di Heisenberg  
<http://www.aip.org/history/heisenberg/p01.htm>

# Elenco delle figure

5.1	Modello atomico di Rutherford. . . . .	22
5.2	Spettro del Hg. . . . .	23
5.3	Esperimento di interferenza con fotoni singoli. . . . .	27
5.4	Esperimento della doppia fenditura con elettroni singoli. . . . .	29
6.1	Polarizzazione di un fascio di luce. . . . .	36
6.2	Direzioni di polarizzazione dei fotoni. . . . .	37
6.3	Esperimenti sequenziali di polarizzazione della luce. . . . .	38
B.1	Effetto fotoelettrico, apparato e misure. . . . .	51
B.2	Applet effetto fotoelettrico. . . . .	52
C.1	Effetto Compton. . . . .	54
E.1	Orbitali dell'atomo H. . . . .	57



# Elenco delle tabelle

4.1	Tempi dell'intervento didattico. . . . .	19
A.1	Punteggio verifica. . . . .	50