

# Introduzione

In questa tesi abbiamo studiato le proprietà degli insiemi convessi in relazione anche alle proprietà delle norme su  $\mathbb{R}^n$ . Abbiamo lavorato su uno spazio vettoriale  $X$  però tante proprietà valgono anche su spazi più generici.

Come prima cosa abbiamo dato la definizione di insieme convesso e analizzato le proprietà di alcune operazioni (unione, intersezione, moltiplicazione per uno scalare e somma) con questi insiemi notando in particolare come l'unione di insiemi convessi non è necessariamente convessa. Abbiamo poi analizzato e definito un particolare insieme convesso: l'involuppo convesso. Infine abbiamo concluso il capitolo associando agli insiemi un funzionale noto come funzionale di Minkowski e vedendo quali proprietà assume se l'insieme a cui è associato è radiale o bilanciato. Il materiale di questo capitolo è stato preso da [1].

Nel secondo capitolo abbiamo analizzato le seminorme evidenziando un importante legame tra queste e il funzionale di Minkowski. Siamo poi passati allo studio delle norme soffermandoci sull'equivalenza tra esse, mostrando come questa relazione valga sempre su  $\mathbb{R}^n$  se ha dimensione finita e come questa non valga se la dimensione è infinita.

Nel terzo capitolo abbiamo studiato due importanti proprietà dei convessi in  $\mathbb{R}^n$ : la prima è che un convesso o è uguale al solo zero o ha almeno un punto interno, la seconda è la proprietà di separazione tra punto e convesso. Per dimostrare quest'ultima proprietà abbiamo usato il Lemma di Zorn e il teorema di Hahn Banach ([2]).

Nell'ultimo capitolo, dopo aver dato le definizioni di punto e insieme estremale, abbiamo visto la condizione di esistenza di un punto estremale (Krein-Milman) e come conseguenza di ciò abbiamo dato una caratterizzazione di questi insiemi. Il materiale usato per questo capitolo è stato preso da [3].



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>iii</b>
<b>1 Insiemi convessi</b>	<b>1</b>
1.1 Involuppo convesso . . . . .	6
1.2 Funzionale di Minkowski . . . . .	8
<b>2 Seminorme e norme</b>	<b>13</b>
2.1 Il caso $X = \mathbb{R}^n$ . . . . .	16
2.2 Il caso $X = \mathbb{R}^\infty$ . . . . .	18
<b>3 Proprietà dei convessi in <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>21</b>
3.1 Separazione punto convesso . . . . .	23
<b>4 Punti ed insiemi estremali</b>	<b>33</b>



# Capitolo 1

## Insiemi convessi

In questo capitolo daremo la definizione di insieme convesso ed enunceremo alcune proprietà relative a questi insiemi. Successivamente caratterizzeremo due particolari tipi di insiemi (radiali e bilanciati) e poi daremo la definizione di inviluppo convesso. Concluderemo il capitolo parlando del funzionale di Minkowski.

Cominciamo dunque col dare la definizione di insieme convesso; nel seguito supporremo sempre di lavorare in uno spazio vettoriale complesso  $X$ .

**Definizione 1.1.** (Insieme convesso) Sia  $X$  uno spazio vettoriale. Un sottoinsieme  $E \subseteq X$  si dice *convesso* se si ha:

$$\lambda x + (1 - \lambda)x' \in E, \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad \forall x, x' \in E.$$

**Proposizione 1.1.** *Un insieme  $E$  è convesso se e solo se  $\forall n \geq 1$   $k = 1, \dots, n, \quad \forall x_k \in E \quad \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0 \quad \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$*

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \in E$$

*Dimostrazione.* Supponiamo  $E$  convesso e dimostriamo l'implicazione.

Se  $k = 1$  ovvio.

Se  $k = 2$  abbiamo

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in E \quad \forall x, y \in E \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

essendo  $E$  convesso.

Vediamo ora che  $k - 1 \implies k$ ;

supponiamo  $\lambda_n \neq 1$  altrimenti avremmo:  $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k &= \lambda_n x_n + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k x_k \\
&= \lambda_n x_n + (1 - \lambda_n) \frac{1}{(1 - \lambda_n)} \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k x_k \\
&= \lambda_n x_n + (1 - \lambda_n) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{(1 - \lambda_n)} x_k
\end{aligned}$$

ora poniamo

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{(1 - \lambda_n)} x_k = y_n$$

dobbiamo verificare che posto

$$\tilde{\lambda}_k = \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_n}$$

vale

$$\sum_{k=1}^{n-1} \tilde{\lambda}_k = 1.$$

Questo è vero poichè per ipotesi  $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$  quindi  $\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k = 1 - \lambda_n$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} \tilde{\lambda}_k &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_n} \\
&= \frac{1}{1 - \lambda_n} \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \\
&= \frac{1}{1 - \lambda_n} (1 - \lambda_n) = 1
\end{aligned}$$

dunque possiamo applicare l'ipotesi induttiva e ottenere che  $y_n \in E$ . Quindi

$$\lambda_n x_n + (1 - \lambda_n) y_n \in E$$

per la convessità di  $E$ .

Che è ciò che volevamo dimostrare.

L'implicazione opposta è ovvia, infatti basta porre  $n=2$ .  $\square$

**Osservazione 1.1.** *Le intersezioni arbitrarie di insiemi convessi sono insiemi convessi.*

*Dimostrazione.* Sia  $I$  un insieme qualsiasi di indici e sia  $(A_i)$  una famiglia di insiemi con  $i \in I$ . Sia  $Y$  la loro intersezione. Presi due punti  $x_1, x_2 \in Y$  abbiamo che  $x_1, x_2 \in A_i \quad \forall i \in I$ . Quindi  $\forall \lambda \in [0, 1]$

$$y = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in A_i \quad \forall i \in I$$

da cui  $y \in Y$  e quindi anche  $Y$  è convesso.  $\square$

**Osservazione 1.2.** *A differenza di quanto detto per le intersezioni, l'unione di insiemi convessi in generale non è un insieme convesso.*

*Dimostrazione.* Vediamo ciò con un esempio. Consideriamo due ellissi

$$E_1 = \left\{ 4x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1 \right\}$$

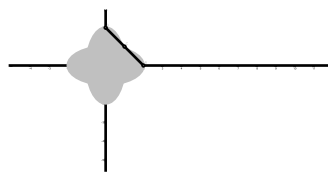
e

$$E_2 = \left\{ \frac{x^2}{4} + 4y^2 \leq 1 \right\}$$

e la loro unione  $E$ . Prendiamo i due punti  $(0, 2), (2, 0) \in E$  e notiamo come il segmento  $[(0, 2), (2, 0)]$  non è tutto contenuto nell'unione. Infatti

$$(1, 1) = \frac{1}{2}(2, 0) + \frac{1}{2}(0, 2) \notin E$$

quindi l'unione di due insiemi convessi non risulta essere un insieme convesso. (Fig.1)



(a) Fig.1

Figura 1.1: Esempio di unione di convessi non convessa

Enunciamo ora una proprietà degli insiemi convessi che ci servirà in seguito.

**Proposizione 1.2.** *Se  $E, F \subseteq X$  sono convessi, allora gli insiemi:*

$$\alpha E = \{x \in X \mid x = \alpha y, \quad y \in E\}$$

e

$$E + F = \{x \in X \mid x = u + v, \quad u \in E, v \in F\}.$$

sono convessi.

*Dimostrazione.* Dimostriamo che  $\alpha E$  è convesso.

Siano

$$x_1, x_2 \in \alpha E$$

questo per definizione di  $\alpha E$  significa che

$$x_1 = \alpha y_1, \quad y_1 \in E$$

e

$$x_2 = \alpha y_2, \quad y_2 \in E,$$

quindi

$$\begin{aligned} \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 &= \\ &= \lambda \alpha y_1 + (1 - \lambda)\alpha y_2 \\ &= \alpha[\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2]. \end{aligned}$$

Poichè  $E$  è convesso abbiamo che

$$[\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2] \in E$$

quindi

$$\alpha[\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2] \in \alpha E.$$

Dunque  $\alpha E$  è convesso.

Dimostriamo ora che  $E + F$  è convesso.

Siano  $x_1, x_2 \in E + F$  dunque

$$x_1 = u + v \quad \text{con } u \in E, \quad v \in F$$

e

$$x_2 = u' + v' \quad \text{con } u' \in E, \quad v' \in F$$

quindi

$$\begin{aligned} \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 &= \\ &= \lambda(u + v) + (1 - \lambda)(u' + v') \\ &= \lambda u + (1 - \lambda)u' + \lambda v + (1 - \lambda)v' \end{aligned}$$

ora poichè  $E$  e  $F$  sono convessi

$$\lambda u + (1 - \lambda)u' \in E$$

e

$$\lambda v + (1 - \lambda)v' \in F$$

il che implica

$$\lambda u + (1 - \lambda)u' + \lambda v + (1 - \lambda)v' \in E + F$$

cioè  $E + F$  è convesso.  $\square$



**Proposizione 1.3.** *Sia  $X$  uno spazio vettoriale. Un sottoinsieme  $U \subseteq X$  è convesso se e solo se  $\alpha U + \beta U = (\alpha + \beta)U \quad \forall \alpha, \beta \in [0, +\infty)$ .*

*Dimostrazione.* Come prima cosa analizziamo il caso  $\alpha = \beta = 0$ , se ciò accade abbiamo che  $0U + 0U = 0U = \{0\}$  dunque l'uguaglianza è verificata. Dimostriamo quindi la proprietà nel caso in cui almeno uno tra  $\alpha$  e  $\beta$  è non nullo, cioè  $\alpha + \beta > 0$ . (Se fosse  $\alpha > 0$  e  $\beta = 0$  allora  $\alpha U + 0U = \alpha U + \{0\} = \alpha U$  uguaglianza ovvia). Cominciamo col dimostrare che se  $U$  è convesso allora  $(\alpha + \beta)U = \alpha U + \beta U$ . Siano  $x, y \in U$ , allora per la convessità abbiamo che per ogni  $\lambda \in [0, 1]$

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in U.$$

Ora se poniamo

$$\lambda = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}; \quad (1 - \lambda) = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$$

otteniamo

$$\frac{\alpha}{\alpha + \beta}x + \frac{\beta}{\alpha + \beta}y \in U,$$

cioè

$$\alpha x + \beta y \in (\alpha + \beta)U$$

e dunque  $\alpha U + \beta U \subseteq (\alpha + \beta)U$ .

Vediamo ora l'inclusione

$$(\alpha + \beta)U \subseteq \alpha U + \beta U$$

e che per tale inclusione non serve la convessità di  $U$ . Sia  $x \in U$  allora per la distributività otteniamo

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$$

che è quanto volevamo dimostrare.

Supponiamo viceversa che valga l'ipotesi

$$\alpha U + \beta U = (\alpha + \beta)U$$

e dimostriamo che  $U$  è convesso ponendo

$$\lambda = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}; \quad (1 - \lambda) = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$$

otteniamo

$$\lambda U + (1 - \lambda)U = U$$

dunque esiste  $z \in U \quad \forall x, y \in U, \quad \forall \lambda \in [0, 1]$  tale che

$$z = \lambda x + (1 - \lambda)y \quad \forall x, y \in U,$$

dunque  $U$  è convesso.  $\square$

Altre due definizioni che torneranno utili in seguito sono quella di insieme bilanciato e quella di insieme radiale:

**Definizione 1.2.** (Insieme bilanciato) Un sottoinsieme  $E$  di uno spazio vettoriale  $X$  si dice *bilanciato*, o *cerchiato* se risulta:

$$\alpha E \subseteq E \quad \forall |\alpha| \leq 1.$$

**Definizione 1.3.** (Insieme Radiale) Sia  $X$  uno spazio vettoriale. Un sottoinsieme  $U$  di  $X$  si dice *radiale* o *assorbente*, se  $0 \in U$  e

$$\forall x \in X \quad \exists \lambda > 0 \text{ tale che } \alpha x \in U \quad \forall \alpha \in (0, \lambda).$$

*Esempio 1.1.* In questo esempio vediamo come un insieme bilanciato contenente l'origine non è necessariamente convesso.

Consideriamo

$$E = \begin{cases} y = x & \text{se } x \in [-1, 1] \\ y = -x & \text{se } x \in [-1, 1] \end{cases}$$

Per definizione di  $E$  abbiamo che  $0 \in E$ , però non esiste una combinazione convessa di due punti, ad esempio  $P_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  e  $P_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ , tutta contenuta in  $E$ .

*Esempio 1.2.* In questo esempio vediamo come un insieme convesso contenente l'origine non è necessariamente bilanciato.

Consideriamo come insieme convesso l'ellisse  $E$  e abbiamo che  $-y \in E$  ma preso  $\alpha = -1$  si ha  $|\alpha| = 1$  però  $\alpha y \notin E$ . Dunque  $E$  non è bilanciato.

## 1.1 Inviluppo convesso

In questa parte del capitolo diamo la definizione di inviluppo convesso e vediamo che anch'esso risulta essere un insieme convesso e inoltre che è il più piccolo convesso contenente  $E$ .

**Definizione 1.4.** (Inviluppo convesso) Sia  $E$  un sottoinsieme dello spazio vettoriale  $X$ . L'inviluppo convesso di  $E$  è l'insieme

$$co(E) = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \mid n \in \mathbb{N}^+, x_k \in E, \lambda_k \geq 0, \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 \right\}.$$

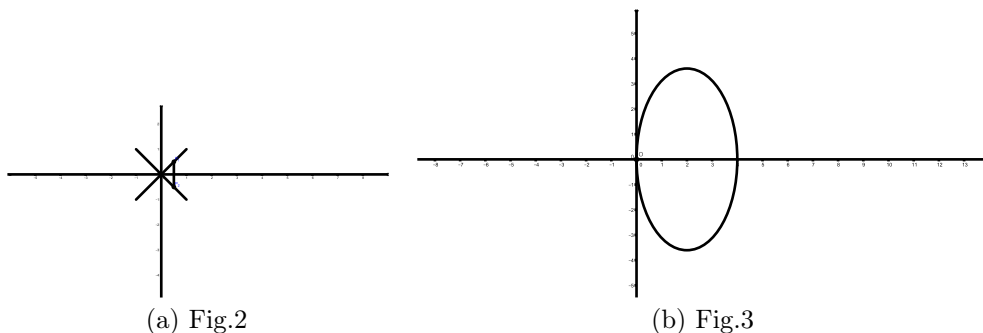


Figura 1.2: Insieme bilanciato non convesso

Figura 1.3: Insieme convesso non bilanciato

**Proposizione 1.4.**  $co(E)$  è un insieme convesso.

*Dimostrazione.* Siano  $x, y \in co(E)$  allora

$$x = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \quad \text{con} \quad x_k \in E, \quad \forall k = 1, \dots, n \quad \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1, \quad \lambda_i \geq 0$$

e

$$y = \sum_{h=1}^m \mu_h y_h \quad \text{con} \quad y_h \in E, \quad \forall h = 1, \dots, m \quad \sum_{h=1}^m \mu_h = 1, \quad \mu_h \geq 0$$

Ma allora  $\forall \lambda \in [0, 1]$

$$\lambda x + (1 - \lambda)y = \sum_{k=1}^n \lambda \lambda_k x_k + \sum_{h=1}^m (1 - \lambda) \mu_h y_h = \sum_{i=1}^{m+n} \tilde{\lambda}_i \tilde{x}_i$$

dove abbiamo posto

$$\tilde{\lambda}_i = \begin{cases} \lambda \lambda_i & \text{se } i = 1, \dots, n \\ (1 - \lambda) \mu_{i-n} & \text{se } i = n + 1, \dots, n + m \end{cases}$$

e

$$E \ni \tilde{x}_i = \begin{cases} x_i & \text{se } i = 1, \dots, n \\ y_{i-n} & \text{se } i = n + 1, \dots, n + m \end{cases}$$

La convessità si ottiene mostrando che

$$\sum_{i=1}^{m+n} \tilde{\lambda}_i = 1$$

dunque

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m+n} \tilde{\lambda}_i &= \sum_{i=1}^n \lambda \lambda_i + \sum_{i=n+1}^{m+n} (1-\lambda) \mu_{i-n} \\ &= \lambda \sum_{i=1}^n \lambda_i + (1-\lambda) \sum_{i=1}^m \mu_i \\ &= \lambda + (1-\lambda) = 1. \end{aligned}$$

□

**Osservazione 1.3.**  $co(E)$  è il più piccolo insieme convesso contenente  $E$ .

*Dimostrazione.* Dobbiamo dimostrare che

$$co(E) = \bigcap \{C \mid C \text{ convesso}, E \subseteq C\}.$$

Che

$$co(E) \supseteq \bigcap \{C \mid C \text{ convesso}, E \subseteq C\}$$

segue dalla Proposizione 1.4.

Viceversa mostriamo che

$$co(E) \subseteq \bigcap \{C \mid C \text{ convesso}, E \subseteq C\}.$$

Se  $C$  è convesso e contiene  $E$  allora

$$\forall x_1, \dots, x_n \in E \subseteq C, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in C$$

dunque  $co(E) \subseteq C \quad \forall C$ , il che implica  $co(E) \subseteq \bigcap_{E \subseteq C} C$ . □

## 1.2 Funzionale di Minkowski

In questo paragrafo vediamo come ad ogni sottoinsieme  $E$  di uno spazio vettoriale  $X$  possiamo associare una funzione reale  $p_E$  definita su  $X$ . Vedremo come questa funzione acquista importanti proprietà quando  $E$  viene ad essere un insieme convesso contenente l'origine.

**Definizione 1.5.** (Funzionale di Minkowski) Sia  $E$  un sottoinsieme dello spazio vettoriale  $X$ . Il *Funzionale di Minkowski associato ad  $E$*  è la funzione

$$p_E: X \rightarrow [0, \infty]$$

definita da:

$$p_E(x) = \inf\{\varrho > 0 \mid x \in tE \quad \forall t > \varrho\}$$

con la convenzione che  $p_E(x) = +\infty$  quando l'insieme a secondo membro è vuoto.

Si osserva che  $p_E(x)$  è l'estremo inferiore di una semiretta, eventualmente vuota: può infatti succedere che  $p_E(x) = +\infty$  per qualche  $x$ .

Ad esempio se  $E = \{y\}$  con  $y \neq 0$ , si ha  $p_E(x) = +\infty$  per ogni  $x \in X$  infatti se  $x = \lambda y$  con  $\lambda > 0$  allora  $x \in \lambda E$  ma  $x \notin tE$  se  $t \neq \lambda$  dunque non esiste  $\varrho > 0$  tale che  $x \in tE \quad \forall t > \varrho$ , se invece  $x$  e  $y$  non sono allineati allora  $x \notin tE \quad \forall t \in \mathbb{R}$ .

Se  $E$  è il semidisco di  $\mathbb{R}^2$  di centro  $(0, 0)$  e raggio 1 contenuto nel semipiano  $y \geq 0$ , allora  $p_E(x, y) < +\infty$  se e solo se  $y \geq 0$  (Fig.4).

Se  $E = B_r(0, y_0)$  con  $0 < r < y_0$  abbiamo che  $p_E(x) = +\infty$  (Fig.5).

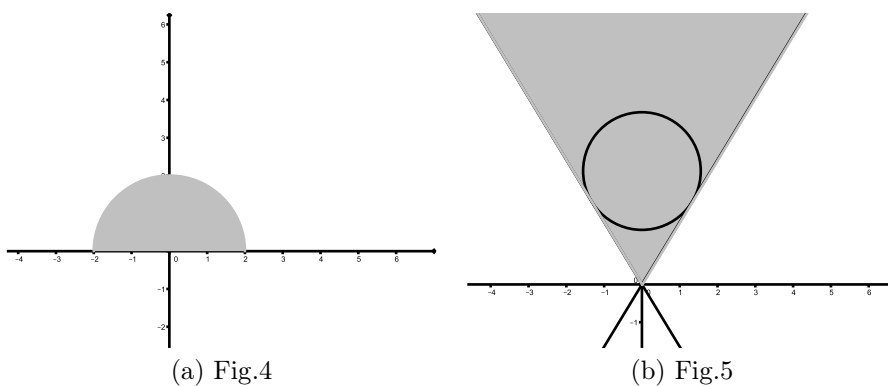


Figura 1.4: Esempi funzionale di Minkowski

Alla luce di questi esempi è interessante vedere per quali insiemi  $E$  il funzionale di Minkowski  $p_E$  è finito su  $X$ .

**Proposizione 1.5.** *Sia  $X$  uno spazio vettoriale, sia  $E \subseteq X$ . Risulta  $p_E(x) < \infty$  per ogni  $x \in X \iff E$  è radiale.*

*Dimostrazione.* Come prima cosa dimostriamo che

$$p_E(x) < \infty \implies E \text{ è radiale.}$$

Per concludere che  $E$  è radiale dobbiamo far vedere che  $\alpha x \in E$  e che anche  $0 \in E$ .

Per ipotesi sappiamo che

$$p_E(x) < \infty \quad \forall x \in X.$$

Per la proprietà dell'estremo inferiore e dalla definizione di  $p_E$  segue che

$$x \in tE \quad \forall t > p_E(x),$$

pertanto posto

$$\lambda = \frac{1}{p_E(x)},$$

nel caso  $p_E(x) > 0$ , abbiamo che

$$t^{-1}x \in E \quad \forall t^{-1} \in \left(0, \frac{1}{p_E(x)}\right).$$

Se  $p_E(x) = 0$  abbiamo che  $t^{-1}x \in E$  per ogni  $t > 0$ . Dimostriamo ora che  $0 \in E$ . Abbiamo che

$$p_E(x) < \infty \quad \forall x \in X$$

dunque anche per  $x = 0$  che quindi appartiene a  $tE$  per ogni  $t > p_E(0)$  e pertanto  $0 = t^{-1}0 \in E$ .

Dimostriamo ora che se  $E$  è radiale allora  $p_E(x) < \infty$  per ogni  $x \in X$ .

Sia  $x \in X$ . Per ipotesi sappiamo che

$$x \in \frac{1}{\alpha}E \quad \forall \alpha \in (0, \lambda)$$

ossia

$$x \in tE \quad \forall t > \frac{1}{\lambda}$$

Ciò prova che  $p_E(x) \leq \frac{1}{\lambda} < \infty$ .  $\square$

Vediamo ora le principali proprietà del funzionale di Minkowski.

**Proposizione 1.6.** *Sia  $E$  un sottoinsieme dello spazio vettoriale  $X$ . Valgono le seguenti proprietà:*

1.  $0 \in E \iff p_E(0) = 0$ ;
2. se  $x \neq 0$ , allora  $p_E(x) = 0 \iff \{\alpha x \mid \alpha > 0\} \subseteq E$ ;
3. si ha  $p_E(\lambda x) = \lambda p_E(x) \quad \forall \lambda > 0, \quad \forall x \in X$ ;
4. se  $E$  è bilanciato, allora  $p_E(\lambda x) = |\lambda| p_E(x) \quad \forall x \in X \quad e \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ;
5. se  $E$  è convesso allora  $p_E(x + x') \leq p_E(x) + p_E(x')$ .

*Dimostrazione.* Per dimostrare 1. basta osservare che se  $t > 0$  si ha che  $0 \in tE$  se e solo se  $t^{-1}0 \in E$  cioè se e solo se  $0 \in E$ .

Dimostriamo ora 2.. Sia  $x \neq 0$ ; per definizione si ha che

$$p_E(x) = 0 \iff x \in tE \quad \forall t > 0 \iff \alpha x \in E \quad \forall \alpha > 0.$$

Dimostriamo ora 3.. Per fare questo distinguiamo due casi:  $p_E(x) = +\infty$  e  $p_E(x) < +\infty$ .

Se  $p_E(x) = +\infty$  allora anche  $p_E(\lambda x) = +\infty \quad \forall \lambda > 0$ .

Se invece  $p_E(x) < +\infty$  si ha che

$$\begin{aligned} p_E(\lambda x) &= \inf\{\varrho > 0 : \lambda x \in tE \quad \forall t \geq \varrho\} \\ &= \inf\{\varrho > 0 : x \in sE \quad \forall s \geq \frac{\varrho}{\lambda}\} \\ &= \lambda \inf\{\sigma > 0 : x \in sE \quad \forall s \geq \sigma\} = \lambda p_E(x). \end{aligned}$$

Dimostriamo 4.. Proviamo come prima cosa che

$$p_E(e^{i\vartheta}) = p_E(x) \quad \forall x \in X \quad \forall \vartheta \in \mathbb{R}.$$

Dal fatto che  $E$  è bilanciato segue che

$$p_E(x) = +\infty \iff p_E(e^{i\vartheta}x) = +\infty.$$

Se invece queste quantità sono finite si ha  $x \in tE$  per  $t > p_E(x)$ ; quindi poichè  $E$  è bilanciato,

$$xe^{i\vartheta} \in e^{i\vartheta}(tE) = t(e^{i\vartheta}E) = tE \quad \forall t > p_E(x),$$

da cui discende la tesi.

Dimostriamo 5.. Possiamo supporre che  $p_E(x)$  e  $p_E(x')$  siano entrambi finiti. Poichè  $E$  è convesso, si ha che

$$\alpha E + \beta E = (\alpha + \beta)E \quad \forall \alpha, \beta \geq 0$$

per la Proposizione 1.3. Per le proprietà dell'estremo inferiore si ha che

$$x \in tE \quad \forall t > p_E(x)$$

e che

$$x' \in sE \quad \forall s > p_E(x'),$$

da cui si deduce che

$$x + x' \in (t + s)E \quad \forall t, s$$

come sopra e quindi

$$x + x' \in \tau E \quad \forall \tau > p_E(x) + p_E(x').$$

quindi se

$$r = p_E(x) + p_E(x')$$

allora  $x + x' \in \tau E \quad \forall \tau > r$  il che implica

$$\inf\{\varrho \mid x + x' \in \tau E \quad \forall \tau > \varrho\} \leq r.$$

Ciò implica  $p_E(x + x') \leq p_E(x) + p_E(x')$ .  $\square$

**Osservazione 1.4.** *Se lo spazio  $X$  è reale, la proprietà 4. della Proposizione 1.6 vale per ogni  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  supponendo che l'insieme  $E$  sia simmetrico, ossia  $E = -E$ .*



# Capitolo 2

## Seminorme e norme

In questo capitolo analizzeremo le proprietà delle seminorme e delle norme in  $\mathbb{R}^n$ . Dimosteremo che due norme in  $\mathbb{R}^n$  sono sempre equivalenti tra loro; questo segue dal fatto che  $\mathbb{R}^n$  ha dimensione finita ed in particolare dal fatto che la palla unitaria è un insieme compatto. In particolare mostreremo che una qualsiasi norma  $\|\cdot\|$  su  $\mathbb{R}^n$  è equivalente alla norma Euclidea. Concluderemo il capitolo dimostrando che l'equivalenza tra norme non vale più se passiamo a spazi di dimensione infinita.

**Definizione 2.1.** (Seminorma) Una *seminorma* nello spazio vettoriale  $X$  è una funzione  $p: X \rightarrow [0, \infty)$  tale che:

1.  $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$  per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$  e per ogni  $x \in X$ ;
2.  $p(x + x') \leq p(x) + p(x')$ .

**Osservazione 2.1.** *Dalla definizione segue che ogni seminorma  $p$  su  $X$  verifica la seguente relazione:  $|p(x) - p(x')| \leq p(x + x')$  per ogni  $x, x' \in X$ . Inoltre una seminorma  $p$  verifica anche un'altra importante proprietà:  $p(0) = 0$  (Per il punto 1 della Definizione 2.1). Viceversa non sempre vale l'implicazione  $p(x) = 0 \implies x = 0$ ; tale implicazione vale solo se  $p$  è una norma su  $X$ .*

Vediamo ora come il concetto di seminorma è legato agli insiemi convessi, radiali e bilanciati

**Proposizione 2.1.** *Se  $p$  è una seminorma su  $X$  allora gli insiemi*

$$U_c = \{x \in X \mid p(x) < c\}, \quad c > 0,$$

*sono convessi, radiali e bilanciati.*

*Dimostrazione.* Come prima cosa vediamo che  $U_c$  è convesso; siano, quindi,  $x, y \in U_c$  e sia  $\lambda \in [0, 1]$ . Per definizione di seminorma abbiamo che

$$p(\lambda x + (1 - \lambda)x') \leq p(\lambda x) + p((1 - \lambda)x') = |\lambda|p(x) + |1 - \lambda|p(x').$$

Per ipotesi sappiamo che  $p(x), p(x') < c$  dunque

$$p(\lambda x + (1 - \lambda)x') < |\lambda|c + |1 - \lambda|c$$

poichè  $\lambda \in [0, 1]$  possiamo togliere i valori assoluti e otteniamo

$$p(\lambda x + (1 - \lambda)x') < \lambda c + (1 - \lambda)c = c$$

dunque

$$(\lambda x + (1 - \lambda)x') \in U_c$$

cioè  $U_c$  è convesso.

Vediamo ora che  $U_c$  è radiale; dobbiamo dimostrare che se  $x \in X$  allora  $\exists t > 0$  tale che

$$x \in tU_c = \{ty \mid y \in U_c\}$$

e che  $0 \in U_c$ .

Abbiamo che

$$x \in tU_c \iff t^{-1}x \in U_c \iff p(t^{-1}x) < c \iff p(x) < tc$$

dunque

$$\forall t > \frac{p(x)}{c} \quad x \in tU_c.$$

Inoltre abbiamo che  $0 \in U_c$  in quanto essendo  $p$  una seminorma ed essendo  $c > 0$

$$p(0) = 0 < c$$

che è ciò che volevamo dimostrare.

Dimostriamo ora che  $U_c$  è bilanciato. Per fare ciò dobbiamo mostrare che

$$tx \in U_c \quad \forall x \in U_c, \quad \forall t, \quad |t| \leq 1.$$

Abbiamo che

$$tx \in U_c \iff x \in U_c.$$

Inoltre per ipotesi abbiamo anche che se  $x \in U_c$  allora  $p(x) < c$  e che  $|t| \leq 1$  dunque

$$p(tx) = |t|p(x) \leq p(x) < c$$

il che implica  $tx \in U_c$  che è ciò che volevamo dimostrare.  $\square$

Nella proposizione che segue vediamo un importante legame tra seminorme e funzionale di Minkowski nel caso di insiemi convessi, bilanciati e radiali.

**Proposizione 2.2.** *Se  $E$  è un sottoinsieme convesso, radiale e bilanciato dello spazio vettoriale  $X$  allora il funzionale di Minkowski  $p_E$  è una seminorma su  $X$  per la Proposizione 1.6. In questo caso particolare vale anche il viceversa: se  $p$  è una seminorma sullo spazio vettoriale  $X$ , allora  $p$  coincide con il funzionale di Minkowski  $p_U$ , dove  $U = \{x \in X \mid p(x) < 1\}$ .*

*Dimostrazione.* Dobbiamo dimostrare che  $\forall x \in U \quad p(x) = p_U(x)$ . Supponiamo che  $p(x) = 1$  questo implica che  $x \notin U$  ma

$$\lambda x \in U \quad \forall \lambda < 1$$

dato che

$$p(\lambda x) = \lambda p(x) = \lambda < 1.$$

Questo implica che

$$x \in tU, \quad t = \frac{1}{\lambda} > 1$$

cioè

$$p_U(x) \leq 1$$

se fosse  $p_U(x) < 1$  dalla definizione di funzionale di Minkowski deduciamo che

$$\exists t \in (p_U(x), 1)$$

tale per cui  $x \in tU$  quindi ponendo  $\lambda = \frac{1}{t}$  otteniamo che esiste  $\lambda > 1$  tale che  $\lambda x \in U$ . Dal fatto che  $p$  è una seminorma discende che

$$p(\lambda x) = \lambda p(x) < 1 \implies x \in [0, \lambda x] \subseteq U \implies x \in U.$$

Vediamo ora il caso generale analizzando a parte il caso  $p(x) = 0$ . Sia dunque  $p(x) = 0$  questo significa che  $\forall \alpha > 0 \quad p(\alpha x) = 0$  cioè

$$\{\alpha x \mid \alpha > 0\} \subseteq U = \{p(x) < 1\}$$

il che implica  $p_U(x) = 0$  che è ciò che volevamo dimostrare. Possiamo ora passare al caso generale:  $p(x) > 0$

$$\begin{aligned}
 p(x) &= p\left(\frac{x}{p(x)}p(x)\right) \\
 &= p(x)p\left(\frac{x}{p(x)}\right) \\
 &= p(x)p_U\left(\frac{x}{p(x)}\right) \\
 &= p_U\left(p(x)\frac{x}{p(x)}\right) \\
 &= p_U(x). \quad \square
 \end{aligned}$$

## 2.1 Il caso $X = \mathbb{R}^n$

In questa parte dopo aver enunciato la definizione di Norma Euclidea vedremo che in  $\mathbb{R}^n$  con  $n \in \mathbb{N}$  e  $n < \infty$  due norme sono sempre equivalenti.

**Definizione 2.2.** (Norma Euclidea) Si definisce *norma 2* o *norma Euclidea* la norma indotta dal prodotto scalare e si indica con  $\|\cdot\|_2$ ;

$$\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

**Definizione 2.3.** (Norme equivalenti) Due norme  $\|\cdot\|_{N_1}$  e  $\|\cdot\|_{N_2}$  su  $\mathbb{R}^n$  si dicono *equivalenti* se esistono due costanti positive  $c_1, c_2$  tali che

$$c_1\|x\|_{N_1} \leq \|x\|_{N_2} \leq c_2\|x\|_{N_1}.$$

Vediamo ora che la norma Euclidea su  $\mathbb{R}^n$  e un'altra norma qualsiasi  $\|\cdot\|$ , sempre su  $\mathbb{R}^n$ , sono equivalenti.

**Proposizione 2.3.** Sia  $\|\cdot\|_2$  la norma Euclidea su  $\mathbb{R}^n$  e sia  $\|\cdot\|$  una qualsiasi altra norma su  $\mathbb{R}^n$ . Allora le due norme sono equivalenti.

*Dimostrazione* Dalla disuguaglianza triangolare

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|$$

si deduce che la funzione  $f: (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|) \rightarrow (\mathbb{R}_+, |\cdot|)$  definita da  $f(x) = \|x\|$  è 1-Lipschitziana. Se chiamiamo  $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$  gli elementi della base canonica standard otteniamo che

$$\begin{aligned} \|x\| &= \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \|x_i e_i\| \\ &= \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\| \\ &\leq \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=1}^n \|e_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

e quindi se si pone

$$c = \left( \sum_{i=1}^n \|e_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

si ha che

$$\|x\| \leq c \|x\|_2.$$

Quindi

$$|f(x) - f(y)| \leq c \|x - y\|_2,$$

cioè  $f: (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2) \rightarrow (\mathbb{R}_+, |\cdot|)$  è  $c$ -Lipschitziana e quindi continua. Possiamo quindi applicare il Teorema di Weierstrass ottenendo che

$$\exists c_1 = \min_{\|x\|_2=1} f(x) > 0$$

e

$$\exists c_2 = \max_{\|x\|_2=1} f(x) > 0$$

poichè

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\} = \mathbb{S}^{n-1}$$

è compatto. Abbiamo quindi ottenuto che

$$c_1 \leq f(x) \leq c_2 \quad \forall x \in \mathbb{S}^{n-1}$$

da cui, essendo  $f(x) = \|x\|$

$$c_1 \|x\|_2 \leq \|x\| = \|x\|_2 \left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\| \leq c_2 \|x\|_2.$$

□

Questa dimostrazione è basata principalmente su due fatti. Il primo è che fissata una base  $\sum_{i=1}^n \|e_i\|^2 < +\infty$ , mentre il secondo è che  $\{x \mid \|x\|_2 = 1\}$  è compatto.

## 2.2 Il caso $X = \mathbb{R}^\infty$

Mostriamo che in

$$X = \mathbb{R}^\infty = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid x_n \in \mathbb{R}\}$$

esistono due norme che non sono equivalenti tra loro. Su  $X$  possiamo definire le due norme:

$$\|x\|_\infty := \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$$

e

$$\|x\|_2 := \left( \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Grazie a tali norme possiamo definire:

$$l_\infty = \{x \in X \mid \|x\|_\infty < +\infty\}$$

e

$$l_2 = \{x \in X \mid \|x\|_2 < +\infty\}.$$

Tali spazi non coincidono.

Infatti se  $x \in X$  è tale che

$$x_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

si ha che

$$\|x\|_\infty = 1$$

mentre

$$\|x\|_2 = +\infty.$$

Equivalentemente se si considera  $x^N \in X$  tale che

$$x_n^N = 1 \quad n \leq N, \quad x_n^N = 0 \quad n > N$$

allora

$$\|x^N\|_\infty = 1$$

mentre

$$\|x^N\|_2 = \left( \sum_{n=1}^N 1 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{N}$$

e quindi

$$\|x^N\|_2 = \sqrt{N} \|x^N\|_\infty$$

cioè

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\|x^N\|_2}{\|x^N\|_\infty} = +\infty$$

che è quanto volevamo dimostrare.  $\square$

**Osservazione 2.2.** *Questa dimostrazione si può anche generalizzare alle norme*

$$\|x\|_p := \left( \sum_{n=1}^{\infty} x_n^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

*provando che esse non sono equivalenti per  $p$  differenti.*

Infatti se consideriamo

$$x_n^N = \begin{cases} \frac{1}{n^{\frac{p}{q}}} & \text{se } n \leq N \\ 0 & \text{se } n > N \end{cases}$$

allora

$$\|x^N\|_q^q = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$$

mentre

$$\|x^N\|_p^p = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{\frac{p}{q}}}.$$

Dato che  $\frac{p}{q} > 1$ , la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{p}{q}}} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{\frac{p}{q}}} < +\infty$$

converge, mentre

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|x^N\|_q^q = +\infty,$$

quindi

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\|x^N\|_q}{\|x^N\|_p} = +\infty.$$

Sottolineiamo qui che  $S = \{x \in X = l_2 \mid \|x\|_2 = 1\}$  non è compatto infatti gli elementi  $e^N \in X$  con  $e_n^N = 0$ , se  $n \neq N$ , e  $e_N^N = 1$  cioè gli elementi del tipo  $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  dove 1 è nella posizione  $N$ , sono tutti elementi di  $S$  ma non possono convergere neanche a meno di sottosuccessioni ad

un elemento di  $S$  cioè non esiste nessuna sottosuccessione che può essere di Cauchy (i.e.  $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon$  tale che  $\forall m, n > N_\varepsilon \|x^M - x^N\|_2 < \varepsilon$ ). Infatti se  $N \neq M$

$$\|e^N - e^M\|_2 = \left( \sum_{n=1}^{+\infty} |e_n^N - e_n^M|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

che è quello che volevamo mostrare.  $\square$



# Capitolo 3

## Proprietà dei convessi in $\mathbb{R}^n$

In questo capitolo dopo aver dato la definizione di *span* di un insieme enunceremo e dimostreremo alcune delle principali proprietà degli insiemi convessi in  $\mathbb{R}^n$ .

**Definizione 3.1.** Dato un insieme convesso chiuso e limitato  $C$  di  $\mathbb{R}^n$  si definisce *span*( $C$ ) l'insieme  $span(C) = \langle C \rangle = \bigcap \{V \mid V \leq \mathbb{R}^n \quad C \subseteq V\}$ .

Vediamo ora una prima proprietà degli insiemi convessi in  $\mathbb{R}^n$

**Proposizione 3.1.** Sia  $C$  un insieme convesso, chiuso e limitato tale che  $0 \in C \subseteq \mathbb{R}^n$  e tale che  $span(C) = \mathbb{R}^n$ . Allora  $C = \{0\}$  oppure  $\exists x_0 \in C^\circ$  dove con  $C^\circ$  intendiamo la parte interna di  $C$ .

*Dimostrazione.* Se  $0 \in C^\circ$ , abbiamo finito altrimenti se  $0 \in \partial C$ , abbiamo due possibilità: o  $span(C) = \{0\}$  e quindi siamo nel primo caso della proposizione, oppure  $span(C) = \mathbb{R}^n$  con  $n \geq 1$ . In questo caso esiste

$$x_1 \in C \setminus \{0\}$$

e posto

$$v_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$$

abbiamo nuovamente due possibilità: o  $span(C) = span(v_1)$  e quindi  $n = 1$ , oppure esiste  $x_2 \in C \setminus \langle v_1 \rangle$ .

Nel primo caso ( $n = 1$ ) avremmo che

$$C = C \cap \mathbb{R} = C \cap \langle v_1 \rangle = \{tv_1, \text{ con } t \in [a_1, b_1]\}$$

con  $a_1 \leq 0$  e  $b_1 \geq \|x_1\| \neq 0$ , dato che  $0, x_1 \in C$ .

Quindi  $C = [a_1, b_1]$  e l'intervallo aperto  $(a_1, b_1)$  è tutto interno a  $C$  e quindi

ogni  $x_0 \in (a_1, b_1)$  è punto interno.

Nel secondo caso prendiamo

$$x_2 \in C \setminus \langle v_1 \rangle$$

e definisco

$$v_2 = \frac{x_2}{\|x_2\|}$$

e itero il procedimento. Si arriva così a costruire

$$x_1, \dots, x_n \in C$$

punti tali che

$$v_i = \frac{x_i}{\|x_i\|}, \quad i = 1, \dots, n$$

sono una base di  $\mathbb{R}^n$  e

$$\text{span}(C) = \text{span}(v_1, \dots, v_n).$$

L'insieme

$$T(x_1, \dots, x_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n t_i x_i \mid t_i \in [0, 1], \sum_{i=1}^n t_i \leq 1 \right\}$$

è quindi un insieme chiuso contenuto in  $C$ ; infatti  $T(x_1, \dots, x_n)$  è chiuso ed è la combinazione convessa dei punti  $0, x_1, \dots, x_n \in C$

$$\lambda_0 0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, \quad \lambda_i = t_i, \quad \lambda_0 = 1 - \sum_{i=1}^n t_i.$$

L'insieme aperto

$$T(x_1, \dots, x_n)^\circ = \left\{ \sum_{i=1}^n t_i x_i \mid t_i \in (0, 1), \sum_{i=1}^n t_i < 1 \right\}$$

è tutto contenuto in  $C$  e quindi ogni  $x_0 \in T(x_1, \dots, x_n)^\circ$  è contenuto in  $C^\circ$ .

□

**Corollario 3.1.** *Sia  $C$  un convesso, chiuso, limitato con  $x_0 \in C^\circ$ .  $C - x_0$  è radiale e quindi il funzionale di Minkowski è finito ovunque se  $\text{span}(C) = \mathbb{R}^n$*

**Proposizione 3.2.** *Sia  $\mathbb{R}^n = V \oplus V^\perp$ ,  $V = \text{span}(C)$  e  $0 \in C^\circ \subseteq V$ . Allora  $p_{C|V}(x) < +\infty$  e  $p_{C|V^\perp}(x) = +\infty$ .*

### 3.1 Separazione punto convesso

Vediamo ora un'altra importante proprietà degli insiemi convessi cioè la proprietà di separazione punto convesso. Per fare ciò dobbiamo prima vedere il Lemma di Zorn, il teorema di Hahn Banach e un'applicazione di questo teorema al lemma di Zorn che ci saranno utili nella dimostrazione di questa proprietà.

Come prima cosa diamo alcune definizioni.

**Definizione 3.2.** (*Relazione d'ordine*) Una relazione d'ordine in un insieme  $Q$  è una proprietà definita in un sottoinsieme di  $Q \times Q$ ; quando essa è vera per la coppia  $(x_1, x_2)$  scriveremo  $x_1 \leq x_2$  oppure  $x_1 < x_2$ .

**Definizione 3.3.** (*Insieme parzialmente ordinato*) La coppia  $(Q, \leq)$  costituita da un insieme e da una relazione d'ordine su di esso si dice insieme parzialmente ordinato

- Definizione 3.4.**
1.  $Q \subseteq X$  è totalmente ordinato  $\iff x \leq y$  o  $y \leq x \quad \forall x, y \in Q$
  2. Sia  $Q \subseteq X$  e  $M \in X$ .  $M$  si dice un maggiorante per  $Q$  se  $\forall x \in Q \quad x \leq M$
  3. Sia  $M \in X$ .  $M$  si dice elemento massimale di  $X$  se non esiste  $x \in X, x \neq M$  tale che  $M \leq x$
  4. Un elemento  $m \in Q$  si dice minimale in  $Q$  se per ogni  $x \in Q$  si ha  $x \leq m \implies m \leq x$ .
  5.  $X$  si dice induttivo se ogni sottoinsieme di  $X$  totalmente ordinato ha un elemento massimale.

Enunciamo ora il Lemma di Zorn.

**Lemma 3.1.** (*Lemma di Zorn*) Ogni insieme non vuoto parzialmente ordinato e induttivo ha un elemento massimale.

Vediamo ora il teorema di Hahn Banach.

**Teorema 3.1.** (*Hahn Banach versione algebrica reale*) Sia  $E$  uno spazio vettoriale reale. Sia  $p: E \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione sublineare

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in E$$

e positivamente 1-omogenea

$$p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \forall \lambda > 0, \forall x \in E.$$

Sia  $G \subseteq E$  e sia  $g: G \rightarrow \mathbb{R}$  lineare e tale che  $g(x) \leq p(x) \forall x \in G$ .

Allora esiste  $\tilde{g}: E \rightarrow \mathbb{R}$  lineare tale che  $\tilde{g} = g$  su  $G$  e  $\tilde{g}(x) \leq p(x) \forall x \in E$ .

*Dimostrazione.* Facciamo questa dimostrazione per passi. Come prima cosa consideriamo l'insieme

$\mathcal{P} = \{h: \mathcal{D}(h) \rightarrow \mathbb{R} \mid \mathcal{D}(h) \text{ è un sottospazio lineare di } E, \quad h: \mathcal{D}(h) \rightarrow \mathbb{R} \text{ lineare}$

$$G \subseteq \mathcal{D}(h), \quad h|_G = g, \quad h \leq p \text{ su } \mathcal{D}(h)\}.$$

e dimostrano che  $\mathcal{P}$  è induttivo.

Sappiamo che

$$\mathcal{P} \neq \emptyset$$

perchè  $g: G \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{P}$ .

Dati  $h, k \in \mathcal{P}$  diremo che  $k$  è una estensione di  $h$  se

$$\mathcal{D}(h) \subseteq \mathcal{D}(k)$$

e  $k|_{\mathcal{D}(h)} = h$ : scriveremo per brevità  $h \leq k$  per intendere che  $k$  è estensione di  $h$ . La relazione appena definita tra  $h$  e  $k$  è una relazione di ordine parziale. Quindi per provare che  $\mathcal{P}$  è induttivo fissiamo  $H \subseteq \mathcal{P}$  totalmente ordinato e dimostriamo che  $H$  ha un maggiorante in  $\mathcal{P}$ .

Definiamo

$$\mathcal{D}(\bar{h}) = \bigcup_{h \in H} \mathcal{D}(h)$$

e

$$\bar{h}(x) = h(x) \text{ se } x \in \mathcal{D}(h).$$

Dimostriamo che  $\bar{h}: \mathcal{D}(\bar{h}) \rightarrow \mathbb{R}$  è un maggiorante per  $H$ . Dimostriamo anzitutto che  $\mathcal{D}(\bar{h})$  è un sottospazio di  $E$ .

Se  $x, y \in \mathcal{D}(\bar{h})$  allora abbiamo che

$$\exists h_x, h_y \in H$$

tali che

$$x \in \mathcal{D}(h_x) \quad e \quad y \in \mathcal{D}(h_y).$$

Poichè  $H$  è totalmente ordinato si ha che o  $h_x \leq h_y$  o  $h_y \leq h_x$ , cioè

$$\mathcal{D}(h_x) \subseteq \mathcal{D}(h_y) \tag{3.1}$$

oppure

$$\mathcal{D}(h_y) \subseteq \mathcal{D}(h_x); \tag{3.2}$$

se vale (3.1) abbiamo che

$$\mathcal{D}(h_x) \subseteq \mathcal{D}(h_y)$$

e che  $h_y|_{\mathcal{D}(h_x)} = h_x$ .

Questo implica che

$$x, y \in \mathcal{D}(h_y)$$

che a sua volta implica che

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad ax + by \in \mathcal{D}(h_y) \subseteq \mathcal{D}(\bar{h}).$$

Ciò dimostra che  $\mathcal{D}(\bar{h})$  è un sottospazio vettoriale in quanto abbiamo visto che è chiuso rispetto all'inclusione.

Dobbiamo ora vedere che  $\bar{h}$  è ben posta cioè dobbiamo verificare che ad ogni  $x \in \mathcal{D}(\bar{h})$  è associato in maniera univoca un  $t \in \mathbb{R}$  per cui abbia senso porre  $t = \bar{h}(x)$  ciò equivale a provare che se

$$x \in \mathcal{D}(h) \cap \mathcal{D}(k), \quad h, k \in H \implies h(x) = k(x).$$

Questo è vero in quanto essendo  $H$  totalmente ordinato abbiamo che  $h \leq k$  (o  $k \leq h$ ) dunque

$$\mathcal{D}(h) \subseteq \mathcal{D}(k)$$

e

$$k|_{\mathcal{D}(h)} = h.$$

Per concludere il primo passo della dimostrazione ci resta da verificare che  $\bar{h}: \mathcal{D}(\bar{h}) \rightarrow \mathbb{R}$  appartiene a  $\mathcal{P}$  cioè dobbiamo verificare che  $\bar{h}$  è lineare, che  $\bar{h}(x) \leq p(x)$  e che  $\bar{h}|_G = g$ .

La linearità segue dalla definizione di  $\bar{h}$ .

Per provare che  $\bar{h}(x) \leq p(x)$ , basta osservare che se  $x \in \mathcal{D}(h)$  con  $h \in H \subseteq \mathcal{P}$  si ha che

$$\bar{h}(x) = h(x) \leq p(x) \quad \forall x \in \mathcal{D}(h)$$

e quindi  $\bar{h}(x) \leq p(x) \quad \forall x \in \mathcal{D}(\bar{h})$ . Infine abbiamo che  $\bar{h}|_G = g$  perchè

$$h|_G = g \quad \forall h \in H \subseteq \mathcal{P}.$$

Quindi abbiamo mostrato che

$$\bar{h} \in \mathcal{P}$$

e che

$$\forall h \in H \quad h \leq \bar{h}$$

cioè abbiamo mostrato che  $H$  ha un elemento massimale cioè che  $\mathcal{P}$  è induttivo che è quanto volevamo dimostrare nel primo passo.

Ora se  $h \in H$  per definizione si ha che

$$h \leq \bar{h} \iff \mathcal{D}(h) \subseteq \mathcal{D}(\bar{h})$$

e che

$$\bar{h}|_{\mathcal{D}(h)} = h.$$

Applicando ora il Lemma di Zorn (Lemma 3.1) otteniamo che  $\mathcal{P}$  ha un elemento massimale. Sia  $\tilde{g}: \mathcal{D}(\tilde{g}) \rightarrow \mathbb{R}$  tale elemento ciò implica che

$$\tilde{g}|_G = g$$

$$\tilde{g}(x) \leq p(x) \quad \forall x \in X$$

$$\tilde{g} \text{ è lineare su } \mathcal{D}(\tilde{g}) \leq E.$$

Come secondo e ultimo passo dobbiamo dimostrare che

$$\mathcal{D}(\tilde{g}) \equiv E.$$

Facciamo ciò per assurdo quindi supponiamo che

$$\exists x_0 \in E \setminus \mathcal{D}(\tilde{g})$$

e proviamo che

$$\exists f \in \mathcal{P} \text{ tale che } f \neq \tilde{g} \text{ e } \tilde{g} \leq f \leq p.$$

Poniamo quindi

$$\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(\tilde{g}) + \mathbb{R}(x_0) = \{x + \lambda x_0 \mid x \in \mathcal{D}(\tilde{g}), \lambda \in \mathbb{R}\};$$

$\mathcal{D}(f)$  è un sottospazio vettoriale e

$$\mathcal{D}(\tilde{g}) \subsetneq \mathcal{D}(f) \ni x_0,$$

dunque abbiamo che

$$f(x + \lambda x_0) := \tilde{g}(x) + \lambda f(x_0) \quad \forall x \in \mathcal{D}(\tilde{g}), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Allora  $f: \mathcal{D}(f) \rightarrow \mathbb{R}$  è lineare e  $f(x) = \tilde{g}(x) \quad \forall x \in \mathcal{D}(\tilde{g})$

$f \in \mathcal{P}$  se dimostriamo che  $f(y) \leq p(y) \quad \forall y \in \mathcal{D}(f)$  il che equivale a dimostrare che

$$f(x + \lambda x_0) = \tilde{g}(x) + \lambda f(x_0) \leq p(x + \lambda x_0), \quad \forall x \in \mathcal{D}(\tilde{g}), \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Affermiamo che è sufficiente definire  $f(x_0)$  in modo tale che

$$\tilde{g}(x) + f(x_0) \leq p(x + x_0)$$

$$\tilde{g}(x) - f(x_0) \leq p(x - x_0),$$

o in modo equivalente

$$\tilde{g}(x) - p(x - x_0) \leq f(x_0) \leq p(x + x_0) - \tilde{g}(x). \quad (3.3)$$

Infatti, se quanto detto è vero, per  $\lambda > 0$  abbiamo che

$$\begin{aligned} \tilde{g}(x) + \lambda f(x_0) &= \\ &= \lambda \left[ \tilde{g}\left(\frac{x}{\lambda}\right) + f(x_0) \right] \\ &\leq \lambda \left[ p\left(\frac{x}{\lambda} + x_0\right) \right] \\ &= p(x + \lambda x_0), \end{aligned}$$

mentre nel caso in cui  $\lambda < 0$

$$\begin{aligned} \tilde{g}(x) + \lambda f(x_0) &= \\ &= -\lambda \left[ \tilde{g}\left(-\frac{x}{\lambda}\right) - f(x_0) \right] \\ &\leq -\lambda \left[ p\left(-\frac{x}{\lambda} - x_0\right) \right] \\ &= p(x + \lambda x_0). \end{aligned}$$

Per fare in modo che la (3.3) sia soddisfatta basta scegliere  $f(x_0)$  tale che

$$\sup_{y \in \mathcal{D}(\tilde{g})} \{\tilde{g}(y) - p(y - x_0)\} \leq f(x_0) \leq \inf_{x \in \mathcal{D}(\tilde{g})} \{p(x + x_0) - \tilde{g}(x)\}.$$

Poichè

$$\sup_{a \in A} a \leq \inf_{b \in B} b \iff a \leq b \quad \forall a \in A, \quad \forall b \in B$$

ci resta da verificare che

$$\tilde{g}(y) - p(y - x_0) \leq p(x + x_0) - \tilde{g}(x) \quad \forall x, y \in \mathcal{D}(\tilde{g})$$

il che equivale a verificare che

$$\tilde{g}(x + y) = \tilde{g}(y) + \tilde{g}(x) \leq p(x + x_0) + p(y - x_0).$$

Per costruzione  $\tilde{g} \in \mathcal{P}$  quindi

$$\begin{aligned}\tilde{g}(x+y) &\leq p(y+x) \\ &= p((y-x_0) + (x+x_0)) \\ &\leq p(y-x_0) + p(x+x_0);\end{aligned}$$

quindi  $\tilde{g}$  si può estendere ma questo è assurdo perchè  $\tilde{g}$  è massimale; dunque  $\mathcal{D}(\tilde{g}) \equiv E$  e questo conclude la dimostrazione.  $\square$

Vediamo ora un'applicazione di questo teorema al Lemma di Zorn.

**Teorema 3.2.** *Sia  $E$  uno spazio di dimensione infinita e sia  $\mathcal{S} = \{S \subseteq E \mid S \text{ linearmente indipendente}\}$ . Allora  $\mathcal{S}$  ammette un elemento massimale  $\mathcal{B}$  rispetto alla relazione di inclusione.*

*Dimostrazione.* Sia  $H \subseteq \mathcal{S}$ . Dobbiamo dimostrare che  $H$  ha un maggiorante in  $\mathcal{S}$ .

Sia

$$M = \bigcup_{S \in H} S$$

e proviamo che  $M \in \mathcal{S}$  ossia che  $M$  è linearmente indipendente cioè proviamo che  $M$  è il maggiorante cercato.

Sia  $F \subseteq M$  finito, ossia

$$F = \{v_1, \dots, v_k\}$$

questo implica che

$$\forall i \in \{1, \dots, k\} \quad \exists S_i \in H \text{ tale che } v_i \in S_i$$

A meno di permutazioni degli indici essendo  $H$  totalmente ordinato possiamo supporre che

$$S_1 \subseteq S_2 \subseteq \dots \subseteq S_k$$

il che implica che

$$F \subseteq S_k \in \mathcal{S}$$

cioè  $F$  è linearmente indipendente. Dunque  $(\mathcal{S}, \subseteq)$  soddisfa le ipotesi del Lemma di Zorn quindi esiste  $\mathcal{B}$  massimale in  $\mathcal{S}$  che è quanto volevamo dimostrare.  $\square$

Dopo aver dimostrato il teorema di Hahn Banach possiamo enunciare e dimostrare la proprietà di separazione tra punto e convessi.

**Teorema 3.3.** *Sia  $E$  uno spazio vettoriale. Sia  $C \neq \emptyset$  un insieme convesso, chiuso e sia  $x_0 \in E \setminus C$ . Allora  $\exists f \in E'$  tale che  $f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in C$ .*



*Dimostrazione.* Di questa proposizione daremo due dimostrazioni una analitica e una geometrica nel caso  $E = \mathbb{R}^n$ . Cominciamo con l'apporre la versione analitica. Dividiamo questa dimostrazione in due casi.

PRIMO CASO

$$0 \in C$$

allora abbiamo che

$$C = \{x \in X \mid p_C(x) \leq c, c > 0\}$$

e

$$\exists k > 0 \text{ tale che } p_C(x) \leq k\|x\| \quad \forall x \in E. \quad (3.4)$$

Poichè  $x_0 \notin C$  abbiamo che  $p_C(x_0) > c$ .

Poniamo

$$G = \mathbb{R}x_0 = \{\lambda x_0 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

allora

$$\forall x = (\lambda x_0) \in G, \quad \forall \lambda > 0, \quad g(x) = \lambda p_C(x_0)$$

$g$  è lineare. Verifichiamo che  $g(x) \leq p(x) \quad \forall x \in G$ .

$$\text{se } \lambda > 0 \quad g(x) = g(\lambda x_0) = \lambda p_C(x_0) = p_C(\lambda x_0) = p_C(x)$$

$$\text{se } \lambda < 0 \quad g(x) = g(\lambda x_0) = \lambda p_C(x_0) = -p_C(-\lambda x_0) \leq p_C(x)$$

dunque possiamo applicare il teorema di Hahn Banach. Quindi  $\exists f: E \rightarrow \mathbb{R}$  lineare e tale che

$$f|_G = g \text{ cioè } f(x_0) = g(x_0) = p_C(x_0) > c$$

e che

$$f(x) \leq p_C(x) \quad \forall x \in E.$$

Quindi per (3.4) abbiamo che

$$f(x) \leq k\|x\| \quad \forall x \in E$$

e

$$-f(x) = f(-x) \leq k\|x\| \quad \forall x \in E$$

dunque abbiamo ottenuto che

$$|f(x)| \leq k\|x\| \quad \forall x \in E \quad \implies f \in E'$$

(dove con  $E'$  indichiamo lo spazio degli operatori lineari e continui). Quindi

$$\forall x \in C \quad f(x) \leq p_C(x) \leq c < f(x_0) \quad \implies \quad f(x) < f(x_0)$$

che è quanto volevamo dimostrare.

SECONDO CASO

$$0 \notin C$$

allora poichè  $C \neq \emptyset$  esiste  $\bar{x} \in C$ . Chiamiamo

$$C' = C - \{\bar{x}\} = \{x - \bar{x} \mid x \in C\}.$$

Dunque  $0 \in C'$ ,  $C'$  è convesso e  $x_0 - \bar{x} \notin C'$  (infatti se fosse  $x_0 - \bar{x} \in C' = C - \{\bar{x}\}$  allora  $x_0 \in C$  il che è assurdo). Possiamo applicare a  $C'$  il primo caso ottenendo che

$$\exists f \in E' \text{ tale che } f(x') < f(x_0 - \bar{x}) \quad \forall x' \in C'$$

il che implica

$$f(x - \bar{x}) \leq f(x_0 - \bar{x}) \quad \forall x \in C$$

e quindi

$$f(x) - f(\bar{x}) \leq f(x_0) - f(\bar{x}) \quad \forall x \in C$$

cioè

$$f(x) \leq f(x_0)$$

che è quanto volevamo dimostrare.  $\square$ .

Passiamo ora alla dimostrazione geometrica; sia quindi  $E = \mathbb{R}^n$

Sia

$$V(x_0) = \{v \in \mathbb{S}^{n-1} \mid \exists t > 0, x_0 + tv \in C\}$$

allora esiste un  $v_0 \in V(x_0)$  tale che  $v_0 \cdot v \geq 0 \quad \forall v \in V(x)$ . Una volta introdotto un tale  $v_0$  definiamo

$$f(x) = -\alpha x v_0$$

con  $\alpha$  scelto in modo tale che

$$f(x_0) = -\alpha x_0 v_0 = 1,$$

quindi  $\alpha = -\frac{1}{x_0 v_0}$ . Abbiamo quindi definito

$$f(x) = \frac{1}{x_0 v_0} x v_0.$$

Consideriamo ora

$$y \in C$$

e abbiamo che

$$y = x_0 + tv \quad t > 0, v \in V(x_0)$$

dunque

$$\begin{aligned} f(y) &= f(x_0 + tv) = \frac{1}{x_0 v_0} (x_0 + tv)v_0 \\ &= 1 + tvv_0 < 1 = f(x_0); \end{aligned}$$

infatti

$$\begin{aligned} C \ni 0 &= x_0 + t\tilde{v} \quad \tilde{v} \in V(x_0) \\ 0 &= x_0 v_0 + t\tilde{v}v_0 \end{aligned}$$

ora poichè  $t\tilde{v}v_0 > 0$  si ha che necessariamente  $x_0 v_0 < 0$  quindi  $f(y) < f(x_0)$ . Per completare la dimostrazione resta da verificare che

$$\exists v_0 \in V(x_0) \text{ tale che } v_0 v \geq 0 \quad \forall v \in V(x_0).$$

Se  $n = 1$  allora  $C \subseteq \mathbb{R}$  è un segmento dunque esiste un unico  $v_0 = v \in V(x_0)$  e dunque  $v \geq 0$ .

Se  $n = 2$

$$\exists v_1, v_2 \in V(x_0), \text{ tali che } v_1 \neq v_2.$$

Supponiamo che  $v_1$  sia orientato come  $e_1$  allora

$$V(x_0) \cap \langle v_1, v_2 \rangle \subseteq \mathbb{S}^1 = \{e^{i\vartheta} \mid \vartheta \in I\}$$

con  $I = [0, \vartheta_2]$  o  $I = [-\vartheta_2, 0]$  con  $\vartheta_2 \leq \pi$  (Fig.1, Fig.2). Se fosse  $\vartheta_2 > \pi$  per la convessità di  $C$  si avrebbe che

$$\mathbb{S}^1 \in V(x_0) \cap \langle v_1, v_2 \rangle$$

cioè avremmo  $x_0 \in C$  ma questo è assurdo poichè per ipotesi  $x_0 \notin C$ .

Dunque a meno di rotazioni abbiamo che

$$V(x_0) \cap \pi_2 \simeq [0, \vartheta_2] \quad \vartheta_2 \in [0, \pi]$$

dove con  $\pi_2$  abbiamo indicato il piano due-dimensionale generato da  $v_1$  e  $v_2$ . Esiste quindi  $\tilde{e}_2 \in V(x_0) \cap \pi_2$  tale che posto  $w' = e_1 + \tilde{e}_2$  e  $v' = \frac{w'}{\|w'\|}$  si ha che  $\forall v \in V(x_0) \cap \pi_2$   $vv' \geq 0$  infatti

$$vv' = \frac{1}{\|w'\|} (ve_1 + v\tilde{e}_2) \geq 0.$$

Iterando il procedimento otteniamo che

$$\exists v_1, \dots, v_n \in V(x_0), \quad v_1 \neq v_2 \neq \dots \neq v_n.$$

Quindi abbiamo che  $w_0 = e_1 + \tilde{e}_2 + \dots, \tilde{e}_n$  dunque esiste  $v_0 = \frac{w_0}{\|w_0\|}$ .  
Dobbiamo dimostrare che

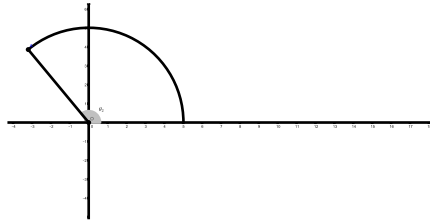
$$\forall v \in V(x_0) \quad vv_0 \geq 0.$$

Questo è vero poichè

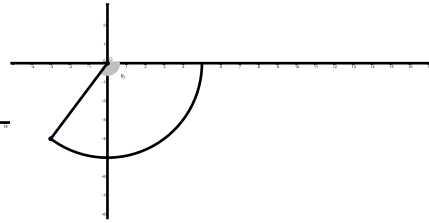
$$vv_0 = \frac{1}{\|w_0\|} (ve_1 + v\tilde{e}_2 \dots + v\tilde{e}_n) \geq 0$$

poichè tutti gli addendi sono positivi.

Ora la dimostrazione è completa.  $\square$



(a) Fig.1



(b) Fig.2

# Capitolo 4

## Punti ed insiemi estremali

In questo capitolo daremo la definizione di insieme e di punto estremo; poi enunceremo la condizione di esistenza di un punto estremo nota come teorema di Krein-Milman. Daremo poi una caratterizzazione degli insiemi estremali tramite un Corollario del teorema di Krein-Milman

**Definizione 4.1.** (Sottoinsieme estremo) Dato un insieme  $E \subseteq X$  con  $X$  spazio vettoriale, diremo che  $M \subseteq E$  è un *sottoinsieme estremo* se un punto della forma:

$$\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \quad \alpha \in (0, 1)$$

con  $x_1, x_2 \in E$  appartiene ad  $M$  solo se  $x_1, x_2 \in M$ . Se  $M = \{x_0\}$  consiste di un solo punto si parla di punto estremo.

Inoltre denotiamo con  $Ext(E) = \{x \in E \mid x \text{ è un punto estremo}\}$ .

*Esempio 4.1.* Se consideriamo gli insiemi  $\{x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$  (Fig.1) e  $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$  abbiamo che ogni singolo punto di tali insiemi è estremo e tali insiemi sono anche estremali.

Se consideriamo, invece, l'insieme costituito da un quadrato abbiamo che i lati del quadrato risultano essere sottoinsiemi estremali, mentre i vertici (A,B,C,D) risultano essere punti estremali (Fig.2).

Prima di vedere la condizione necessaria affinché esista un punto estremo espressa tramite il teorema di Krein-Milman enunciamo e dimostriamo un lemma che ci sarà utile nella dimostrazione di tale teorema.

**Lemma 4.1.** *Se  $(M_i)_{i \in I}$  sono insiemi compatti tali che  $\forall F \subseteq I$  con  $F$  insieme finito e*

$$\bigcap_{i \in F} M_i \neq \emptyset$$



Fig.1



Fig.2

(a) Fig.1

(b) Fig.2

Figura 4.1: Esempi di convessi con sottoinsiemi estremali

allora anche

$$\bigcap_{i \in I} M_i \neq \emptyset.$$

*Dimostrazione* Supponiamo per assurdo che

$$\bigcap_{i \in I} M_i = \emptyset$$

allora avremmo che gli insiemi

$$A_i = \mathbb{R}^n \setminus M_i$$

sono aperti e tali che

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \mathbb{R}^n.$$

Dunque  $\forall j \in I$  fissato abbiamo che

$$M_j \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i.$$

Per la compattezza  $\exists F \subseteq I$  tale che

$$M_j \subseteq \bigcup_{i \in F} A_i = \mathbb{R}^n \setminus \bigcap_{i \in F} M_i;$$

ora se chiamiamo

$$F' = F \cup \{j\}$$

otteniamo un assurdo perchè abbiamo che

$$M_j \cap M_i = \emptyset \quad \forall i \in F$$

che è contro l'ipotesi. Dunque necessariamente deve essere

$$\bigcap_{i \in I} M_i \neq \emptyset.$$

□

**Teorema 4.1.** (*Krein-Milman*) Sia  $E \neq \emptyset$  un sottoinsieme compatto e convesso contenuto in  $\mathbb{R}^n$ ; allora esiste almeno un punto estremale.

*Dimostrazione.* In questa dimostrazione useremo il lemma di Zorn 3.1.  $E$  stesso è un sottoinsieme estremale di  $E$ . Definiamo quindi la famiglia non vuota

$$\mathcal{M} = \{M \subseteq E \mid M \text{ sottoinsieme estremale compatto}\}$$

ed ordiniamo  $\mathcal{M}$  per inclusione. Se

$$\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}$$

è un insieme ordinato (cioè gli elementi sono incatenati) abbiamo che

$$\bigcap_{M \in \mathcal{M}_1} M \neq \emptyset$$

per il Lemma 4.1.

Dal Lemma di Zorn (lemma 3.1) abbiamo che

$$\exists M_0 \in \mathcal{M}$$

elemento minimale (Definizione 3.4); se  $M_0$  contiene due elementi distinti cioè se

$$\exists x_0, y_0 \in M_0 \text{ tali che } x_0 \neq y_0$$

allora

$$\exists f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

funzionale lineare e continuo tale che:

$$f(x_0) \neq f(y_0).$$

Definiamo

$$M_1 = \{x \in M_0 \mid f(x) = \inf_{y \in M_0} f(y)\}$$

che risulta essere un sottoinsieme proprio di  $M_0$  grazie alla compattezza di  $M_0$ .

Supponiamo ora che  $x_1, x_2$  siano tali che

$$\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in M_1 \subseteq M_0$$

per qualche  $\alpha \in (0, 1)$ ;

dato che  $M_0$  è estremale ricaviamo che

$$x_1, x_2 \in M_0.$$

Per come abbiamo definito  $M_1$  si deve anche avere che

$$x_1, x_2 \in M_1,$$

infatti se per assurdo avessimo che  $x_1 \notin M_1$  avremmo che:

$$\begin{aligned} \inf_{y \in M_0} f(y) &= f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \\ &= \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) \\ &> \alpha \inf_{y \in M_0} f(y) + (1 - \alpha)f(x_2) \\ &\geq \alpha \inf_{y \in M_0} f(y) + (1 - \alpha) \inf_{y \in M_0} f(y) \\ &= \inf_{y \in M_0} f(y) \end{aligned}$$

il che è assurdo quindi abbiamo che  $x_1, x_2 \in M_1$ . Dunque anche  $M_1$  è un sottoinsieme estremo contenuto in  $M_0$ , ma che non può coincidere con  $M_0$ . Questo contraddice la minimalità di  $M_0$  e quindi  $M_0$  deve consistere di un solo elemento e quindi abbiamo trovato un punto estremo.  $\square$

Dopo aver visto il teorema di Krein-Milman vediamo una caratterizzazione degli insiemi estremali tramite il seguente corollario.

**Corollario 4.1.** *Sia  $\emptyset \neq E \subseteq \mathbb{R}^n$  un sottoinsieme convesso e compatto di uno spazio topologico  $X$ ; allora*

$$E = \overline{\text{co}(\text{Ext}(E))},$$

*cioè  $E$  coincide con il più piccolo insieme chiuso contenente tutte le combinazioni convesse*

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i x_i, \quad \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geq 0, \quad x_i \in \text{Ext}(E), \quad i = 1, \dots, N$$

*Dimostrazione.* Per dimostrare l'uguaglianza dobbiamo mostrare le due inclusioni.

Iniziamo col dimostrare " $\subseteq$ ".

È chiaro che

$$\text{Ext}(E) \subseteq E$$

e quindi per la convessità e la chiusura di  $E$  abbiamo che

$$\overline{\text{co}(\text{Ext}(E))} \subseteq E.$$

Dimostriamo ora " $\supseteq$ ".

Supponiamo che esista

$$x_0 \in E \setminus \overline{\text{co}(\text{Ext}(E))};$$



fissiamo

$$c \in \overline{\text{co}(\text{Ext}(E))}$$

e troviamo che l'insieme

$$C = \overline{\text{co}(\text{Ext}(E))} - c$$

è un convesso compatto con  $0 \in C$  e  $x_0 - c \notin C$ .

Esiste quindi

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

funzionale lineare e continuo tale che

$$f(x_0 - c) > 1, \quad f(y) \leq 1 \quad \forall y \in C$$

grazie al teorema di separazione tra punto e convesso (Teorema 3.3).

Definiamo

$$E_1 = \{x \in E \mid f(x) = \sup_{y \in E} f(y)\}.$$

Dato che  $x_0 \in E$  abbiamo che

$$E_1 \cap \text{Ext}(E) = \emptyset;$$

infatti se esistesse

$$x \in E_1 \cap \text{Ext}(E)$$

avremmo che

$$x \in C + c$$

da cui

$$f(x_0 - c) > 1 \implies f(x_0) > 1 + f(c).$$

D'altronde

$$x \in C + c \implies x - c \in C \implies f(x - c) \leq 1.$$

Ma allora

$$f(x) \leq 1 + f(c) < f(x_0)$$

e quindi  $x \notin E_1$ .

Questo è sufficiente per concludere: infatti

$$E_1 \subseteq E$$

è un sottoinsieme chiuso di  $E$ . In più  $E_1$  è un sottoinsieme estremale di  $E$ ; d'altra parte, ogni sottoinsieme estremale di  $E_1$  è anche un sottoinsieme

estremale di  $E$ . Esistono quindi punti estremali di  $E_1$  che quindi sono anche punti estremali per  $E$ , ma ciò non può essere perchè

$$E_1 \cap Ext(E) = \emptyset$$

dunque non esiste

$$x_0 \in E \setminus \overline{co(Ext(E))}$$

il che implica

$$E = \overline{co(Ext(E))}.$$

□

**Osservazione 4.1.** *Il risultato di questo Corollario così come il teorema di Krein-Milman valgono più in generale in spazi topologici lineari localmente convessi.*

# Bibliografia

- [1] Paolo Acquistapace. Appunti di analisi convessa. Technical report, Università di Pisa, 2012.
- [2] Haim Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, 2011.
- [3] Kōsaku Yosida. *Functional analysis*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the sixth (1980) edition.