



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FERRARA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E
NATURALI

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Moto per curvatura nel piano

Relatore:
Dott. Michele Miranda

Candidato:
Luca Biscuola

Anno accademico 2011-2012
Sessione autunnale

Prefazione

In questa tesi abbiamo studiato il moto per curvatura nel piano: tale problema consiste nel considerare una curva immersa nel piano e nel farla evolvere richiedendo che ogni punto si muova con velocità normale pari alla curvatura. Tale tipo di evoluzione descrive molti fenomeni naturali come, ad esempio, lo scioglimento di un cubetto di ghiaccio, lo sgonfiamento di un palloncino e l'evoluzione della superficie di una fiamma a contatto con l'aria.

Abbiamo considerato solo il caso bidimensionale del moto per curvatura (e di questo solo alcuni aspetti); questo perché il caso piano è il più semplice e serve come base per lo studio del moto di ipersuperfici in dimensione più alta. Oltre a ciò, il moto piano è molto più regolare; in dimensione più alta infatti il moto è caratterizzato dall'apparizione di singolarità (comparsa di autointersezioni, perdita di regolarità delle superfici, ecc.). Nonostante tutto, lo studio del moto planare ed in particolare dell'evoluzione autosimile costituisce uno strumento importante per la classificazione delle singolarità.

Il moto per curvatura ha avuto un interesse crescente nella prima metà degli anni ottanta grazie ad Hamilton [1] che aveva indicato tale studio come possibile metodo per la dimostrazione della congettura di Poincaré. Tale progetto ha in effetti avuto successo (flusso di Ricci) concludendosi con i lavori del matematico russo Perelman [2] del 2002/2003, grazie al quale la classificazione delle singolarità venne portata a termine.

La presente tesi è strutturata come segue: nei primi due capitoli abbiamo richiamato le proprietà principali delle curve ed il *Teorema dei quattro vertici* [4] con relativa dimostrazione. Nel *Capitolo 3* abbiamo analizzato il moto per curvatura nel piano e le curve autosimili, necessarie quest'ultime per classificare le singolarità. L'obiettivo del *Capitolo 4* è dimostrare che la sola curva di Jordan che evolve in modo autosimile per curvatura è la circonferenza. Nel *Capitolo 5* si studiano le equazioni che descrivono l'evoluzione delle curve convesse.

Indice

1	Curve nel piano	1
2	Teorema dei quattro vertici	7
3	Moto per curvatura media	15
4	Evoluzione omotetica di curve	23
5	Evoluzione delle curve convesse	33
	Bibliografia	49

Capitolo 1

Curve nel piano

In questo primo capitolo, stabilito cos'è una curva, si elencano le proprietà delle curve necessarie per lo svolgimento della tesi e si enuncia il *Teorema della curva di Jordan*.

Definizione 1.1. Sia $[a, b]$ un intervallo e siano $x(t), y(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni continue. Si definisce *curva nel piano* un'applicazione continua $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. γ è detta parametrizzazione della curva e le equazioni

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

sono dette equazioni parametriche della curva con parametro t .

Il punto $\gamma(a)$ viene chiamato *punto iniziale* della curva, mentre $\gamma(b)$ si dice il *punto finale*. Il *sostegno* della curva è rappresentato dall'immagine $\gamma([a, b])$ e spesso lo indicheremo semplicemente con γ .

In seguito gli intervalli di partenza saranno quello unitario $[0, 1]$ oppure, quando parametrizziamo per lunghezza d'arco, $[0, L]$, anzi-

ché $[a, b]$.

Definizione 1.2. Una curva γ si dice *semplice* se per ogni coppia di punti distinti $t_1, t_2 \in [a, b]$ con almeno uno dei due interno all'intervallo si ha $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$.

Definizione 1.3. Una curva γ si dice *chiusa* se $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Osservazione 1.1. Una curva può essere allo stesso tempo chiusa e semplice, dato che per essere semplice deve avere immagini diverse per ogni coppia di punti interni all'intervallo $[a, b]$.

Ad esempio $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$ per $t \in [0, 2\pi]$ è sia semplice che chiusa, mentre $\psi(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$ per $t \in [0, 2\pi]$ è chiusa ma non semplice, prendendo infatti $t_1 = \pi/8 \neq t_2 = 9\pi/8$ si ha $\psi(\pi/8) = (\cos \pi/4, \sin \pi/4) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) = (\cos 9\pi/4, \sin 9\pi/4) = \psi(9\pi/8)$.

Al contrario la curva $\gamma(t) = (t, t^2)$ per $t \in [-1, 1]$ è semplice ma non chiusa, infatti $\gamma(-1) = (-1, 1) \neq (1, 1) = \gamma(1)$ e, poiché $x(t) = t$ è una funzione iniettiva, γ risulta semplice.

Definizione 1.4. Una curva γ si dice *regolare* se $\gamma \in C^1([a, b])$ e $\gamma'(t) \neq 0 \forall t \in [a, b]$.

Esempi 1.1. Vediamo alcuni esempi.

1. Curva grafico di una funzione. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^1 , poniamo $\gamma(t) = (t, f(t))$, $t \in [a, b]$. Essendo $\gamma'(t) = (1, f'(t))$, la curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ è una curva regolare, semplice e non chiusa il cui sostegno è il grafico della funzione f .

2. Circonferenza. Una circonferenza nel piano xy ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = \alpha + \rho \cos t \\ y(t) = \beta + \rho \sin t \end{cases}$$

dove (α, β) sono le coordinate del centro e ρ è il raggio della circonferenza. Dalle equazioni parametriche otteniamo $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \rho^2$ che è l'equazione cartesiana della circonferenza.

3. Ellisse. Un'ellisse con assi paralleli agli assi cartesiani ha, nel piano xy , equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = \alpha + a \cos t \\ y(t) = \beta + b \sin t \end{cases}$$

e l'equazione cartesiana è $\frac{(x - \alpha)^2}{a^2} + \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = 1$.

Se $\alpha = \beta = 0$, si ha un'ellisse il cui sostegno è contenuto nel rettangolo delimitato dalle rette $x = \pm a$ ed $y = \pm b$. I punti $(\pm a, 0)$ e $(0, \pm b)$ sono detti vertici dell'ellisse e per $a \geq b$, posto $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, i punti $p_i = (\pm c, 0)$ sono i fuochi dell'ellisse. Si definisce eccentricità il valore $e = c/a$, si noti che $0 \leq e < 1$ e se $e = 0$ otteniamo una circonferenza.

Definizione 1.5. Due curve regolari parametriche $\varphi_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\varphi_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$ si dicono *equivalenti* se esiste una funzione di classe C^1 , $\gamma : [c, d] \rightarrow [a, b]$ strettamente monotona iniettiva e suriettiva (biiettiva) in $[c, d]$ per cui $\varphi_2(t) = \varphi_1(\gamma(t))$ per ogni $t \in [c, d]$. Si nota che due curve equivalenti descrivono quindi lo stesso sostegno ma in modo differente.

È facile vedere che la riparametrizzazione per lunghezza d'arco definisce una curva equivalente: in tal caso, indicando con $v(t) = \sqrt{(\partial x / \partial t)^2 + (\partial y / \partial t)^2}$ la velocità scalare e con s il parametro d'arco, si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t}.$$

Definizione 1.6. Il vettore tangente ad una curva regolare $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ all'istante t è $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$ mentre il versore tangente è dato da

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} = \left(\frac{x'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}, \frac{y'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} \right).$$

A partire dal vettore tangente si può calcolare la retta tangente nel punto t_0 che ha equazione $r(t) = \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0)$. Il versore normale si ottiene ruotando in senso antiorario il versore tangente di un angolo pari a $\pi/2$; si ha quindi

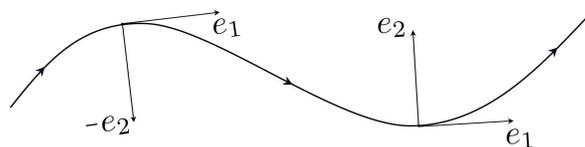
$$N(t) = \left(\frac{-y'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}, \frac{x'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} \right),$$

in modo che $T(t) \cdot N(t) = 0$.

Supponendo che la curva sia di classe C^2 , si ha che il vettore $T'(t)$, essendo ortogonale a T , è parallelo ad $N(t)$; esiste quindi un numero reale $k(t)$, detto curvatura della curva piana, tale che

$$T'(t) = k(t)N(t).$$

È doveroso precisare che, sia ora che nei paragrafi successivi, $k(t)$ è la *curvatura con segno*, individuata da e_1 ed e_2 come nel seguente sistema cartesiano di destra.



Per una curva di equazioni $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ la curvatura nel punto $\gamma(t)$ è data da

$$k(t) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{\sqrt{(x'^2(t) + y'^2(t))^3}}.$$

Osservazione 1.2. Nelle curve regolari il versore tangente è sempre ben definito.

Definizione 1.7. Una *curva di Jordan* è una curva piana semplice chiusa. Si ha quindi a che fare con una funzione continua $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che:

- la curva sia semplice, cioè senza punti di autointersezione;
- la curva sia chiusa, ovvero abbia estremi coincidenti.

Teorema 1.1 (Jordan). *Se γ è una curva chiusa semplice nel piano Euclideo, il complementare $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ è sconnesso e consiste di due componenti connesse, una limitata ed una no, aventi entrambe γ come frontiera.*

Osservazione 1.3. Il *Teorema della curva di Jordan* è valido per qualsiasi curva continua, anche non necessariamente regolare.

Capitolo 2

Teorema dei quattro vertici

La curvatura con segno k di una curva piana chiusa di classe C^2 è una funzione continua definita su un compatto, per cui ammette sempre un massimo ed un minimo; in particolare, k' si annulla almeno in due punti. Un risultato inaspettato è che la derivata della curvatura con segno di una curva di Jordan in realtà si annulla in almeno quattro punti.

L'idea è che ogni punto di intersezione fra il sostegno di una curva regolare di Jordan e la circonferenza circoscritta produce almeno due vertici.

Il materiale presentato in questo capitolo è preso dal lavoro di Osserman [4].

Definizione 2.1. Considerata una qualsiasi curva regolare, si definisce *vertice* un massimo o minimo locale della curvatura e quindi un punto dove la derivata della curvatura si annulla. Un'ellisse, ad esempio, ha esattamente quattro vertici, in corrispondenza dei semiassi.

Teorema 2.1 (Dei quattro vertici). *Ogni curva di Jordan di classe C^2 ha almeno quattro vertici.*

Il Teorema si dimostra considerando la circonferenza circoscritta alla curva e quanto segue.

Definizione 2.2. Sia (X, d) uno spazio metrico. L'insieme

$$B_\rho(x) = \{y \in X : d(y, x) < \rho\}$$

si dice *disco aperto* di centro x e raggio ρ . Sostituendo, nella definizione di $B_\rho(x)$, al simbolo $<$ il simbolo \leq , si ha un *disco chiuso*.

Definizione 2.3. Sia E un insieme compatto contenente almeno due punti. Si definisce *circonferenza circoscritta ad E* il bordo del disco chiuso di raggio minimo contenente E .

Teorema 2.2. Sia $\gamma \in C^2$ una curva di Jordan. Indicata con C la circonferenza circoscritta al sostegno di γ , si ha che

- (a) $\gamma \cap C$ contiene almeno due punti;
- (b) se $\gamma \cap C$ ha almeno n punti, γ ha almeno $2n$ vertici.

Ne consegue che quando $\gamma \cap C$ ha un numero infinito di punti, γ deve avere infiniti vertici.

Osservazione 2.1. Sia ρ il raggio di C . Se $\gamma \cap C$ contiene almeno n punti, un arco completo di γ si trova su C oppure γ ha almeno n vertici dove la curvatura k soddisfa $k < 1/\rho$ ed almeno n vertici dove $k \geq 1/\rho$. Quanto appena detto è una conseguenza diretta del *Teorema 2.2* e della sua dimostrazione.

Enunciamo e dimostriamo tre semplici lemmi.

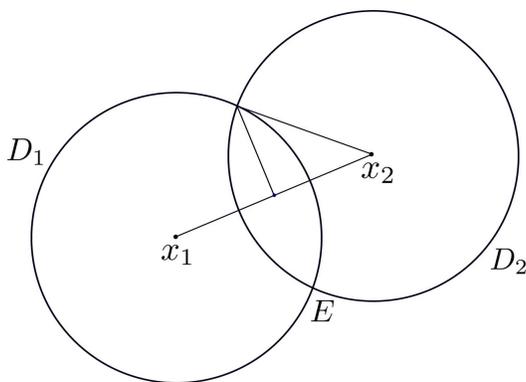
Lemma 2.1. Sia E un insieme compatto contenente almeno due punti. Tra tutti i dischi chiusi D che includono E , uno solo ha raggio minimo $\rho > 0$.

Dimostrazione. Sia data la funzione continua $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(p) = \max_{x \in E} |x - p|.$$

Contenendo E almeno due punti, si ha $f(p) > 0 \forall p \in \mathbb{R}^2$. Il disco chiuso di centro p e raggio ρ contiene E se e solo se $\rho \geq f(p)$ e, chiaramente, $f(p) \rightarrow +\infty$ quando $\|p\| \rightarrow +\infty$. Quindi f ha un punto $p_0 \in \mathbb{R}^2$ di minimo assoluto e $\rho = \rho_0 = f(p_0) > 0$ è il minimo raggio di un disco chiuso contenente E .

Si supponga ora che E sia contenuto in due dischi chiusi distinti D_1 e D_2 entrambi di raggio ρ_0 . Si ha quindi $E \subseteq D_1 \cap D_2$, come in figura.

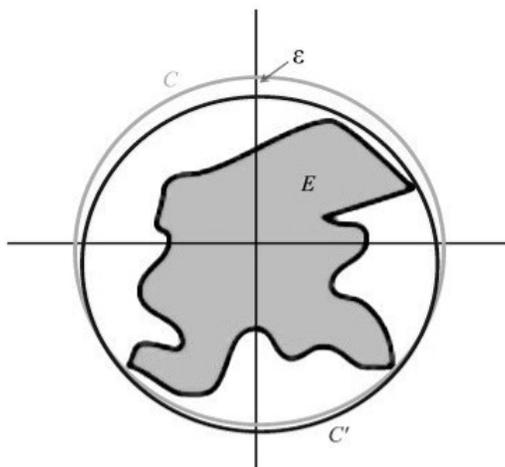


L'intersezione di due dischi distinti di raggio uguale è però sempre contenuta in un disco di raggio minore, in contraddizione alla scelta di ρ_0 . Il disco di raggio minimo contenente E è pertanto unico. \square

Chiameremo quindi circonferenza circoscritta ad E la circonferenza determinata dal *Lemma 2.1*.

Lemma 2.2. *Sia E un insieme compatto contenente almeno due punti. Se C è la circonferenza circoscritta ad E , ogni arco di C con lunghezza maggiore della semicirconferenza deve intersecare E . In particolare, $C \cap E$ contiene almeno due punti, e se ne contiene esattamente due allora sono antipodali.*

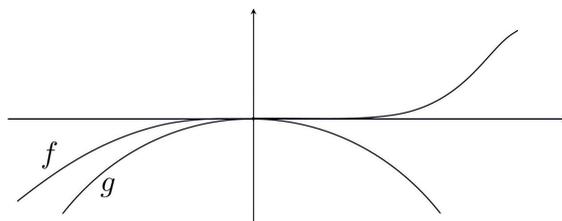
Dimostrazione. Si suppone che C sia centrata nell'origine del piano cartesiano ed abbia raggio $\rho > 0$. È sufficiente dimostrare che E interseca la semicirconferenza superiore C_+ . Essendo C_+ ed E compatti, se, per assurdo, fossero disgiunti avrebbero distanza ε strettamente positiva. E sarebbe quindi contenuto nell'insieme formato dal disco di bordo C a cui sia stato tolto l'intorno di raggio ε della semicirconferenza superiore. Si verifica facilmente che, come nella figura sottostante, questo insieme è contenuto in una circonferenza C' con centro sull'asse delle y e di raggio strettamente minore di ρ , in contraddizione con le ipotesi iniziali (è sufficiente prendere la palla di centro $(0, -\varepsilon/2)$ e raggio $\sqrt{\rho^2 - \varepsilon^2}$). \square



Lemma 2.3. *Sia $\gamma \in \mathbb{R}^2$ una curva tangente nel punto p alla circonferenza C di raggio ρ e sia k la curvatura di γ . Si supponga che*

γ e C abbiano lo stesso orientamento. Se $k(p) > 1/\rho$, ogni punto in un intorno di p si trova all'interno di C , mentre, se $k(p) < 1/\rho$, ogni punto in un intorno di p si trova all'esterno di C .

Dimostrazione. È sufficiente ragionare sui grafici delle due funzioni e con la formula di Taylor al secondo ordine. Indicati con f e g i due grafici, come in figura, supponiamo, senza ledere in generalità, che $f(0) = g(0) = 0$ e quindi $f'(0) = g'(0) = 0$. Si ottiene $f''(0) > g''(0)$ con $k_f = f''(0)$ e per la formula di Taylor al secondo ordine è possibile affermare che g è sotto f . \square

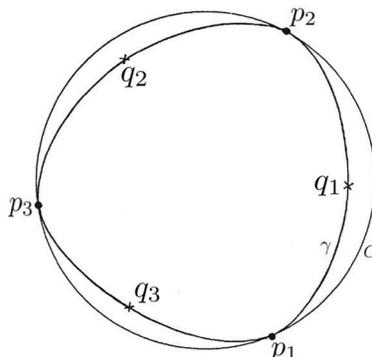


Veniamo ora alla dimostrazione del *Teorema 2.2* che segue utilizzando i lemmi appena dimostrati.

Siano $\gamma \in \mathbb{R}^2$ una curva di Jordan, C la sua circonferenza circoscritta e ρ il raggio di quest'ultima.

È evidente che il punto (a) del *Teorema 2.2* segue direttamente dal *Lemma 2.2*.

Per dimostrare il punto (b), si considerano p_1, \dots, p_n punti di $\gamma \cap C$. Se orientiamo ciclicamente questi n punti lungo γ , si ottengono n archi $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ di γ , ognuno delimitato da una coppia di punti di $\gamma \cap C$, come in figura.



Si vedrà in seguito che ogni arco γ_s interno a C contiene un punto q_s dove la curvatura k di γ soddisfa

$$k(q_s) < \frac{1}{\rho}. \quad (2.1)$$

Prima di dimostrare (2.1), vediamo come da essa segue il Teorema. Si assuma che γ e C siano entrambe orientate positivamente, così la curva interna è a sinistra rispetto alla circonferenza. In ogni punto p_s di $\gamma \cap C$ le due curve hanno lo stesso orientamento e γ giace localmente dentro C . Questo segue dal *Lemma 2.3*, per cui

$$k(p_s) \geq \frac{1}{\rho}. \quad (2.2)$$

Valutata (2.2) in ogni estremo di γ_s , segue da (2.1) che k ha un minimo in un qualche punto q'_s interno a γ_s , in corrispondenza del quale si ha quindi che

$$k(q'_s) < \frac{1}{\rho}. \quad (2.3)$$

Si ottengono quindi n vertici soddisfacenti (2.3). Analogamente, ogni arco γ'_s di γ contiene, tra successivi q_s , almeno un punto p_s di $\gamma \cap C$. Per quanto detto in (2.1) e (2.2), tra due minimi in q'_s esiste un massimo p'_s interno a γ'_s e quindi

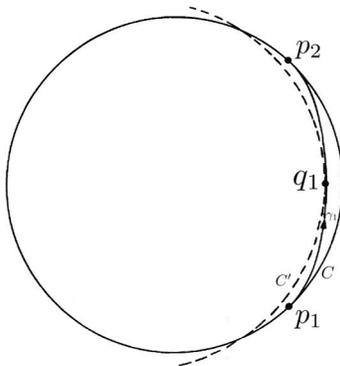
$$k(p'_s) \geq \frac{1}{\rho}.$$

Si hanno nuovamente n vertici verificando così anche il punto (b) del *Teorema 2.2*.

La (2.1) si dimostra utilizzando il seguente Lemma.

Lemma 2.4. *Siano γ una curva di Jordan orientata positivamente, C la circonferenza circoscritta e p_1, p_2 punti di $\gamma \cap C$. Sia γ_1 l'arco, anch'esso orientato positivamente, di γ da p_1 a p_2 . Allora o γ_1 coincide con l'arco di circonferenza p_1p_2 oppure vi è un punto q_1 in γ_1 soddisfacente (2.1), dove ρ è il raggio di C .*

Dimostrazione. Per il *Lemma 2.2*, si può assumere che l'arco di circonferenza p_1p_2 sia contenuto in una semicirconferenza chiusa. Si assuma per comodità che C sia centrata nell'origine del piano cartesiano e che i punti p_1 e p_2 siano sulla stessa verticale, con p_2 sopra p_1 , rispettivamente nel primo e nel quarto quadrante, come in figura.



Si hanno due casi. Il primo, di dimostrazione immediata, che γ_1 coincida con l'arco di circonferenza p_1p_2 . Il secondo che ci sia qualche punto q in γ_1 contenuto strettamente in C .

Spostando la circonferenza individuata dai punti p_1, q, p_2 verso sinistra, ci sarà un ultimo istante in cui essa intersecherà γ_1 ed in tale istante sarà tangente alla curva. Indicata con C' la corrispondente posizione della circonferenza e con q_1 il punto determinato da $C' \cap \gamma_1$, dal momento che il raggio ρ' di C' soddisfa $\rho' > \rho$ e che γ_1 giace localmente fuori C' in q_1 , segue dal *Lemma 2.3* che

$$k(q_1) \leq \frac{1}{\rho'} < \frac{1}{\rho}. \quad \square$$

Osservazione 2.2. Supporre che la curva sia di Jordan è fondamentale per garantire che γ_1 abbia lo stesso orientamento di C' in q_1 (vedere figura 1).

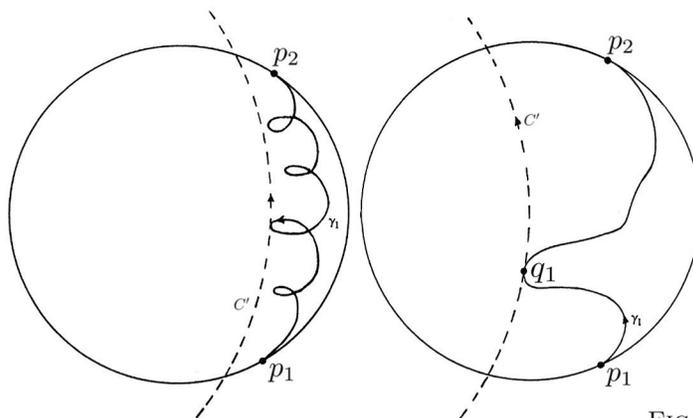


FIG. 1

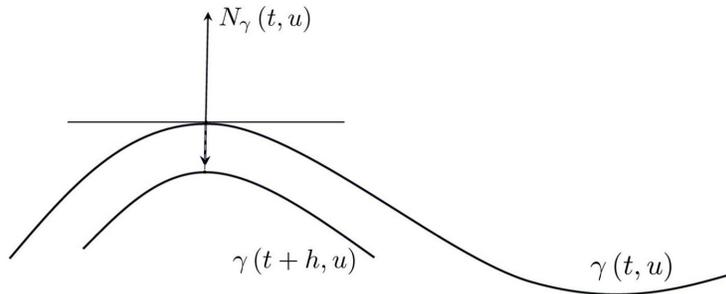
Capitolo 3

Moto per curvatura media

Una famiglia ad un parametro di curve $\gamma : [0, T) \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ descrive un *moto per curvatura nel piano* se la velocità di un punto in direzione ortogonale alla curva coincide con la curvatura. Si chiede quindi che sia verificata l'equazione

$$\partial_t \gamma(t, u) \cdot N_\gamma(t, u) = k_\gamma(t, u), \quad (3.1)$$

dove le variabili t ed u indicano rispettivamente il tempo e la parametrizzazione della curva $\gamma(t, \cdot)$.



Nella figura sopra si ha

$$\gamma(t+h, u) = \gamma(t, u) + hk_\gamma(t, u) \cdot N_\gamma(t, u)$$

da cui

$$\frac{\gamma(t+h, u) - \gamma(t, u)}{h} = k_\gamma(t, u) \cdot N_\gamma(t, u)$$

ottenendo, per $h \rightarrow 0$, l'equazione del moto per curvatura

$$\partial_t \gamma(t, u) = k_\gamma(t, u) \cdot N_\gamma(t, u).$$

Quando $\gamma(t, \cdot) : [0, L(t)] \rightarrow \mathbb{R}^2$ è parametrizzata per lunghezza d'arco, l'equazione del moto per curvatura assume la forma

$$\partial_t \gamma(t, u) = \partial_{uu}^2 \gamma(t, u).$$

Il moto per curvatura è quindi formalmente molto simile all'equazione del calore, anche se il parametro d'arco u dipende dalla curva $\gamma(t, \cdot)$. In effetti i teoremi di esistenza ed unicità per tempi piccoli si appoggiano a risultati basati sull'equazione del calore opportunamente adattati. Enunciamo qui, senza dimostrarlo, il Teorema di esistenza e unicità per tempi piccoli.

Teorema 3.1. *Sia $\gamma_0(u) \in C([0, 1], \mathbb{R}^2)$. Allora $\exists T > 0$ ed $\exists! \gamma : [0, T] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $\gamma(0, u) = \gamma_0(u)$ e*

$$\partial_t \gamma(t, u) \cdot N_\gamma(t, u) = k_\gamma(t, u).$$

Esempio 3.1. Sia data la circonferenza $\gamma_0(u) = \rho_0(\cos u, \sin u)$. Si cerca $\gamma(t, u)$ moto per curvatura con $\gamma(0, u) = \gamma_0(u)$ nella forma

$$\gamma(t, u) = \rho(t)(\cos u, \sin u).$$

Si trova, derivando rispetto a t

$$\partial_t \gamma(t, u) = \rho'(t)(\cos u, \sin u)$$

e quindi

$$N_\gamma(t, u) = (-\cos u, -\sin u), \quad k_\gamma(t, u) = \frac{1}{\rho(t)}.$$

Sostituendo in (3.1), si ottiene l'equazione differenziale per $\rho(t)$

$$\rho'(t) (\cos u, \sin u) \cdot (-\cos u, -\sin u) = \frac{1}{\rho(t)},$$

da cui

$$\begin{cases} -\rho'(t) \cdot \rho(t) = 1 \\ \rho(0) = \rho_0. \end{cases}$$

Integrando e cambiando di segno, si ha

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\rho^2(t) = -t + c \\ \rho(0) = \rho_0; \end{cases}$$

imponendo la condizione iniziale $t = 0$, si ricava

$$c = \frac{\rho_0^2}{2}.$$

Sostituendo c nella prima equazione del sistema, si ottiene

$$\rho(t) = \sqrt{\rho_0^2 - 2t}.$$

La soluzione dell'equazione è quindi data da

$$\gamma(t, u) = \sqrt{\rho_0^2 - 2t} (\cos u, \sin u)$$

e tale evoluzione esiste per

$$\rho_0^2 - 2t \geq 0 \iff t \leq \frac{\rho_0^2}{2}.$$

Quindi in questo caso l'esistenza del moto per curvatura si ha solo fino all'istante $T = \rho_0^2/2$.

Una proprietà importante nello studio del moto per curvatura è data dal seguente Teorema di monotonia che permette di costruire barriere e teoremi di inclusione.

Teorema 3.2. *Siano $\varphi(t, u)$ e $\psi(t, u)$ due curve che evolvono per curvatura. La funzione distanza tra le due curve*

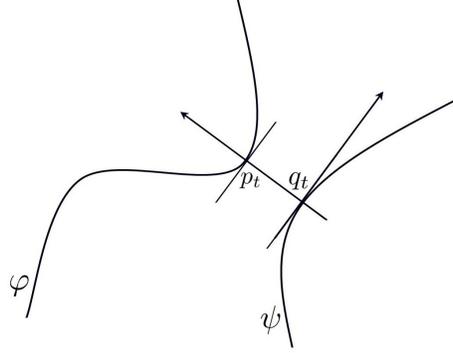
$$D(t) = \inf_{p, q} |\varphi(t, p) - \psi(t, q)|$$

è monotona crescente.

Dimostrazione. Dato che le due curve hanno lunghezza finita, esistono p_t e q_t tali che

$$D(t) = |\varphi(t, p_t) - \psi(t, q_t)|.$$

Fissato l'istante $t = t_0$, si può supporre che per t abbastanza vicino a t_0 i punti p_t e q_t siano vicini a p_{t_0} e q_{t_0} e quindi che si muovano con regolarità lungo le due curve, cioè che $t \rightarrow p_t$ e $t \rightarrow q_t$ siano derivabili. Dato poi che $\psi(t_0, q_{t_0})$ rappresenta il punto di minima distanza di $\varphi(t_0, p_{t_0})$ dalla curva ψ e viceversa, se ne deduce che il segmento $\varphi(t_0, p_{t_0}) - \psi(t_0, q_{t_0})$ è ortogonale alle due curve e che quindi in tali punti le due curve sono parallele tra loro.



Si fanno ora alcune considerazioni preliminari sul fatto che p_{t_0} e q_{t_0} realizzano la minimalità. Con una scelta opportuna degli assi coordinati, possiamo supporre di essere nella seguente situazione

$$\varphi(t_0, p_{t_0}) = (0, f(t_0, 0))$$

$$\psi(t_0, q_{t_0}) = (0, g(t_0, 0))$$

dove

$$f_x(t_0, 0) = 0$$

$$g_x(t_0, 0) = 0.$$

Si ha, parametrizzando (localmente attorno a t_0)

$$\varphi(t_0, p) = (p - p_{t_0}, f(t_0, p - p_{t_0}))$$

$$\psi(t_0, q) = (q - q_{t_0}, g(t_0, q - q_{t_0})).$$

Dire che $|\varphi(t_0, p) - \psi(t_0, q)|$ ha un minimo in (p_{t_0}, q_{t_0}) equivale a dire che la funzione $x \mapsto f(t_0, x) - g(t_0, x)$ ha un minimo per $x = 0$, cioè

$$f_x(t_0, 0) - g_x(t_0, 0) = 0$$

$$f_{xx}(t_0, 0) - g_{xx}(t_0, 0) \geq 0.$$

Si osserva infine che, per come sono state definite f e g , per le curvature si ha

$$\begin{aligned}k_{\varphi}(t_0, p_{t_0}) &= f_{xx}(t_0, 0) \\k_{\psi}(t_0, q_{t_0}) &= g_{xx}(t_0, 0).\end{aligned}$$

Derivando ora $D(t)$ si ottiene

$$\begin{aligned}D'(t_0) &= \frac{d}{dt} |\varphi(t, p_t) - \psi(t, q_t)|_{|t=t_0} = \\&= \frac{\varphi(t_0, p_{t_0}) - \psi(t_0, q_{t_0})}{|\varphi(t_0, p_{t_0}) - \psi(t_0, q_{t_0})|} \cdot \left[\varphi_t(t_0, p_{t_0}) - \psi_t(t_0, q_{t_0}) + \right. \\&\quad \left. + \varphi_s(t_0, p_{t_0}) \cdot \left(\frac{d}{dt} p_t \right)_{|t=t_0} - \psi_s(t_0, q_{t_0}) \cdot \left(\frac{d}{dt} q_t \right)_{|t=t_0} \right].\end{aligned}$$

Si nota che

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(t_0, p_{t_0}) - \psi(t_0, q_{t_0})}{|\varphi(t_0, p_{t_0}) - \psi(t_0, q_{t_0})|} &= N, \\[\varphi_t(t_0, p_{t_0}) - \psi_t(t_0, q_{t_0})] \cdot N &= k_{\varphi}(t_0, p_{t_0}) - k_{\psi}(t_0, q_{t_0})\end{aligned}$$

ed il termine

$$\varphi_s(t_0, p_{t_0}) \cdot \left(\frac{d}{dt} p_t \right)_{|t=t_0} - \psi_s(t_0, q_{t_0}) \cdot \left(\frac{d}{dt} q_t \right)_{|t=t_0}$$

è ortogonale ad N .

In conclusione

$$D'(t_0) = k_{\varphi}(t_0, p_{t_0}) - k_{\psi}(t_0, q_{t_0}) = f_{xx}(t_0, 0) - g_{xx}(t_0, 0) \geq 0. \quad \square$$

Come corollario del Teorema precedente si deduce inoltre che se φ e ψ sono due curve con φ contenuta all'interno di ψ , allora l'inclusione rimane per tutta l'evoluzione. Ne segue che ogni curva chiusa si estingue in tempo finito, essendo contenuta in un cerchio.

Lemma 3.1. *Sia data una curva di lunghezza L . L'equazione di evoluzione della curva è*

$$\frac{\partial L}{\partial t} = - \int k^2 ds.$$

Dimostrazione. Si ha

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} v du = - \int_0^{2\pi} k^2 v du = - \int_0^L k^2 ds. \quad \square$$

Questo Lemma traduce il *curve shortening flow*, ossia il processo di accorciamento di una curva.

Capitolo 4

Evoluzione omotetica di curve

In questo capitolo si vuole dimostrare che la sola curva di Jordan che evolve in modo autosimile per curvatura è la circonferenza. Quanto ottenuto si basa sull'articolo [5].

Iniziamo dando la nozione di curva autosimile. L'importanza delle curve autosimili risiede nel fatto che in generale il moto per curvatura genera delle singolarità; vicino alle singolarità il moto tende ad essere autosimile. Quindi una classificazione di tutti gli oggetti che evolvono in modo autosimile ci permette di classificare tutte le singolarità.

Definizione 4.1. Una famiglia di curve $\gamma(t, u)$ soluzione di (3.1) si dice che evolve in modo autosimile attorno all'origine se esiste $\alpha : [0, T) \rightarrow [0, 1]$ monotona decrescente tale che

$$\gamma(t, u) = \alpha(t) \gamma_0(u).$$

Considerata l'equazione del moto per curvatura,

$$\partial_t \gamma(t, u) \cdot N_\gamma(t, u) = -k_\gamma(t, u),$$

diventa, per evoluzione autosimile,

$$\alpha'(t) \gamma_0(u) \cdot N_0(u) = -k_\gamma(t, u)$$

e quindi, riducendo di $\frac{1}{\alpha(t)}$,

$$\frac{1}{\alpha(t)} k_{\gamma_0}(u) + \alpha'(t) \gamma_0(u) \cdot N_0(u) = 0. \quad (4.1)$$

Riscalando per $1/\sqrt{\lambda(t)}$, consideriamo ora le curve

$$\tilde{\gamma}(t, u) = \frac{1}{\sqrt{\lambda(t)}} \gamma_0(u)$$

con curvatura

$$\tilde{k}(t, u) = \sqrt{\lambda(t)} k_{\gamma_0}(u).$$

Sostituendo in (4.1), si ha

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda(t)}} \tilde{k}(t, u) + \alpha'(t) \sqrt{\lambda(t)} \tilde{\gamma}(t, u) \cdot N(t, u) = 0$$

e, moltiplicando per $\sqrt{\lambda(t)}$,

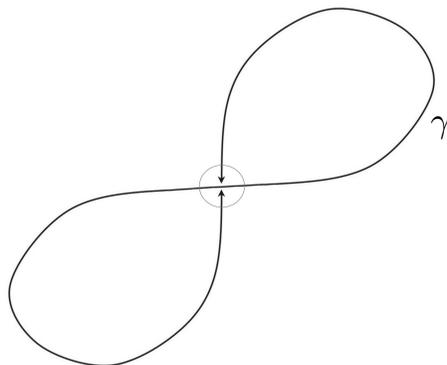
$$\tilde{k}(t, u) + \gamma'(t) \lambda(t) \tilde{\gamma}(t, u) \cdot N(t, u) = 0.$$

Ricordando infine che $\lambda(t) = \frac{1}{\alpha(t)}$, si ottiene l'equazione caratteristica delle curve autosimili

$$\tilde{k}(t, u) + \tilde{\gamma}(t, u) \cdot N(t, u) = 0.$$

Ci riferiremo quindi a tale equazione quando tratteremo l'evoluzione per curvatura autosimilare.

Prima di procedere, è necessario dare due definizioni. $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ è una *immersione* se è una curva regolare semplice. $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ è invece un *embedding* se le topologie di $\Gamma = \gamma([0, L]) \subseteq \mathbb{R}^2$ indotte dalla parametrizzazione di γ e di $\mathbb{R}^2_{|\Gamma}$ coincidono. È facile verificare che la curva sottostante non è un embedding, dato che nel punto evidenziato le due topologie sono diverse.



Sia $\gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ una curva embedded piana connessa. Fissato un punto di riferimento sulla curva γ , si ha un parametro d'arco s dal quale si ottengono un versore tangente T ed un versore normale N corrispondente alla rotazione in senso antiorario del versore T di un angolo pari a $\pi/2$. Quindi la curvatura è data da $k = \partial_s T \cdot N$.

Se γ si contrae omoteticamente attorno all'origine in \mathbb{R}^2 , in ogni punto la proiezione normale del vettore posizione γ deve essere proporzionale al vettore di curvatura $kN = \vec{k} = \partial_{ss}^2 \gamma$, dove quest'ultimo indica la velocità di evoluzione della curva. Si ha quindi, per qualche costante λ non negativa, $\lambda \vec{k} + \gamma \cdot NN = 0$; dilatando la curva per il fattore $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, si può assumere $\lambda = 1$. Passando quindi alla forma scalare, si ottiene l'equazione caratteristica dell'evoluzione omoteti-

ca $k + \gamma \cdot N = 0$.

Teorema 4.1. *Le sole curve embedded piane in \mathbb{R}^2 soddisfacenti $k + \gamma \cdot N = 0$ sono le rette che passano per l'origine e la circonferenza.*

Dimostrazione. Partendo dall'equazione $k = -\gamma \cdot N$ e derivando rispetto al parametro d'arco s , si ottiene l'equazione differenziale ordinaria per la curvatura $\partial_s k = k\gamma \cdot T$.

Se in qualche punto si ha che $k = 0$ e, di conseguenza, $\partial_s k = 0$, per il teorema di unicità delle equazioni differenziali ordinarie, k è identicamente nulla ed abbiamo a che fare con una linea L la quale, dato che $x \cdot N = 0$ per ogni $x \in L$, deve contenere l'origine di \mathbb{R}^2 .

Si suppone ora $k \neq 0$; allora, invertendo eventualmente l'orientamento della curva, si può supporre che $k > 0$ in ogni punto, così la curva è strettamente convessa. Calcolando la derivata di $|\gamma|^2$,

$$\partial_s |\gamma|^2 = 2\gamma \cdot T = 2\frac{\partial_s k}{k} = 2\partial_s \log k,$$

si ricava $k = ce^{|\gamma|^2/2}$, per qualche costante $c > 0$, e quindi k risulta essere limitata inferiormente da $c > 0$.

Si introduce a questo punto la parametrizzazione $\theta = \theta(s)$ definita univocamente dall'identità

$$\gamma'(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s));$$

la buona definizione segue dal fatto che $|\gamma'(s)| = 1$ e dal fatto che la curva è convessa. Siccome vale $\gamma''(s) = kN$, si ottiene che $\partial_s \theta = k$ e quindi passando alla derivata di k rispetto a θ si ricava

$$k_\theta = \frac{\partial_s k}{k} = \gamma \cdot T;$$

derivando una seconda volta ed utilizzando l'equazione caratteristica dell'equazione omotetica, si ottiene quindi

$$k_{\theta\theta} = \frac{\partial_s k_\theta}{k} = \frac{1 + k\gamma \cdot N}{k} = \frac{1}{k} - k. \quad (4.2)$$

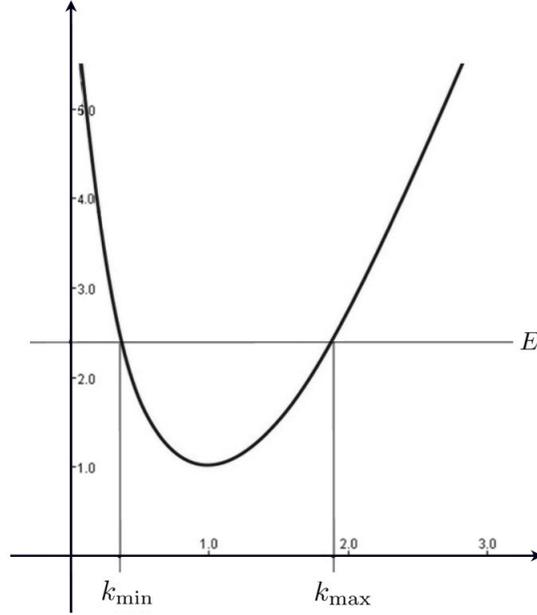
Da (4.2), moltiplicando per $2k_\theta$, si ottiene

$$2k_\theta k_{\theta\theta} + 2k k_\theta - \frac{2k_\theta}{k} = 0$$

e quindi

$$\partial_\theta [k_\theta^2 + k^2 - \log k^2] = 0.$$

La quantità $k_\theta^2 + k^2 - \log k^2$ è quindi pari ad una costante E lungo tutta la curva. Essendo k_θ^2 non negativa e $k^2 - \log k^2 \geq 1$, E non può essere minore di 1 e, se $E = 1$, k deve essere anch'essa costante lungo tutta la curva ed, in particolare, equivalente ad 1. γ rappresenta così la circonferenza unitaria centrata nell'origine di \mathbb{R}^2 . Nel grafico sottostante è raffigurata la funzione $k^2 - \log k^2$.



Quando $E > 1$, k è superiormente limitata e, ricordando che $k = ce^{|\gamma|^2/2}$, l'immagine della curva è contenuta in una palla di \mathbb{R}^2 e quindi la curva deve essere chiusa, semplice e strettamente convessa con $k > 0$ in ogni punto.

Supposto ora che γ non sia la circonferenza unitaria, si cercano i punti critici della curvatura k , ovvero i punti di massimo o minimo locale. Segue quindi, dall'equazione (4.2), che $k_{\theta\theta} \neq 0$ quando $k_{\theta} = 0$, diversamente si avrebbero in ogni punto $k_{\theta} = 0$ e $k = 1$ tornando così al caso della circonferenza unitaria. I punti critici della curvatura non sono quindi degeneri e, per la compattezza della curva, sono isolati e finiti. Inoltre, sempre da (4.2), segue che $k_{\min} < 1$ e $k_{\max} > 1$.

Si supponga $k(0) = k_{\max} > 1$ e pertanto $k_{\theta\theta}(0) = \frac{1 - k_{\max}^2}{k_{\max}} < 0$. Sfruttando l'equazione dell'energia,

$$k_{\theta}^2 + k^2 - \log k^2 = E,$$

si ottiene

$$k_\theta^2 = \log k^2 - k^2 + E$$

e quindi

$$|k_\theta| = \sqrt{\log k^2 - k^2 + E}.$$

Essendo k strettamente decrescente in un certo intervallo $[0, \bar{\theta}]$ con $\bar{\theta} > 0$, si ha $k_\theta < 0$ e più precisamente

$$k_\theta = -\sqrt{\log k^2 - k^2 + E}.$$

In $[0, \bar{\theta}]$, $k(\theta)$ è monotona strettamente decrescente e di conseguenza iniettiva. Pertanto $k = g(\theta)$ risulta essere invertibile e si ha $\theta = f(k) = g^{-1}(k)$. Si ricava quindi

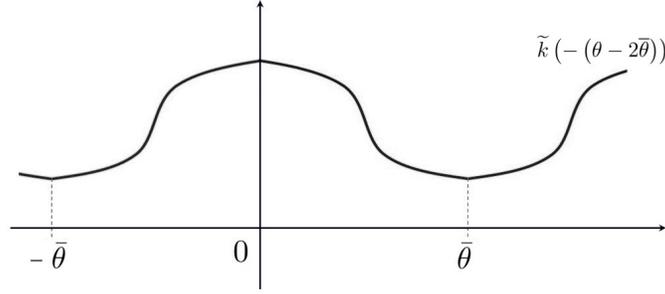
$$\begin{aligned} \bar{\theta} &= \int_0^{\bar{\theta}} d\theta = \int_{k_{\max}}^{k_{\min}} \theta'(k) dk \\ &= \int_{k_{\max}}^{k_{\min}} f'(k) dk = \int_{k_{\max}}^{k_{\min}} \frac{1}{g'(g^{-1}(k))} dk \end{aligned}$$

da cui

$$\bar{\theta} = - \int_{k_{\max}}^{k_{\min}} \frac{1}{\sqrt{\log k^2 - k^2 + E}} dk = \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} \frac{1}{\sqrt{\log k^2 - k^2 + E}} dk.$$

Dall'equazione $k_{\theta\theta} = \frac{1}{k} - k$ si ricava che anche la funzione $\tilde{k}(\theta) = k(-\theta)$ è soluzione. Dal teorema di unicità, se ne deduce che la funzione k è pari in θ . Quindi la curvatura ammette minimo k_{\min} anche in $-\bar{\theta}$. Inoltre, dato che l'equazione differenziale è autonoma, cioè non dipende esplicitamente da θ , si ricava che anche la funzione

$\hat{k}(\theta) = k(\theta - 2\bar{\theta})$ è soluzione; ancora per l'unicità della soluzione, se ne deduce che $k(\theta) = k(\theta - 2\bar{\theta})$, cioè la curvatura è una funzione $T = 2\bar{\theta}$ periodica.



Per il *Teorema dei quattro vertici*, in ogni curva chiusa ci sono almeno quattro punti critici di k e pertanto la curva è composta da almeno quattro intervalli $[0, \bar{\theta}]$ come quello descritto sopra, e quindi $\bar{\theta} \leq \pi/2$. Siccome la curva è chiusa, possiamo quindi concludere che deve essere $2\pi = nT$ per un qualche $n \geq 2$; questo in particolare implica che $T \leq \pi$.

Si ottengono, derivando k^2 e considerando l'equazione (4.2)

$$\begin{aligned} (k^2)_\theta &= 2kk_\theta \\ (k^2)_{\theta\theta} &= 2k_\theta^2 + 2kk_{\theta\theta} = 2k_\theta^2 + 2 - 2k^2 \\ (k^2)_{\theta\theta\theta} &= 4k_\theta k_{\theta\theta} - 4kk_{\theta\theta} = \frac{4k_\theta}{k} - 4k_\theta k - 4kk_{\theta\theta} = \frac{4k_\theta}{k} - 8kk_\theta \\ &= \frac{4k_\theta}{k} - 4(k^2)_\theta. \end{aligned}$$

Ne consegue che $(k^2)_{\theta\theta\theta} + 4(k^2)_\theta = 4k_\theta/k$ e quindi

$$4 \int_0^{T/2} \sin 2\theta \frac{k_\theta}{k} d\theta = \int_0^{T/2} \sin 2\theta (k^2)_{\theta\theta\theta} d\theta + 4 \int_0^{T/2} \sin 2\theta (k^2)_\theta d\theta$$

$$\begin{aligned}
&= [\sin 2\theta (k^2)_{\theta\theta}]_0^{T/2} - 2 \int_0^{T/2} \cos 2\theta (k^2)_{\theta\theta} d\theta + 4 \int_0^{T/2} \sin 2\theta (k^2)_\theta d\theta \\
&= [\sin 2\theta (2k_\theta^2 + 2kk_{\theta\theta})]_0^{T/2} - 2 [\cos 2\theta (k^2)_\theta]_0^{T/2} + \\
&\quad -4 \int_0^{T/2} \sin 2\theta (k^2)_\theta d\theta + 4 \int_0^{T/2} \sin 2\theta (k^2)_\theta d\theta \\
&= 2 \sin T (k_\theta^2 (T/2) + k (T/2) k_{\theta\theta} (T/2)) - 2 [\cos 2\theta (2kk_\theta)]_0^{T/2} \\
&= 2 \sin T (k_\theta^2 (T/2) + k (T/2) k_{\theta\theta} (T/2)) + \\
&\quad -4 \cos T (k (T/2) k_\theta (T/2)) + 4k (0) k_\theta (0).
\end{aligned}$$

Considerando che $k_\theta(0) = k_\theta(T/2) = 0$ e $k(T/2) = k_{\min}$ ed utilizzando l'equazione per la curvatura $k_{\theta\theta} = \frac{1}{k} - k$, si ottiene

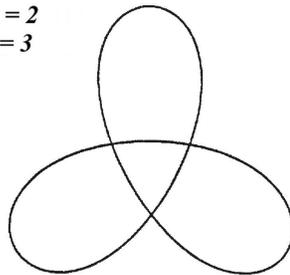
$$4 \int_0^{T/2} \sin 2\theta \frac{k_\theta}{k} d\theta = 2 \sin T (1 - k_{\min}^2). \quad (4.3)$$

Escludendo il caso $T = \pi$ (circonferenza), si nota che il membro di destra è positivo in quanto $T < \pi$ e $k_{\min} < 1$; nel membro di sinistra invece la funzione integranda è sempre negativa in quanto per $0 \leq \theta \leq T < \pi$ la funzione $\sin 2\theta$ è positiva, la curvatura k l'abbiamo supposta positiva e k_θ è negativa in quanto k è decrescente. Questo è un assurdo, quindi l'uguaglianza (4.3) non può essere verificata. Se ne conclude che γ non può essere altro che la circonferenza unitaria. \square

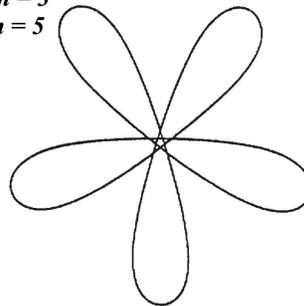
Osservazione 4.1. Abresch e Langer [6] hanno studiato, classificandole, tutte le curve immerse chiuse che evolvono nel piano in

modo omotetico; tale classificazione si ottiene notando che solitamente, se si toglie la condizione di iniettività della curva, il periodo non soddisfa la condizione $2\pi = nT$, ma la più generale condizione $2m\pi = nT$ per qualche n, m numeri naturali. Tali curve vengono dette *curve di Abresch-Langer* e ne riportiamo in figura alcuni esempi al variare dei parametri n ed m .

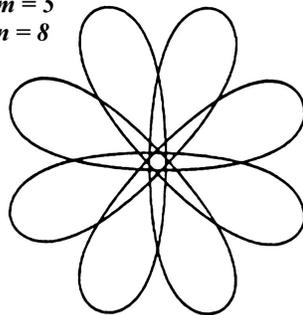
$$\begin{matrix} m = 2 \\ n = 3 \end{matrix}$$



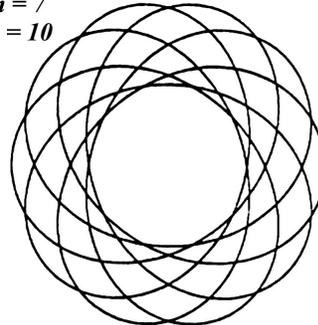
$$\begin{matrix} m = 3 \\ n = 5 \end{matrix}$$



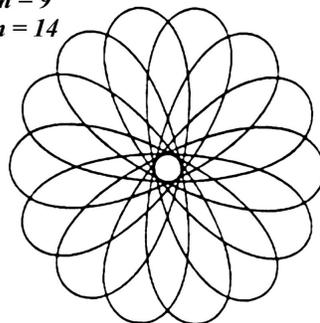
$$\begin{matrix} m = 5 \\ n = 8 \end{matrix}$$



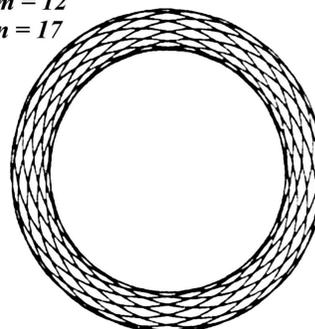
$$\begin{matrix} m = 7 \\ n = 10 \end{matrix}$$



$$\begin{matrix} m = 9 \\ n = 14 \end{matrix}$$



$$\begin{matrix} m = 12 \\ n = 17 \end{matrix}$$



Capitolo 5

Evoluzione delle curve convesse

In questo capitolo studiamo l'evoluzione di curve convesse nel piano. I risultati ottenuti sono tratti dal lavoro [7] e Grayson [8] li ha successivamente estesi al caso di curve embedded qualunque.

Teorema 5.1. *Se γ è una curva embedded convessa contenuta nel piano \mathbb{R}^2 , l'evoluzione per curvatura contrae γ in un punto. La curva rimane convessa e durante l'evoluzione diventa circolare; più precisamente*

- *il rapporto tra il raggio interno ed il raggio esterno tende ad 1;*
- *il rapporto tra la curvatura massima e la curvatura minima tende ad 1;*
- *le derivate di ordine maggiore della curvatura convergono uniformemente a 0.*

Si osserva che alcune curve piane che sono immerse ma non embedded nell'evoluzione aumentano i propri punti di singolarità.

Di questo Teorema dimostreremo l'esistenza dell'evoluzione fin tanto che l'area racchiusa dalla curva rimane positiva. Per la dimostrazione della sparizione asintotica circolare rimandiamo a [7,

sezione 5]

Nel caso delle curve convesse piane, studiare l'evoluzione della curva è equivalente al problema ai valori iniziali per un'equazione differenziale parabolica non lineare. Si cerca una stima a priori necessaria per dimostrare l'esistenza di questa equazione e quindi si verifica che le curve convesse si contraggono in un punto.

Prendiamo come parametro l'angolo θ definito nel capitolo precedente. Scriviamo quindi la curvatura come $k = k(\theta)$ e determiniamo quali funzioni positive 2π -periodiche evolvono come la funzione di curvatura delle curve convesse.

Lemma 5.1. *Una funzione positiva k 2π -periodica rappresenta la funzione di curvatura di una curva piana di classe C^2 semplice, chiusa e strettamente convessa, se e solo se*

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta(s)}{k(s)} ds = \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta(s)}{k(s)} ds = 0.$$

Dimostrazione. Si procede verificando prima la condizione necessaria e successivamente quella sufficiente.

- Se k è la funzione di curvatura di una determinata curva, la relazione sopra segue direttamente dal fatto che la curva è chiusa, $\int_0^L T ds = 0$. Si verifica facilmente che $k(\theta(s)) = \theta'(s)$, infatti

$$\gamma'(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s)), \|\gamma'(s)\| = 1$$

e

$$\gamma''(s) = \theta'(s) (-\sin \theta(s), \cos \theta(s)), \|\gamma''(s)\| = |\theta'(s)|.$$

Quindi

$$k(\theta(s)) = \|\gamma''(s)\| = |\theta'(s)| = \theta'(s).$$

• Sia ora data un'arbitraria curvatura k e sia ad essa associata una curva definita da

$$\begin{cases} x(\theta) = \int_0^\theta \frac{\cos \tau}{k(\tau)} d\tau \\ y(\theta) = \int_0^\theta \frac{\sin \tau}{k(\tau)} d\tau. \end{cases}$$

La condizione di positività di k implica che la curva è semplice: per verificare questo si usa l'iniettività della mappa di Gauss (vedere [3]) associata alla curva, cioè il fatto che il versore normale è univocamente determinato sulla curva.

Per dimostrare che la mappa sia semplice, si supponga che esistano $\theta_1 < \theta_2$ t.c. $\gamma(\theta_1) = \gamma(\theta_2)$; questo equivale a dire che

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\cos \tau}{k(\tau)} d\tau = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sin \tau}{k(\tau)} d\tau = 0.$$

Col cambio di variabili $s = \tau - \theta_1$, le precedenti condizioni diventano

$$\begin{aligned} \cos \theta_1 \int_0^{\theta^*} \frac{\cos s}{k(s + \theta_1)} ds - \sin \theta_1 \int_0^{\theta^*} \frac{\sin s}{k(s + \theta_1)} ds &= 0, \\ \sin \theta_1 \int_0^{\theta^*} \frac{\cos s}{k(s + \theta_1)} ds - \cos \theta_1 \int_0^{\theta^*} \frac{\sin s}{k(s + \theta_1)} ds &= 0 \end{aligned}$$

dove abbiamo posto $\theta^* = \theta_2 - \theta_1$. Discutendo i vari casi, $\sin \theta_1 = 0$, o $\cos \theta_1 = 0$ o sia $\sin \theta_1 \neq 0$ che $\cos \theta_1 \neq 0$, si arriva comunque alla conclusione che

$$\int_0^{\theta^*} \frac{\sin s}{k(s + \theta_1)} ds = 0.$$

Dato che k è positiva, se ne deduce che $\theta^* > \pi$ perché altrimenti avremmo che anche il seno è sempre positivo. Ragionando sul fatto che

$$\int_0^{\theta^*} \frac{\sin s}{k(s + \theta_1)} = - \int_{\theta^*}^{2\pi} \frac{\sin s}{k(s + \theta_1)} ds,$$

si arriva anche alla conclusione che $\theta^* < \pi$, che quindi mi dà un assurdo; pertanto la curva è semplice. \square

Lemma 5.2. *E' possibile riscrivere l'equazione di evoluzione di una curva del Lemma 3.1 nel seguente modo*

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial^2 k}{\partial s^2} + k^3.$$

Dimostrazione. Ricordando che s è la parametrizzazione per lunghezza d'arco e che rispetto alla parametrizzazione originale u vale la relazione $\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{v(u)} \frac{\partial}{\partial u}$, dato che $\frac{\partial v}{\partial t} = -k^2 v^2$ (vedere [7, Lemma 3.1.1]), se ne deduce che

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial s} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{v(u)} \frac{\partial}{\partial u} = k^2 \frac{1}{v(u)} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{v(u)} \frac{\partial^2}{\partial u \partial t} = k^2 \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}.$$

Da questo si ricava che

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial t \partial s} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial s \partial t} + k^2 \frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{\partial^2 k}{\partial s^2} + k^3. \quad \square$$

Grazie a questo fatto ed al principio di massimo forte, se la curva iniziale è convessa ed allo stesso tempo contiene dei segmenti, nell'evoluzione i segmenti scompaiono e le curve successive saranno tutte strettamente convesse.

Si può inoltre dimostrare che se si parte da una curva embedded, allora l'evoluzione per curvatura definisce curve embedded fino al tempo di estinzione (vedere [7, Sezione 3]). Nella Sezione 5 dello stesso articolo viene inoltre dimostrato che la sparizione della curva è asintoticamente circolare, nel senso che il rapporto tra il raggio della circonferenza inscritta ed il raggio della circonferenza circoscritta tende ad 1. Noi non vedremo qui i dettagli di queste due sezioni, ma ci concentreremo alla Sezione 4 dove viene dimostrata la limitatezza di k assieme alle sue derivate rispetto a θ fintanto che l'area della porzione di piano determinata dalla curva non tende a 0.

Notiamo che la curvatura k dipende dalle due variabili t e θ e che, per come è stata definita, la variabile θ dipende essa stessa dal tempo t , cioè $k = k(t, \theta(t))$. Indichiamo con τ la prima variabile, sempre di tipo temporale, della funzione k ; questo significa considerare sempre in qualche senso $\tau = t$ come variabile temporale, ma con θ fissato e non variabile con τ . Con questo cambio di coordinata le derivate rispetto a t e rispetto a τ cambiano, in quanto quando si deriva rispetto a t si deve fare una derivata totale, cioè derivare tutti gli argomenti che dipendono da t , mentre con derivata rispetto a τ si intende solamente la derivata parziale rispetto al primo argomento di k . Questo fatto è riassunto nel seguente Lemma.

Lemma 5.3. *L'equazione di evoluzione di un'arbitraria curva convessa è*

$$\frac{\partial k}{\partial \tau} = k^2 \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + k^3$$

dove τ rappresenta il parametro di tempo.

Dimostrazione. Si calcolano

$$\begin{aligned}\frac{\partial k}{\partial t} &= \frac{\partial k}{\partial \tau} + \frac{\partial k}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial k}{\partial \tau} + \frac{\partial k}{\partial \theta} \frac{\partial k}{\partial s} = \frac{\partial k}{\partial \tau} + k \left(\frac{\partial k}{\partial \theta} \right)^2 \\ &\Rightarrow \frac{\partial k}{\partial \tau} = \frac{\partial k}{\partial t} - k \left(\frac{\partial k}{\partial \theta} \right)^2\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 k}{\partial s^2} &= \frac{\partial \theta}{\partial s} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial s} \frac{\partial k}{\partial \theta} \right) = k \left(\frac{\partial k}{\partial \theta} \right)^2 + k^2 \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} \\ &\Rightarrow k \left(\frac{\partial k}{\partial \theta} \right)^2 = \frac{\partial^2 k}{\partial s^2} - k^2 \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2}\end{aligned}$$

dove sono state sfruttate le uguaglianze $k\partial/\partial\theta = \partial/\partial s$ e $\partial\theta/\partial t = \partial k/\partial s$. Si ottiene pertanto, sostituendo il valore di $k(\partial k/\partial\theta)^2$ nella prima equazione,

$$\frac{\partial k}{\partial \tau} = \frac{\partial k}{\partial t} - \frac{\partial^2 k}{\partial s^2} + k^2 \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2}$$

e, sapendo che $\partial k/\partial t = \partial^2 k/\partial s^2 + k^3$ (vedere *Lemma 5.2*),

$$\frac{\partial k}{\partial \tau} = k^3 + k^2 \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2}. \quad \square$$

Successivamente, per semplicità, l'equazione del Lemma sarà considerata sostituendo t a τ .

Teorema 5.2. *Il processo di evoluzione di una curva convessa è equivalente al seguente problema ai valori iniziali per PDE. Si cerca $k : S^1 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che*

- (a) $k \in C^{2+\alpha, 1+\alpha}(S^1 \times [0, T - \varepsilon]) \forall \varepsilon > 0$;
- (b) $\partial k/\partial t = k^2 \partial^2 k/\partial \theta^2 + k^3$;
- (c) $k(\theta, 0) = \psi(\theta)$ dove ψ soddisfa

- $\psi \in C^{1+\alpha}(S^1)$;
- $\psi(\theta) > 0$;
- $\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{\psi(\theta)} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta}{\psi(\theta)} d\theta = 0$.

Dimostrazione. Il *Lemma 5.3* mostra che, data una soluzione dell'equazione di evoluzione delle curve, la funzione di curvatura, espressa nella coordinata θ , deve soddisfare (b). Sia data una soluzione k del Teorema. Si verifica facilmente che le ipotesi del *Lemma 5.1* sono soddisfatte per ogni t e che le curve definite nella dimostrazione dello stesso Lemma soddisfano l'equazione di evoluzione $\partial X/\partial t = kN - (\partial k/\partial \theta)T$ dove la derivata parziale rispetto a t si ottiene mantenendo θ fissato. Cambiando la variabile spaziale, possiamo trasformare ancora la componente tangente, senza cambiare la configurazione delle curve. Si chiede quindi che, fissato u , sia soddisfatta l'equazione $\partial X/\partial t = kN$ e, scrivendo θ in funzione di t ed u , sia verificata l'uguaglianza $\partial \theta/\partial t = k(\theta(u, t), t) \cdot (\partial k/\partial \theta)(\theta(u, t), t)$. Applicando le condizioni iniziali $\theta(u, 0) = 2\pi u$, si ha una funzione soddisfacente $\theta(u+1, t) = \theta(u, t)$ e $\partial \theta/\partial u \geq 0$. \square

Osservazione 5.1. L'equazione (b) del *Teorema 5.2* è un'equazione parabolica per k in funzione di θ e t ; tale equazione ammette soluzione fintanto che restano limitate le quantità k e $\partial^2 k/\partial \theta^2$. Utilizzando i risultati sulle equazioni paraboliche, è possibile dimostrarne l'esistenza per tempi brevi e l'unicità mentre, tramite il *Lemma 5.1*, si individua il moto della curva.

Un'importante conseguenza dell'equazione di evoluzione è che le curve strettamente convesse rimangono tali durante l'evoluzione. Questo si dimostra tramite il seguente Lemma.

Lemma 5.4. *Se k soddisfa il Teorema 5.2, allora $k_{\min}(t) =$*

$\inf \{k(\theta, t) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ è una funzione non decrescente.

Dimostrazione. Si dimostra per assurdo. Sia dato ε tale che $k_{\min}(0) > \varepsilon > 0$ e supponiamo che $k_{\min}(t) = k_{\min}(0) - \varepsilon$ per qualche t . Sia $t_0 = \inf \{t \mid k_{\min}(t) = k_{\min}(0) - \varepsilon\}$. La continuità di k assicura che questo minimo è assunto in qualche punto (θ_0, t_0) . Si ha

$$\frac{\partial k}{\partial t}(\theta_0, t_0) \leq 0, \quad \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2}(\theta_0, t_0) \geq 0 \quad \text{e} \quad k(\theta_0, t_0) > 0,$$

in contraddizione con il punto (b) del *Teorema 5.2*. \square

Cerchiamo di dare ora qualche stima per le curve convesse sfruttando la curvatura media k^* .

Definizione 5.1. Si definisce la *mediana della curvatura* come

$$k^* = \sup \{b \mid k(\theta) > b \text{ in qualche intervallo di lunghezza } \pi\}.$$

Lemma 5.5. È possibile enunciare le seguenti stime per famiglie di curve.

STIMA GEOMETRICA. Se $k(\theta, t)$ è la curvatura di una curva convessa piana chiusa di area A e lunghezza L , allora $k^*(t) < L/A$.

STIMA INTEGRALE. Se $k^*(t)$ è limitata in $[0, T)$, allora $\int_0^{2\pi} \log k(\theta, t) d\theta$ è limitato in $[0, T)$.

STIMA PUNTUALE. Se $\int_0^{2\pi} \log k(\theta, t) d\theta$ è limitato in $[0, T)$, allora $k(\theta, t)$ è uniformemente limitata in $S^1 \times [0, T)$.

Queste stime, che verificheremo successivamente, soddisfano l'equazione di evoluzione e ci permettono di dimostrare il seguente

Teorema.

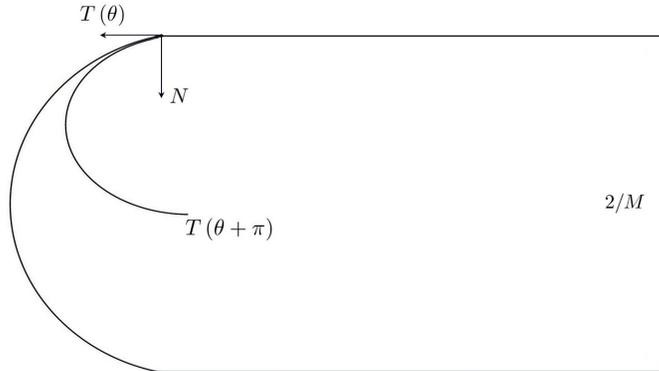
Teorema 5.3. *Se $k : S^1 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ soddisfa il Teorema 5.2 e la parte di piano contenuta nelle curve associate a k è limitata, allora la curvatura k è uniformemente limitata in $S^1 \times [0, T)$.*

Dimostrazione. $k^*(t)$ risulta essere limitata superiormente, poiché la lunghezza L delle curve diminuisce durante l'evoluzione e, allo stesso tempo, l'area A è limitata inferiormente da una costante $c > 0$. Facendo intervenire la stima integrale e la stima puntuale, $k(\theta, t)$ risulta essere uniformemente limitata in $S^1 \times [0, T)$. \square

Dimostrazione della stima geometrica. Se $M < k^*(t)$, allora $k(\theta, t) > M$ in qualche intervallo $(a, a + \pi)$. Questo implica che la curva convessa è compresa tra delle linee parallele con distanza

$$\int_a^{a+\pi} \frac{\sin(\theta - a)}{k(\theta, t)} d\theta \leq \frac{2}{M},$$

come in figura.



Il diametro della curva è limitato da $L/2$; l'area è invece limitata dall'ampiezza $2/M$ moltiplicata per il diametro della curva. Met-

tendo insieme queste due stime si ottiene che $M \leq L/A$; dato che M può essere preso arbitrariamente vicino a $k^*(t)$, si ottiene la stima desiderata. \square

Lemma 5.6 (Diseguazione di Wirtinger). *Se $f(a) = 0$ e $f(b) = 0$ con $b - a \leq \pi$, si ha*

$$\int_a^b f^2 d\theta \leq \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \right)^2 d\theta.$$

Dimostrazione. Supponiamo $a = 0$ e $b = \pi$. Il risultato segue considerando f come la serie di Fourier

$$f(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\theta),$$

da cui

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)^2 d\theta = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2,$$

mentre

$$\int_0^{\pi} f'(\theta)^2 d\theta = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2,$$

da cui la disuguaglianza, con uguaglianza se e solo se $a_n = 0$ per ogni $n \geq 2$. \square

Dimostrazione della stima integrale. Considerando l'equazione di evoluzione (b) del Teorema 5.2 ed integrando per parti, si ha

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} \log k(\theta, t) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(k^2 - \left(\frac{\partial k}{\partial \theta} \right)^2 \right) d\theta.$$

Fissiamo t e stimiamo quest'ultimo integrale nell'insieme aperto $U = \{\theta | k(\theta, t) > k^*(t)\}$ e nel suo complementare $V = S^1 - U$. La definizione di k^* implica che l'insieme aperto U è dato dall'unione degli intervalli disgiunti I , ognuno dei quali ha lunghezza minore o uguale di π . Agli estremi di questi intervalli, poiché $k(\theta, t) = k^*(t)$, si può applicare la disequazione di Wirtinger alla funzione $k(\theta, t) - k^*(t)$. Semplificando questa disequazione, si ha

$$\int_{\bar{I}_i} \left(k^2 - \left(\frac{\partial k}{\partial \theta} \right)^2 \right) d\theta \leq 2k^*(t) \int_{\bar{I}_i} k(\theta, t) d\theta$$

e quindi, sommando tutti gli intervalli \bar{I}_i ,

$$\begin{aligned} \int_U \left(k^2 - \left(\frac{\partial k}{\partial \theta} \right)^2 \right) d\theta &\leq 2k^*(t) \int_U k(\theta, t) d\theta \\ &\leq 2k^*(t) \int_0^{2\pi} k(\theta, t) d\theta. \end{aligned}$$

In V la stima risulta più semplice,

$$\int_V \left(k^2 - \left(\frac{\partial k}{\partial \theta} \right)^2 \right) d\theta \leq \int_V k^2 d\theta \leq 2\pi (k^*(t))^2.$$

Sommando queste equazioni e sapendo che $\partial L / \partial t = - \int k^2 ds = - \int k d\theta$ (vedere *Lemma 3.1*), si ha

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} \log k(\theta, t) d\theta \leq 2k^*(t) \frac{\partial L}{\partial t} + 2\pi (k^*(t))^2.$$

Supponiamo quindi che $k^*(t)$ sia limitata, cioè che esiste $M > 0$ tale che $k^*(t) \leq M$; integrando la precedente disuguaglianza si ottiene

$$\int_0^{2\pi} \log k(\theta, t) d\theta \leq \int_0^{2\pi} \log k(\theta, 0) d\theta + 2M(L(0) - L(t)) + 2\pi M^2 t$$

e tale stima dà il risultato cercato. \square

Lemma 5.7. *Se $\int \log k(\theta, t) d\theta$ è limitato in $[0, T)$, allora per ogni $\delta > 0$ si può individuare una costante c tale che $k(\theta, t) \leq c$ con l'eccezione al più di intervalli di lunghezza minore o uguale a δ .*

Dimostrazione. Se $k \geq c$ in $a \leq \theta \leq b$ e $b - a \geq \delta$, allora

$$\int_0^{2\pi} \log k(\theta, t) d\theta \geq \delta \log c + (2\pi - \delta) \log k_{\min}(0),$$

dove $k_{\min}(0)$ è un limite inferiore per k (notare che $k_{\min}(t)$ non diminuisce col tempo). Quando c è sufficientemente grande, la disuguaglianza non è quindi verificata, da cui segue la dimostrazione del Lemma. \square

Lemma 5.8. *Esiste una costante d tale che*

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial k}{\partial \theta} \right)^2 d\theta \leq \int_0^{2\pi} k^2 d\theta + d$$

sia verificata per $0 \leq t < T$.

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} \left(k^2 - \left(\frac{\partial k}{\partial \theta} \right)^2 \right) d\theta &= 2 \int_0^{2\pi} \left(k \frac{\partial k}{\partial t} - \frac{\partial k}{\partial \theta} \frac{\partial^2 k}{\partial \theta \partial t} \right) d\theta \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + k \right) \frac{\partial k}{\partial t} d\theta = 2 \int_0^{2\pi} k^2 \left(\frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + k \right)^2 d\theta \geq 0. \end{aligned}$$

Integrando questa disequazione si completa la dimostrazione. \square

Dimostrazione della stima puntuale. Come appena visto, finché $\int_0^{2\pi} \log k(\theta, t) d\theta$ è limitato, si ha $k \leq c$ fuorché negli intervalli $[a, b]$ di lunghezza minore di δ . In tali intervalli

$$\begin{aligned} k(\gamma) &= k(a) + \int_a^\gamma \frac{\partial k}{\partial \theta} d\theta \leq c + \sqrt{\delta} \left(\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial k}{\partial \theta} \right)^2 d\theta \right)^{1/2} \\ &\leq c + \sqrt{\delta} \left(\int_0^{2\pi} k^2 d\theta + d \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Questo dimostra che se k_{\max} è il massimo valore di k , allora

$$k_{\max} \leq c + \sqrt{\delta} (2\pi k_{\max}^2 + d)^{1/2} \leq c + 2\pi\sqrt{\delta}k_{\max} + \sqrt{\delta}d$$

e, per piccoli valori di δ , $k_{\max} \leq c$. □

Supponendo k limitato, dimostriamo ora che le sue derivate sono limitate. Indichiamo con k' la derivata parziale di k rispetto a θ ed in modo analogo le derivate successive.

Lemma 5.9. *Se k è limitato, k' è anch'esso limitato.*

Dimostrazione. Si ha

$$\frac{\partial}{\partial t} k' = k^2 k''' + 2k k' k'' + 3k^2 k'.$$

È possibile verificare che k' aumenta esponenzialmente, considerando la PDE soddisfatta da $e^{\alpha t} k'$ e scegliendo α tale da potere applicare il principio di massimo. In un intervallo di tempo finito k' rimane quindi limitato. □

Lemma 5.10. *Se k e k' sono limitati, $\int_0^{2\pi} (k'')^4$ è anch'esso limitato.*

Dimostrazione. Considerando l'equazione di evoluzione, si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} (k'')^4 &= 4 \int_0^{2\pi} (k'')^3 (k^2 k'' + k^3)'' \\ &= -12 \int_0^{2\pi} (k'')^2 (k''') (k^2 k''' + 2k k' k'' + 3k^2 k') \\ &= -12 \int_0^{2\pi} \left[k^2 (k'')^2 (k''')^2 + 2k k' (k'')^3 (k''') + 3k^2 k' (k'')^2 k''' \right]. \end{aligned}$$

Usando la disequazione $ab \leq 4a^2/\varepsilon + \varepsilon b^2$, si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} (k'')^4 \leq \int_0^{2\pi} \left(c_1 k'^2 (k'')^4 + c_2 k^2 k'^2 (k'')^2 \right).$$

Sapendo che per ipotesi k e k' sono limitati e dal fatto che

$$\int_0^{2\pi} (k'')^2 \leq \left(\int_0^{2\pi} (k'')^4 \right)^{1/2} \sqrt{2\pi}$$

grazie al Lemma di Gronwall, ne deriva che $\int_0^{2\pi} (k'')^4$ aumenta esponenzialmente e quindi in un intervallo di tempo finito rimane limitato. \square

Lemma 5.11. *Se k , k' e $\int (k'')^4$ sono limitati, $\int (k''')^2$ è anch'esso limitato.*

Dimostrazione. Si ha

$$\frac{\partial}{\partial t} \int (k''')^2 = 2 \int (k''') (k^2 k'' + k^3)''' = -2 \int k^{(iv)} (k^2 k'' + k^3)''$$

$$= -2 \int \left[k^2 (k^{(iv)})^2 + 4kk'k''k^{(iv)} + 2k(k'')^2 k^{(iv)} + 2(k')^2 k''k^{(iv)} + \right. \\ \left. + 3k^2 k''k^{(iv)} \right] = +6k(k')^2 k^{(iv)}.$$

Come fatto nel Lemma precedente, si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \int (k''')^2 \leq c_1 \int k'^2 (k''')^2 + c_2 \int (k'')^2 + c_3 \int \frac{(k')^4}{k^2} (k'')^2 + \\ + c_4 \int k^2 (k'')^2 + c_5 \int (k')^4,$$

dove ogni termine eccetto il primo è limitato da una costante. Il primo termine è limitato da una costante moltiplicata per $\int (k''')^2$ e ciò dimostra che l'andamento è esponenziale e che la quantità rimane quindi limitata in un intervallo di tempo finito. \square

Lemma 5.12. *Se k , k' , $\int (k'')^4$ e $\int (k''')^2$ sono limitati, k'' è anch'esso limitato.*

Dimostrazione. In una dimensione si ha

$$\max |f|^2 \leq c \int (|f'|^2 + f^2).$$

Si dimostra il Lemma applicando questo risultato a k'' . \square

Lemma 5.13. *Se k , k' e k'' sono uniformemente limitati, k''' e le derivate successive sono anch'esse limitate.*

Dimostrazione. Segue dal principio di massimo. Si ha

$$\frac{\partial}{\partial t} k''' = (k^2 k'' + k^3)''' = k^2 k^{(iv)} + 6kk'k^{(iv)} + \\ + (8kk'' + 6k'^2 + 3k^2) k''' + (6k'(k'')^2 + 18kk'k'' + 6(k')^3).$$

Se k , k' e k'' sono limitati, il principio di massimo può essere applicato a $k'''e^{\alpha t}$ con α opportuno. In un intervallo di tempo finito $|k'''|$ è quindi limitato. \square

Più in generale, è possibile dimostrare che se $k, k', \dots, k^{(n-1)}$ sono limitati, anche $k^{(n)}$ è limitato, in un intervallo di tempo finito.

Teorema 5.4. *La soluzione k del Teorema 5.2 esiste fintanto che l'area della parte di piano racchiusa dalla curva non tende a zero.*

Dimostrazione. Finché l'area resta ben lontana da 0, k e tutte le sue derivate rispetto a θ sono limitate. Utilizzando l'equazione di evoluzione si possono limitare anche le derivate rispetto al tempo. Supposto che la soluzione esista nell'intervallo $[0, T)$ e che l'area non tenda a zero ($\lim_{t \rightarrow T} A(t) > 0$), per $t \rightarrow T$ k ammette limite e l'estensione di k fino al tempo T è di classe C^∞ ; quindi possiamo estendere la soluzione anche oltre il tempo T e questo conclude la dimostrazione del Teorema. \square

Bibliografia

- [1] R. S. Hamilton, *Three-manifolds with positive Ricci curvature*, Journal of Differential Geometry 17 (1982), 255-306.
- [2] <http://arxiv.org>
- [3] M. P. do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces* (1976), viii+503.
- [4] R. Osserman, *The four-or-more vertex theorem*, The American Mathematical Monthly 92 (1985), 332-337.
- [5] A. Magni e C. Mantegazza, *Curves homothetically shrinking by curvature*, Appunti per gli studenti della Scuola Normale Superiore di Pisa (2009), 1-5.
- [6] U. Abresch e J. Langer, *The normalized curve shortening flow and homothetic solutions*, Journal of Differential Geometry 23 (1986), 175-196.
- [7] M. Gage e R. S. Hamilton, *The heat equation shrinking convex plane curves*, Journal of Differential Geometry 23 (1986), 69-96.
- [8] M. A. Grayson, *Shortening embedded curves*, Annals of Mathematics - Second Series 129 (1989), 71-111.