UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FERRARA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

TESI DI LAUREA TRIENNALE

INTEGRALE E FORMULA DI ITÔ

Laureanda:
Giulia Zanirato
Matricola 092070

Relatore:
Prof. Michele Miranda

Anno Accademico 2010-2011

Indice

1 Richiami di teoria della misura **1**
1.1 Spazi di probabilità 6

2 Il mercato e le opzioni **13**
2.1 Le opzioni 13
2.2 Un modello per il prezzo del sottostante 14

3 Moto Browniano **17**
3.1 Proprietà del moto Browniano 20

4 Integrali di Itô **23**
4.1 Costruzione dell'integrale stocastico 24

5 La formula di Itô **29**

6 Applicazione degli integrali di Itô **35**
6.1 Equazioni differenziali stocastiche 35
6.2 Unicità della soluzione 38
6.3 Conclusione 41

Capitolo 1

Richiami di teoria della misura

In questo capitolo facciamo una rapida carrellata delle principali nozioni di teoria della misura che ci serviranno in seguito.
Per maggiori dettagli e approfondimenti, rimandiamo al libro [1].
Ricordiamo anzitutto la definizione di *misura esterna* e di *misura.* I due concetti differiscono principalmente per il loro dominio di definizione.

Definizione 1.1. *Dato uno spazio Ω, si chiama misura esterna una funzione $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, +\infty]$, con $\mathcal{P}(\Omega) = 2^\Omega$ l'insieme delle parti di Ω tale che*

1) $\mu^*(\emptyset) = 0$*;*

2) *numerale subadditività:* $\mu^*(\cup_{j\in\mathbb{N}} A_j) \le \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu^*(A_j)$*;*

3) *monotonia:* $A \subseteq B \implies \mu^*(A) \le \mu^*(B)$*.*

Si possono fare vari esempi di misure esterne.

i) Misura di Lebesgue: $\Omega = \mathbb{R}^n$, $\mu^* = \mathcal{L}^n$.

ii) Delta di Dirac: fissato $\omega_0 \in \Omega$, si definisce

$$\delta_{\omega_0}(A) = \begin{cases} 1 & \textit{se } \omega_0 \in A, \\ 0 & \textit{se } \omega_0 \notin A. \end{cases}$$

iii) Misura del conteggio:

$$H^0(A) = \begin{cases} \sharp A & \text{(cardinalità di } A\text{) se } A \text{ ha un numero finito di elementi,} \\ \infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

iv) Misura indicatrice:

$$I(A) = \begin{cases} 1 & \textit{se } A \neq \emptyset, \\ 0 & \textit{se } A = \emptyset. \end{cases}$$

v) Le misure di superficie per superfici buone (regolari).

Una misura esterna per essere una misura deve soddisfare una condizione in più, e cioè l'additività numerabile.

3) Se A_j, $j \in \mathbb{N}$ sono disgiunti, allora

$$\mu^*(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu^*(A_j).$$

Questa richiesta restringe di molto il dominio di μ^* e necessita di una proprietà nota come misurabilità: un insieme A si dice misurabile se $\forall\ T \subset \Omega$ vale

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap T) + \mu^*(A \setminus T)$$

Si dimostra che, data $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, +\infty]$, la famiglia

$$\mathcal{M}(\mu^*) = \{A \in \mathcal{P}(\Omega) : A \text{ misurabile}\}$$

è una σ-algebra (cioè una famiglia chiusa per passaggio al complementare e per unioni numerabili, con $\emptyset$ e Ω che appartengono alla famiglia).
$\mathcal{M}(\mu^*)$ è il dominio naturale della misura indotta da μ^*, cioè la funzione $\mu = \mu^*_{|\mathcal{M}(\mu^*)} : \mathcal{M}(\mu^*) \to [0, +\infty]$ è una misura.
Si può dimostrare che le misure (*ii*) e (*iii*), cioè la delta δ_{ω_0} e H^0 sono misure con $\mathcal{M}(\delta_{\omega_0}) = \mathcal{M}(H^0) = \mathcal{P}(\Omega)$, mentre per la misura I si ha che $\mathcal{M}(I) = \{\emptyset, \Omega\}$.
Anche per la misura di Lebesgue non è un problema banale la determinazione di $\mathcal{M}(\mathcal{L}^n)$: si può vedere che $\mathcal{M}(\mathcal{L}^n) \neq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

Esempio (Vitali) Restringiamoci al caso della misura di Lebesgue unidimensionale sull'intervallo [0,1]: introduciamo la relazione di equivalenza $x \sim y$ se e solo se $x - y \in \mathbb{Q}$. Data la relazione di equivalenza, abbiamo le classi di equivalenza: in ogni classe scegliamo un rappresentante (mediante l'assioma della scelta) e denotiamo con R l'insieme dei rappresentanti. La domanda è se R è misurabile o meno: si nota che

$$[0, 1] \subseteq \bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} (R + q) \tag{1.1}$$

dove la condizione $q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$ serve per avere $R + q \subseteq [-1, 2]$. Se R fosse misurabile con $\mathcal{L}^1(R) = c$, si dovrebbe avere $c > 0$ in quanto (1.1) con l'invarianza per traslazioni della misura di Lebesgue esclude il caso $c = 0$. Però [0,1] può essere visto come unione disgiunta di traslazioni di R e tale unione deve essere numerabile (non finita) e questo non può essere. Ovvero, dato che gli insiemi $R+q$ sono disgiunti per q differenti, otteniamo che

$$1 \leq \mathcal{L}^1 \left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (R+q) \right) \leq 3$$

e inoltre

$$3 \geq \mathcal{L}^1 \left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (R+q) \right) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} \mathcal{L}^1(R+q) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} c \ \Rightarrow c = 0.$$

Per garantire un pò di regolarità delle misure in considerazione e per non dover porsi il problema della determinazione del dominio della misura, solitamente si suppone di lavorare con misure Boreliane (Borel regolari), intendendo con questo l'ipotesi che, nel caso Ω sia uno spazio topologico, $\mathcal{B}(\Omega) \subseteq \mathcal{M}(\mu^*)$. Qui con $\mathcal{B}(\Omega)$ si intende la più piccola σ-algebra generata dagli aperti di Ω. Se Ω è uno spazio metrico, ad esempio $\Omega = \mathbb{R}^n$, esistono criteri che garantiscono la Borelianità: ad esempio il Criterio di Carathéodory dice che se la misura esterna è additiva sugli insiemi distanti, cioè

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B) \quad se \quad 0 < d(A,B) = \inf_{a \in A, b \in B} d(a,b),$$

allora $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{M}(\mu^*)$.
La misura di Lebesgue soddisfa queste proprietà e quindi $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{L}^n)$.

Definizione 1.2. *Data una misura μ definita su di una σ-algebra $\mathcal{F}$, definiamo spazio con misura la terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.*

Dato uno spazio con misura o misurabile, possiamo definire un integrale.

Definizione 1.3. *Sia data una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$, essa è una funzione misurabile reale se è tale che $f^{-1}(A) \in \mathcal{F} \quad \forall A \in \mathbb{R}$ aperto o $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*

Si può, più in generale, richiedere che $f^{-1}(A) \in \mathcal{F} \quad \forall A \in \mathcal{M}(\mathcal{L}^1)$, anche se non lo faremo praticamente mai.

Definizione 1.4. *Diremo che f è Boreliana se Ω è spazio topologico e $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\Omega) \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

Data f misurabile, sono misurabili anche le funzioni

$$f^+ = \max\{f, 0\}, \ f^- = \max\{-f, 0\}, \ |f| = f^+ + f^-.$$

Spesso quindi si ragiona sulle funzioni f positive e poi si generalizza a funzioni qualsiasi grazie al fatto che $|f| = f^+ + f^-$.
Importante è l'approssimazione di f mediante funzioni semplici.

Definizione 1.5. *Una funzione $g : \Omega \to \mathbb{R}$ è semplice se esistono un numero finito di insiemi misurabili disgiunti $E_i \subseteq \Omega \quad i = 1, \dots, h$ e delle costanti $c_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, h$ tale che*

$$g = \sum_{i=1}^{h} c_i \chi_{E_i}, \tag{1.2}$$

con χ_{E_i} funzione caratteristica di E_i, $\chi_{E_i}(\omega) = \begin{cases} 0 & se\ \omega \notin E_i, \\ 1 & se\ \omega \in E_i. \end{cases}$

Se f è una funzione misurabile positiva, allora

$$f = \sup\{g;\ g \text{ funzione semplice } g \le f\}.$$

Se poi f è essenzialmente limitata, cioè se

$$||f||_{L^\infty} := \inf\{\lambda \in \mathbb{R} : \mu(\{|f| > \lambda\}) = 0\} < +\infty,$$

allora $\forall \varepsilon > 0\ \exists g_\varepsilon$ funzione semplice tale che $||f - g_\varepsilon||_{L^\infty} < \varepsilon$ (approssimazione uniforme). Tale approssimazione si costruisce come segue: supponiamo $f \ge 0$ e $M := ||f||_{L^\infty} < +\infty$, e suddividiamo l'intervallo $[0, M]$ in h intervallini di ampiezza $\frac{M}{h}$, cioè

$$[0, M] = \bigcup_{j=0}^{h-1} \left(\frac{jM}{h}, \frac{(j+1)M}{h} \right] \cup f^{-1}(\{0\}).$$

La misurabilità di f implica che gli insiemi $E_j^{(h)} = f^{-1}\left((\frac{jM}{h}, \frac{(j+1)M}{h}] \right)$ e $f^{-1}(\{0\})$ sono misurabili e disgiunti e la funzione

$$g_h = \sum_{j=0}^{h-1} \frac{jM}{h} \chi_{E_j^{(h)}}$$

è semplice, $g_h \le f$ e $||f - g_h||_{L^\infty} \le \frac{M}{h}$. Se fisso $\varepsilon > 0$ e prendo h tale che $\frac{M}{h} < \varepsilon$ ho quindi concluso.

Tale approssimazione è fondamentale per la definizione dell'integrale di f.

Definizione 1.6. *Se g è la funzione semplice data in (1.2), si definisce*

$$\int_\Omega g \ d\mu = \int_\Omega g(\omega)\mu(\omega) := \sum_{i=1}^{h} c_i \mu(E_i).$$

Per f misurabile e positiva si pone:

$$\int_\Omega f\ d\mu := \sup\left\{\int_\Omega g\ du :\ g \text{ semplice}, g \leq f\right\}.$$

Per f generica si pone quindi

$$\int_\Omega |f|\ d\mu := \int_\Omega f^+\ d\mu + \int_\Omega f^-\ d\mu,\ \int_\Omega f\ d\mu = \int_\Omega f^+\ d\mu - \int_\Omega f^-\ d\mu.$$

La definizione di $\int_\Omega f\ d\mu$ è ben data se non siamo in presenza di una forma indeterminata e ciò succede se ad esempio $\int_\Omega |f|\ du < +\infty$.

Definizione 1.7. *Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ misurabile, e $p > 0$, si definiscono gli spazi $L^p(\Omega, \mu)$ come*

$$L^p(\Omega, \mu) = \left\{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ misurabili} : \int_\Omega |f|^p\ d\mu < +\infty\right\};$$

e sono spazi di Banach con la norma

$$||f||_p := \begin{cases} (\int_\Omega |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} & 1 \leq p < +\infty, \\ ||f||_{L^\infty} & p = \infty. \end{cases}$$

Teorema 1.8. ***(Disuguaglianza di Hölder)***
Date $f \in L^p(A)$, $g \in L^{p'}(A)$ dove p e p' sono esponenti coniugati, cioé $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $p > 1$ si ha che $f \cdot g \in L^1(A)$ con

$$\parallel f \cdot g \parallel_{L^1} \leq \parallel f \parallel_{L^p} \cdot \parallel g \parallel_{L^{p'}},$$

cioé

$$\int_A |f \cdot g| \ \leq \ \left(\int_A |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_A |g|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}. \tag{1.3}$$

Fissata una funzione f, la σ-algebra $\mathcal{F}$ è in qualche modo troppo grande (eccessiva) per la misurabilità di f: si definisce quindi la σ-algebra generata da f, $\sigma(f)$, come la più piccola σ-algebra che contiene $f^{-1}(A)$, $A \in \mathbb{R}$ aperto. Si noti che nella teoria dell'integrazione se si modifica la funzione f su insiemi di misura nulla si vorrebbe che l'integrale e tutta la teoria non cambiasse: cioè, se $\tilde{f}$ è un'altra funzione con $\{f \neq \tilde{f}\}$ di misura nulla, allora si dovrebbe poter far tutto utilizzando $\tilde{f}$ al posto di f.
Per far questo si deve avere che gli insiemi nulli (a misura esterna nulla) siano misurabili: ciò si può sempre fare in quanto

$$\mathcal{N} = \{E \subseteq \Omega : \mu^*(E) = 0\}$$

è una σ-algebra e quindi $\mathcal{M}(\mu^*) \cup \mathcal{N}$ è ancora una σ-algebra. Data in generale una σ-algebra $\mathcal{F}$, la si può sempre completare a $\widetilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \cup \mathcal{N}$ in modo da contenere gli insiemi nulli: $\mathcal{F}$ si dirà poi completa se $\mathcal{F} = \widetilde{\mathcal{F}}$. Supporremo sempre le σ-algebre complete, anche con la $\sigma(f)$.

Escluso il concetto di integrale, che funziona bene se $E = \mathbb{R}^n$ o con qualche modifica, E spazio di Banach, gli altri concetti appena esposti possono essere estesi a misure μ con segno (non necessariamente positive), a misure vettoriali e anche a funzioni $f : (\Omega, \mathcal{F}, \mu) \to (E, \mathcal{E})$ con E insieme dotato di σ-algebra $\mathcal{E}$ (si parla di spazio pre-misurato), definendo f misurabile se $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}\ \forall A \in \mathcal{E}$.

Data $f : (\Omega, \mathcal{F}, \mu) \to (E, \mathcal{E})$ possiamo costruire due altre misure: la misura su Ω data da $\mu_f = f\mu$ definita da

$$\mu_f(A) := \int_A f\ d\mu \qquad \forall A \in \mathcal{F},$$

e la misura su E detta misura immagine di f (o legge di f, o ancora push-forward di μ tramite f) data da

$$f_\sharp\mu(A) = \mu(\{f \in A\}) = \mu(f^{-1}(A)) \qquad \forall A \in \mathcal{E}.$$

Utilizzando la convenzione che se $A \in \mathcal{F}$ ha misura nulla allora

$$\int_A f\ d\mu = 0,$$

anche nel caso in cui $f = +\infty$, si ottiene che μ_f è una misura assolutamente continua rispetto a μ, e si scrive $\mu_f \ll \mu$ intendendo che se $\mu(A) = 0 \Rightarrow \mu_f(A) = 0$ (o equivalentemente se $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tale che $\mu(A) < \delta \Rightarrow |\mu_f|(A) = \sup \{\sum_{i\in\mathbb{N}} |\mu(A_i)| : A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\} < \varepsilon$). La legge di f in generale, se $f : (\Omega, \mathcal{F}, \mu) \to \mathbb{R}$, non è detto che sia assolutamente continua rispetto a $\mathcal{L}^1$: se f è costante, $f(\omega) = x_0 \in \mathbb{R}$, allora $f_\sharp\mu = \delta_{x_0}$ (delta di Dirac in x_0).

Definizione 1.9. *Due funzioni misurabili si dicono equamente distribuite se* $f_{1\sharp}\mu = f_{2\sharp}\mu$.

1.1 Spazi di probabilità

Definizione 1.10. *Si parla di spazio di probabilità Ω se su di esso è definita la misura μ positiva, e se $\mu(\Omega) = 1$: in tal caso scriveremo $\mu := \mathbb{P}$ e lo spazio di probabilità sarà $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Gli elementi di $\mathcal{F}$ vengono chiamati eventi e due eventi $A, B \in \mathcal{F}$ si dicono indipendenti, se $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$.*

L'indipendenza può essere estesa alle σ-algebre dicendo che due σ-algebre $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ sono indipendenti se

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \quad \forall A \in \mathcal{F}_1,\ \forall B \in \mathcal{F}_2.$$

Le funzioni misurabili $f : \Omega \to \mathbb{R}$ vengono chiamate variabili aleatorie reali: due variabili aleatorie f_1 e f_2 vengono dette indipendenti se $\sigma(f_1)$ e $\sigma(f_2)$ sono indipendenti.

Definizione 1.11. *Una variabile aleatoria $f : \Omega \to \mathbb{R}$ si dice avere legge normale se $f_\sharp\mathbb{P}$, la legge di f, è assolutamente continua rispetto a $\mathcal{L}^1$ con densità data da una Gaussiana di media m e varianza σ, $f_\sharp\mathbb{P} = \mathcal{N}(m, \sigma)$. Cioè, denotata con $\mu = f_\sharp\mathbb{P}$, avremo:*

$$m = \int_{\mathbb{R}} x \ \mu(dx), \quad \sigma = \int_{\mathbb{R}} (x - m)^2 \ \mu(dx).$$

Dall'assoluta continuità segue che la legge ha una densità; questo si ottiene grazie al seguente teorema

Teorema 1.12. ***(Radon-Nikodym)*** *Se μ e ν sono due misure finite e $\mu \ll \nu$, allora esiste una funzione $p \in L^1(|\nu|)$, detta densità, tale che $\mu = \nu_p = p\nu$.*

Nel caso di legge normale si avrà quindi che $f_\sharp\mathbb{P}(dx) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{|x-m|^2}{2\sigma}} \mathcal{L}^1(dx)$. Nel caso $m = 0$ e $\sigma = 1$ si parla di legge normale standard.

Definizione 1.13. *Si chiama processo stocastico una famiglia $\{X_t\}_{t \geq 0}$ di variabili aleatorie definite su uno stesso spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, dove t varia in sottoinsieme di $\mathbb{R}^+$. Il processo può essere discreto o continuo se il parametro è discreto (successione di variabili aleatorie) o continuo.*

Nel secondo caso si tratta di una famiglia $(X_t)_{t \geq 0}$ di variabili aleatorie $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$ (se processo stocastico reale).

Introduciamo ora il processo di filtrazione.

Definizione 1.14. *Considerato lo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, una filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ è una famiglia di σ-algrbre crescenti contenute in $\mathcal{A}$.*
La σ-algrbra $\mathcal{F}_t$ rappresenta l'informazione disponibile all'istante t. Diciamo che il processo $(X_t)_{t \geq 0}$ è adattato a $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, se per ogni t , X_t è $\mathcal{F}_t$-misurabile, cioè $\sigma(X_t) \subseteq \mathcal{F}_t$.

Solitamente, dato un processo stocastico, si può costruire una filtrazione definendo $\mathcal{F}_t := \sigma(X_s : s \leq t)$, la più piccola σ-algebra che rende misurabili tutte le X_s, $s \leq t$.

Definizione 1.15. *Data una variabile aleatoria X, denotiamo con $\mathbb{E}[X]$ la media, o speranza, di X definita da*

$$\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X \; d\mathbb{P} = \int_\Omega X(\omega)\mathbb{P} \; (d\omega).$$

Utilizzando la definizione di legge di X, che denotiamo con $\mu = X_\sharp\mathbb{P}$, si vede facilmente che $\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Boreliana si ha che

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int_\Omega f\left(X(\omega)\right)\mathbb{P} \; (d\omega) = \int_\mathbb{P} f(x)\mu \; (dx).$$

Definiamo inoltre la speranza condizionale come segue:

Proposizione 1.16. *Date due σ-algebre $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ di Ω, la speranza della variabile aleatoria $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mu) \to \mathbb{R}$ condizionata a $\mathcal{G}$, denotata con $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ è l'unica funzione $\mathcal{G}$-misurabile tale che*

$$\int_B \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \; d\mathbb{P} = \int_B X \; d\mathbb{P} = \mathbb{E}[X\chi_B] \qquad \forall B \in \mathcal{G}.$$

Dimostrazione. Se $X \in L^1(\mathcal{F})$, allora devo dimostrare che esiste un'unica variabile aleatoria $Z \in L^1(\mathcal{G})$, $\mathcal{G}$ sotto-σ-algebra di $\mathcal{F}$, tale che:

$$\int_B Z \; d\mathbb{P} = \int_B X \; d\mathbb{P} \quad \forall B \in \mathcal{G};$$

tale variabile aleatoria sará la speranza condizionale che denotiamo con

$$Z = \mathbb{E}(X|\mathcal{G}).$$

Definisco $\mu(A) := \int_A X \; d\mathbb{P}$, $A \in \mathcal{G}$, una misura assolutamente continua rispetto a $\mathbb{P}|_\mathcal{G}$. Allora, per il teorema di Radon-Nikodym 1.12, esiste la densitá in $L^1(\mathcal{G})$, che é la funzione Z,

$$\mu(A) = \int_A Z \; d\mathbb{P}.$$

L'unico problema rimanente é quello dell'unicitá : suppongo esista $Y \in L^1(\mathcal{G})$ che si comporta allo stesso modo:

$$\int_A (Z - Y) \; d\mathbb{P} = 0 \quad \forall A \in \mathcal{G}. \tag{1.4}$$

Bisogna vedere che $Z = Y$ per quasi ogni $\mathbb{P}$. Ovvero dobbiamo dimostrare che l'insieme $\{Z \neq Y\}$ é trascurabile:

$$\mathbb{P}\left(\{Z \neq Y\}\right) = 0.$$

Considero $\{Z > Y\} \cup \{Z < Y\} = \{Z \neq Y\}$. Tali insiemi sono $\mathcal{G}$-misurabili in quanto Z e Y sono $\mathcal{G}$-misurabili, da cui il fatto che anche $Z-Y$ é $\mathcal{G}$-misurabile. Pongo:

$$A = (Z-Y)^{-1}(0, +\infty) = \{Z - Y > 0\} \in \mathcal{G}.$$

Allora per (1.4) ho che $\int_A (Z - Y)\, d\mathbb{P} = 0$, ma su A, $(Z - Y) > 0$ e quindi $\mathbb{P}(A) = 0$.
Allo stesso modo, ponendo:

$$A' = \{Z - Y < 0\} \in \mathcal{G}$$

dimostro che $\mathbb{P}(A') = 0$, e di conseguenza l'asserto é dimostrato. □

Il concetto di speranza condizionale generalizza il concetto di probabilità condizionata ad un evento $A \in \mathcal{F}$ definita da

$$\mathbb{P}_A(B) := \frac{1}{\mathbb{P}(A)}\mathbb{P}(A \cap B) \qquad \forall B \in \mathcal{F}$$

se $\mathbb{P}(A) \neq 0$. Si nota che $\mathbb{P}_A \ll \mathbb{P}$ e che la sua densità è $\frac{1}{\mathbb{P}(A)}\chi_A$.
In questo caso si ha che $\mathbb{E}(\chi_B|\mathcal{G}_A) = \frac{1}{\mathbb{P}(A)}\chi_{A\cap B}$ con $\mathcal{G}_A = \{B \cap A : B \in \mathcal{F}\}$.
L'interpretazione di $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ si capisce meglio in L^2, dato che esso è uno spazio di Hilbert. Poichè le funzioni $\mathcal{G}$-misurabili sono anche $\mathcal{F}$-misurabili, possiamo pensare a $L^2(\mathcal{G})$ come sottospazio (chiuso) di $L^2(\mathcal{F})$ (con ovvia definizione di $L^2(\mathcal{G}) \subset L^2(\mathcal{F})$).
Visto che abbiamo un prodotto scalare, possiamo definire la proiezione ortogonale $\pi : L^2(\mathcal{F}) \to L^2(\mathcal{G})$. Tale proiezione ortogonale altro non è che la speranza condizionale $\pi(X) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$.
Infatti $\pi(X)$ minimizza la seguente quantità

$$\min\left\{||X - f||_{L^2(\mathcal{F})} : f \in L^2(\mathcal{G})\right\},$$

cioè

$$||X - \pi(X)||^2_{L^2(\mathcal{F})} \leq ||X - f||^2_{L^2(\mathcal{F})} \qquad \forall f \in L^2(\mathcal{G}).$$

In particolare possiamo prendere $f = \pi(X) + \varepsilon g$ con $g \in L^2(\mathcal{G})$, quindi $\varepsilon \mapsto ||X - \pi(X) - \varepsilon g||^2_{L^2(\mathcal{F})}$ ha come minimo 0 e dato che ϕ è derivabile, $\phi'(0) = 0$. Ma $\phi'(0) = \int_\Omega (X - \pi(X))g\, d\mathbb{P} = 0$.
Se in particolare prendiamo $g = \chi_B$, $B \in \mathcal{G}$, abbiamo ottenuto che

$$\int_B X\, d\mathbb{P} = \int_\Omega X \cdot \chi_B\, d\mathbb{P} = \int_\Omega \pi(X) \cdot \chi_B\, d\mathbb{P} = \int_B \pi(X)\, d\mathbb{P}$$

e quindi $\pi(X) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$.

Osservazione: Se $p > q$ allora

$$L^p(\Omega, \mathbb{P}) \subseteq L^q(\Omega, \mathbb{P}), \quad con \quad ||X||_{L^q} \leqslant ||X||_{L^p}.$$

Quindi la proposizione 1.16, dimostrata in $L^1(\Omega, \mathbb{P})$, si estende ad ogni $L^p(\Omega, \mathbb{P})$, $p \geq 1$.

Dimostrazione. L'immersione di L^p in L^q é continua. Questo fatto segue dalla disuguaglianza di *Hölder*:

$$\int_\Omega |X|^q d\mathbb{P} \leqslant ||f||_{L^\alpha(\Omega,\mathbb{P})} \cdot ||g||_{L^{\alpha'}(\Omega,\mathbb{P})}.$$

Dove, nel nostro caso, $f = |X|^q$ e $g = 1$. Quindi:

$$||f||_{L^\alpha(\Omega,\mathbb{P})} = \left(\int_\Omega |f|^\alpha d\mathbb{P}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\int_\Omega |X|^{\alpha q} d\mathbb{P}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Scegliamo α in modo che $\alpha q = p$, cioé $\alpha = \frac{p}{q}$, dove $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} = 1$ e quindi $\frac{1}{\alpha'} = 1 - \frac{1}{\alpha} = 1 - \frac{q}{p} = \frac{p-q}{p}$. Allora:

$$||f||_{L^\alpha(\Omega,\mathbb{P})} = \left(\int_\Omega |X|^p d\mathbb{P}\right)^{\frac{q}{p}}$$

e

$$||g||_{L^{\alpha'}(\Omega,\mathbb{P})} = \left(\int_\Omega |g|^{\alpha'} d\mathbb{P}\right)^{\frac{1}{\alpha'}} = 1.$$

Ottenendo:

$$||X||^q_{L^q(\Omega,\mathbb{P})} = \int_\Omega |X|^q d\mathbb{P} \leq \left(\int_\Omega |X|^p d\mathbb{P}\right)^{\frac{q}{p}}.$$

□

Abbiamo usato il fatto che $\mathbb{P}(\Omega) = 1$; il risultato di immersione resta valido anche nel caso di Ω con $\mu(\Omega) < +\infty$, $L^p(\Omega, \mu) \hookrightarrow L^q(\Omega, \mu)$ con continuitá, $p > q$ e

$$||f||_{L^q(\Omega,\mu)} \leq \mu(\Omega)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} ||f||_{L^p(\Omega,\mu)}.$$

Principali proprietá della speranza condizionale: elenchiamo le proprietá della speranza condizionale che useremo nel corso dell'elaborato (per la dimostrazione rimandiamo a [4]).

1) $\mathbb{E}(XY|\mathcal{G}) = X\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$ se X é $\mathcal{G}$- misurabile;

2) $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X|\mathcal{G})] = \mathbb{E}[X]$;

3) $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}[X]$ se X é indipendente da $\mathcal{G}$;

4) $\mathbb{E}(\lambda X + \mu Y|\mathcal{G}) = \lambda\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) + \mu\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$;

4) se $\mathcal{G}'$ é una sotto-σ-algebra di $\mathcal{F}$, allora $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})|\mathcal{G}') = \mathbb{E}(X|\mathcal{G}')$;

5) continuitá: la mappa $X \mapsto \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ é continua in $L^p(\mathcal{F})$.

Chiudiamo con delle definizioni:

Definizione 1.17. *Un processo stocastico adattato X_t si chiama:*

(1) *martingala rispetto alla filtrazione $\mathcal{F}_t$ se:*

   i) X_t *é misurabile* $\forall t$ *rispetto a* $\mathcal{F}_t$*;*

   ii) $\mathbb{E}[|X_t|] < +\infty \quad \forall t$*;*

   iii) $\mathbb{E}(X_s|\mathcal{F}_t) = X_t \quad \forall s > t$*.*

(2) *Sub -(super)- martingala se* $\mathbb{E}(X_s|\mathcal{F}_t) \geq X_t$ *(rispettivamente* $\leq$*).*

Osservo che *iii)* significa che, note le informazioni al tempo t, posso fare una previsione su cosa accadrá successivamente e posso immaginare un andamento X_t.
Esempio: Il prezzo azionario é un processo stocastico. L'investitore che acquista le azioni ritiene che il valore atteso sia maggiore o uguale del valore corrente, cioé suppone di avere una sub-martingala.
Di conseguenza, sia $\delta > 0$, nel caso di martingala avremo:

$$\mathbb{E}(X_{t+\delta} - X_t|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(X_{t+\delta}|\mathcal{F}_t) - \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_t) = X_t - X_t = 0.$$

Dunque le previsioni sugli incrementi fanno zero. Non siamo in grado di prevedere una direzione del movimento. Non so se il trend é crescente o decrescente, sono nel caso di imprevedibilitá.
Invece nel caso di sub-martingala ho un trend crescente, di super-martingala ho un trend decrescente.
Da notare che trend crescente non significa traiettoria crescente: le traiettorie potrebbero essere altalenanti ma i valori attesi sono crescenti. É il processo che ha tendenza crescente.

Capitolo 2

Il mercato e le opzioni

La finanza è sicuramente una delle aree che più sta subendo un veloce sviluppo nel mondo economico moderno e ciò accade anche attraverso la nascita di strumenti finanziari sempre più complessi e sofisticati. Tra questi, hanno particolare importanza gli strumenti derivati, ovvero quei prodotti il cui valore dipende dal prezzo di un altro bene, chiamato bene sottostante. Tra i derivati che storicamente hanno più attecchito nei portafogli finanziari possiamo ricordare i contratti a termine backward o futures e le opzioni. Al contrario, praticamente tutto può essere un sottostante: i titoli finanziari, gli indici azionari, i tassi d'interesse correnti e futuri, i tassi di cambio ma anche le merci.

2.1 Le opzioni

Le opzioni sono uno degli strumenti derivati di maggiore importanza e diffusione. L'acquisto di una opzione nella sua forma più semplice, detta vanilla, attribuisce al possessore, ovvero a colui che acquista l'opzione, il diritto di acquistare (opzione call) o di vendere (opzione put) un bene, a un prezzo prestabilito entro un certo limite temporale. Se tale diritto può essere esercitato solo al momento della scadenza del contratto, l'opzione si dice di tipo europeo; se invece può essere esercitato in qualsiasi istante compreso tra l'emissione e la scadenza dell'opzione, si dice di tipo americano. Il bene di riferimento è chiamato sottostante.
Al di là di queste prime e basilari tipologie, possiamo incontrare sul mercato una serie molto variegata e diversificata di opzioni, che noi però non tratteremo.
Il sottoscrittore, ovvero colui con cui si stipula il contratto d'opzione, tipicamente il mercato, deve obbligatoriamente comportarsi di conseguenza: nel

caso il possessore decidesse di vendere il sottostante, il sottoscrittore deve comprare e viceversa, se il possessore decide di comprare, deve vendere. L'istante di esecuzione di questa scelta viene chiamato tempo d'esercizio o di payoff, che indichiamo con T, e varia a seconda della tipologia di opzione. Il prezzo prestabilito della transazione è detto strike price o prezzo di esercizio. È importante osservare che il possessore di un'opzione può esercitare un diritto ma non ha alcun obbligo mentre, al contrario, per il sottoscrittore sussiste un obbligo. Per questo motivo l'opzione ha un prezzo che deve essere versato al sottoscrittore all'apertura del contratto. Tale valore dipende sicuramente dall'evoluzione del prezzo del sottostante, che indicheremo con S_t e dal tempo t nel quale si vuole valutare l'opzione. Poichè il prezzo dipende dall'andamento delle quotazioni di un bene di riferimento, le opzioni finanziarie appartengono alla famiglia dei titoli derivati.
Il problema dal punto di vista matematico-modellistico è dunque il seguente: come si può determinare il valore di un'opzione istante per istante, e dunque anche il prezzo d'acquisto ragionando al tempo $t = 0$, in virtù della tipologia della stessa?
Si impone dunque un'attenta analisi di tutti quei fattori che direttamente influenzano il valore di un'opzione nel tempo, primo fra tutti il prezzo del sottostante.

2.2 Un modello per il prezzo del sottostante

Come anticipato nel paragrafo precedente, dobbiamo a questo punto costruire un modello che riesca a descrivere in maniera quanto più precisa, nei limiti del possibile considerata l'aleatorietà del problema, l'andamento del prezzo del sottostante, che sarà nel seguito indicato con S_t.

A questo punto introduciamo i tasselli matematici che compongono l'equazione stocastica che descrive l'andamento di S_t. Innanzitutto occorre osservare come non siano interessanti da monitorare le variazioni assolute del prezzo di un bene, ma quello che in economia si chiama return, ovvero il rapporto tra la variazione assoluta del prezzo del bene e il suo valore originale. Matematicamente esprimiamo questa quantità come $\dfrac{dS_t}{S_t}$. Ipotizziamo a questo punto che tale entità possa scomporsi in due termini:

1. Un termine puramente deterministico assimilabile al return di denaro investito senza rischio in banca e caratterizzato dal parametro μ, detto parametro di drift che misura il tasso medio di crescita del prezzo del bene. In pratica è nei modelli più semplici un valore costante che indica

l'andamento medio del titolo: se e quanto guadagna oppure perde. Matematicamente dunque questo termine è esprimibile come

$$dS_{drift} = S_t \mu dt.$$

2. Un secondo termine stocastico per modellizzare gli aspetti aleatori legati all'evoluzione del prezzo

$$dS_{stoc} = S_t \sigma dW_t,$$

dove il coefficiente σ prende il nome di volatilità e misura la deviazione standard del prezzo, mentre con W_t indichiamo un moto Browniano standard le cui proprietà discuteremo in seguito.

Dunque l'equazione differenziale stocastica che rappresenta l'andamento del prezzo del bene in ipotesi di mercato efficiente è la seguente:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t, \tag{2.1}$$

che possiamo riscrivere come:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t. \tag{2.2}$$

Vedremo in seguito come determinare la soluzione S_t della precedente equazione.

Capitolo 3

Moto Browniano

In questo capitolo tratteremo il moto Browniano e le sue proprietá. Esso venne individuato nell'800 ma formalizzato solo nel 1923 da Wiener che fu il primo ad interessarsene: parlare di processo di Wiener o di moto Browniano é la stessa cosa. I processi di Wiener si ottengono come limite di passeggiate casuali, quando $dt \to 0$. Iniziamo col dare la definizione di processo di Wiener.

Definizione 3.1. *Si dice che un processo stocastico X_t segue un processo di Wiener generalizzato se la variazione dX_t da essa subita in un intervallo di tempo infinitesimo dt,è data dalla seguente formula:*

$$dX_t = adt + bdz. \tag{3.1}$$

La costante a viene comunemente indicata come il drift del processo, mentre b prende il nome di volatilità. Il termine dz rappresenta la componente stocastica e corrisponde ad un numero casuale estratto da una distribuzione normale con media nulla e varianza pari a dt. Possiamo dunque riscrivere dz come: $dz = \omega\sqrt{dt}$, dove ω è una variabile aleatoria la cui densità di probabilità, $P(\omega)$ è una distribuzione gaussiana con varianza unitaria e media nulla:

$$P(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-\omega^2}{2}}. \tag{3.2}$$

Analizziamo ora le proprietà del processo di Wiener, nel nostro caso unidimensionale, meglio noto come Moto Browniano W_t che è parte integrante della formula (2.2). Innanzitutto ricordiamo la Definizione 1.13 di processo stocastico, e arriviamo a definirne la densità, che è la seguente:

$$\Gamma(\omega, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{\frac{-\omega^2}{2t}} \tag{3.3}$$

dove ω è la variabile che rappresenta l'esito del processo. Quindi come per tutti i processi stocastici fissando un tempo $t^* \in \mathbb{R}$ si ottiene una variabile

aleatoria su cui posso calcolare la probabilità come da teoria classica di probabilità:
$$P\{W(t^*) \in I\} = \int_I \Gamma(\omega, t^*) d\omega,$$
dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un insieme di Borel o Boreliano.
Se invece fissiamo $\omega^* \in \Omega$ otteniamo una funzione reale continua in quanto il parametro tempo è una variabile reale che descrive uno dei possibili cammini della particella Browniana. Si può mostrare che le traiettorie di questi cammini punto per punto non sono differenziabili.

Analiziamo ora più specificamente il moto Browniano.

Definizione 3.2. *Per moto Browniano standard unidimensionale intendiamo un processo stocastico $W(\cdot) : \Omega \to \mathbb{R}$ che soddisfa le seguenti proprietà:*

1. $W_0 = 0$ *quasi certamente;*
2. $W_t - W_s$ *ha* , $\forall t \geq s > 0$, *legge normale* $\mathcal{N}(0, t-s)$ *cioé media nulla e covarianza;*
3. *Per ogni* $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_h$ *le variabili aleatorie* W_{t_1}, $W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ *sono indipendenti.*

Per costruire il moto Browniano esplicitamente dobbiamo prima costruire lo spazio di probabilità $(\Omega, \mathbb{P})$ e quindi il processo stocastico $W(\cdot) : [0, +\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$. Definiamo quindi:
$$\Omega = C_0([0, +\infty)) = \{\omega \in C([0, +\infty), \mathbb{R}) : \omega(0) = 0\} \subseteq \mathbb{R}^{[0,+\infty)}.$$
La misura di Wiener è una misura di Borel: infatti Ω è uno spazio di Banach con la norma
$$\|\omega\| = \sup_{t \geq 0} |\omega(t)|,$$
quindi Ω è metrico e possiamo considerare la σ- algebra generata dagli aperti, cioè la σ- algebra dei Boreliani $\mathcal{B}(\Omega)$.

Su Ω vogliamo definire una misura di probabilità $\mathbb{P}$. Sfruttiamo la struttura di prodotto di Ω nel seguente modo. Su $\mathbb{R}$ fissiamo la misura di probabilità data da:
$$\mu(dx) := g(x)\mathcal{L}^1(dx) = g(x)dx, \tag{3.4}$$
con $\mathcal{L}^1$ misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$ e $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-|x|^2}{2}}$. La scelta di tale misura è legata all'equazione del calore (equazione che descrive il processo di diffusione standard); infatti, se definiamo, data una funzione $u_o \in L^1(\mathbb{R})$, la funzione
$$u(x, t) = u_o * g_t(x) = \int_{\mathbb{R}} u_o(t) \mathcal{P}_t(x, dy)$$

con $g_t(x) = \frac{1}{\sqrt{t}} g(\frac{x}{\sqrt{t}})$ e $\mathcal{P}_t(x, dy) := g_t(x-y)\mathcal{L}^1(dy)$, è la soluzione dell'equazione del calore su $\mathbb{R}$ con dato iniziale u_o, cioè

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial^2_{xx} u(x,t) \\ u(x,0) = u_o(x) \end{cases}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0.$$

Premesso ciò, su $\Omega = C_0([0,+\infty))$, spazio di Banach infinito dimensionale, si definiscono gli insiemi cilindrici come segue: si fissa un numero finito di istanti $F \subseteq [0,+\infty)$ tale che:

$$F = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}, \quad dove \quad 0 \le t_1 < t_2 < \dots < t_n < +\infty$$

e si considera la proiezione finito dimensionale:

$$\pi_F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{\sharp F} = \mathbb{R}^n$$

tale che, preso $\omega \in C_0([0,+\infty))$, risulta così definita:

$$\pi_F(\omega) := (\omega(t_1), \omega(t_2), \dots, \omega(t_n)) \in \mathbb{R}^n.$$

Preso $B \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, considero gli insiemi cilindrici:

$$\pi_F^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : (\omega(t_1), \dots, \omega(t_n)) \in B\} := C(t_1, \dots, t_n, B)$$

e su tali insiemi definisco la misura $\mathbb{P}$ ponendo

$$\mathbb{P}(C(t_1, \dots, t_n, B)) := \int_B \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2}{t_1} + \frac{(x_2-x_1)^2}{t_2-t_1} + \dots + \frac{(x_n-x_{n-1})^2}{t_n-t_{n-1}}\right)}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{t_1(t_2-t_1)\dots(t_n-t_{n-1})}} dx_1 \dots dx_n.$$

La funzione $\mathbb{P}$ così definita si dimostra avere buone proprietà, più precisamente:

1. compatibilità: Presi F e G, due insiemi finiti di istanti con $F \subseteq G$:

   $$F = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}, \quad G = \{t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots, t_m\}, \quad m > n$$

   e considerate le rispettive proiezioni finito dimensionali:

   $$\pi_F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \pi_G : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

   si ha che

   $$\pi_{FG} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
   $$B \subseteq \mathbb{R}^n, \quad B' = \pi_{FG}^{-1}(B) \subseteq \mathbb{R}^m$$

   e inoltre

   $$\mathbb{P}(\pi_G^{-1}(B')) = \mathbb{P}(\pi_F G^{-1}(B)).$$

   La proprietà di compatibilità consiste nell'affermare che

   $$\mathbb{P}(\pi_G^{-1}(B')) = \mathbb{P}(\pi_F^{-1}(B)).$$

2. finita additività, cioè se $c_1, \ldots, c_m$ sono cilindri disgiunti, allora

$$\mathbb{P}(\bigcup_{j=1}^{m} c_j) = \sum_{j=1}^{m} \mathbb{P}(c_j).$$

Si può allora applicare il Teorema di Kolmogorov (vedere ad esempio [1]) per concludere che $\mathbb{P}$ ammette un'unica estensione ad una misura di probabilità Boreliana su $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$; tale misura viene chiamata misura di Wiener.
Si verifica immediatamente che le proprietà (1) e (3), nella definizione di moto Browniano 3.2, sono soddisfatte.

3.1 Proprietà del moto Browniano

Le proprietà che descriviamo ora sono principalmente proprietà di martingala: con $\mathcal{F}_t$ intendiamo la σ- algebra generata da W_s, $s \leq t$.

Proposizione 3.3. *Se $(W_s)_{t\geq 0}$ è un moto Browniano standard, allora:*

1. *W_t è una $\mathcal{F}_t$- martingala;*
2. *$W_t^2 - t$ è una $\mathcal{F}_t$- martingala;*
3. *$\exp\left(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t\right)$ è una $\mathcal{F}_t$- martingala.*

Dimostrazione.

1. La dimostrazione è semplice in quanto $W_t - W_s$ è indipendente da $\mathcal{F}_s$ e quindi

$$\mathbb{E}(W_t - W_s \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}[W_t - W_s] = 0$$

poichè $W_t - W_s$ ha media nulla

2. Sfruttiamo il fatto che $(W_s)_{t\geq 0}$ è una martingala e quindi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(W_t^2 - W_s^2 \mid \mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}((W_t - W_s)^2 + 2W_sW_t - 2W_s^2 \mid \mathcal{F}_s) \\
&= \mathbb{E}((W_t - W_s)^2 \mid \mathcal{F}_s) + 2W_s\mathbb{E}(W_t - W_s \mid \mathcal{F}_s) \\
&= \mathbb{E}((W_t - W_s)^2 \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}[W_{t-s}^2] \\
&= \int_\Omega W_{t-s}^2(\omega) d\mathbb{P} = \int_\mathbb{R} x^2 \frac{e^{\frac{-x^2}{2(t-s)}}}{\sqrt{2\pi(t-s)}} dx = t - s,
\end{aligned}$$

in quanto il moto Browniano ha incrementi indipendenti e stazionari e la varianza di W_{t-s} è $t-s$. Se ne conclude che

$$t - s = \mathbb{E}(W_t^2 - W_s^2 \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(W_t^2 \mid \mathcal{F}_s) - W_s^2$$

cioè la proprietà di martingala

$$\mathbb{E}(W_t^2 - t \mid \mathcal{F}_s) = W_s^2 - s.$$

3. La prima osservazione è che se X è una variabile aleatoria normale standard, allora

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[e^{\lambda X}] &= \int_\Omega e^{\lambda X(\omega)} \mathbb{P}(d\omega) \\ &= \int_\mathbb{R} e^{\lambda x} X_\sharp \mathbb{P}(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\mathbb{R} e^{\lambda x} e^{\frac{-x^2}{2}} dx = e^{\frac{\lambda^2}{2}}.\end{aligned}$$

D'altra parte W_s è $\mathcal{F}_s$- misurabile e $W_t - W_s$ è indipendente da $\mathcal{F}_s$, quindi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{\sigma W_t - \frac{t\sigma^2}{2}} \mid \mathcal{F}_s) &= e^{\sigma W_s - \frac{t\sigma^2}{2}} \mathbb{E}(e^{\sigma(W_t - W_s)} \mid \mathcal{F}_s) \\ &= e^{\sigma W_s - \frac{t\sigma^2}{2}} \mathbb{E}[e^{\sigma(W_t - W_s)}] \\ &= e^{\sigma W_s - \frac{t\sigma^2}{2}} e^{\frac{\sigma^2(t-s)}{2}} \\ &= e^{\sigma W_s - \frac{s\sigma^2}{2}},\end{aligned}$$

che era quanto volevamo dimostrare.

□

Capitolo 4

Integrali di Itô

Il modello di moto Browniano descritto precedentemente è in realtà un'astrazione matematica, in quanto nella realtà i prezzi dei beni sono quotati ad intervalli di tempo discreti e non istante per istante. Questo modo di operare però porterebbe a trattare una quantità di dati enorme, il che non sarebbe nè utile nè conveniente. Risulta quindi molto conveniente trattare l'equazione differenziale (2.2) continua piuttosto che simulare il processo su scale temporali discrete. Ma per far ciò abbiamo bisogno di alcuni strumenti propri della teoria delle equazioni differenziali stocastiche. In particolare, ci serviremo della formula di Itô che mette in relazione le piccole perturbazioni di una funzione di variabile aleatoria con le piccole variazioni della variabile aleatoria stessa. Per maggiori dettagli rimandiamo all'articolo [8].
Vediamo ora di dare la definizione di processo di Itô.

Siano f funzione misurabile e h funzione di classe C^1. Di solito definiamo gli integrali per "somme di Riemann": se $\mathcal{P}_s$ é una partizione dell'intervallo I data da $\mathcal{P}_\delta = \{t_i\}_i$ e $\sup |t_{i+1} - t_i| \leq \delta$,

$$\begin{aligned}\int_I f\ dh &= \lim_{\delta\to 0} \sum_{\mathcal{P}_\delta} f(t_i)(h(t_{i+1}) - h(t_i)) \\ &= \lim_{\delta\to 0} \sum_{\mathcal{P}_\delta} f(t_i)\frac{(h(t_{i+1}) - h(t_i))}{t_{i+1} - t_i}(t_{i+1} - t_i) = \int_I f(t)h'(t)\ dt.\end{aligned}$$

L'ultima uguaglianza ha senso quando $dh(t)$ è una misura, h t.c. dh è una misura sono le funzioni BV (a variazione limitata).
Per la teoria dell'integrale di Riemann-Stieltjes rimandiamo ad esempio al capitolo 3 del libro Riesz-Nagy [7].

Dato un moto Browniano, $\forall\omega \in \Omega = C_0([0;+\infty),\mathbb{R})$, $\quad t \mapsto W_t(\omega) = \omega(t)$ è continua.
La misura di Wiener ha la proprietà che

$$\mathbb{P}(BV \cap (C_0[0;+\infty),\mathbb{R})) = 0;$$

in particolare $\mathbb{P}(C_0^1[0;+\infty)) = 0$. Quindi l'integrale costruito alla Riemann-Stjlties non ha mai senso.
Andremo ora a definire l'integrale stocastico

$$I(H)_t := \int_0^t H_s \, dW_s$$

pensando a $(H_s)_{s\geq 0}$ come un processo stocastico e all'integrale come una variabile aleatoria. Non potremo definire tale integrale come

$$I(H)_t := \int_0^t H_s(\omega) \, dW_s(\omega) \neq \int_0^t H_s(\omega) W_s'(\omega) \, ds;$$

infatti, poichè $\mathbb{P}(C_0^1[0;+\infty)) = 0$ non ha senso considerare W_t'.

4.1 Costruzione dell'integrale stocastico

Supponiamo che $(W_t)_{t\geq 0}$ sia un moto Browniano standard $\mathcal{F}_t$-misurabile, definito su uno spazio di probabilità filtrato $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$. Dobbiamo dare significato all'espressione $\int_0^t H_s \, dW_s$ per una certa classe di processi $H_s(\omega)$ adattati alla filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Per fare ciò, iniziamo col costruire l'integrale stocastico per un insieme di processi chiamati processi semplici.
Sia T un numero reale finito, $T > 0$.

Definizione 4.1. $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ *è chiamato processo semplice se può essere scritto come:*

$$H_t(\omega) = \sum_{i=1}^{p} \Phi_i(\omega)\chi_{[t_{i-1},t_i)}(t) \tag{4.1}$$

dove $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_p = T$ *e* Φ_i *è* $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ *misurabile. Cioè l'intervallo* $[0,T]$ *sarà unione di intervalli disgiunti:*

$$\bigcup_{i=1}^{p} [t_{i-1}, t_i). \tag{4.2}$$

Definiamo quindi l'integrale stocastico di un processo semplice, il processo continuo $(I(H)_t)_{0\leq t\leq T}$ *, definito per ogni* $t \in [t_k, t_{k+1})$*:*

$$\int_0^t H_s \, dW_s := I(H)_t = \sum_{i=1}^{k} \Phi_i(\omega)(W_{t_i}(\omega) - W_{t_{i-1}}(\omega)) + \Phi_{k+1}(\omega)(W_{t_{k+1}}(\omega) - W_{t_k}(\omega)).$$

Se H_s è un processo semplice dato da (4.1) allora vale la seguente identità:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[I(H)_t^2] &= \int_\Omega (I(H)_t(\omega))^2 \, d\mathbb{P}(\omega) = ||I(H)_t||^2_{L^2(\Omega,\mathbb{P})} \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2 \, ds\right] = \int_\Omega \left(\int_0^t H_s(\omega)^2 \, ds\right) \, d\mathbb{P}(\omega).\end{aligned}$$

Questa stima che dimostreremo all'interno del Teorema 4.2, è importante perchè se H_s^i è una successione di processi stocastici di Cauchy in $L^2(\Omega \times [0,T], \mathbb{P} \times ds)$, che converge ad un processo H_s, $H_s^i \xrightarrow{L^2} H_s$, cioè se

$$\lim_{i \to +\infty} \int_\Omega \int_0^t (H_s(\omega) - H_s^i(\omega))^2 \, ds \, d\mathbb{P}(\omega) = 0,$$

allora dato che

$$\mathbb{E}[I(H^i - H^j)_t^2] = \int_\Omega \int_0^t (H_s^i(\omega) - H_s^j(\omega))^2 \, ds \, d\mathbb{P}(\omega) \longmapsto 0,$$

se ne deduce che la successione $I(H^i)_t$ é una successione di Cauchy di $L^2(\Omega, \mathbb{P})$ e quindi esiste un unico elemento $I \in L^2(\Omega, \mathbb{P})$ tale che:

$$I(H^j)_t \xrightarrow{L^2(\Omega,\mathbb{P})} \hat{I} := I(H)_t.$$

In altri termini, si ha che il seguente limite esiste e definisce l'integrale stocastico di H_s:

$$\lim_{j \to \infty} I(H^j)_t = I(H)_t \stackrel{def}{=} \int_0^t H_s \, dW_s \quad \text{in} \quad L^2(\Omega, \mathbb{P}).$$

Teorema 4.2. *Se $(H_t)_{0 \le t \le T}$ è un processo adattato $\in L^2(\Omega \times [0,T], \mathbb{P} \times ds)$:*

- $(\int_0^t H_s dW_s)_{0 \le t \le T}$ *è una $\mathcal{F}_t$ - martingala continua;*
- $\mathbb{E}[\int_0^t H_s^2 dW_s] = \mathbb{E}[\int_0^t H_s^2 ds]$*;*
- $\mathbb{E}[\sup_{t \le T} \mid \int_0^t H_s^2 dW_s \mid^2] \le 4\mathbb{E}[\int_0^T H_s^2 ds]$.

Dimostrazione. Per dimostrare questo teorema, nel caso in cui H_t sia semplice, utilizziamo il processo stocastico discreto M_n, così definito:

$$M_n = \int_0^{t_n} H_s \, dW_s = \sum_{i=1}^n \Phi_i(\omega)(W_{t_i}(\omega) - W_{t_{i-1}}(\omega))$$

dove t_n è uno dei punti della partizione $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k < t_p = T$. Se includiamo s e t nella suddivisione $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_p = T$ e chiamiamo

$\mathcal{G}_n = \mathcal{F}_{t_n}$ per $0 \leq n \leq p$, abbiamo che Φ_i è $\mathcal{G}_{i-1}$ misurabile. Inoltre per mostrare che $(\int_0^t H_s dW_s)_{t>0}$ è una $\mathcal{G}_n$ - martingala dobbiamo verificare che, per ogni $t > s$,

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t H_u dW_u \Big| \mathcal{F}_s\right) = \int_0^s H_u dW_u.$$

Noi dimostreremo soltanto i primi due asserti del teorema. Iniziamo dal fatto che:

$$\mathbb{E}[M_n^2] = \sum_{i,j=1}^{n} \mathbb{E}[\Phi_i \Phi_j (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})]$$

dove $(W_t)_{t\geq 0}$ è moto Browniano.

Analizziamo i seguenti casi:

$\boxed{i \neq j}$ Supponiamo ad esempio $i < j$, da cui

$$t_{i-1} < t_{j-1} \Longrightarrow \mathcal{F}_{t_{i-1}} \subseteq \mathcal{F}_{t_{j-1}}$$

Sfrutteremo i seguenti fatti:

- Φ_i è $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ misurabile, quindi è anche $\mathcal{F}_{t_{j-1}}$ misurabile e Φ_j è $\mathcal{F}_{t_{j-1}}$ misurabile;
- $W_{t_i} - W_{t_{i-1}}$ è $\mathcal{F}_{t_i}$ misurabile, allora $\mathcal{F}_{t_{j-1}}$ misurabile;
- $W_{t_j} - W_{t_{j-1}}$ è indipendente da $\mathcal{F}_{t_{j-1}}$.

Allora $\Phi_i\Phi_j(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})$ coincide con la sua speranza condizionata a $\mathcal{F}_{t_{j-1}}$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(\Phi_i\Phi_j(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})|\mathcal{F}_{t_{j-1}}) = \\
&\qquad = \phi_i\phi_j(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})\mathbb{E}(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})|\mathcal{F}_{t_{j-1}}) \\
&\qquad = \phi_i\phi_j(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})\mathbb{E}\left[W_{t_j} - W_{t_{j-1}}\right] \\
&\qquad = 0.
\end{aligned}$$

E se vado a calcolarne la media ottengo:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[\Phi_i\Phi_j(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})] = \\
&\qquad = \mathbb{E}[\mathbb{E}(\Phi_i\Phi_j(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) \mid \mathcal{F}_{t_{j-1}})] \\
&\qquad = \mathbb{E}[\phi_i\phi_j(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})\mathbb{E}(W_{t_j} - W_{t_{j-1}} \mid \mathcal{F}_{t_{j-1}})] \\
&\qquad = 0.
\end{aligned}$$

Avendo considerato il fatto che W_{t_j} è una martingala $\Rightarrow \mathbb{E}(W_{t_j} \mid \mathcal{F}_{t_{j-1}}) = W_{t_{j-1}} = \mathbb{E}(W_{t_{j-1}} \mid \mathcal{F}_{t_{j-1}}) \Rightarrow \mathbb{E}((W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) \mid \mathcal{F}_{t_{j-1}}) = 0$.
Dunque effettivamente il valore atteso degli incrementi é zero, cioé gli incrementi sono imprevedibili, come mi aspetto nelle martingale.

$\boxed{i = j}$

$$\mathbb{E}[\Phi_i^2(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2] = \mathbb{E}[\Phi_i^2 \mathbb{E}((W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}})]$$

Considerato che:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}) &= \mathbb{E}(W_{t_i}^2 \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}) + W_{t_{i-1}}^2 - 2W_{t_{i-1}}\mathbb{E}(W_{t_i} \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}) \\
&= \mathbb{E}(W_{t_i}^2 - t_i \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}) + t_i - W_{t_{i-1}}^2 \\
&= W_{t_{i-1}}^2 - t_{i-1} + t_i - W_{t_{i-1}}^2 \\
&= t_i - t_{i-1},
\end{aligned}$$

poichè per una proprietà delle martingala (3.3):

$$\mathbb{E}(W_{t_i}^2 - t_i \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}) = W_{t_{i-1}}^2 - t_{i-1}.$$

Concludendo:

$$\mathbb{E}[M_n^2] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[\Phi_i^2(t_i - t_{i-1})] = \mathbb{E}\left[\int_0^{t_n} (H_s^2)\, ds\right].$$

Dimostriamo ora che

$$\mathbb{E}(M_{n+1} \mid \mathcal{F}_{t_n}) = M_{t_n}. \tag{4.3}$$

Sappiamo che:

- ϕ_i è $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ misurabile, dove $\mathcal{F}_{t_{i-1}} \subseteq \mathcal{F}_{t_n} \quad \forall i = 1, \ldots, n+1$;
- $(W_{t_s})_{s \leq i}$ è $\mathcal{F}_{t_i}$ misurabile, dove $\mathcal{F}_{t_i} \subseteq \mathcal{F}_{t_n} \quad \forall i = 1, \ldots, n$;
- $\phi_i W_{t_i}$ è $\mathcal{F}_{t_i}$ misurabile $\subseteq \mathcal{F}_{t_n} \quad \forall i = 1, \ldots, n$;
- $\phi_i W_{t_{i-1}}$ è $\mathcal{F}_{t_i}$ misurabile $\subseteq \mathcal{F}_{t_n} \quad \forall i = 1, \ldots, n+1$.

Quindi:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(M_{n+1} \mid \mathcal{F}_{t_n}) = \\
&\qquad = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\phi_i W_{t_i} - \phi_i W_{t_{i-1}} \mid \mathcal{F}_{t_n}) + \mathbb{E}(\phi_{n+1}(W_{t_{n+1}} - W_{t_n}) \mid \mathcal{F}_{t_n}) \\
&\qquad = \sum_{i=1}^{n} \phi_i \mathbb{E}((W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \mid \mathcal{F}_{t_n}) + \phi_{n+1}\mathbb{E}(W_{t_{n+1}} \mid \mathcal{F}_{t_n}) - \phi_{n+1}W_{t_n} \\
&\qquad = M_n.
\end{aligned}$$

Considerato il fatto che $\mathbb{E}(W_{t_{n+1}} \mid \mathcal{F}_{t_n}) = W_{t_n}$ e

$$\phi_{n+1}\mathbb{E}(W_{t_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n) - \phi_{n+1}W_{t_n} = 0;$$

ho quindi dimostrato (4.3) per H_s semplice. Si conclude che vale $\forall H_s$ adattato, sfruttando la continuità in L^2 di $X_s \mapsto \mathbb{E}(X_s \mid \mathcal{F})$.

$\square$

Capitolo 5

La formula di Itô

In questo capitolo dimostriamo la formula di Itô (5.3), rimandando all'articolo [9] per eventuali dettagli e chiarimenti. Iniziamo col seguente risultato preliminare.

Lemma 5.1. ***(Disuguaglianza di Burkholder–Davis–Gundy)***

Denotiamo con

$$M_t = \int_0^t H_s dW_s, \qquad t \in [0,T],$$

con H_s processo stocastico tale che $\int_0^t H_s^2 ds < +\infty$ quasi certamente e denotiamo con

$$\langle M \rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds;$$

allora, per ogni $p > 0$, esistono due costanti $c_1(p), c_2(p) > 0$ tali che

$$c_1(p)\mathbb{E}\left[\langle M \rangle_T^{\frac{p}{2}}\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |M_t|^p\right] \leq c_2(p)\mathbb{E}\left[\langle M \rangle_T^{\frac{p}{2}}\right] \tag{5.1}$$

Il precedente Lemma al momento non lo dimostriamo; passiamo direttamente a dimostrare la formula di Itô.

Definizione 5.2. $(X_t)_{t \geq 0}$*, processo stocastico adattato, si dice processo di Itô se* $\exists K_s$,H_s *funzioni univocamente determinate tali che*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s\ ds + \int_0^t H_s\ dW_s. \tag{5.2}$$

Teorema 5.3. ***(Formula di Itô)*** *Sia X_t, $t \in [0,T]$, un processo di Itô, cioè un processo stocastico adattato tale che*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s$$

con

$$\int_0^T |K_s| ds < +\infty, \qquad \int_0^T H_s^2 ds < +\infty \qquad \mathbb{P} - \textit{quasi ovunque}.$$

Sia quindi $f : [0; +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^2*; allora il processo stocastico* $Y_t = f(t, X_t)$ *è un processo di Itô determinato da*

$$\begin{aligned} f(t, X_t) =& f(0, X_0) + \int_0^t f_s(s, X_s) ds + \int_0^t f_x(s, X_s) K_s ds + \\ &+ \int_0^t f_x(s, X_s) H_s dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t f_{xx}(s, X_s) H_s^2 \, ds. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Dimostrazione. Dimostriamo la formula nel caso in cui f non dipenda esplicitamente dal tempo; il caso generale si dimostrerà con una semplice espansione di Taylor nel tempo. Supponiamo anche che $f \in C_b^2(\mathbb{R})$, cioè f è limitata insieme alle sue derivate prime e seconde; supponiamo infine che valga anche la stima

$$\max \left\{ \int_0^T H_s^2 ds, \int_0^T |K_s| ds \right\} \leq M < +\infty.$$

Fissiamo una partizione π dell'intervallo $[0, t]$ determinata dagli istanti $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n \leq t$ ed indichiamo con

$$|\pi| = \sup_{i=1,\ldots,n} |t_i - t_{i-1}|.$$

Dalla formula di Taylor del secondo ordine applicata alla funzione f otteniamo quindi che

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(X_0) &= \sum_{i=1}^n \Big(f(X_{t_i}) - f(X_{t_{i-1}}) \Big) \qquad (5.4) \\ &= \sum_{i=1}^n f'(X_{t_{i-1}}) \Big(X_{t_i} - X_{t_{i-1}} \Big) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n f''(\widetilde{X}_{i-1}) \Big(X_{t_i} - X_{t_{i-1}} \Big)^2; \end{aligned}$$

abbiamo denotato con $\widetilde{X}_{i-1}$ un punto aleatorio compreso tra $X_{t_{i-1}}$ e X_{t_i}. Se scriviamo

$$X_{t_i} - X_{t_{i-1}} = \int_{t_{i-1}}^{t_i} K_s ds + \int_{t_{i-1}}^{t_i} H_s dW_s, \tag{5.5}$$

possiamo notare subito che per $|\pi| \to 0$, dalla continuità di f', si ottiene che

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f'(X_{t_{i-1}}) \Big(X_{t_i} - X_{t_{i-1}} \Big) &= \sum_{i=1}^n f'(X_{t_{i-1}}) \int_{t_{i-1}}^{t_i} K_s ds + \\ &+ \sum_{i=1}^n f'(X_{t_{i-1}}) \int_{t_{i-1}}^{t_i} H_s dW_s \longrightarrow \int_0^t f'(X_s) K_s ds + \int_0^t f'(X_s) H_s dW_s. \end{aligned}$$

Resta quindi da considerare il secondo addendo del membro di destra in (5.4). Da (5.5) otteniamo che

$$\Big(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}\Big)^2 = \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} K_s ds\right)^2 + 2\int_{t_{i-1}}^{t_i} K_s ds \int_{t_{i-1}}^{t_i} H_s dW_s + \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} H_s dW_s\right)^2.$$

Osservo che, quando si sceglie la partizione in modo che $|\pi| \to 0$, si ottiene che in $L^2(\Omega, \mathbb{P})$:

$$\sum_{i=1}^n f''(\widetilde{X}_{i-1}) \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} K_s ds\right)^2 \longrightarrow 0, \qquad \sum_{i=1}^n f''(\widetilde{X}_{i-1}) \int_{t_{i-1}}^{t_i} K_s ds \int_{t_{i-1}}^{t_i} H_s dW_s \longrightarrow 0.$$

Dimostrazione. Dato $\int_0^T |K_s|\ ds < +\infty$, si ha che: se $|t_{i-1} - t_i| < \delta$ allora $\int_{t_{i-1}}^{t_i} |K_s|\ ds < \varepsilon$. Dunque:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n f''(\widetilde{X}_{i-1}) \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} K_s ds\right)^2 &\le ||f''||_\infty \sum_{i=1}^n \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} |K_s|\ ds\right)\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} |K_s|\ ds\right)\\
&\le \varepsilon ||f''||_\infty \left(\int_0^T |K_s|\ ds\right)\\
&\le \varepsilon ||f''||_\infty M.
\end{aligned}$$

Analogamente si ragiona per il secondo membro. □

Dimostriamo quindi che per $|\pi| \to 0$ si ha che

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n f''(\widetilde{X}_{i-1})\Big(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}\Big)^2 \longrightarrow \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s) H_s^2 ds.$$

Ma

$$\int_0^t f''(X_s) H_s^2 ds - \sum_{i=1}^n f''(\widetilde{X}_{i-1})\Big(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}\Big)^2 = I_1 + I_2 + I_3,$$

con

$$I_1 = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Big(f''(X_s) - f''(X_{t_{i-1}})\Big) H_s^2 ds,$$

$$I_2 = \sum_{i=1}^n f''(X_{t_{i-1}}) \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} H_s^2 ds - \Big(\int_{t_{i-1}}^{t_i} H_s ds\Big)^2\right)$$

e

$$I_3 = \sum_{i=1}^n \Big(f''(X_{t_{i-1}}) - f''(\widetilde{X}_{i-1})\Big) \Big(\int_{t_{i-1}}^{t_i} H_s ds\Big)^2.$$

La continuità di f'' ci garantisce che preso $\varepsilon > 0$ esiste $|\pi|$ piccolo a sufficienza in modo tale che

$$|I_1| \leq \left(\sup_{|s-\sigma|<|\pi|} |f''(X_s) - f''(X_\sigma)|\right) \int_0^t H_s^2 ds < \varepsilon$$

cosí come

$$|I_3| \leq \left(\sup_{|s-\sigma|<|\pi|} |f''(X_s) - f''(X_\sigma)|\right) \sum_{i=1}^n \Big(\int_{t_{i-1}}^{t_i} H_s dW_s\Big)^2 < \varepsilon.$$

Resta da stimare I_2; sappiamo, dalla costruzione dell'integrale di Itô, che

$$\Big(\int_{t_{i-1}}^{t_i} H_s ds\Big)^2 - \int_{t_{i-1}}^{t_i} H_s^2 ds$$

è una martingala, infatti:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(\Big(\int_{t_{i-1}}^{t_i} H_s ds\Big)^2 - \int_{t_{i-1}}^{t_i} H_s^2 ds \,\Big|\mathcal{F}_{j-1}\Big) &= \\
&= \mathbb{E}\Big(\Big(\int_{t_{i-1}}^{t_i} H_s ds\Big)^2 \,\Big|\mathcal{F}_{j-1}\Big) - \mathbb{E}\Big(\int_{t_{i-1}}^{t_i} H_s^2 ds \,\Big|\mathcal{F}_{j-1}\Big) \\
&= \Big(\int_{t_{j-1}}^{t_j} H_s ds\Big)^2 - \int_{t_{j-1}}^{t_j} H_s^2 ds.
\end{aligned}$$

Quindi dalla formula di Burkholder (Lemma 5.1) otteniamo che

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[|I_2|^2\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n f''(X_{t_{i-1}})^2 \left(\Big(\int_{t_{i-1}}^{t_i} H_s^2 ds - \Big(\int_{t_{i-1}}^{t_i} H_s ds\Big)^2\Big)\right)^2\right] \\
&\leq c\|f''\|_\infty^2 \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[\Big(\int_{t_{i-1}}^{t_i} H_s^2 ds\Big)^2 + \Big(\int_{t_{i-1}}^{t_i} H_s ds\Big)^4 - 2\int_{t_{i-1}}^{t_i} H_s^2 ds\Big(\int_{t_{i-1}}^{t_i} H_s ds\Big)^2\right] \\
&\leq c\|f''\|_\infty^2 \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[\Big(\int_{t_{i-1}}^{t_i} H_s^2 ds\Big)^2\right] + o((\pi)) \\
&\leq cM\|f''\|_\infty^2 \mathbb{E}\left[\sup_{|s-\sigma|<|\pi|} \left|\int_\sigma^s H_s^2 ds\right|^4\right] \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

per $|\pi| \to 0$. $\square$

Poichè:

$$\Big(\int_{t_{i-1}}^{t_i} H_s ds\Big)^4 \longrightarrow 0, \quad \int_{t_{i-1}}^{t_i} H_s^2 ds\Big(\int_{t_{i-1}}^{t_i} H_s ds\Big)^2 \longrightarrow 0$$

per la **Disuguaglianza di Hölder**, infatti abbiamo che

$$\begin{aligned} \int_{t_{i-1}}^{t_i} H_s \cdot 1 ds &\leq \Big(\int_{t_{i-1}}^{t_i} H_s^2 ds \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{t_{i-1}}^{t_i} 1^2 ds \Big)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{t_i - t_{i-1}} \Big(\int_{t_{i-1}}^{t_i} H_s^2 ds \Big)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{5.6}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \Big(\int_{t_{i-1}}^{t_i} H_s ds \Big)^4 &\leq (t_i - t_{i-1})^2 \Big(\int_{t_{i-1}}^{t_i} H_s^2 ds \Big)^2 \\ &\leq (t_i - t_{i-1})^2 M^2 \to 0 \end{aligned} \tag{5.7}$$

mentre

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\int_{t_{i-1}}^{t_i} H_s^2 ds \Big(\int_{t_{i-1}}^{t_i} H_s ds \Big)^2 \right] &\leq 2M\mathbb{E}\left[(t_i - t_{i-1}) \Big(\int_{t_{i-1}}^{t_i} H_s^2 ds \Big) \right] \\ &\leq 2M^2 (t_i - t_{i-1}) \to 0 \end{aligned} \tag{5.8}$$

poichè $|t_i - t_{i-1}| \to 0$.

La formula di Itô è particolarmente utile nel caso dello studio di opzioni, in quanto le azioni sono modellate tramite un processo di Wiener generalizzato e poichè le opzioni non sono altro che funzioni del proprio sottostante è chiaro che ad esse può essere applicata la formula di Itô.

Capitolo 6

Applicazione degli integrali di Itô

L'integrale di Itô viene usato innanzitutto per determinare la soluzione di un equazione differenziale stocastica.

6.1 Equazioni differenziali stocastiche

Definizione 6.1. *Le equazioni differenziali stocastiche sono equazioni della forma*

$$dX_t = K(t, X_t)\ dt + H(t, X_t)\ dW_t.$$

Il significato di questa espressione viene dall'analoga espressione integrale

$$X_t - X_{t_0} = \int_{t_0}^{t} K(t, X_t)\ dt + \int_{t_0}^{t} H(t, X_t)\ dW_t, \tag{6.1}$$

dove si assume come filtrazione $\mathcal{F}_{[t_0,t]} = \mathcal{F}_t$ e si allarga la σ - algebra in modo tale che X_{t_0} sia $\mathcal{F}_{t_0}$- misurabile.

Definizione 6.2. *X_t è **soluzione forte** dell'equazione differenziale stocastica rispetto alla filtrazione $\mathcal{F}_t$ e con dato iniziale X_{t_0} se:*

- *X_{t_0} è $\mathcal{F}_{t_0}$- misurabile, X_t è $\mathcal{F}_t$- misurabile;*
- *$H(t, X_t)$ è misurabile e $\int_{t_0}^{t} |H(t, X_t)|\ dt\ < +\infty$ quasi certamente $\forall t$;*
- *$\int_{t_0}^{t} |K(t, X_t)|^2\ dt\ < +\infty$ quasi certamente $\forall t$;*
- *vale la relazione (6.1) quasi certamente.*

La soluzione è forte perchè la filtrazione è data dal problema. La soluzione, invece, è debole se $\mathcal{F}_t$ non è data ma è da trovare assieme a X_t. Noi non tratteremo quest'ultimo caso.

Vediamo ora come si risolve, utilizzando la formula di Itô, l'equazione che descrive l'andamento dei mercati finanziari:

$$\begin{cases} dS_t = S_t \mu dt + S_t \sigma dW_t \\ S_0 = x_0 \end{cases} \tag{6.2}$$

μ,$\sigma \in \mathbb{R}$ costanti.

Definizione 6.3. *Per soluzione di tale equazione si intende un processo stocastico* $(S_t)_t$ *per cui*

$$S_t = x_0 + \int_0^t \mu S_s ds + \int_0^t \sigma S_s dW_s$$

dove, considerata la definizione (5.2), posso pensare $\mu S_s = K_s$ *e* $\sigma S_s = H_s$.

Supponiamo ora $S_t > 0$ e definiamo $Y_t = \ln(S_t) \in C^2(0; +\infty)$. Stiamo quindi componendo il processo $(S_t)_t$ con la funzione regolare

$$f(t, x) = \ln(x).$$

Supponiamo di sapere che S_t, soluzione del sistema (6.2), esista e vediamo quale equazione risolve Y_t:

$$Y_t = f(S_t) = f(S_0) + \int_0^t f'(S_s) K_s ds + \int_0^t f'(S_s) H_s dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(S_s) H_s^2 ds.$$

Allora si avrà:

$$\begin{aligned} Y_t &= \ln x_0 + \int_0^t \frac{1}{S_s} \mu S_s ds + \int_0^t \frac{1}{S_s} \sigma S_s dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t -\frac{1}{S_s^2} \sigma^2 S_s^2 ds \\ &= \ln x_0 + \mu t + \sigma W_t - \frac{1}{2} \sigma^2 t, \end{aligned}$$

cioè

$$\ln(S_t) = \ln x_0 + t \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) + \sigma W_t. \tag{6.3}$$

Quindi la soluzione del sistema iniziale sarà data da:

$$S_t = x_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right).$$

Altro modo di vedere ciò:

$$X_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t = \int_0^t \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) ds + \int_0^t \sigma dW_s$$

è un processo di Itô con

$$\begin{cases} K_t = \mu - \frac{\sigma^2}{2} \\ H_t = \sigma \end{cases}$$

Vedo cosa risolve la funzione

$$S_t = e^{X_t} = f(X_t), \quad f(x) = e^x.$$

$$\begin{aligned} S_t = f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)K_s ds + \int_0^t f'(X_s)H_s dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)H_s^2 ds \\ = e^{x_0} + \int_0^t e^{X_t}\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) ds + \int_0^t e^{X_t}\sigma\ dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t e^{X_t}\sigma^2 ds \\ = e^{x_0} + \int_0^t e^{X_t}\mu\ ds + \int_0^t e^{X_t}\sigma\ dW_s. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Quindi rimane $S_t = S_0 + \int_0^t \mu S_s ds + \int_0^t \sigma S_s dW_s$ e cioè S_t risolve il problema iniziale.

Altrimenti posso considerare

$$W_t = 0 + \int_0^t 0 ds + \int_0^t 1 dW_s$$

che è un particolare processo di Itô con

$$\begin{cases} K_t = 0 \\ H_t = 1; \end{cases}$$

vedo cosa risolve $S_t = e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t} = f(t, W_t)$ con

$$f(t,x) = e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma x} \in\ C^2.$$

$$\begin{aligned} S_t = f(t, W_t) = f(0, W_0) + \int_0^t f_s(s, W_s) ds + \int_0^t f_x(s, W_s) K_s ds + \\ + \int_0^t f_x(s, W_s) H_s dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}(s, W_s) H_s^2 ds. \end{aligned}$$

$$S_t = x_0 + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})\int_0^t S_s ds + \int_0^t \mu S_s 0 ds + \sigma \int_0^t S_s dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2 S_s ds$$

Anche in questo caso ottengo $S_t = x_0 + \int_0^t \mu S_s ds + \int_0^t \sigma S_s dW_s$, cioè che S_t risolve il problema iniziale.

6.2 Unicità della soluzione

Dimostreremo in questa sezione che la soluzione di (6.2) é unica. Per far questo premettiamo il seguente risultato

Proposizione 6.4. *Supponiamo di avere X_t e Y_t, due processi di Itô soluzioni del sistema, cioé due processi tali che:*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s,$$
$$Y_t = Y_0 + \int_0^t K'_s ds + \int_0^t H'_s dW_s.$$

Allora X_tY_t è un processo di Itô determinato da :

$$\begin{aligned} X_tY_t &= X_0Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t H_s H'_s ds. \\ &= X_0Y_0 + \int_0^t X_s K'_s ds + \int_0^t X_s H'_s dW_s + \int_0^t Y_s K_s ds + \\ &+ \int_0^t Y_s H_s dW_s + \int_0^t H_s H'_s ds. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Utilizziamo la formula di Itô con $f(x) = x^2$ e la applichiamo ai tre processi

$$(X_t + Y_t)_t, \quad (X_t)_t, \quad e \quad (Y_t)_t$$

ottenendo:

$$\begin{aligned} (X_t + Y_t)^2 &= (X_0 + Y_0)^2 + 2\int_0^t (X_s + Y_s)(K_s + K'_s) ds + \\ &+ 2\int_0^t (X_s + Y_s)(H_s + H'_s) dW_s + 2\frac{1}{2}\int_0^t (H_s + H'_s)^2\ ds \\ &= X_0^2 + Y_0^2 + 2X_0Y_0 + 2\int_0^t X_s K_s ds + 2\int_0^t Y_s K'_s ds + 2\int_0^t X_s K'_s ds + \\ &+ 2\int_0^t Y_s K_s ds + 2\int_0^t X_s H_s dW_s + 2\int_0^t X_s H'_s dW_s + 2\int_0^t Y_s H'_s dW_s + \\ &+ 2\int_0^t Y_s H_s dW_s + \int_0^t (H_s + H'_s)^2 ds, \end{aligned}$$

$$X_t^2 = X_0^2 + 2\int_0^t X_s K_s ds + 2\int_0^t X_s H_s dW_s + 2\frac{1}{2}\int_0^t \int_0^t H_s^2 ds,$$
$$Y_t^2 = Y_0^2 + 2\int_0^t Y_s K'_s ds + 2\int_0^t Y_s H'_s dW_s + 2\frac{1}{2}\int_0^t \int_0^t H_s'^2 ds.$$

Per ricavare X_tY_t utilizziamo:

$$(X_t + Y_t)^2 = X_t^2 + Y_t^2 + 2X_tY_t$$

$$\Rightarrow (X_t+Y_t)^2 - X_t^2 - Y_t^2 = 2X_tY_t$$

ponendo poi $dY_s = K'_s ds + H'_s dW_s$ e $dX_s = K_s ds + H_s dW_s$ ricaviamo:

$$\begin{aligned}
(X_t+Y_t)^2 - X_t^2 - Y_t^2 &= 2X_0Y_0 + 2\int_0^t X_s dY_s + 2\int_0^t Y_s dX_s + \\
&+ \langle X+Y, X+Y\rangle_t - \langle X,X\rangle_t - \langle Y,Y\rangle_t \\
&= 2X_0Y_0 + 2\int_0^t X_s dY_s + 2\int_0^t Y_s dX_s + \\
&+ \int_0^t (H_s + H'_s)^2 ds - \int_0^t H_s^2 ds - \int_0^t {H'}_s^2 ds \\
&= 2X_0Y_0 + 2\int_0^t X_s dY_s + 2\int_0^t Y_s dX_s + 2\int_0^t H_s H'_s ds.
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t H_s H'_s ds$$

□

Di conseguenza, X_tY_t è un processo di Itô con:

$$\begin{aligned}
d(X_tY_t) &= X_s dY_s + Y_s dX_s + H_s H'_s ds \\
&= (X_s K'_s + Y_s K_s + H_s H'_s) ds + (X_s H'_s + Y_s H_s) dW_s.
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Diamo ora dimostrazione dell'unicità della soluzione del sistema (6.2).

Proposizione 6.5. *Dato un processo stocastico S_t e le costanti μ,$\sigma \in \mathbb{R}$, il sistema:*

$$\begin{cases} dS_t = S_t \mu dt + S_t \sigma dW_t \\ S_0 = x_0 \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione nell'intervallo $[0,T]$, per ogni $T \geq 0$.

Dimostrazione. Sia $S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right)$ la soluzione che abbiamo determinato in precedenza e definisco

$$Z_t := \frac{S_0}{S_t} = \exp\left(\left(-\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)t - \sigma W_t\right).$$

Dimostro che è un processo di Itô; in particolare mostro che

$$\begin{aligned}
Z_t &= 1 + \int_0^t Z_s(-\mu + \sigma^2) ds - \sigma dW_s) \\
&= \int_0^t K'_s ds + \int_0^t H'_s dW_s,
\end{aligned}$$

avendo posto $K'_s = Z_s(-\mu + \sigma^2)$ e $H'_s = -\sigma Z_s$.

Sia ora X_t un altro processo di Itô che risolve il sistema (6.2), cioé tale che

$$X_t = x_0 + \int_0^t \mu X_s ds + \int_0^t \sigma X_s dW_s.$$

Ponendo $H_s = \sigma X_s$, considero:

$$\begin{aligned} X_t Z_t &= X_0 Z_0 + \int_0^t X_s dZ_s + \int_0^t Z_s dX_s + \int_0^t H_s H'_s ds \\ &= x_0 + \int_0^t X_s Z_s(-\mu + \sigma^2) ds + \int_0^t X_s Z_s(-\sigma) dW_s + \\ &+ \int_0^t X_s Z_s \mu ds + \int_0^t X_s Z_s \sigma dW_s + \int_0^t X_s Z_s(-\sigma^2) ds \\ &= x_0. \end{aligned} \tag{6.6}$$

cioè $d(X_t Z_t) = 0$.

$$\Rightarrow X_t = x_0 Z_t^{-1} = \frac{x_0 S_t}{S_0} = S_t$$

□

Noi abbiamo considerato il caso in cui μ e σ sono costanti ma la proposizione puó anche essere generalizzata al caso in cui μ e σ siano funzioni. Con opportune condizioni, in tal caso si ottiene il seguente

Teorema 6.6. *Supponiamo che μ e σ siano funzioni continue tali che esista una costante $K < +\infty$ con*

1. $|\mu(t,x) - \mu(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K|x - y|$;
2. $|\mu(t,x)| + |\sigma(t,x)| \leq K(1 + |x|)$;
3. $\mathbb{E}[S_0^2] < +\infty$.

Allora, per ogni $T \geq 0$ esiste un unico processo di Itô S_t tale che:

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |S_t|^2\right] < +\infty, \tag{6.7}$$

soluzione in [0,T] del problema

$$\begin{cases} dS_t = \mu(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dW_t \\ S_0 = x_0 \end{cases}$$

In particolare, se μ e σ sono costanti, la soluzione é:

$$S_t = x_0 + \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t\right).$$

Applicazione della formula di Itô

Prendiamo W_t e consideriamo W_t^2.Vogliamo vedere se anche W_t^2 é un processo di Itô o meno. Notiamo che non puó essere un processo con

$$K_t = 0 \quad e \quad H_t = 2W_t,$$

in quanto, in tal caso, avremmo:

$$\mathbb{E}[\int_0^t W_s \, dW_s] = \mathbb{E}[M_t] = \int_\Omega M_t \, d\mathbb{P} = \int_\Omega M_0 \, d\mathbb{P} = 0$$

e quindi $\frac{1}{2}\mathbb{E}[W_t^2] = 0$ da cui $W_t = 0$ quasi ovunque $\forall t > 0$, che è un assurdo, in quanto la sua legge non potrebbe avere varianza t.
Se applichiamo invece la formula di Itô, prendendo:

$$X_t = W_t, \quad K_s = 0, \quad H_s = 1 \quad e \quad f(x) = x^2$$

cioé considerando $dW_t = 0 \cdot dt + 1 \cdot dW_t$, dalla formula di Itô si ottiene:

$$d(W_t^2) = 2W_t \, dW_t + dt$$

dove dt é dovuto alla stocasticitá della situazione. Ricordiamo che con questo si intende:

$$W_t^2 = 2\int_0^t W_t \, dt + t.$$

6.3 Conclusione

Sia S_t il prezzo di un'azione al tempo t. Le variazioni nel prezzo dell'azione sono descritte dal seguente processo di Itô:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t. \tag{6.8}$$

In altri termini le variazioni percentuali dei prezzi azionari sono caratterizzate da un termine deterministico, proporzionale a μ, e da un termine aleatorio Gaussiano. Inoltre, ricordando la formula di Itô, si deduce la (6.3):

$$\ln(S_t) = \ln x_0 + t\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma W_t,$$

ovvero il logaritmo dei prezzi è caratterizzato da un processo di Wiener generalizzato; si dice anche che il prezzo dell'azione segue un processo lognormale.

Si può ottenere quindi la soluzione in forma chiusa per il processo stocastico (6.8):

$$S_t = x_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right),$$

dove x_0 è il prezzo dell'azione al tempo zero.
È interessante calcolare il valore atteso del processo S_t:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_t] &= \int_\Omega S_t(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \int_\Omega x_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right)\mathbb{P}(d\omega) \\
&= x_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right)\int_\Omega e^{\sigma W_t(\omega)}\mathbb{P}(d\omega) \\
&= x_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right)\int_\mathbb{R} e^{\sigma x}\frac{e^{-\frac{x^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}}dx \\
&= x_0 \exp\left(\mu t - \frac{\sigma^2}{2}t + \frac{\sigma^2}{2}t\right)\int_\mathbb{R} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} exp\left(-\frac{1}{2t}(x^2 - 2\sigma x t + \sigma^2 t^2)\right)dx \\
&= x_0 \exp(\mu t)\int_\mathbb{R} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} exp\left(-\frac{1}{2t}(x - \sigma t)^2\right)dx.
\end{aligned}$$

Ponendo $y = \frac{x-\sigma t}{\sqrt{t}}$, $dy = \frac{dx}{\sqrt{t}}$ ottengo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_t] &= x_0 \exp(\mu t)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_\mathbb{R} e^{-\frac{y^2}{2}}dy \\
&= x_0 e^{\mu t}.
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Si nota che nel valore atteso non compare la parte stocastica, ci sono solo i coefficienti della parte non stocastica. Dunque la speranza della mia soluzione S_t ha un andamento esponenziale, come se il termine stocastico non ci fosse, e verifica un'equazione differenziale lineare del primo ordine, non stocastica.

Bibliografia

[1] R. M. Dudley. *Real analysis and probability*, volume 74 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002. Revised reprint of the 1989 original.

[2] Nualart, David. *Malliavin calculus and its applications*, volume 110 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 2009. Revised reprint of the 1989 original. Dominique Lépingle

[3] Karatzas, Ioannis and Shreve, Steven E. *Brownian motion and stochastic calculus*, volume 113 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991. Second edition.

[4] Lamberton, Damien and Lapeyre, Bernard. *Introduction to stochastic calculus applied to finance*, *Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2008. Second edition.

[5] Erio Castagnoli, Lorenzo Peccati. *Matmatica in azienda*, volume 1. EGEA editore, Milano, 2010.

[6] A. Beltratti. *I mercati finanziari. Funzionamento e strumenti di gestione* Carocci, 2000.

[7] Riesz, Frigyes and Sz.-Nagy, Béla. *Functional analysis,Dover Books on Advanced Mathematics*. Dover Publications Inc., New York, 1990. Translated from the second French edition by Leo F. Boron. Reprint of the 1955 original.

[8] Itô, Kiyosi. *Stochastic integral*, volume 20 of*Proc. Imp. Acad. Tokyo*, 1944.

[9] Itô, Kiyosi. *On a formula concerning stochastic differentials*, volume 3 of *Nagoya Mathematical Journal*, 1951.