Università degli Studi di Ferrara

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Matematica

Misura di Wiener e moto Browniano

Relatore: Prof. Michele Miranda

Laureanda: Irene Cecchi

Anno Accademico 2010 - 2011

Indice

Introduzione

Moto Browniano è il nome che viene dato al movimento irregolare del polline, sospeso nell'acqua, osservato dal botanico Robert Brown nel 1828. Questo movimento casuale, ora attribuito all'urto del polline con le molecole d'acqua, è il risultato di una dispersione o diffusione del polline nell'acqua. Il campo d'applicazione del moto Browniano va al di là dello studio di microscopiche particelle in sospensione e include modelli di prezzo stocastico, di diffusione termica nei circuiti elettrici, dei limiti di funzionamento nei sistemi in serie e della casuale perturbazione nelle molte varietà di sistemi fisici, biologici, economici e di amministrazione. Inoltre, riunisce una grande classe di rappresentazione delle martingale e dei processi di diffusione. I processi di diffusione descrivono una ricca connesione con la teoria delle equazioni differenziali alle derivate parziali. In particolare, per ciascuno di questi processi corrisponde un'equazione parabolica del secondo ordine che regola le probabilità di transizione del processo.

Albert Einstein nel 1905 formulò un modello matematico del moto Browniano, ma già nel 1900 Louis Bachelier utilizzò il moto Browniano per descrivere le fluttuazioni dei prezzi azionari e degli altri indici finanziari sul mercato azionario di Parigi.

Capitolo 1

Teoria della misura

1.1 Richiami di teoria della misura

Facciamo una rapida carrellata delle principali nozioni di teoria della misura che ci servono; per ulteriori proprietà e approffondimenti rimandiamo al libro di Dudley [1]. Ricordiamo in primo luogo la definizione di **misura esterna** e di **misura**. I due concetti differiscono principalmente per il loro dominio di definizione.

Dato uno insieme Ω, si chiama **misura esterna** $\mu^\star$ su Ω una funzione $\mu^\star : \mathcal{P}(\Omega) \longmapsto [0, +\infty]$, $\mathcal{P}(\Omega) = 2^\Omega$ l'insieme delle parti di Ω, tale che:

1. la misura dell'insieme vuoto sia nulla, cioè
$$\mu^\star(\emptyset) = 0;$$
2. monotonia, cioè per ogni $A \subset B$, si ha
$$\mu^\star(A) \leq \mu^\star(B);$$
3. valga la proprietà di numerabile subadditività
$$\mu^\star\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu^\star(A_j).$$

Si possono fare vari esempi di misure esterne:

i) Misura di Lebesgue: $\Omega = \mathbb{R}^n$, $\mu^\star = \mathcal{L}^n$.

ii) Delta di Dirac: fissato $\omega_0 \in \Omega$ si definisce

$$\delta_{\omega_0}(A) = \begin{cases} 1, & \text{se } \omega_0 \in A, \\ 0, & \text{se } \omega_0 \notin A. \end{cases}$$

iii) Misura del conteggio:

$$H^0(A) = \begin{cases} \sharp\text{A} & \text{(cardinalità di A) se } A \text{ ha un numero finito di elementi,} \\ \infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

iv) Misura Indicatrice:

$$I(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } A \neq \emptyset, \\ 0 & \text{se } A = \emptyset. \end{cases}$$

v) Le misure di superficie per superfici regolari.

Una misura esterna per essere una misura deve soddisfare una condizione in più, e cioè la numerabile additività:

3. se A_j, $j \in \mathbb{N}$ sono disgiunti, allora

$$\mu^\star\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu^\star(A_j).$$

Questa richiesta restringe di molto il domonio di $\mu^\star$ e necessita di una proprietà nota come misurabilità: un insieme A si dice **misurabile** se $\forall\ T \subseteq \Omega$ vale

$$\mu^\star(A) = \mu^\star(A \cap T) + \mu^\star(A \setminus T).$$

Si dimostra che, data $\mu^\star : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, \infty]$, la famiglia

$$\mathcal{M}(\mu^\star) = \{A \in \mathcal{P}(\Omega); \text{A misurabile}\}$$

è una $\sigma - algebra$ (cioè una famiglia chiusa per passaggio al complementare e per unioni numerabili, con $\emptyset$ e Ω che appartengono alla famiglia). $\mathcal{M}(\mu^\star)$ è il dominio naturale della misura indotta da $\mu^\star$, cioè la funzione $\mu = \mu^\star|_{\mathcal{M}(\mu^\star)} : \mathcal{M}(\mu^\star) \longrightarrow [0, \infty]$ è una misura.

Proposizione 1.1 *Sia μ una funzione finitamente additiva su di un'algebra $\mathcal{A}$. Allora μ è numerabilmente additiva se e solo se è continua in 0, cioè se e solo se*

$$\lim_{n \to +\infty} \mu(W_n) = 0$$

per ogni succesione di insiemi $W_n \in \mathcal{A}$ con $W_{n+1} \subset W_n$ e $W_n \to \emptyset$.

Dimostrazione. Siano $A_j \in \mathcal{A}$ insiemi disgiunti con

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}.$$

La finita additività implica che:

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{m} A_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \mu(A_j).$$

μ è $\sigma - additiva$ se soltanto se

$$\lim_{m \to +\infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^{m} A_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)$$

cioè, definito l'insieme W_n mediante

$$\emptyset \xleftarrow{m \to +\infty} W_m = A \setminus \bigcup_{j=1}^{m} A_j,$$

se e solo se

$$\mu(W_m) = \mu(A) - \mu\left(\bigcup_{j=1}^{m} A_j\right) \to 0.$$

Quindi

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{m} A_j\right) \to \mu(A) \Longleftrightarrow \mu(W_n) \to 0. \qquad \square$$

Si può dimostrare che le misure (ii) e (iii), cioè la Delta δ_{ω_0} e H^0 sono misure con $\mathcal{M}(\delta_{\omega_0}) = \mathcal{M}(H^0) = \mathcal{P}(\Omega)$, mentre per la misura I si ha che $\mathcal{M}(I) = \{\emptyset, \Omega\}$. Anche per la misura di Lebesgue non è un problema banale la determinazione di $\mathcal{M}(\mathcal{L}^n)$: il seguente esempio mostra che $\mathcal{M}(\mathcal{L}^n) \neq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

Esempio 1.2 (Vitali) Consideriamo il caso della misura di Lebesgue unidimensionale sull'intervallo [0,1]: introduciamo la relazione d'equivalenza $x \sim y$, $x, y \in [0,1]$ se e solo se $x - y \in \mathbb{Q}$. Data la relazione d'equivalenza; abbiamo le classi d'equivalenza. In ogni classe scegliamo un rappresentante (assioma della scelta) e denotiamo con $\mathbf{R}$ l'insieme dei rappresentanti. La domanda è se $\mathbf{R}$ sia misurabile o meno: si nota che

$$[0,1] \subseteq \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (\mathbf{R} + q). \tag{1.1}$$

Prendendo $\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (\mathbf{R} + q)$ si ha che $\mathbf{R} + q \subseteq [-1, 2]$, per cui l'unione è data da insiemi disgiunti contenuti in $[-1, 2]$, quindi $\mathcal{L}^1\big(\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (\mathbf{R}+q)\big) \leq 3$, ma sfruttando l'invarianza per traslazione della misura di Lebesgue, supponendo $\mathbf{R}$ misurabile e denotando con $c = \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$,

$$3 \geq \mathcal{L}^1\left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (\mathbf{R} + q)\right) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} \mathcal{L}^1(\mathbf{R}) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} c \qquad \Rightarrow c = 0.$$

D'altra parte, siccome

$$[0,1] \subset \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (\mathbf{R} + q),$$

si deve anche avere che

$$1 = \mathcal{L}^1([0,1]) \leq \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} \mathcal{L}^1(\mathbf{R} + q) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} c,$$

e quindi non può essere che $c = 0$.

Per garantire un po' di regolarità delle misure in considerazione e per non dover porsi il problema della determinazione del dominio della misura, solitamente si suppone di lavorare con **misure Boreliane** (Borel regolari), intendendo con questo l'ipotesi che, nel caso Ω sia uno spazio topologico, $\mathcal{B}(\Omega) \subset \mathcal{M}(\mu^\star)$. Qui con $\mathcal{B}(\Omega)$ si intende la $\sigma - algebra$ generata dagli aperti di Ω. Se Ω è uno spazio metrico, ad esempio $\Omega = \mathbb{R}^n$, esistono criteri che garantiscono la Borelianità: ad esempio il **Criterio di Carateòdory** dice che se la misura esterna è additiva sugli insiemi distanti cioè

$$\mu^\star(A \cup B) = \mu^\star(A) + \mu^\star(B) \qquad \text{se } 0 < d(A,B) = \inf_{\substack{a \in A \\ b \in B}} d(a,b)$$

allora $\mathcal{B}(\Omega) \subseteq \mathcal{M}(\mu^\star)$. La misura di Lebesgue soddisfa queste proprietà e quindi $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{L}^n)$.

Data una misura μ definita su di una $\sigma - algebra$ $\mathcal{F}$, chiamiamo spazio con misura la terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ dato uno spazio con misura o misurabile, possiamo definire un integrale.
Serve la nozione di **funzione misurabile**: essa è data da una funzione $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ (funzione misurabile reale) tale che $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ per ogni aperto $A \subseteq \mathbb{R}$ (o $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$). Si può più in generale richiedere $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$, $\forall A \in \mathcal{M}(\mathcal{L}^1)$, anche se non lo faremo praticamente mai. Diremo che f è Boreliana se Ω è spazio topologico e $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\Omega)$, $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Data f misurabile, sono misurabili anche le funzioni

$$f^+ = \max\{f, 0\} \qquad f^- = \max\{-f, 0\} \qquad |f| = f^+ + f^-.$$

Spesso quindi si ragiona sulle funzioni f positive e poi si generalizza a funzioni qualsiasi grazie al fatto che $f = f^+ - f^-$.
Fatto importante è l'approssimazione di f mediante **funzioni semplici**: una funzione $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice **semplice** se esistono un numero finito di insiemi misurabili disgiunti $E_i \subseteq \Omega, i = 1, ..., h$ e delle costanti $c_i \in \mathbb{R}, i = 1, ..., h$ tali che:

$$g = \sum_{i=1}^{h} c_i \chi_{E_i},$$

con χ_{E_i} funzione caratteristica di E_i,

$$\chi_{E_i}(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{se } \omega \notin E_i, \\ 1 & \text{se } \omega \in E_i. \end{cases}$$

Se f è una funzione misurabile positiva, allora:

$$f = \sup\{g; g \text{ funzione semplice } g \leq f\}.$$

Se poi f è essenzialmente limitata, cioè:

$$||f||_\infty = \inf\{\lambda \in \mathbb{R} : \mu(\{|f| > \lambda\}) = 0\} < +\infty,$$

allora $\forall \epsilon > 0 \ \exists g_\epsilon$ funzione semplice tale che $||f - g_\epsilon||_\infty \leq \epsilon$ (approssimazione uniforme).Tale approssimazione si costruisce come segue: supponiamo $f \geq 0$ e $M = ||f||_{L^\infty} < +\infty$, e suddividiamo l'intervallo [0,M] in h intervallini di ampiezza $\frac{M}{h}$, cioè:

$$[0, M] = \bigcup_{j=0}^{h-1} \left[\frac{jM}{h}, \frac{(j+1)M}{h}\right).$$

La misurabilità di f implica che gli insiemi $E_j^{(h)} = f^{-1}([\frac{jM}{h}, \frac{(j+1)M}{h}))$ sono misurabili e disgiunti e la funzione

$$g_h = \sum_{j=0}^{h-1} \frac{jM}{h} \chi_{E_j^{(h)}}$$

è semplice, $g_h \leq f$ e $||f - g_h||_\infty \leq \frac{M}{h}$. Se fisso $\epsilon > 0$ e prendo h tale che $\frac{M}{h} < \epsilon$ ho quindi concluso. Tale approssimazione è fondamentale per la definizione dell'integrale di f: se g è la funzione semplice data da $g = \sum_{i=1}^h c_i \chi_{E_i}$, si definisce:

$$\int_\Omega g \, d\mu = \int_\Omega g(\omega) \, \mu(d\omega) = \sum_{i=1}^h c_i \mu(E_i),$$

mentre se f misurable positiva si pone

$$\int_\Omega f \, d\mu := \sup \left\{ \int_\Omega g \, d\mu : g \text{ semplice}, \ g \leq f \right\}.$$

Per f generica si pone quindi

$$\int_\Omega |f|\,d\mu := \int_\Omega f^+\,d\mu + \int_\Omega f^-\,d\mu, \qquad \int_\Omega f\,d\mu = \int_\Omega f^+\,d\mu - \int_\Omega f^-\,d\mu.$$

La definizione di $\int_\Omega f\,d\mu$ è ben data se non siamo in presenza di una forma indeterminata e ciò succede se ad esempio $\int_\Omega |f|\,d\mu < +\infty$. Si definiscono gli spazi $L^p(\Omega,\mu)$ come

$$L^p(\Omega,\mu) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ misurabile} : \int_\Omega |f|^p\,d\mu < +\infty \right\}$$

e sono **spazi di Banach** con la norma

$$||f||_{L^p} = \begin{cases} (\int_\Omega |f|^p\,d\mu)^{\frac{1}{p}} & 1 \le p < +\infty \\ ||f||_\infty & p = +\infty. \end{cases}$$

Fissata una funzione f, la $\sigma-algebra$ $\mathcal{F}$ è in qualche modo troppo grande (eccessiva) per la misurabilità di f: si definisce quindi la $\sigma-algebra$ generata da f, $\sigma(f)$, come la più piccola $\sigma - algebra$ che contiene $f^{-1}(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}$ aperto. Si noti che nella teoria dell'integrazione se si modifica la funzione f su insiemi di misura nulla si vorrebbe che l'integrale e tutta la teoria non cambi: cioè, se $\tilde{f}$ è un' altra funzione con $\{f \neq \tilde{f}\}$ di misura nulla, allora si dovrebbe poter fare tutto utilizzando $\tilde{f}$ al posto di f.

Per fare questo si deve avere che gli insiemi nulli (a misura esterna nulla) siano misurabili: ciò si può fare sempre in quanto

$$\mathcal{N} = \{E \subseteq \Omega : \mu^\star(E) = 0\}$$

è una $\sigma - algebra$ e quindi $\mathcal{M}(\mu^\star) \cup \mathcal{N}$ è ancora una $\sigma - algebra$. Data in generale una $\sigma-algebra$ $\mathcal{F}$, la si può sempre completare a $\widetilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \cup \mathcal{N}$ in modo da contenere gli insiemi nulli: $\mathcal{F}$ si dirà poi completa se $\mathcal{F} = \widetilde{\mathcal{F}}$. Supporemo sempre le $\sigma-algebre$ complete, anche le $\sigma(f)$.

I concetti appena esposti possono essere estesi a misure μ con segno (non necessariamente positive), e a misure vettoriali: e anche a funzioni $f : (\Omega,\mathcal{F},\mu) \longrightarrow (E,\mathcal{E})$ con E insieme dotato di $\sigma-algebra$ $\mathcal{E}$ (si parla di spazio pre-misurato), definendo f misurabile se $f^{-1}(A) \in$

$\mathcal{F}$, $\forall A \in \mathcal{E}$. Il concetto di misurabilità va bene $\forall(E, \mathcal{E})$ spazio con $\sigma - algebra$. L'integrale è più delicato e si svolge facilmente con $E = \mathbb{R}^n$ integrando componente per componente. Data $f : (\Omega, \mathcal{F}, \mu) \longrightarrow (E, \mathcal{E})$ possiamo costruire due altre misure: la misura su Ω data da $\mu_f = f\mu$:

$$\mu_f(A) = \int_A f \, d\mu, \qquad \forall A \in \mathcal{F},$$

e la misura su E detta misura immagine di f (o legge di f, o ancora push-forward di μ tramite f) data da:

$$f_\sharp\mu(A) = \mu(\{f \in A\}) = \mu(f^{-1}(A)), \qquad \forall A \in \mathcal{E}.$$

Utilizzando la convenzione che se $A \in \mathcal{F}$ ha misura nulla allora

$$\int_A f \, d\mu = 0,$$

anche nel caso in cui $f \equiv +\infty$, si ottiene che μ_f è una misura assolutamente continua rispetto a μ, e si scrive che $\mu_f \ll \mu$ intendendo che se $\mu(A) = 0 \Longrightarrow \mu_f(A) = 0$ (o equivalentemente se $\forall \epsilon > 0 \; \exists \; \delta > 0$ tale che $\mu(A) < \delta \Longrightarrow \mu_f(A) < \epsilon$). La legge di f in generale, se $f : (\Omega, \mathcal{F}, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}$, non è detto che sia assolutamente continua rispetto a $\mathcal{L}^1$: se f è costante, $f(\omega) = x_0 \in \mathbb{R}$, allora $f_\sharp\mu = \delta_{x_0}$ (Delta di Dirac in x_0). Due funzioni misurabili si dicono **equamente distribuite** se $f_{1\sharp}\mu \equiv f_{2\sharp}\mu$.
Finiamo questa sezione ricordando la seguente nozione; una misura definita su uno spazio topologico si dice di Radon se per ogni insieme misurabile B si ha che

$$\begin{aligned}\mu(B) =& \sup\{\mu(K) : K \subset B, K \text{ compatto}\}\\ =& \inf\{\mu(A) : B \subset A, A \text{ aperto}\}.\end{aligned}$$

Ogni misura di Borel definita su di uno spazio localmente compatto è una misura di Radon; quindi in particolare la misura di Lebesgue ed ogni misura ad essa assolutamente continua è una misura di Radon.

1.2 Processi stocastici e martingale

Si parla di spazio di probabilità se la misura μ è positiva e se $\mu(\Omega) = 1$: in tal caso scriveremo $\mu := \mathbb{P}$ e lo spazio di probabilità sarà $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Gli elementi di $\mathcal{F}$ vengono chiamati **eventi** e due eventi $A, B \in \mathcal{F}$ si dicono **indipendenti** se $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$. L'indipendenza può essere estesa alle $\sigma - algebre$ dicendo che due $\sigma - algebre$ $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}$ sono indipendeti se $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$, $\forall A \in \mathcal{F}_1$, $\forall B \in \mathcal{F}_2$.
Le funzioni misurabili $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ vengono chiamate **variabili aleatorie reali**: due variabili aleatorie f_1 e f_2 vengono dette **indipendenti** se $\sigma(f_1)$ e $\sigma(f_2)$ sono indipendenti.
Una variabile aleatoria $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice avere **legge normale** se $f_\sharp\mathbb{P}$, la legge di f, è assolutamente continua rispetto a $\mathcal{L}^1$ con densità data una Gaussiana di media m e varianza σ, $f_\sharp\mathbb{P} = \mathcal{N}(m, \sigma)$. La densità si ottiene dal *Teorema di Randon-Nikodym.* Se μ e ν sono due misure (finite) e $\mu \ll \nu$, allora esiste una funzione $\rho \in L^1(\nu)$, detta densità, tale che $\mu = \nu_\rho = \rho\nu$. Nel caso di legge normale si avrà quindi che $f_\sharp\mathbb{P}(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{\frac{-|x-m|^2}{2\sigma}} \mathcal{L}^1(dx)$. Nel caso $m = 0$ e $\sigma = 1$ si parla di legge normale standard.
Un **processo stocastico** è una famiglia ad un parametro di variabili aleatorie: il processo può essere *discreto* o *continuo* se il parametro è discreto (successione di variabili aleatorie) o continuo. Nel secondo caso si tratta di una famiglia $(X_t)_{t \geq 0}$ di variabili aleatorie $X_t : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ (se processo stocastico reale).
Si parla di un processo stocastico **adattato** se in Ω viene data una filtrazione, cioè una famiglia di $\sigma - algebre$ $\mathcal{F}_t$ con $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_s$ $\forall t < s$, tale che X_t è $\mathcal{F}_t$-misurabile, cioè $\sigma(X_t) \subseteq \mathcal{F}_t$. Solitamente, dato un processo stocastico, si può costruire una filtrazione definendo $\mathcal{F}_t := \sigma(X_s : s \leq t)$, la più piccola $\sigma - algebra$ che rende misurabili tutte le X_s, $s \leq t$.
Data una variabile aleatoria X, denotiamo con $\mathbb{E}[X]$ la media, o speranza, di X definita da

$$\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X \, d\mathbb{P} = \int_\Omega X(\omega) \, \mathbb{P}(d\omega).$$

Utilizzando la definizione di legge di X, che denotiamo con $\mu = X_\sharp \mathbb{P}$, si vede facilmente che $\forall\ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ Boreliana si ha che

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int_\Omega f(X(\omega))\,(d\omega) = \int_\mathbb{R} f(x)\,\mu(dx).$$

Definiamo inoltre la *speranza condizionale* come segue: date due $\sigma - algebre$ $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ di Ω, la speranza della variabile aleatoria $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}$ condizionata a $\mathcal{G}$, denotata con $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ è l'unica funzione $\mathcal{G} - misurabile$ tale che:

$$\int_B \mathbb{E}(X|\mathcal{G})\,d\mathbb{P} = \int_B X\,d\mathbb{P} = \mathbb{E}[X\chi_B], \qquad \forall B \in \mathcal{G}.$$

La costruzione di $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ e la sua unicità è un teorema (vedere ad esempio [1]): essa generalizza il concetto di probabilità condizionata ad un evento $A \in \mathcal{F}$ definita da

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{1}{\mathbb{P}(A)}\mathbb{P}(A \cap B) \qquad \forall B \in \mathcal{F}$$

se $\mathbb{P}(A) \neq 0$. Si nota che $\mathbb{P}_A \ll \mathbb{P}$ e che la sua densità è $\frac{1}{\mathbb{P}(A)}\chi_A$. In termini di speranza condizionale si ha che, fissato A con $0 < \mathbb{P}(A) < 1$, se si considera la $\sigma - algebra$ generata da A

$$\mathcal{G}_A = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\},$$

la speranza condizionale della funzione $f = \chi_B$, $B \in \mathcal{F}$ condizionata a $\mathcal{G}_A$ sarà data da

$$\mathbb{E}(\chi_B|\mathcal{G}_A)(\omega) = \begin{cases} \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} & \text{se } \omega \in A \\ \\ \dfrac{\mathbb{P}(A^c \cap B)}{\mathbb{P}(A^c)} & \text{se } \omega \in A^c. \end{cases}$$

La costruzione di $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ si vede bene in $L^2(\mathcal{F})$, dato che esso è uno *spazio di Hilbert.* Dato che funzioni $\mathcal{G} - misurabili$ sono anche $\mathcal{F} - misurabili$, possiamo pensare a $L^2(\mathcal{G})$ come sottospazio (chiuso) di $L^2(\mathcal{F})$.

Visto che abbiamo un prodotto scalare, possiamo definire la *proiezione ortogonale* $\pi : L^2(\mathcal{F}) \longrightarrow L^2(\mathcal{G})$. Tale proiezione ortogonale altro non è che la *speranza condizionale*

$\pi(X) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$.
Infatti $\pi(X)$ minimizza la seguente quantità

$$\min\left\{||X - f||^2_{L^2(\mathcal{F})} : f \in L^2(\mathcal{G})\right\},$$

cioè

$$||X - \pi(X)||^2_{L^2(\mathcal{F})} \leq ||X - f||^2_{L^2(\mathcal{F})} \qquad \forall f \in L^2(\mathcal{G})$$

In particolare possiamo prendere $f = \pi(X) + \epsilon g$ con $g \in L^2(\mathcal{G})$, quindi

$$\epsilon \xrightarrow{\phi} ||X - \pi(X) - \epsilon g||^2_{L^2(\mathcal{F})}$$

ha un minimo in 0 e dato che ϕ è derivabile, $\phi'(0) = 0$. Ma

$$\phi'(0) = \int_\Omega (X - \pi(X))g \, d\mathbb{P} = 0.$$

Se in particolare prendiamo $g = \chi_B$, $B \in \mathcal{G}$, abbiamo ottenuto che

$$\int_B X \, d\mathbb{P} = \int_\Omega X\chi_B \, d\mathbb{P} = \int_\Omega \pi(X)\chi_B \, d\mathbb{P} = \int_B \pi(X) \, d\mathbb{P}$$

e quindi $\pi(X) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$.
Della speranza condizionale useremo le seguenti proprietà:

- *Raffinamento*: se $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G} \Rightarrow \mathbb{E}[\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\mathcal{H}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}]$ q.c..
  In particolare $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X|\mathcal{G})] = \mathbb{E}[X]$;
- *Misurabilità*: se X è $\mathcal{G}$-misurabile e XY sia integrabile allora $\mathbb{E}[XY|\mathcal{G}] = X\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$ q.c.. In particolare $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = X$ q.c. se X è $\mathcal{G}$-misurabile;
- *Indipendenza*: se X è indipendente da $\mathcal{G}$: $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}[X]$ q.c..

Chiudiamo con delle definizioni: un processo stocastico adattato si chiama:

(i) **martingala** se $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s \ \forall t > s$;

(ii) **sub-(super)-martingala** se $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) \geq X_s$ (risp. $\leq$) $\forall t > s$.

Capitolo 2

Moto Browniano

Esistono vari modi per costruire il moto Browniano e anche varie definizioni più o meno equivalenti del moto Browniano; per maggiori dettagli rimandiamo al libro [2].
Costruiremo quello più semplice e forse più classico, il **moto Browniano standard**.
Per costruire il moto Browniano esplicitamente, dobbiamo prima costruire lo spazio di probabilità $(\Omega, \mathbb{P})$ e quindi il processo stocastico $W(\cdot) : [0, +\infty) \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Inizieremo col costruire la misura di Wiener.

2.1 Misura di Wiener

Lo spazio di probabilità su cui costruiremo la **misura di Wiener** è:

$$\Omega = \mathbb{R}^{[0,T]} = \text{insieme di tutte le funzioni tra } [0, T] \text{ e } \mathbb{R}.$$

La cosrtuzione della misura di Wiener si basa sul Teorema 2.1.1

$$W_t : \Omega \to \mathbb{R} \qquad W_t(\omega) = \omega(t). \tag{2.1}$$

Non è detto che le traiettorie del moto Browniano $t \mapsto W_t(\omega) = \omega(t)$ siano continue: ricaveremo però come conseguenza del Teorema 3.0.2 la continuità per quasi ogni traiettoria, quasi ogni nel senso dela misura di Wiener.

Su Ω vogliamo definire una misura di probabilità: sfruttiamo la struttura di prodotto di Ω (analogia con $\mathbb{R}^n = \{\omega : \{1,...,n\} \longrightarrow \mathbb{R}\}$ funzioni coordinate) nel seguente modo. Su $\mathbb{R}$ fissiamo una misura di probabilità; la misura che fissiamo è data da

$$\mu(dx) = g(x)\mathcal{L}^1(dx) = g(x)dx$$

con $\mathcal{L}^1$ misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$ e $g(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2}}$. La scelta di tale misura è legata all'equazione del calore (equazione che descrive il processo di diffusione standard); infatti, se definiamo, data una funzione $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$, la funzione

$$u(x,t) = u_0 * g_t(x) = \int_{\mathbb{R}} u_0(y) p_t(x, dy)$$

con $g_t(x) = \frac{1}{\sqrt{t}} g(\frac{x}{\sqrt{t}})$ e $p_t(x, dy) = g_t(x-y)\mathcal{L}^1(dy)$, è la soluzione dell'equazione del calore su $\mathbb{R}$ con dato iniziale u_0, cioè

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) = \partial^2_{xx} u(x,t) & \forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Premesso ciò, su $\Omega = \mathbb{R}^{[0,T]}$ si definiscono gli *insiemi cilindrici* ω come segue: si fissa un numero finito h di istanti $F \subseteq [0,T]$ $F = \{t_1, t_2, \dots, t_h\}$ con $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_h \leq T$ e indichiamo con $\Pi_F : \Omega \to \mathbb{R}^h$ la proiezione

$$\Pi_F(\omega) = (\omega(t_1), \dots, \omega(t_h)).$$

Si definisce quindi per ogni $B \subset \mathbb{R}^h$

$$P_F\big(\Pi_F^{-1}(B)\big) = \int_B \frac{e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x_1^2}{t_1}\right) + \left(\frac{(x_2-x_1)^2}{t_2-t_1}\right) + \dots + \left(\frac{(x_h-x_{h-1})^2}{t_h-t_{h-1}}\right)\right]}}{(2\pi)^{\frac{h}{2}} \sqrt{t_1(t_2-t_1) * \dots * (t_h - t_{h-1})}} \, dx_1 \dots dx_h. \tag{2.2}$$

Nel caso in cui $t_1 = 0$ intendiamo nel precedente integrale (2.2) la delta di Dirac in 0.

La funzione P_F così definita si dimostra avere buone proprietà, come ad esmpio:

1. $F \subseteq G$ finiti, $B \subseteq \mathbb{R}^h$, $h = \sharp F$, $m = \sharp G$, $B \times \mathbb{R}^{m-h} \subseteq \mathbb{R}^m$ allora

$$P_F\big(\Pi_F^{-1}(B)\big) = P_G\left(\Pi_G^{-1}(B \times \mathbb{R}^{m-h})\right);$$

2. finita additività, cioè se $\Pi_{F_j}^{-1}(B)$ sono cilindri disgiunti, allora posto $F = \cup F_j$

$$P_F\left(\bigcup_{j=1}^{m} \Pi_{F_j}^{-1}(B)\right) = \sum_{j=1}^{m} P_{F_j}\big(\Pi_{F_j}^{-1}(B)\big).$$

Si può allora applicare il seguente teorema:

Teorema 2.1 ***(di estensione di Kolmogorov)*** *Sia* $(P_F)_F$ *una famiglia di funzioni d'insieme definite da* (2.2) *che soddisfino le proprietà* 1. *e* 2. *precedenti: allora esiste un'unica misura di probabilità* $\mathbb{P} : \mathcal{B}(\Omega) \to [0,1]$ *tali che:*

$$\mathbb{P}\big(\Pi_F^{-1}(B)\big) = P_F\big(\Pi_F^{-1}(B)\big), \qquad \forall F \subseteq [0,T] \text{ finito, } \forall B \subseteq \mathbb{R}^{\sharp F}.$$

Dimostrazione. Per ogni $F \subseteq [0,T]$ finito, denoto con $F = \{t_1, \ldots, t_n\}$, $\Omega_F = \mathbb{R}^{\sharp F}$ e $\Pi_F : \Omega \to \Omega_F$,

$$\Pi_F(\omega) = \big(\omega(t_1), \ldots, \omega(t_n)\big).$$

Se $F \subseteq G$ e G finito, $\Pi_{GF} : \Omega_G \to \Omega_F$ sarà la proiezione naturale sugli elementi di F.
Denotiamo con

$$\mathcal{A} = \big\{\Pi_F^{-1}(B) : B \subseteq \mathcal{B}(\Omega_F), F \text{ finito}\big\}$$

la collezione di tutti i cilindri. Osserviamo anzitutto che gli insiemi di $\mathcal{A}$ sono misurabili in quanto la proiezione Π_F è una funzione misurabile $\forall F$.
$\mathcal{A}$ è un'algebra, cioè:

1. se $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$, in quanto $A^c = \Pi_F^{-1}(B^c)$ se $A = \Pi_F^{-1}(B)$;

2. se $A, D \in \mathcal{A}$, $A = \Pi_F^{-1}(B)$ e $D = \Pi_G^{-1}(C) \Rightarrow A \cup D \in \mathcal{A}$, in quanto se denotiamo con $H = F \cup G$, allora

$$A \cup D = \Pi_H^{-1}\big(\Pi_{HF}^{-1}(B) \cup \Pi_{HG}^{-1}(C)\big).$$

Per $A \in \mathcal{A}$, $A = \Pi_F^{-1}(B)$, definiamo

$$\mathbb{P}(A) = P_F(\Pi_F^{-1}(B)).$$

La consistenza ci da la buona definizione: difatti se $A = D$ con $D = \Pi_G^{-1}(C)$, sempre denotando con $H = F \cup G$ abbiamo che

$$A = \Pi_H^{-1}\big(\Pi_{HF}^{-1}(B)\big) = \Pi_H^{-1}\big(\Pi_{HG}^{-1}(C)\big).$$

Dato che Π_H è suriettiva, ne segue che $\Pi_{HF}^{-1}(B) = \Pi_{HG}^{-1}(C)$ e quindi

$$\begin{aligned} P_F(\Pi_F^{-1}(B)) &= P_H\big(\Pi_H^{-1}(\Pi_{HF}^{-1}(B))\big) \\ &= P_H\big(\Pi_H^{-1}(\Pi_{HG}^{-1}(C))\big) \\ &= P_G(\Pi_G^{-1}(C)) \end{aligned}$$

cioè la buona definizione di $\mathbb{P}(A)$.
Dimostriamo ora che $\mathbb{P}$ è $\sigma - additiva$ su $\mathcal{A}$: questo ci dice che $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}(\mathbb{P})$.
Supponiamo che $\mathbb{P}$ non sia $\sigma - additiva$. Ciò equivale a dire, grazie alla Proposizione 1.1.1 che esistono $W_n \in \mathcal{A}$ e $\epsilon > 0$ tali che $W_n \to \emptyset$ e $\mathbb{P}(W_n) > \epsilon\ \forall n$.
Quindi per qualche $F(n) \subseteq T$ e $B_n \in \Omega_{F(n)}$ Boreliano, supponendo $F(1) \subseteq F(2) \subseteq \dots$, $W_n = \Pi_{F(n)}^{-1}(B_n)$.
Se $m \leq n$ denotiamo con $\Pi_{nm} = \Pi_{F(n)F(m)}$, da cui

$$\Pi_{F(n)}^{-1}(B_n) \subseteq \Pi_{F(m)}^{-1}(B_m) = \Pi_{F(n)}^{-1}(\Pi_{nm}^{-1}(B_m))$$

cioè $B_n \subseteq \Pi_{nm}^{-1}(B_m)$. Denotiamo anche $P_n = P_{F(n)}$ così che $\mathbb{P}(W_n) = P_n(\Pi_{F(n)}^{-1}(B_n))$: dato che stiamo lavorando con misure di Randon, sappiamo che esiste $K_n \subseteq B_n$ compatto tale che

$$P_n\big(\Pi_{F(n)}^{-1}(B_n \setminus K_n)\big) < \frac{\epsilon}{3^n}$$

e poniamo $C_n = \bigcap_{m=1}^n \Pi_{nm}^{-1}(K_n) \subseteq K_n \subseteq B_n$: C_n è compatto e $\bigcap_{m=1}^n \Pi_{nm}^{-1}(K_n)$ è chiuso.
Abbiamo che

$$B_n \setminus C_n = \bigcup_{m=1}^n B_n \setminus \Pi_{nm}^{-1}(K_m) \subseteq \bigcup_{m=1}^n \Pi_{nm}^{-1}\big(B_m \setminus K_m\big)$$

da cui

$$P_n\big(\Pi_{F(n)}^{-1}(B_n \setminus C_n)\big) \leq \sum_{m=1}^n P_m\big(\Pi_{F(m)}^{-1}(B_m \setminus K_m)\big) < \sum_{m=1}^n \frac{\epsilon}{3^m} < \frac{\epsilon}{2}$$

$$P_n\big(\Pi^{-1}_{F(n)}(C_n)\big) \geq \epsilon - \frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{2}.$$

Per $n \leq h$ abbiamo che

$$\Pi^{-1}_{hn}(C_n) = \Pi^{-1}_{hn}\big(\bigcap_{m=1}^{n} \Pi^{-1}_{nm}(K_m)\big) = \bigcap_{m=1}^{n} \Pi^{-1}_{hm}(K_m) \supseteq C_h$$

cioè $\Pi_{hn}(C_h) \subseteq C_n$. Quindi $\Pi_{hj}(C_h) = \Pi_{nj}\big(\Pi_{hn}(C_n)\big) \subseteq \Pi_{nj}(C_n)$ per $j \leq n \leq h$. Dato che $C_h \neq \emptyset$, $\Pi_{hj}(C_h) \neq \emptyset$.

Poniamo

$$D_n = \bigcap_{h \geq n} \Pi_{hn}(C_h) = \bigcap_{h>n} \Pi_{hn}(C_h);$$

D_n è intersezione di una successione decrescente di compatti non vuoti quindi D_n è compatto e non vuoto: sia quindi $x_1 \in D_1$: allora

$$\Pi_{n+1,n}\big(D_{n+1}\big) = \Pi_{n+1,n}\left(\bigcap_{h>n} \Pi_{h,n+1}(C_h)\right) = D_n.$$

Scegliamo quindi ricorsivamente $x_n \in D_n$ in modo che $\Pi_{n+1,n}(x_{n+1}) = x_n$. In particolare $\Pi_{mn}(x_m) = x_n$ per $m > n$: dato che $x_n \in D_n \subseteq \Omega_{F(n)}$, x_n avrà coordinate $x_n(t)$, $t \in F(n)$: definiamo quindi

$$x(t) = x_n(t) \qquad \text{se } t \in F(n)\ \forall n.$$

La funzione x è definita $\forall t \in \cup F(n)$: la estendiamo per valori $t \notin F(n)$. Avremo $x \in \Omega$ e $\Pi_{F(n)}(x) = x_n$ $\forall n$. Dato che $D_n \subseteq C_n \subseteq K_n \subseteq B_n$ avremo anche che $x \in \Pi^{-1}_{F(n)}(B_n) = W_n$ $\forall n$, ma $\cap W_n = \emptyset$, cioè una contraddizione. □

La misura così costruita viene chiamata **misura di Wiener**: essa è Boreliana in quanto in Ω possiamo considerare la norma:

$$||\omega|| = \sup_{t \geq 0} |\omega(t)|.$$

$(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mathbb{P})$ è detto spazio di Wiener.

Quindi Ω è metrico e possiamo considerare la $\sigma - algebra$ generata dagli aperti, cioè la $\sigma - algebra$ dei Boreliani $\mathcal{B}(\Omega)$.

2.2 Costruzione del moto Browniano

Dimostriamo ora qui di seguito le seguenti proprietà del processo W_t definito da (2.1):

1. $W_0 = 0$ quasi certamente;

2. per ogni $0 < s < t$, le variabili aleatorie $W_t - W_s$ e W_{t-s} hanno la stessa legge, cioè:
$$\mathbb{P}(W_t - W_s \in A) = \mathbb{P}(W_{t-s} \in A)$$
e la legge di W_{t-s} è Gaussiana con media nulla e covarianza $t - s$, cioè la misura $\mathcal{N}(0, t - s)$;

3. per ogni $0 < s < t$, le variabili aleatorie W_s e $W_t - W_s$ sono indipendenti.
Di conseguenza, per ogni scelta di tempi $0 < t_1 < \cdots < t_n$, le variabili aleatorie $W_{t_1}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ sono indipendenti.

Dimostrazione. Anzitutto, il fatto che W_0 quasi ovunque lo si deduce in quanto W_t ha legge gaussiana $\mathcal{N}(0, t)$ e questa per $t = 0$ è la delta di Dirac in 0.
Per la dimostrazione del secondo punto, notiamo che
$$\begin{aligned}\{W_t - W_s \in A\} &= \{\omega \in \Omega : \omega(t) - \omega(s) \in A\}\\ &= \{\omega \in \Omega : h(\Pi_F(\omega)) \in A\},\end{aligned}$$
dove abbiamo indicato con $F = \{s, t\}$ l'insieme finito di tempi determinato da s e t, $\Pi_F : \Omega \to \mathbb{R}^2$ la proiezione
$$\Pi_F(\omega) = (\omega(s), \omega(t))$$
e con $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione $h(x_1, x_2) = x_2 - x_1$. In definitiva abbiamo che
$$\begin{aligned}\{W_t - W_s \in A\} &= \{\omega \in \Omega : \Pi_F(\omega) \in B\}\\ &= \Pi_F^{-1}(B),\end{aligned}$$
con $B = h^{-1}(A) \subset \mathbb{R}^2$. Per come abbiamo costruito la misura di Wiener, otteniamo quindi che
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(W_t - W_s \in A) &= P_F(\Pi_F^{-1}(B))\\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{s(t-s)}} \int_B e^{-\frac{x_1^2}{2s} - \frac{(x_2 - x_1)^2}{2(t-s)}}\, dx_1 dx_2.\end{aligned}$$

Con il cambio di variabili $y = x_2 - x_1$ otteniamo quindi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(W_t - W_s \in A) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{s(t-s)}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x_1^2}{2s}}\, dx_1 \int_A e^{-\frac{y^2}{2(t-s)}}\, dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_A e^{-\frac{y^2}{2(t-s)}}\, dy \\
&= \mathbb{P}(W_{t-s} \in A) \\
&= \mathcal{N}(0, t-s)(A).
\end{aligned}$$

Per la dimostrazione del terzo punto, si ragiona in modo analogo, notando che, con la stessa notazione di prima;

$$\{W_s \in A_1\} \cap \{W_t - W_s \in A_2\} = \Pi_F^{-1}\big((A_1 \times \mathbb{R}) \cap (h^{-1}(A_2)\big),$$

da cui

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(W_s \in A_1, W_t - W_s \in A_2) &= P_F(\Pi_F^{-1}((A_1 \times \mathbb{R}) \cap h^{-1}(A_2))) \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{s(t-s)}} \int_{(A_1\times\mathbb{R})\cap h^{-1}(A_2)} e^{-\frac{x_1^2}{2s} + \frac{(x_2-x_1)^2}{2(t-s)}}\, dx_1 dx_2 \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{s(t-s)}} \int_{A_1} e^{-\frac{x_1^2}{2s}} \int_{A_2} e^{-\frac{y^2}{2(s-t)}}\, dy \\
&= \mathbb{P}(W_s \in A_1) \cdot \mathbb{P}(W_{t-s} \in A_2).
\end{aligned}$$

I processi stocastici che soddisfano 1. $\rightarrow$ 3. vengono detti **moti Browniani standard unidimensionali**.

Lemma 2.2 . *Per ogni $m \in \mathbb{N}$, abbiamo che*

$$\int_\Omega \big(W_t(\omega) - W_s(\omega)\big)^m\, \mathbb{P}(d\omega) = \begin{cases} 0 & \textit{se } m \textit{ è dispari,} \\ \frac{m!}{(\frac{m}{2})!2^{\frac{m}{2}}}(t-s)^{\frac{m}{2}} & \textit{se } m \textit{ è pari.} \end{cases}$$

Dimostrazione. Si procede per induzione, notando prima che per m dispari $\frac{x^m e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}}}{\sqrt{2\pi(t-s)}}$ è dispari, e quindi se integrata su $\mathbb{R}$, l'integrale viene zero; nel caso in cui m sia pari, con una integrazione per parti otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x^m e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}}}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\, dx = (t-s)(m-1)\int_{\mathbb{R}} \frac{x^{m-2} e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}}}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\, dx.$$

In definitiva, abbiamo che

$$\mathbb{E}\big[|W_t - W_s|^{2n}\big] = c_n|t-s|^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

□

2.3 Proprietà del moto Browniano

Le proprietà che descriviamo ora sono principalmente proprietà di martingala: con $\mathcal{F}_t$ indichiamo la $\sigma - algebra$ generata da W_s, $s \leq t$.

Proposizione 2.3 *Se $(W_t)_{t\geq 0}$ è un moto Browniano standard ($\mathcal{F}_t$-moto Browniano), allora*

1. *W_t è una $\mathcal{F}_t$-martingala;*
2. *$W_t^2 - t$ è una $\mathcal{F}_t$-martingala;*
3. *$e^{(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t)}$ è una $\mathcal{F}_t$-martingala.*

Dimostrazione.

1. La dimostrazione è semplice in quanto $W_t - W_s$ è indipendente da $\mathcal{F}_s$ e quindi

$$\mathbb{E}(W_t - W_s|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}[W_t - W_s] = 0$$

in quanto $W_t - W_s$ ha media nulla.

2. Sfruttiamo il fatto che $(W_t)_t \geq 0$ è una martingala e quindi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(W_t^2 - W_s^2|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}((W_t - W_s)^2 + 2W_s(W_t - W_s)|\mathcal{F}_s) \\
&= \mathbb{E}((W_t - W_s)^2|\mathcal{F}_s) + 2W_s\mathbb{E}(W_t - W_s|\mathcal{F}_s) \\
&= \mathbb{E}[W_{t-s}^2] \\
&= (t-s),
\end{aligned}$$

in quanto il moto Browniano ha incrementi indipendenti e stazionari e la varianza di W_{t-s} è $t-s$. Se ne conclude che

$$\begin{aligned} t-s &= \mathbb{E}(W_t^2 - W_s^2 | \mathcal{F}_s) \\ &= \mathbb{E}(W_t^2 | \mathcal{F}_s) - W_s^2, \end{aligned}$$

cioè la proprietà di martingala

$$\mathbb{E}(W_t^2 - t | \mathcal{F}_s) = W_s^2 - s.$$

3. La prima osservazione è che se X è una variabile aleatoria normale standard, allora

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{\lambda X}] &= \int_\Omega e^{\lambda X(\omega)}\, \mathbb{P}(d\omega) \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda x} X_\sharp \mathbb{P}(dx) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda x} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \\ &= e^{\frac{\lambda^2}{2}}. \end{aligned}$$

D'altra parte W_s è $\mathcal{F}_s$-misurabile e $W_t - W_s$ è indipendente da $\mathcal{F}_s$, quindi

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{\sigma W_t - \sigma^2 \frac{t}{2}} | \mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(e^{\sigma(W_t - W_s) + \sigma W_s - \sigma^2 \frac{t}{2}} | \mathcal{F}_s) \\ &= e^{\sigma W_s - \sigma^2 \frac{t}{2}} \mathbb{E}(e^{\sigma(W_t - W_s)} | \mathcal{F}_s) \\ &= e^{\sigma W_s - \sigma^2 \frac{t}{2}} \mathbb{E}[e^{\sigma(W_t - W_s)}] \\ &= e^{\sigma W_s - \sigma^2 \frac{t}{2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{\sigma x} e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}}\, dx \\ &= e^{\sigma W_s - \sigma^2 \frac{t}{2}} e^{\sigma^2 \frac{(t-s)}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2(t-s)}(x - \sigma(t-s))^2}\, dx \\ &= e^{\sigma W_s - \sigma^2 \frac{s}{2}} \end{aligned}$$

che era quanto volevamo dimostrare.

□

Capitolo 3

Ulteriori proprietà del moto Browniano

Enunciamo il seguente teorema, per la cui dimostrazione rimandiamo a [2].

Teorema 3.1 (Kolmogorov) *Se* (X_t) *è un processo stocastico tale che*

$$\mathbb{E}\big[|X_t - X_s|^\beta\big] \leq c|t-s|^{1+\alpha},$$

allora $t \mapsto X_t(\omega)$ *è* γ*-Hölderiano per quasi ogni* $\omega \in \Omega$ *e* $\forall \gamma < \frac{\alpha}{\beta}$.

Quindi, grazie al Lemma , il moto Browniano è, per quasi ogni ω, γ-Hölderiano per ogni $\gamma < \frac{n-1}{2n}$ $\forall\ n \in \mathbb{N}$, cioè $\forall\ \gamma < \frac{1}{2}$; in altre parole

$$\mathbb{P}\big(C_0^\gamma([0,T])\big) = 1 \qquad \forall \gamma < \frac{1}{2}.$$

Definizione 3.2 f *si dice* γ*-Hölderiana se esiste una costante* $c > 0$ *tale che*

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x-y|^\gamma.$$

Vediamo ora cosa succede per le funzioni Hölderiane con esponente maggiore di $\frac{1}{2}$; per fare questo abbiamo bisogno del Lemma 2.

Da tale Lemma otterremo anche informazioni sulle funzioni a variazione limitata; introduciamo quindi un pò di notazioni che useremo in seguito. Data una partizione $F = \{0 = t_0 < \cdots < t_n = T\}$ di $[0, T]$, si denota con

$$|F| = \sup_{i=1,\dots,n} |t_i - t_{i-1}|.$$

Indichiamo con Σ l'insieme delle partizioni di $[0, T]$ mentre, se $\omega \in \Omega$, denotiamo con

$$I_1(F)(\omega) = \sum_{i=1}^{n} |\omega(t_i) - \omega(t_{i-1})|$$

e

$$I_2(F)(\omega) = \sum_{i=1}^{n} |\omega(t_i) - \omega(t_{i-1})|^2.$$

Si definisce variazione di ω la quantità

$$V_1(\omega) = \sup_{F \in \Sigma} I_1(F)(\omega)$$

e diremo che $\omega \in BV([0, T])$ se e solo se $V_1(\omega) < +\infty$.
Si definisce in modo analogo la variazione quadratica di ω mediante

$$V_2(\omega) = \sup_{F \in \Sigma} I_2(F)(\omega).$$

Abbiamo il seguente lemma.

Lemma 3.3 *Vale la seguente proprietà*

$$\lim_{|F| \to 0} \int_{\Omega} |I_2(F)(\omega) - T|^2 \, \mathbb{P}(d\omega),$$

converge per $I_2(F) \to 0$, *a* T *in* $L^2(\Omega, \mathbb{P})$.

Dimostrazione. Abbiamo anzitutto che

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega I_2(F)(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) &= \sum_{i=1}^n \int_\Omega |\omega(t_i)-\omega(t_{i-1})|^2\,\mathbb{P}(d\omega) \\
&= \sum_{i=1}^n \int_\Omega |W_{t_i}(\omega)-W_{t_{i-1}}(\omega)|^2\,\mathbb{P}(d\omega) \\
&= \sum_{i=1}^n \int_\Omega |W_{t_i-t_{i-1}}(\omega)|^2\,\mathbb{P}(d\omega) \\
&= \sum_{i=1}^n \int_\mathbb{R} x^2 \frac{e^{-\frac{x^2}{2(t_i-t_{i-1})}}}{\sqrt{2\pi(t_i-t_{i-1})}}\,dx \\
&= \sum_{i=1}^n (t_i-t_{i-1}) = T
\end{aligned}
$$

dalle proprietà del moto Browniano. Inoltre

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega I_2(F)(\omega)^2\,\mathbb{P}(d\omega) &= \sum_{i=1}^n \int_\Omega |W_{t_i}(\omega)-W_{t_{i-1}}(\omega)|^4\,\mathbb{P}(d\omega) \\
&+ 2\sum_{i<j=1}^n \int_\Omega |W_{t_i}(\omega)-W_{t_{i-1}}(\omega)|^2|W_{t_j}(\omega)-W_{t_{j-1}}(\omega)|^2\,\mathbb{P}(d\omega) \\
&= 3\sum_{i=1}^n (t_i-t_{i-1})^2 + 2\sum_{i<j=1}^n (t_i-t_{i-1})(t_j-t_{j-1}) \\
&= 2\sum_{i=1}^n (t_i-t_{i-1})^2 + \left(\sum_{i=1}^n (t_i-t_{i-1})\right)^2 \\
&= 2\sum_{i=1}^n (t_i-t_{i-1})^2 + T^2.
\end{aligned}
$$

Qui abbiamo usato il fatto che

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |W_{t_i}(\omega)-W_{t_{i-1}}(\omega)|^4\,\mathbb{P}(d\omega) &= \int_\mathbb{R} x^4 \frac{e^{-\frac{x^2}{2(t_i-t_{i-1})}}}{\sqrt{2\pi(t_i-t_{i-1})}}\,dx \\
&= 3(t_i-t_{i-1})^2
\end{aligned}
$$

mentre dall'indipendenza di $W_{t_i} - W_{t_{i-1}}$ da $W_{t_j} - W_{t_{j-1}}$ per $i < j$,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |W_{t_i}(\omega) - W_{t_{i-1}}(\omega)|^2 |W_{t_j}(\omega) - W_{t_{j-1}}(\omega)|^2 \, \mathbb{P}(d\omega) &= \int_\Omega |W_{t_i}(\omega) - W_{t_{i-1}}(\omega)|^2 \, \mathbb{P}(d\omega) \\ &\cdot \int_\Omega |W_{t_j}(\omega) - W_{t_{j-1}}(\omega)|^2 \, \mathbb{P}(d\omega) \\ &= (t_i - t_{i-1})(t_j - t_{j-1}).\end{aligned}$$

In definitiva otteniamo che

$$\begin{aligned}\int_\omega |I_2(F)(\omega) - T|^2 \, \mathbb{P}(d\omega) &= \int_\Omega I_2(F)(\omega)^2 \, \mathbb{P}(d\omega) + T^2 - 2T \int_\Omega I_2(F)(\omega) \, \mathbb{P}(d\omega) \\ &= 2 \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^2 + T^2 - T^2 \leq 2|F|T \xrightarrow[|F| \to 0]{} 0.\end{aligned}$$

□

Siamo quindi pronti a dimostrare il seguente teorema.

Teorema 3.4 *$BV([0,T]) \subseteq \Omega$ è un insieme di Borel e*

$$\mathbb{P}\big(BV([0,T])\big) = 0$$

Dimostrazione. Denotiamo con $\Sigma_\mathbb{Q} \subseteq \Sigma$ le partizioni con tempi razionali, cioè $F = \{0 = t_0 < \cdots < t_n = T\}$, $t_i \in \mathbb{Q}$.
La mappa $\omega \to I_2(F)(\omega)$ è Borel-misurabile, quindi anche $\omega \to V_2(\omega) = \sup_{F \in \mathbb{Q}} I_2(F)(\omega)$ lo è e quindi $BV[0,T] \subseteq \{V_2(\omega) = 0\}$ è Boreliano.
Dal Lemma 3.0.4, sappiamo che esiste $(F)_n \subseteq \Sigma$ con $|F| \to 0$ e tale che $I_2(F)(\omega) \to T$ in $L^2(\Omega, \mathbb{P})$; quindi a meno di sottosuccessioni, la convergenza è quasi ovunque, cioè esiste $\Gamma \subseteq \Omega$ con $\mathbb{P}(\Gamma) = 1$ tale che

$$I_2(F_n)(\omega) \to T \qquad \forall \omega \in \Gamma.$$

Dato che per $\omega \in BV([0,T])$ $V_2(\omega) = 0$, se ne deduce che $BV([0,T]) \subseteq \Omega \setminus \Gamma$ e tale insieme ha misura nulla. □

Teorema 3.5 *Se $\gamma \in (\frac{1}{2}, 1)$, allora $\mathbb{P}\big(C_0^\gamma([0,T])\big) = 0$.*

Dimostrazione. Basta fissare $F = \{0 = t_0 < \cdots < t_n = T\}$, e notare che:

$$\begin{aligned}
I_2(F)(\omega) &= \sum_{i=1}^{n} (\omega(t_i) - \omega(t_{i-1}))^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\omega(t_i) - \omega(t_{i-1})}{(t_i - t_{i-1})^\gamma} \right]^2 (t_i - t_{i-1})^{2\gamma} \\
&\leq c \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1})^{2\gamma} \\
&\leq c|F|^{2\gamma-1} \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \\
&= cT|F|^{2\gamma-1}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow I_2(F)(\omega) \to 0$ per $|F| \to 0$ in quanto $\gamma > \frac{1}{2}$ e quindi ancora $C_0^\gamma([0,T]) \subseteq \Omega \setminus \Gamma$. $\square$

Bibliografia

[1] R. M. Dudley. *Real analysis and probability*, volume 74 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002. Revised reprint of the 1989 original.

[2] Ioannis Karatzas and Steven E. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*, volume 113 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1991.