

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FERRARA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Triennale in Matematica

**IL
PROBLEMA
ISOPERIMETRICO**

Tesi di Laurea

Relatore:
MICHELE MIRANDA

Presentata da:
GIORGIO MENEGATTI

Anno Accademico 2009-2010

Prefazione

Nella sua forma piú classica il problema isoperimetrico consiste, dati uno spazio misurabile e un valore $m \in \mathbb{R}^+$, nel trovare un sottoinsieme misurabile che, tra tutti quelli con misura m abbia perimetro minimo. Nella formulazione di questo problema si puó fare riferimento a vari tipi di spazi, e a varie definizioni di misura e di perimetro. Noi ci riferiremo sempre a uno spazio \mathbb{R}^n e alla comune misura di Lebesgue in \mathbb{R}^n ; la definizione esatta di perimetro richiederá delle precisazioni.

Il caso bidimensionale è il piú semplice ed antico. I Greci avevano capito che la soluzione era rappresentata dalla circonferenza, ma non ne possedevano una dimostrazione. La soluzione geometrica rigorosa occupó i matematici per secoli. Vari tentativi di varia efficacia furono fatti da Archimede, Zenodoro, Pappo e poi in tempi piú recenti da Eulero, Galileo, Legendre, L'Huilier, Riccati, Simpson, e, tra il 1838 e il 1841, Steiner fino a Hilbert. Fu Jacob Steiner, che operó a Berlino nella prima metà dell'Ottocento, a dimostrare che la soluzione del problema isoperimetrico in due dimensioni è il cerchio; in effetti però ciò che dimostro è che *se tale soluzione esiste*, è il cerchio. La dimostrazione dell'esistenza di un tale insieme fu cercata dai matematici negli anni successivi fino a quando Weierstrass non vi riuscí, facendo ricorso al calcolo delle variazioni. Oggi se ne conoscono molte dimostrazioni diverse; un resoconto sintetico di alcune si trova in [2], tra le quali una parte di quella usata in questa tesi.

Nel 1884 Schwartz dimostró la proprietá di isoperimetria della sfera nello spazio tridimensionale e nel 1958 Ennio de Giorgi dimostró che vale la stessa proprietá in uno spazio di dimensione maggiore; si veda [3]. La dimostrazione esposta qui si rifá a quella, ed è basata sull'esposizione datane in [6].

Per prima cosa esporremo il problema isoperimetrico in alcune formulazioni tra esse equivalenti. In seguito introdurremo alcuni risultati tecnici: la definizione di perimetro in due dimensioni, e alcune sue proprietá; la definizione, piú complessa, di perimetro di un misurabile in n dimensioni, e sue proprietá; una serie di proprietá dei convessi necessarie alla dimostrazione; altre proprietá utili alla dimostrazione nel caso bidimensionale. Infine, dimostreremo che la soluzione del problema isoperimetrico esiste e coincide con il cerchio in \mathbb{R}^2 ; che esiste e coincide con la bolla a n dimensioni in \mathbb{R}^n .

Indice

1	Definizione generale di problema isoperimetrico	3
2	Preliminari tecnici	5
2.1	Definizione di perimetro in \mathbb{R}^2	5
2.2	Definizione di perimetro in \mathbb{R}^n	9
2.3	Proprietá dei convessi in \mathbb{R}^2	14
2.4	Proprietá dei convessi in \mathbb{R}^n	27
2.5	Altri risultati utili	33
3	Soluzione del problema isoperimetrico in \mathbb{R}^2	36
4	Soluzione del problema isoperimetrico in \mathbb{R}^n	45

Capitolo 1

Definizione generale di problema isoperimetrico

è evidente che su un qualsiasi insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile di misura m è sempre possibile effettuare una omotetia di rapporto k ottenendo un insieme E' misurabile di misura $k^n m$; se il perimetro di E è definito (in un qualche senso) e di misura P anche quella di E' è definito (nello stesso senso) e, ha lunghezza $k^{n-1}P$. Posso quindi affermare che tutte gli insiemi ottenibili da una omotetia di A hanno lo stesso rapporto

$$r(E) = \frac{\mathcal{L}^n(E')}{p(E')^{\frac{n}{n-1}}} = \frac{k^n \mathcal{L}^n(E)}{k^n p(E)^{\frac{n}{n-1}}}.$$

Per un insieme misurabile E di misura m , affermare che ha perimetro inferiore rispetto a un insieme B di uguale area m equivale ad affermare che E ha rapporto r maggiore di quello di B ; dunque la soluzione del problema isoperimetrico per m è l'insieme di area m che massimizza il suddetto rapporto. Le omotetie lasciano invariato tale rapporto; viceversa, dato un $x \in \mathbb{R}^+$ e un insieme E , esiste un insieme omotetico a E , quindi col suo stesso rapporto, e di misura x ; dunque l'insieme che massimizza il rapporto r è lo stesso per ogni valore non nullo di m , a meno di omotetie e conservando la forma, ed è quindi la stessa la soluzione del problema isoperimetrico.

Se si considerano ora vari insiemi tutti con lo stesso perimetro p , quello E di area maggiore sarà quello che massimizza il rapporto $r(E)$, e il ragionamento di sopra si potrà ripetere per ogni possibile valore di p . Quindi il problema isoperimetrico in \mathbb{R}^n si può riformulare nei tre seguenti modi.

Problema 1 *Trovare l'insieme che abbia misura massima tra tutte quelli con lo stesso perimetro.*

Problema 2 *Trovare l'insieme che abbia perimetro minimo tra tutti quelli con la stessa misura.*

Problema 3 *Trovare l'insieme E che massimizza $r(E) = \frac{\mathcal{L}^n(E)}{p(E)^{\frac{n}{n-1}}}$.*

Alla prima formulazione aderisce l'espressione "Problema isoperimetrico". In \mathbb{R}^2 , ove affronteremo il problema per primo, il problema si riformula così:

Problema 4 *Trovare l'insieme che abbia area massima tra tutti quelli con lo stesso perimetro.*

Problema 5 *Trovare l'insieme che abbia perimetro minimo tra tutte quelli con la stessa area.*

Problema 6 *Trovare l'insieme E che massimizza $r(E) = \frac{\mathcal{L}^2(E)}{p(E)^2}$.*

è intuitivamente chiaro che nel problema ci si può limitare a considerare gli insiemi in cui, se si considera una componente connessa, essa deve avere bordo connesso, ovvero essere priva di "cavitá" interne (nel caso di \mathbb{R}^2 ciò corrisponde all'essere semplicemente connessa); se avesse "cavitá" interne, allora "riempiendole" si avrebbe un insieme di perimetro minore ma misura interna maggiore. Perciò supporremo sempre che il contorno di un insieme convesso sia connesso e unico, e sia il suo contorno esterno.

Capitolo 2

Preliminari tecnici

2.1 Definizione di perimetro in \mathbb{R}^2

Ci riferiremo in primo luogo al problema isoperimetrico in \mathbb{R}^2 , con la misura di Lebesgue, e a insiemi il cui bordo sia rappresentabile come il sostegno di una curva o di un insieme numerabile di curve: tutte gli insiemi “regolari” sono di questo tipo. È necessario ricordare la definizione della lunghezza di una curva in \mathbb{R}^2 .

Definizione 1 *Data una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, una curva p definita nello stesso intervallo si dice poligonale inscritta in γ ,*

$$p \subseteq \gamma,$$

se esiste un numero finito di punti, di $[a, b]$, detti vertici, x_0, x_1, \dots, x_m con $x_0 = a, x_m = b, x_i < x_l$ se $i < l$, tali che, per ogni $x \in [a, b]$, con $x_l \leq x \leq x_m$,

$$p(x) = \gamma(x_l) + \frac{\gamma(x_m) - \gamma(x_l)}{x_m - x_l}(x - x_l) = \frac{x_m - x}{x_m - x_l}\gamma(x_l) + \frac{x - x_l}{x_m - x_l}\gamma(x_m),$$

ovvero se è costituita da una successione finita di segmenti adiacenti con i vertici sul sostegno della curva, nell'ordine in cui la curva viene percorsa. Data una curva, si dice sua lunghezza il sup delle lunghezze delle sue poligonali inscritte (naturalmente definita come somma delle lunghezze dei segmenti che le compongono)

$$l(\gamma) = \sup_{p \subseteq \gamma} l(p).$$

È evidente che ogni poligonale, considerata come curva, ha la stessa lunghezza che considerata come poligonale: infatti, se una poligonale p è inscritta ad

un'altra p' , ha sicuramente lunghezza minore; infatti, ogni segmento di p è il lato di un triangolo i cui altri due lati sono due segmenti di p' , e quindi, per la disuguaglianza triangolare, il segmento di p ha lunghezza non superiore alla somma dei due segmenti di p' ; dunque, la somma delle lunghezze dei segmenti di p è minore di quella di p' (e dunque $l(p) \leq l(p')$). Poiché ogni poligonale è inscritta in sé stessa,

$$\sup_{p \subseteq \gamma} l(p) = l(\gamma).$$

Se due curve iniettive γ_1 e γ_2 hanno lo stesso sostegno, hanno poligonali con lo stesso sostegno e la stessa lunghezza, e quindi $l(\gamma_1) = l(\gamma_2)$. Inoltre, se una curva γ viene suddivisa in un numero finito n di curve γ_i più piccole, la somma delle loro lunghezze dá la lunghezza totale della curva; infatti, se a ogni curva γ_i si associa una poligonale di lunghezza sufficientemente vicina a quella della curva, la somma di tutte le poligonali dá una poligonale la cui lunghezza è vicina alla somma di tutte le lunghezze e inferiore a $l(\gamma)$, per cui

$$l(\gamma) \geq \sum_{i=1}^n l(\gamma_i) :$$

invece, a ogni poligonale $p \subseteq \gamma$, di lunghezza arbitrariamente vicina a γ si può associare un'altra poligonale in cui la prima è inscritta, formata da poligonali inscritte nei γ_i e che avrà lunghezza maggiore; di conseguenza

$$\sum_{i=1}^n l(\gamma_i) \geq l(\gamma).$$

Quindi

$$\sum_{i=1}^n l(\gamma_i) = l(\gamma).$$

Supponiamo di effettuare un'omotetia di rapporto k su γ : a essa corrisponde la curva γ' , e anche le poligonali inscritte nelle due curve si corrispondono nell'omotetia. Ogni poligonale, nell'omotetia, aumenta la propria lunghezza complessiva di un fattore k ; quindi, per definizione di lunghezza, $l(\gamma') = kl(\gamma)$. Quindi la lunghezza di una curva così definita ha le proprietà "naturali" che ci possiamo aspettare da essa.

Valgono inoltre alcune proposizioni.

Proposizione 1 *Se una curva γ definita in $[a, b]$ è Lipschitziana, la sua lunghezza è $\int_a^b |\gamma'(x)| dx$, ove $|\cdot|$ è la norma vettoriale.*

La dimostrazione di questa proposizione si può trovare ad esempio in [1].

Corollario 1 *Se una curva γ , tale che il suo sostegno $|\gamma|$ è contenuto in \mathbb{R}^2 , è rappresentabile come il grafico di una funzione f definita in $[a, b]$ e Lipschitziana, la sua lunghezza è*

$$\int_a^b (1 + |f'(x)|^2)^{\frac{1}{2}} dx.$$

Dimostrazione. La suddetta curva è esprimibile come $\gamma(x) = (x, f(x))$, ed è Lipschitziana, con derivata $\gamma'(x) = (1, f'(x))$. Per la Proposizione 1,

$$l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(x)| dx = \int_a^b (1 + |f'(x)|^2)^{\frac{1}{2}} dx. \square$$

Dimostriamo che la lunghezza così definita è una funzione semicontinua inferiormente.

Definizione 2 *Data una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ con X spazio metrico, essa è detta semicontinua inferiormente se, data una qualsiasi successione x_n convergente a x in X ,*

$$f(x) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} f(x_n).$$

Ricordiamo la seguente definizione:

Definizione 3 *Nell'insieme delle funzioni limitate tra l'insieme X e lo spazio metrico Y è possibile definire la distanza*

$$d(f_1, f_2) = \sup_{x \in X} d_Y(f_1(x), f_2(x)),$$

ove d_Y è la distanza metrica definita in Y . In tal modo risulterà definito uno spazio metrico.

Proposizione 2 *Nell'insieme delle curve continue in \mathbb{R}^n definite nell'intervallo $[a, b]$ (tutte limitate, evidentemente), si consideri la distanza data da:*

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in [a, b]\}.$$

Nella corrispondente topologia, la funzione che a ogni curva associa la sua lunghezza è semicontinua inferiormente.

Dimostrazione. Indichiamo con $l(\gamma)$ la lunghezza della curva γ , e con $d(x, y)$ la distanza tra x e y . Sia $\{\gamma_p\}$ una successione di curve definite in $[a, b]$ che converge nella suddetta topologia (ovvero che converge uniformemente) a γ . Si tratta di dimostrare che allora $l(\gamma) \leq \liminf_{p \rightarrow +\infty} l(\gamma_p)$. Sappiamo che deve esistere una sottosuccessione di curve $\{\gamma_{p_n}\}$ che parimenti converge uniformemente a γ , tale che la loro lunghezza converge a $\liminf_{p \rightarrow +\infty} l(\gamma_p)$; di qui in avanti indicheremo tale successione con $\{\gamma_n\}$; è sufficiente dimostrare che $\lim_{n \rightarrow +\infty} l(\gamma_n) \geq l(\gamma)$. Perciò dimostreremo che, per ogni $x < l(\gamma)$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} l(\gamma_n) > x$.

Consideriamo ora un qualsiasi $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Per definizione di lunghezza deve esistere una poligonale $p \subseteq \gamma$ tale che $0 \leq l(\gamma) - l(p) < \epsilon$, e dunque $l(\gamma) < l(p) + \epsilon$. La poligonale è definita da un insieme finito di $m + 1$ valori $\theta_i \in [a, b]$ che, tramite γ , definisce un corrispettivo sottoinsieme finito di punti del sostegno di γ . Per ogni γ_n , si può costruire la rispettiva poligonale $p_n \subseteq \gamma_n$ che abbia vertici corrispondenti ai $m + 1$ valori di θ_i applicati a γ_n , e sarà quindi formata da m segmenti. In particolare, poiché γ_n converge a γ uniformemente, possiamo scegliere un ν tale che, per ogni $t \geq \nu$, $d(\gamma_t(\theta), \gamma(\theta)) < \frac{\epsilon}{m}$ per ogni $\theta \in [a, b]$; allora, per la disuguaglianza triangolare, dato un intervallo $[\theta_i, \theta_{i+1}]$ (scelti nell'insieme di valori che definiscono i vertici di p),

$$\begin{aligned} d(p(\theta_i), p(\theta_{i+1})) &= d(\gamma(\theta_i), \gamma(\theta_{i+1})) = \\ &\leq d(\gamma(\theta_i), \gamma_t(\theta_i)) + d(\gamma_t(\theta_i), \gamma(\theta_{i+1})) \leq \\ &\leq d(\gamma(\theta_i), \gamma_t(\theta_i)) + d(\gamma_t(\theta_i), \gamma_t(\theta_{i+1})) + d(\gamma_t(\theta_{i+1}), \gamma(\theta_{i+1})) < \\ &< d(\gamma_t(\theta_i), \gamma_t(\theta_{i+1})) + \frac{2\epsilon}{m} = d(p_t(\theta_i), p_t(\theta_{i+1})) + \frac{2\epsilon}{m}; \end{aligned}$$

allora poiché p e p_t sono poligonali si ha

$$\begin{aligned} l(p) &= \sum_{i=1}^m d(p(\theta_i), p(\theta_{i+1})) < \sum_{i=1}^m \left(d(p_t(\theta_i), p_t(\theta_{i+1})) + \frac{2\epsilon}{m} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^m d(p_t(\theta_i), p_t(\theta_{i+1})) + m \frac{2\epsilon}{m} = l(p_t) + 2\epsilon. \end{aligned}$$

Quindi la p_t scelta è tale che $l(p) < l(p_t) + 2\epsilon$; allora $l(\gamma) < l(p) + \epsilon \leq l(p_t) + 3\epsilon \leq l(\gamma_t) + 3\epsilon$ poiché essendo $p_t \subseteq \gamma_t$, $l(p_t) \leq l(\gamma_t)$. Poiché l'unico vincolo su t è che sia maggiore di ν , lo si può scegliere tale che

$$l(\gamma_t) < \lim_{n \rightarrow +\infty} l(\gamma_n) + \epsilon$$

(esiste sempre, per ogni ν , un t tale che $t > \nu$ e che soddisfi la proprietà). Quindi, per ogni ϵ , si ha $l(\gamma) < \lim_{n \rightarrow +\infty} l(\gamma_n) + 4\epsilon$; ciò implica quello che si voleva dimostrare. \square

Dato $E \subseteq \mathbb{R}^2$, se ∂E è una curva o un insieme di curve, chiamerò la sua lunghezza perimetro di E e la indicherò con $P(E)$. Supponiamo di effettuare un'omotetia di rapporto k su E ; allora a ogni curva γ che costituisce ∂E corrisponde la curva γ' di $\partial E'$ sulla quale è stata effettuata l'omotetia. Sappiamo allora che $l(\gamma') = kl(\gamma)$; dunque $P(E') = kP(E)$.

2.2 Definizione di perimetro in \mathbb{R}^n

In \mathbb{R}^n , consideriamo un qualsiasi insieme E ; definiamo su di esso la m -esima misura di Hausdorff.

Definizione 4 Per $\text{diam}(I)$ o diametro di $I \subseteq \mathbb{R}^n$ si intenda il sup delle distanze tra punti di I , per ω_m la misura di Lebesgue, in \mathbb{R}^m , della palla m -dimensionale unitaria. Allora dato un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$, se considero R_δ l'insieme dei ricoprimenti numerabili $\{S_j\}$ di insiemi Boreliani su E con diametro inferiore a δ , allora se

$$\sup_{\delta > 0} \inf \left\{ \sum \omega_m \left(\frac{\text{diam}(S_j)}{2} \right)^m \mid (S_j) \in R_\delta \right\}$$

è definito, è detto la m -misura di Hausdorff su E , $\mathcal{H}^m(E)$.

La misura così definita, sui sottoinsiemi di E , è propriamente una misura; essa coincide con il concetto "naturale" di misura in m dimensioni, nei casi in cui si può calcolare. In particolare, vale la seguente proposizione.

Proposizione 3 Se una funzione $\Psi : D \rightarrow \mathbb{R}$ è localmente Lipschitziana, è quasi ovunque derivabile, e la misura di Hausdorff del grafico è

$$\int_D \sqrt{1 + |\nabla \Psi(x)|^2} dx.$$

Si può trovare in [4]. La n -misura di Hausdorff coincide con la misura di Lebesgue. In particolare, $\mathcal{H}^0(E)$ è la cardinalità dei punti di E .

Consideriamo un sottoinsieme A di \mathbb{R}^n , misurabile secondo Lebesgue. È necessario dare una definizione generale del suo perimetro. Si potrebbe considerare $\mathcal{H}^{n-1}(\partial A)$, ma allora non tutti gli insiemi misurabili avrebbero effettivamente perimetro definito. Occorre quindi un'altra definizione, che, sotto certe condizioni, coincida con questa.

Dimostriamo la

Proposizione 4 Consideriamo una funzione definita dallo spazio metrico X in $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$: allora la funzione g , definita come

$$g(x) = \inf_{\{x_n\} \subseteq X, x_n \rightarrow x} \liminf_{n \rightarrow +\infty} f(x_n),$$

è l'involuppo semicontinuo inferiore di f , ovvero

$$g(x) = \max\{h(x) \mid h \text{ semicontinua inferiormente, e, } \forall y \in X, h(y) \leq f(y)\}$$

e g è semicontinua inferiormente.

Dimostrazione. Indicheremo con $d(x_0, y_0)$ la distanza tra due punti x_0, y_0 di X .

Per definizione di g , per ogni $\epsilon > 0$ esiste una successione $\{x_l\}$ convergente a x tale che $\liminf f(x_l) = a < g(x) + \epsilon$; possiamo considerare solo le x_l tali che $d(x_l, x) < \epsilon$; tra queste, per definizione di \liminf , deve esserne una, che indicheremo con $h_\epsilon(x)$, tale che $f(h_\epsilon(x)) < a + \epsilon < g(x) + 2\epsilon$, mentre vale comunque $d(h_\epsilon(x), x) < \epsilon$.

Dimostriamo ora la semicontinuit  inferiore di g , ovvero: per ogni successione $\{x_n\}, x_n \rightarrow x$, vale $g(x) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} g(x_n)$. Per ogni x_n , definiamo $y_n = h_{\frac{1}{n}}(x_n)$. Per quanto detto,

$$d(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

dunque $y_n \rightarrow x$. Inoltre, poich  $f(y_n) < g(x_n) + \frac{2}{n}$, ne segue

$$g(x) \leq \liminf f(y_n) \leq \liminf g(x_n) + \frac{2}{n}$$

dunque:

$$g(x) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} g(x_n).$$

Consideriamo ora una qualsiasi funzione l semicontinua inferiormente che sia in ogni punto minore o uguale a f ; dato un qualsiasi x , dimostro $h(x) \leq g(x)$. Come visto, si pu  definire la successione $y_n = h_{\frac{1}{n}}(x)$ convergente a x tale che, grazie a quello che sappiamo di l , possiamo scrivere:

$$l(x) \leq \liminf l(y_n) \leq \liminf f(y_n) \leq \liminf g(x) + \frac{2}{n} = g(x).$$

Infine, per ogni x , le funzioni semicontinue inferiori che sono inferiori a f hanno tutte valore minore o uguale a g , e almeno una di esse (g stesso) assume valore uguale. Quindi

$$g(x) = \max\{h(x) \mid h \text{ semicontinua inferiormente, e, } \forall y \in X, h(y) \leq f(y)\}.$$

□

Ora, definiamo una funzione H che va dall'insieme dei misurabili secondo Lebesgue su \mathbb{R}^n a $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ in questo modo: se E è un insieme 'regolare', il cui contorno ∂E ammette $(n-1)$ -misura di Hausdorff non nulla e finita, $H(E)$ è il perimetro comunemente definito $\mathcal{H}^{n-1}(\partial E)$; altrimenti $H(E) = +\infty$.

L'insieme dei misurabili secondo Lebesgue può essere considerato come uno spazio metrizzabile: è sufficiente identificare ogni insieme E con la sua funzione caratteristica χ , e considerare la norma L^1 (poiché E è misurabile, anche χ lo sarà); allora, dati due insiemi E_1 e E_2 , la distanza tra loro è

$$\int |\chi_{E_1}(x) - \chi_{E_2}(x)| dx = \int_{E_1 \setminus E_2} 1 dx + \int_{E_2 \setminus E_1} 1 dx = \int \chi_{E_1 \Delta E_2}(x) dx,$$

ossia la misura di Lebesgue di $E_1 \Delta E_2$; è necessario dunque che due insiemi per cui $E_1 \Delta E_2$ ha misura nulla, siano identificati. È chiaro che per tale distanza vale la disuguaglianza triangolare, poiché vale per la distanza L^1 tra le funzioni caratteristiche. Inoltre la misura degli insiemi (data la definizione) è continua in tale topologia. Indicheremo dunque $\mathcal{L}^n(E)$ con $|E|$. Questo spazio avrà alcune proprietà.

Proposizione 5 *Dati due insiemi E_1, E_2 ed E_3 misurabili secondo Lebesgue*

$$|E_1 \cup E_2| \leq |E_1| + |E_2|;$$

$$|E_1 \Delta E_2| \geq ||E_1| - |E_2||$$

$$|E_1 \setminus E_2| \leq |E_1 \setminus E_3| + |E_3 \setminus E_2|.$$

Dimostrazione. È chiaro che, dati due insiemi disgiunti, la loro misura è pari alla misura delle loro somme, e che, se un insieme è contenuto in un altro, la misura del primo non supera quella del secondo; quindi

$$|E_1 \Delta E_2| = |(E_1 \setminus E_2) \cup (E_2 \setminus E_1)| = |(E_1 \setminus E_2)| + |(E_2 \setminus E_1)|,$$

poiché $E_1 \setminus E_2$ ed $E_2 \setminus E_1$ sono disgiunti. Abbiamo poi

$$\begin{aligned} |E_1 \cup E_2| &= |E_1 \setminus E_2| + |E_2 \setminus E_1| + |E_1 \cap E_2| = \\ &= |E_1 \Delta E_2| + |E_1 \cap E_2| = |E_1| + |E_2 \setminus E_1| \leq |E_1| + |E_2|. \end{aligned}$$

Supponiamo che $|E_1| \geq |E_2|$ (non è restrittivo); allora

$$||E_1| - |E_2|| = |E_1| - |E_2| = |E_1| + |E_2| - 2|E_2| = |E_1 \Delta E_2| + |E_1 \cap E_2| - 2|E_2| \leq$$

$$\leq |E_1 \Delta E_2| - |E_2| \leq |E_1 \Delta E_2|.$$

La penultima diseguaglianza deriva dal fatto che $(E_1 \cap E_2) \subseteq E_2$, dunque $|E_1 \cap E_2| - |E_2| \leq 0$. Infine

$$E_1 \setminus E_2 \subseteq (E_1 \setminus E_3) \cup (E_3 \setminus E_2),$$

dunque

$$|E_1 \setminus E_2| \leq |(E_1 \setminus E_3) \cup (E_3 \setminus E_2)| \leq |E_1 \setminus E_3| + |E_3 \setminus E_2|.$$

□

Nello spazio metrico cosí individuato, posso dunque definire il perimetro P come l'inviluppo semicontinuo inferiore della suddetta funzione H .

In generale, dato un $A \subseteq \mathbb{R}^n$ con $\mathcal{H}^{n-1}(\partial A)$ ben definito e non nullo, si puó affermare che $P(A) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial A)$, ma è necessaria una precisazione. Consideriamo, in \mathbb{R}^2 , un cerchio C e un insieme C' costituito dall'unione tra un cerchio congruente a C e un segmento non in esso contenuto. Poiché il segmento ha misura nulla in \mathbb{R}^2 , C e C' coincidono nella topologia sopra indicata; ma allora, poiché P è definita in essa, $P(C) = P(C')$; mentre intuitivamente, e secondo Hausdorff, poiché $\partial C'$ è dato dall'unione tra ∂C e un segmento, esso è piú lungo. Dunque questa definizione di perimetro, che è uguale per insiemi coincidenti quasi ovunque P , non corrisponde con quella precedentemente data, su cui bisogna operare un cambiamento.

Definizione 5 *Se per un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e per un punto $x \in \mathbb{R}^n$, è ben definito il limite*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(B_\epsilon(x) \cap E)}{\mathcal{L}^n(B_\epsilon(x))}$$

(ove $B_\epsilon(x)$ è la bolla di centro x e raggio ϵ), diciamo che esso è la densità (n -dimensionale) di E in x , e lo indichiamo con

$$\Theta(E, x).$$

Diremo che x è punto di Lebesgue di E se $\Theta(E, x)$ è ben definito ed è 1.

Un risultato importante, che non dimostriamo, è il seguente.

Teorema 1 (Lebesgue) *Dato un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile, l'insieme dei punti di \mathbb{R}^n che rispetto ad E hanno densità Θ diversa sia da 0 che da 1 ha misura nulla*

Questa è in effetti un caso particolare del Teorema di Lebesgue, che si puó trovare in [4]; a partire da esso si potrebbe dimostrare la seguente proposizione.

Proposizione 6 Dato un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile, l'insieme E^* dei suoi punti di Lebesgue ha distanza nulla da E , ovvero $\mathcal{L}^n(E \Delta E^*) = 0$.

Definizione 6 Chiameremo l'insieme dei punti a densità 1 $E_{(1)}$, e quello dei punti a densità 0 $E_{(0)}$.

$$E_{(1)} = \{x | \Theta(E, x) = 1\};$$

$$E_{(0)} = \{x | \Theta(E, x) = 0\}.$$

Inoltre definiamo come frontiera essenziale di E , $\partial_* E$, l'insieme

$$\mathbb{R}^n \setminus (E_{(1)} \cup E_{(2)}).$$

Dal Teorema di Lebesgue, deriva evidentemente che, per un qualsiasi E misurabile, $|\partial_* E| = 0$.

Per definizione, se x è interno, per ϵ sufficientemente piccolo, $B_\epsilon(x) \cap E = B_\epsilon(x)$ e dunque la densità nel punto è 1; se x è esterno, per definizione esiste ϵ tale che $B_\epsilon(x) \cap E = \emptyset$, e dunque il limite è 0. Ne segue $\partial_* E \subseteq \partial E$. Se a un insieme E si toglie o si aggiunge un altro insieme di misura nulla, ottenendo E' , la misura dei suoi sottoinsiemi non cambia, e quindi la densità Θ di un qualsiasi punto P è uguale in E e in E' ; quindi E e E' hanno la stessa frontiera essenziale. Dunque, nell'esempio di cui sopra, la frontiera essenziale di C' è la stessa di C : in effetti essa coincide con il bordo di C , ovvero una circonferenza, mentre la parte “sporgente” del segmento non ne fa parte. Più in generale, il perimetro di un insieme non comprende nel calcolo eventuali parti “sporgenti” del bordo. In generale, si può dimostrare che

Proposizione 7 Per un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che $\partial_* E$ ha $(n - 1)$ -misura di Hausdorff ben definita e non nulla, $P(E) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial_* E)$.

Per questo risultato si può consultare [1]. Ciò vale anche per gli insiemi la cui frontiera è una poliedrale, ovvero un'unione finita di poliedri (intersezioni e unioni limitate di un numero finito di iperpiani), e dunque limitati.

Per definizione di misurabilità, per ogni insieme misurabile E e per ogni ϵ , esiste un aperto E' che, nella metrica sopra introdotta, dista meno di ϵ da E ; ed esiste a sua volta un'unione finita di intervalli E'' che dista meno di ϵ da E' , e dunque meno di 2ϵ da E . Poiché tali unioni di intervalli hanno sempre una poliedrale per frontiera, si ha che gli insiemi che hanno le poliedrali per frontiera sono densi nella topologia suddetta.

2.3 Proprietá dei convessi in \mathbb{R}^2

Consideriamo i convessi limitati; mostreremo una serie di proprietá di tali insiemi.

Ricordiamo la definizione di convesso.

Definizione 7 *Un insieme C si dice convesso se, dati due punti $P, Q \in C$, il segmento compreso tra P e Q è contenuto in C .*

Da ciò è facile ricavare un lemma.

Lemma 1 *Dato un convesso $C \subseteq \mathbb{R}^n$ e $n + 1$ punti $P_1, \dots, P_{n+1} \in C$, il simpleso che ha tali punti per vertici è contenuto in C .*

Dimostrazione. Si può fare per induzione su n . Nel caso 1-dimensionale è vero per la definizione di convessità. Se l'enunciato è vero per n , si prendono i primi n punti, che formano un simpleso contenuto in un iperpiano che interseca C in un convesso, al quale gli n punti e il $(n - 1)$ -simpleso appartengono: tutti i punti del n -simpleso saranno su segmenti compresi tra P_{n+1} e un punto del $(n - 1)$ -simpleso, e quindi compresi in C . \square

Proposizione 8 *In \mathbb{R}^2 siano C un convesso limitato, e r una retta che lo interseca, allora si hanno quattro casi alternativi:*

i) $C \cap r$ è un segmento (chiuso, aperto o aperto da un lato), i cui estremi (che siano in $C \cap r$ o meno) sono in ∂C e costituiscono $r \cap \partial C$, mentre i punti interni si trovano tutti all'interno di C (ovvero non sul bordo);

ii) $C \cap r$ è un segmento proprio (chiuso, aperto o aperto da un lato) che si trova interamente in ∂C , e, in questo caso, C è contenuto in uno dei due semipiani chiusi delimitati da r ;

iii) $C \cap r$ è un punto (ovvero un segmento improprio) ed è in ∂C ;

iv) $C \cap r$ è vuoto.

Dimostrazione. Poiché C è limitato e convesso, e r è un convesso, $C \cap r$ è un convesso limitato (l'intersezione di convessi è convessa, e il sottoinsieme di un limitato è ovviamente limitato); dunque sarà un vuoto (caso iv), e in questo caso l'intersezione con ∂C avrà al massimo un punto) o un segmento, proprio o improprio (caso iii); escludiamo il caso iv). Essendo $C \cap r$ non vuota, è un segmento che ammette due estremi, non necessariamente contenuti in esso, P e Q , che saranno evidentemente su ∂C ; se $P = Q$, il segmento è improprio, coincide con P e Q e si trova su ∂C . Supponiamo che $P \neq Q$.

Supponiamo che C sia contenuto in uno dei due semipiani delimitati dalla retta per P e Q . Allora è evidente che il segmento, sulla retta, sarà del tutto

contenuto in ∂C , e si dá il caso ii). Supponiamo che C non sia contenuto in nessuno dei due semipiani chiusi. Dunque, in entrambi i semipiani aperti delimitati da r vi è un qualche punto di C ; siano, in particolare R_1 e R_2 due punti che si trovano ognuno in un diverso semipiano aperto. Allora i triangoli definiti da P, Q, R_1 e P, Q, R_2 saranno non degeneri e, per il Lemma 1, compresi in C ; il segmento PQ sarà una diagonale del quadrilatero non degenero PR_1QR_2 , e i punti a esso interni saranno interni al quadrilatero, compreso in C , e quindi interni (non sulla frontiera) a C ; anche in questo caso, comunque, P e Q saranno sulla frontiera di C . Resta da dimostrare che non ci sono altri punti di $\partial C \cap r$, a parte P e Q . Supponiamo per assurdo che non sia così. Allora, sia S un tal punto, che supponiamo essere dal lato di P , rispetto al segmento. Nel quadrilatero PR_1QR_2 , vi sono due punti T_1 e T_2 di C che si trovano uno in PQR_1 e l'altro in PQR_2 , e quindi sono opposti rispetto a r , e tali che il triangolo ST_1T_2 abbia P all'interno. Allora, poiché S è in ∂C , vi sarà un $V \in C$ così vicino a S che VT_1T_2 , triangolo in C conterrà P internamente: ma allora P sarà un punto interno di C , e non in ∂C ; quindi si ha un assurdo. \square

Corollario 2 *In \mathbb{R}^n siano C un convesso limitato e r una retta che lo interseca, allora si hanno quattro casi alternativi:*

i) $C \cap r$ è un segmento (chiuso, aperto o aperto da un lato), i cui estremi (che siano in $C \cap r$ o meno) sono in ∂C e costituiscono $r \cap \partial C$, mentre i punti interni si trovano tutti all'interno di C (ovvero non sul bordo);

ii) $C \cap r$ è un segmento proprio (chiuso, aperto o aperto da un lato) che si trova interamente in ∂C , e, in questo caso, C è contenuto in uno dei due semipiani chiusi delimitati da r ;

iii) $C \cap r$ è un punto (ovvero un segmento improprio) ed è in ∂C ;

iv) $C \cap r$ è vuoto.

Dimostrazione. Si consideri un piano per r ; esso interseca C in un convesso C' , e $r \cap C = r \cap C'$, a cui si può applicare la Proposizione 8, ottenendo l'enunciato. Bisogna solo dimostrare che, nel caso i), i punti P e Q che delimitano il segmento sono gli unici punti di $\partial C \cap r$.

Se per assurdo non è così, consideriamo un punto S di $\partial C \cap r$, e supponiamo sia dal lato di P ; consideriamo poi un punto T interno al segmento PQ , dunque interno a C : deve esistere un intorno di T in C , e quindi n punti T_1, \dots, T_n di C tali che il n -simpleso da essi definito comprende T : allora il simpleso definito da essi e S ha P all'interno. Poiché $S \in \partial C$, vi deve essere un punto T_{n+1} di C sufficientemente vicino a S , per cui il simpleso definito da T_1, \dots, T_{n+1} , contenuto in C , abbia P all'interno, per cui P sarebbe interno a C , e non su ∂C . \square

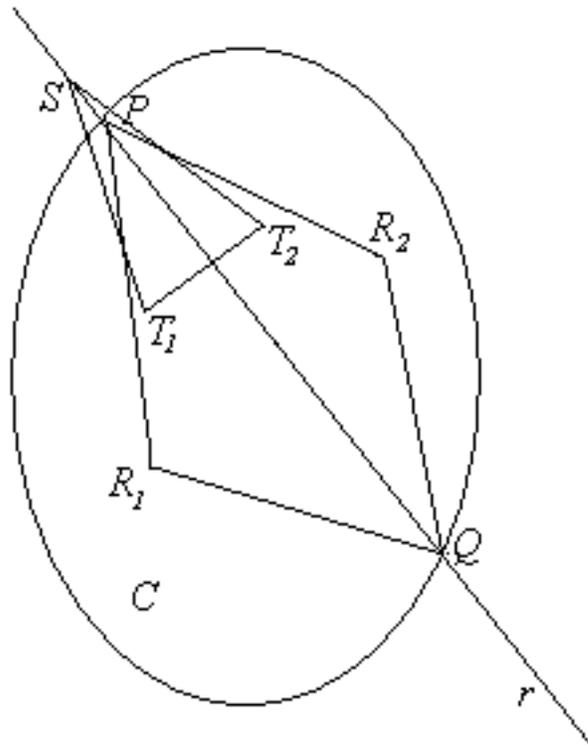


Figura 2.1: Proposizione 8

Corollario 3 *Dato un punto P interno a un convesso C (diverso da un segmento), e una qualsiasi semiretta s che lo ha per origine, essa interseca ∂C in uno e un solo punto.*

Dimostrazione. Se consideriamo la retta r per P che prolunga s dal lato opposto, sappiamo che la sua intersezione con C sarà un segmento, compreso in ∂C per intero o esclusivamente negli estremi; poiché si ha P che è in tale intersezione ma è interno a C , ne segue che siamo nel caso i) della Proposizione 8. Quindi sulla retta si trovano esattamente due punti di ∂C , tra i quali è compreso P , e uno solo di essi si trova su s . \square

Per il Corollario 3, se prendiamo un punto interno a un convesso $C \subseteq \mathbb{R}^2$, e tracciamo una semiretta da esso, questa intersecherà ∂C in esattamente un punto. Ora, variando l'angolo θ che esprime l'inclinazione della retta da 0 a 2π , otteniamo tutti i punti di ∂C una sola volta. Quindi ∂C può essere vista come il sostegno di una curva chiusa, $\gamma(\theta)$; inoltre, se a ogni θ associamo la distanza del punto di intersezione dal centro, otteniamo una funzione reale f di variabile

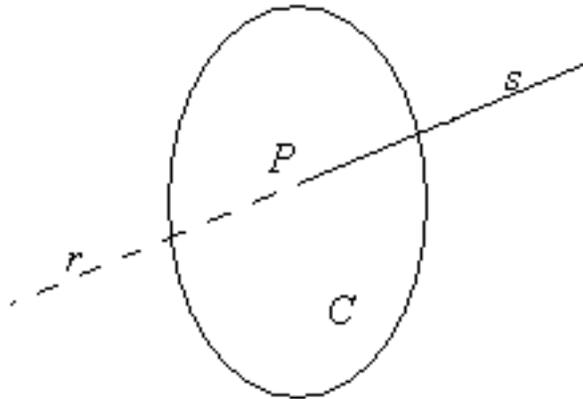


Figura 2.2: Corollario 3

reale definita in $[0, 2\pi]$, con $f(0) = f(2\pi)$. Si ha che $\gamma(\theta) = f(\theta)(\cos(\theta), \sin(\theta))$ e $f(\theta) = |\gamma(\theta)|$. Quindi, a ogni convesso suddetto, dato un punto interno, si puó associare una curva γ e una funzione positiva f . Viceversa, a ogni funzione f definita in $[0, 2\pi]$ con $f(0) = f(2\pi)$ si associa una curva chiusa $\gamma = f(\theta)(\cos(\theta), \sin(\theta))$, e un insieme C di cui γ parametrizza il bordo, formato da tutti i punti compresi in un segmento che ha per vertici punti di γ .

Proposizione 9 *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione concava. Tale funzione è continua, derivabile a destra e a sinistra in ogni punto, e tale che:*

$$\begin{aligned} \forall x_1, x_2, x_3 \in [a, b], \quad x_1 < x_2 < x_3, \\ \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} &\geq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}, \\ \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} &\geq \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3}, \\ \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} &\geq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}, \\ \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} &\geq f'^-(x_2) \geq f'^+(x_2) \geq \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3}, \\ f'^+(x_1) &\geq f'^-(x_2). \end{aligned}$$

In ogni punto sono definite le tangenti destra e sinistra, tali da formare verso il basso un angolo non concavo, all'interno del quale è compreso tutto il grafico di

f . Inoltre f è derivabile quasi ovunque, e, in ogni $[a_1, b_1] \subset (a, b)$, è localmente Lipschitziana con costante di Lipschitz

$$\lambda = \frac{\max_{[a,b]} 2|f'|}{\min\{a_1 - a, b - b_1\}},$$

ovvero, per ogni $x_1, x_2 \in [a_1, b_1]$,

$$\left| \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| \leq \lambda.$$

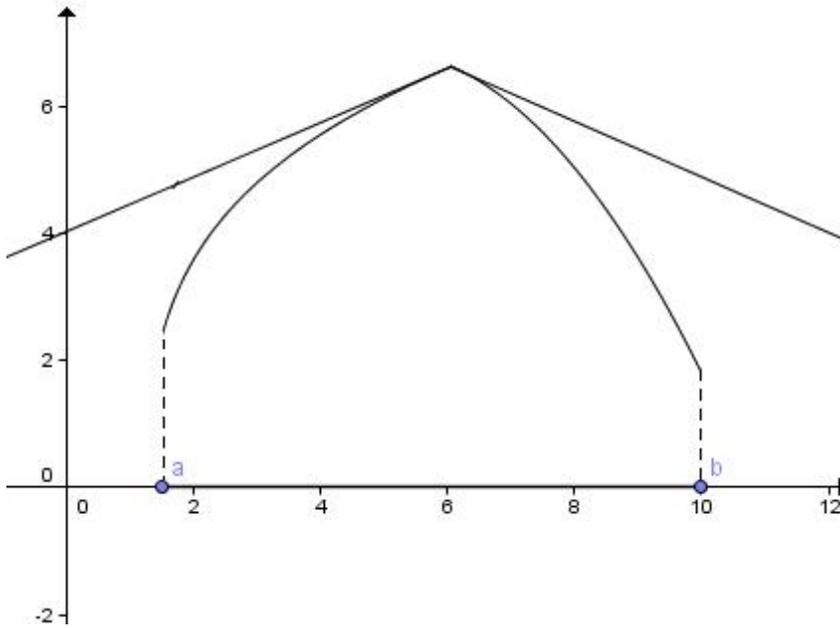


Figura 2.3: Le tangenti formano un angolo in cui il grafico è compreso

Sia $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa. Tale funzione è continua, derivabile a destra e a sinistra in ogni punto, e tale che:

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in [a, b], \quad x_1 < x_2 < x_3,$$

$$\frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{g(x_3) - g(x_1)}{x_3 - x_1},$$

$$\frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{g(x_2) - g(x_3)}{x_2 - x_3},$$

$$\frac{g(x_3) - g(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{g(x_3) - g(x_2)}{x_3 - x_2},$$

$$\frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} \leq g'^-(x_2) \leq g'^+(x_2) \leq \frac{g(x_2) - g(x_3)}{x_2 - x_3},$$

$$g'^+(x_1) \leq g'^-(x_2).$$

In ogni punto sono definite le tangenti destra e sinistra, tali da formare verso l'alto un angolo non concavo, all'interno del quale è compreso tutto il grafico di g . Inoltre g è derivabile quasi ovunque, e, in ogni $[a_1, b_1] \subset (a, b)$, è localmente Lipschitziana con costante di Lipschitz

$$\lambda = \frac{\max_{[a,b]} 2|g|}{\min\{a_1 - a, b - b_1\}},$$

ovvero, per ogni $x_1, x_2 \in [a_1, b_1]$,

$$\left| \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} \right| \leq \lambda.$$

Dimostrazione. Data la definizione di concavità, per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$ e $h \in [0, 1]$,

$$f(hx_1 + (1-h)x_2) \geq hf(x_1) + (1-h)f(x_2).$$

Se ora consideriamo 3 punti nell'intervallo, $x_1 < x_2 < x_3$, e quindi con $0 < x_3 - x_2 < x_3 - x_1$, allora possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_2 \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{x_2 x_3 - x_2 x_1}{x_3 - x_1} = x_1 \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} + x_3 \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \\ &= x_1 \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} + x_3 \frac{x_3 - x_1 - (x_3 - x_2)}{x_3 - x_1} = x_1 h + x_3 (1 - h) \end{aligned}$$

ove

$$0 < h = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} < 1.$$

Di conseguenza, per concavità $f(x_2) \geq hf(x_1) + (1-h)f(x_3)$ ossia

$$f(x_2)(x_3 - x_1) \geq f(x_1)(x_3 - x_2) + f(x_3)(x_2 - x_1).$$

Da cui segue

$$-f(x_1)(x_3 - x_2) \geq f(x_2)(x_1 - x_3) + f(x_3)(x_2 - x_1).$$

Da ciò segue che il rapporto incrementale per x, y decresce al crescere sia di x che di y :

$$\begin{aligned}
\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} &= \frac{f(x_2)(x_3 - x_1) - f(x_1)(x_3 - x_1)}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)} \geq \\
&\geq \frac{f(x_3)(x_2 - x_1) - f(x_1)((x_3 - x_1) - (x_3 - x_2))}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)} = \\
&= \frac{f(x_3)(x_2 - x_1) - f(x_1)(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)} = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} &= \frac{f(x_2)(x_3 - x_2) - f(x_1)(x_3 - x_2)}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)} \geq \\
&\geq \frac{f(x_2)(x_3 - x_2 + x_1 - x_3) + f(x_3)(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)} = \\
&= \frac{f(x_2)(x_1 - x_2) - f(x_3)(x_1 - x_2)}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)} = \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} &= \frac{f(x_3)(x_3 - x_2) - f(x_1)(x_3 - x_2)}{(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)} \geq \\
&\geq \frac{f(x_3)(x_3 - x_2 + x_2 - x_1) + f(x_2)(x_1 - x_3)}{(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)} = \\
&= \frac{f(x_3)(x_3 - x_1) - f(x_2)(x_3 - x_1)}{(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)} = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.
\end{aligned}$$

Poiché il rapporto incrementale risulta crescente, si ha che, dato un punto x , il rapporto incrementale destro $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ cresce al decrescere di h , e quindi ammette limite (derivata destra, f'^+) coincidente con il sup, e il rapporto incrementale sinistro $\frac{f(x-h)-f(x)}{h}$ decresce al decrescere di h , e quindi ammette limite (derivata sinistra, f'^-) coincidente con l'inf; è chiaro che la derivata destra sarà non superiore alla derivata sinistra (poiché i rapporti incrementali destri sono tutti non superiori ai rapporti incrementali sinistri per un punto).

Dati x e y , con $x < y$, esiste sempre z compreso tra x e y , quindi si può sempre scrivere

$$f'^-(y) \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq f'^+(x).$$

Graficamente, è definita in ogni punto x una tangente destra che risulta al di sopra di tutti i punti a destra di x (poiché il rapporto incrementale rispetto a x è inferiore al coefficiente angolare della retta) e una tangente sinistra al di sopra di tutti i punti a sinistra di x (poiché il rapporto incrementale rispetto a x è superiore al coefficiente angolare della retta).

In conclusione, in ogni punto sono definite una derivata sinistra, e una derivata destra inferiore o uguale alla precedente, e in generale la derivata è decrescente. Poiché la derivata destra è inferiore o uguale alla derivata sinistra, l'angolo che le tangenti formano, nel punto suddetto, verso il basso, è convesso, e in esso si trova compreso tutto il grafico di f . La derivata sinistra in un punto x è il limite sinistro delle derivate, destre e sinistre, in x . Infatti, per definizione di derivata sinistra e per quanto detto, deve esistere un punto $y < x$ tale che $f'^-(x) \leq \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq f'^-(x) + \epsilon$; inoltre, sia $g(z) = \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$ il rapporto incrementale rispetto a z e y ; poiché f è continua, g è ben definita e continua in ogni punto tranne y , e, per quanto detto, è decrescente; in particolare esiste x' , con $y < x' < x$, tale che

$$g(x) \leq g(x') \leq g(x) + \epsilon$$

e quindi per ogni z tale che $x' < z < x$, si ha

$$\frac{f(y) - f(z)}{y - z} \leq g(x') \leq g(x) + \epsilon = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} + \epsilon \leq f'^-(x) + 2\epsilon$$

e quindi, poiché $y < x' < z < x$

$$\begin{aligned} f'^-(x) &\leq \frac{f(x) - f(z)}{x - z} \leq f'^+(z) \leq f'^-(z) \leq \\ &\leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y} \leq f'^-(x) + 2\epsilon. \end{aligned}$$

Dunque, in effetti il limite sinistro delle derivate è la derivata sinistra, ed equivalentemente per la derivata destra. Tra le conseguenze, si ha che le derivate destre e sinistre devono essere finite in tutti i punti, a eccezione della derivata destra in a (estremo sinistro del dominio di f) che può essere $+\infty$ e della derivata sinistra in b (estremo destro del dominio) che può essere $-\infty$: infatti, preso un punto p interno, un suo qualsiasi rapporto incrementale destro e uno sinistro, essi sono ovviamente finiti, e le derivate destre e sinistre sono comprese tra essi, e quindi finite. f è Lipschitziana in ogni intervallo strettamente compreso in (a, b) : infatti il rapporto incrementale per due punti in un

intervallo $[a_1, b_1] \subseteq (a, b)$ è sempre compreso tra la derivata sinistra in b_1 e la derivata destra in a_1 . Come costante di Lipschitz si può prendere

$$\max\{|f^+(a_1)|, |f^-(b_1)|\} \leq \max\{|f^-(a_1)|, |f^+(b_1)|\} \leq \frac{\max_{[a,b]} 2|f|}{\min\{a_1 - a, b - b_1\}}.$$

Ora, se a ogni x associamo $g(x) = f^-(x)$ otteniamo una funzione sempre crescente, definita in un intervallo, e dunque continua quasi ovunque; per quanto detto, poiché $f^-(x) \geq f^+(x) \geq f^-(t)$ se $t > x$, allora se $f^-(x) = \lim_{t \rightarrow x^+} f^-(t) = f^+(t)$ ne segue $f^+(x) = f^-(x) = f'(x)$; ovvero i punti di continuità di g sono punti in cui è definita la derivata di f , e quindi f è derivabile quasi ovunque.

è chiaro che quanto detto, opportunamente invertito, vale anche per una funzione concava. \square

Sia dato un convesso $C \subseteq \mathbb{R}^2$, diverso da un segmento; se è limitato, possiamo trovare, data una qualsiasi direzione, per considerazioni di continuità, due rette distinte s e t tangenti a C , aventi quella direzione (e quindi tra loro parallele) e tali che C sia compreso tra loro. è chiaro che una parte di ∂C si trova sulle rette stesse: potrebbe trattarsi, per la Proposizione 8, di un punto singolo o di un segmento, quindi, in entrambi i casi, di un tratto di curva. Sia a la distanza tra le rette suddette. Per ogni $x \in [0, a]$, sia r_x la retta parallela alle due suddette, tra esse compresa, e distante x da s ; evidentemente l'intersezione tra r_x e C non sarà vuota (dato $P \in C \cap s$ e $Q \in C \cap t$, il segmento PQ sarà in C , e dovrà necessariamente intersecare r_x) e, poiché C non sarà 'tutto da una parte' rispetto a r_x , ci troviamo nel caso i) della Proposizione 8; quindi l'intersezione di r_x con ∂C sarà formata da uno o due punti, tra i quali sarà compresa $C \cap r_x$. Fissiamo ora un riferimento cartesiano, con s come asse y , e asse x scelto come una retta ortogonale a s e t , e tale che t si trovi a destra di s ; se in $[0, a]$ si definisce $\gamma_1(x)$ come l'estremo inferiore di $C \cap r_x$ e $\gamma_2(x)$ come l'estremo superiore, avremo ottenuto due curve il cui sostegno, per quanto detto, unite ai tratti su s e t , daranno tutto ∂C ; inoltre saranno continue (perché ∂C è connesso); e C sarà di fatto compresa tra i quattro tratti di curva: s la delimiterà a sinistra, t a destra, γ_1 sotto e γ_2 sopra. A partire da questa costruzione enunciamo la proposizione seguente.

Proposizione 10 *Dato un convesso $C \subseteq \mathbb{R}^2$, diverso da un segmento, e una direzione, vi sono due rette tangenti parallele s e t , aventi tale direzione, che delimitano C , distanti tra loro a , tali che il bordo di ∂C può essere visto come l'unione di un segmento di s , un segmento di t , e due grafici di funzioni f_1 e f_2 definiti in $[0, a]$, in un sistema di riferimento avente s come asse delle ordinate. Dalla successione di queste curve (il segmento su s , il grafico di f_1 ,*

il segmento di t , il grafico di f_2) si ottiene una curva iniettiva chiusa γ il cui sostegno è ∂C , con queste proprietà

i) il grafico di γ ammette la tangente destra e sinistra in ogni punto P , e C si trova interamente da una parte rispetto ad entrambe;

ii) le due tangenti coincidono quasi ovunque, ovvero γ è derivabile quasi ovunque;

iii) l'angolo che le tangenti formano, nel punto suddetto, verso la figura, è convesso, e C è compreso in esso;

iv) il coefficiente angolare della tangente destra è il limite destro dei coefficienti delle tangenti, e quello della tangente sinistra è il limite sinistro.

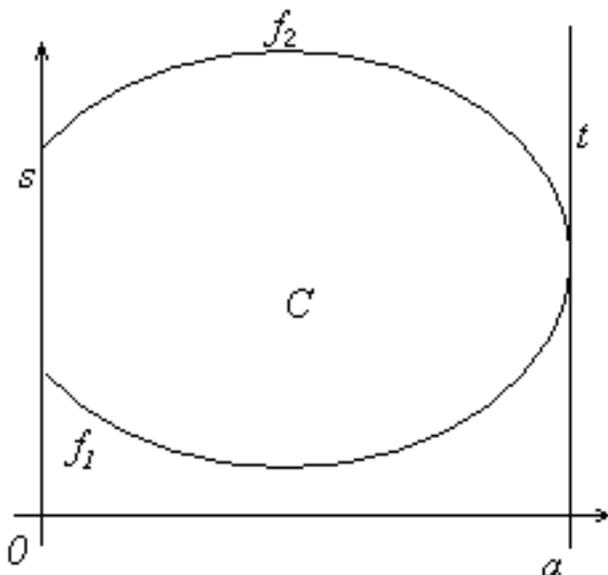


Figura 2.4: Proposizione 10

Dimostrazione. Data la definizione di γ_1 , è evidente che, per ogni $x \in [0, a]$, $\gamma_1(x)$ ha ascissa x , ovvero il sostegno di γ_1 può essere visto come il grafico di una funzione a valori reali f_1 definita in $[0, a]$: $\gamma_1(x) = (x, f_1(x))$. Allo stesso modo, il sostegno di γ_2 può essere visto come il grafico di una funzione a valori reali f_2 .

La funzione f_2 è concava, data la definizione (infatti ogni punto del segmento compreso tra $(x_1, f_2(x_1))$ e $(x_2, f_2(x_2))$ si troverà all'interno di C , e quindi al di sotto del corrispondente punto di γ_2): per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$ e $h \in [0, 1]$, $f_2(hx_1 + (1-h)x_2) \geq hf_2(x_1) + (1-h)f_2(x_2)$. Allo stesso modo, si dimostra che f_1 è convessa. Quindi vale per f_1 ed f_2 la Proposizione 9; da

cui segue che, nei punti dei loro grafici, vale la proposizione suddetta; è chiaro che anche per i punti dei segmenti in s e t gli enunciati valgono.

Mettendo in successione le quattro curve suddette, otteniamo una curva chiusa γ che, per quanto detto, definisce ∂C , è continua, ed è derivabile quasi ovunque, e per essa vale l'enunciato (è ovvio che vale sulle parti rettilinee su s e t , e vale sui grafici di f_1 e f_2 per la Proposizione 9). \square

Proposizione 11 *Dato un convesso $C \subseteq \mathbb{R}^2$ e un punto P a esso esterno, esiste almeno una retta r per P che non interseca C .*

Dimostrazione. Se C è un punto, è ovvio (è sufficiente prendere l'asse di PC). Se C è un segmento, sia s la retta in cui è posta: se P non è su s , è sufficiente considerare una retta parallela a s , posta tra la retta stessa e P ; se P è su s , è sufficiente prendere una qualsiasi retta per P che non coincida con s .

\square

Sia C diverso da un segmento; esiste allora un suo punto interno Q . Definiamo la direzione di PQ ; per la Proposizione 10, possiamo considerare il sistema di riferimento prima usato, con rette s e t parallele a PQ , di modo che P si trovi al di sopra di C . P ha ascissa x uguale a quella di Q interno, e dunque compresa in $(0, a)$, allora è sufficiente prendere, in x , una delle tangenti t (che evidentemente non sono mai parallele all'asse y , e quindi non toccano P , e ne sono al di sotto) al grafico di f_2 . C è tutto da una parte rispetto a r , e quindi compreso nel semipiano inferiore da esso definito, mentre P è nel semipiano superiore: allora la parallela r a t per P si trova tutta in tale semipiano, e non interseca C .

Lemma 2 *La chiusura di un convesso è un convesso.*

Dimostrazione. Sia C un convesso: dati due punti P e Q della sua chiusura \overline{C} , esistono due successioni di punti $\{P_n\}$ e $\{Q_n\}$ in C che convergono rispettivamente a P e Q : il segmento P_nQ_n è sempre contenuto in C e converge al segmento PQ che è quindi contenuto in \overline{C} . Dunque \overline{C} è convesso. \square

Proposizione 12 *In \mathbb{R}^2 ogni insieme E misurabile il cui bordo è una curva ha area non maggiore del suo involuppo convesso, ma perimetro non minore, per cui ha rapporto r minore o uguale.*

Dimostrazione. Consideriamo ora un insieme qualsiasi E , connesso, misurabile, il cui bordo è una curva continua (e quindi è connesso). Consideriamo il suo involuppo convesso C (ossia il più piccolo convesso contenente E). È

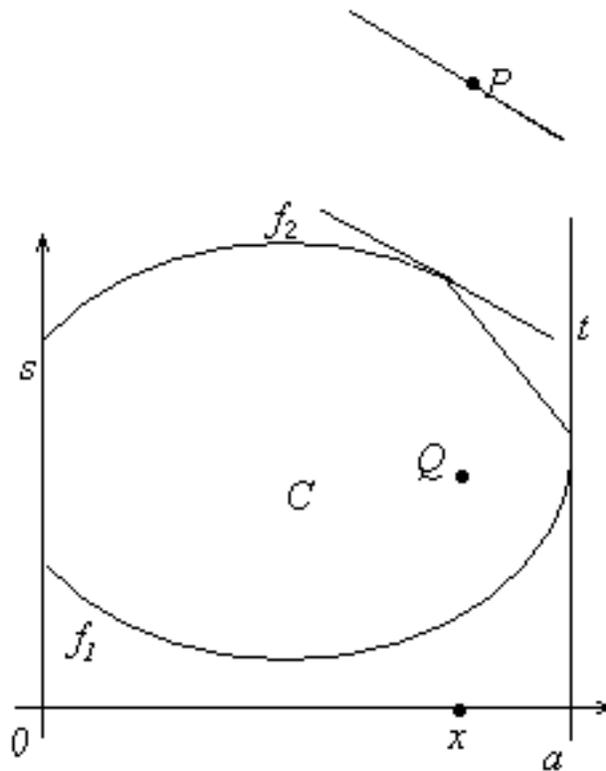


Figura 2.5: Proposizione 11

evidente che l'involuppo convesso ha area maggiore o uguale dell'insieme di partenza. Chiaramente, i bordi di C e E si toccano in qualche punto (altrimenti, con un'omotetia, C potrebbe essere ridotto, continuando a contenere E e rimanendo convesso).

Consideriamo invece, se esiste, $P \in \partial C \setminus \partial E$; dimostreremo che un suo intorno in ∂C deve essere rettilineo. Poiché $P \in \partial C$, non può trovarsi all'interno di E (contenuto nell'interno di C), e dato che C non è neanche in ∂E , non è nella chiusura di E . Quindi deve esistere un disco chiuso $D \subseteq \mathbb{R}^2$, centrato in P , che non interseca la chiusura di E (e quindi non interseca ∂E). Consideriamo $\partial C \cap D$: esso è rappresentabile con un arco di ∂C , o eventualmente con più archi; consideriamo solo l'arco s contenente P (sarà uno solo perché la curva che definisce ∂C è iniettiva). Siano P_1 e P_2 gli estremi di s (ovviamente distinti, sempre per l'iniettività della suddetta curva): si troveranno su $\partial C \cap \partial D$. Sia r la retta per P_1 e P_2 : la chiusura di C , \bar{C} , per il Lemma 2 è un

convesso, e quindi, per la Proposizione 8, $\overline{C} \cap r$, avendo piú di un punto, deve essere un segmento proprio, s_1 .

Per r e C deve valere la Proposizione 8, e uno dei suoi quattro punti. Se valgono ii), iii) o iv), ne segue che il segmento s_1 non ha punti interni a C , quindi è tutto in ∂C , e dunque costituisce l'arco s .

Se, per assurdo, vale i), poiché P_1 e P_2 sono in $\partial C \cap r$, ne segue che sono gli estremi del segmento in cui consiste $C \cap r$; dunque la retta r non tocca C al di fuori di D , e quindi neanche $E \subseteq C$; inoltre non tocca E in D , poiché $D \cap E$ è vuoto. Quindi, E è contenuto in uno dei semipiani S definiti da r ; dunque $C \cap S$ contiene E , ed è ovviamente convesso (perché intersezione di due convessi). Poiché C è il piú piccolo convesso contenente E , e $C \cap S \subseteq C$, ne segue che $C \cap S = C$, ovvero $C \subseteq S$; quindi il segmento P_1P_2 , poiché ha i punti interni in C e si trova sul bordo di s , deve essere in ∂C , e vale il caso i).

Quindi, poiché $P \in s$, e s è un segmento proprio, si può dire che P è contenuto in una parte rettilinea di ∂C .

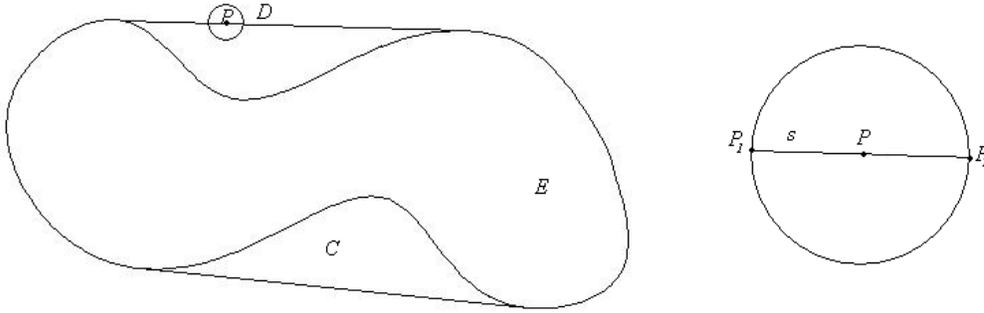


Figura 2.6: Inviluppo convesso e ingrandimento del suo bordo

Abbiamo quindi dimostrato che $\partial C \setminus \partial E$ è localmente rettilineo. Se consideriamo ∂C e ∂E , possiamo allora considerare: $\partial C \cap \partial E$, che ovviamente hanno la stessa lunghezza sia in C che in E ; i vari archi connessi di $\partial C \setminus \partial E$ e di $\partial E \setminus \partial C$. È chiaro che tali archi sono associabili a coppie: per ogni arco di $\partial C \setminus \partial E$, che comincia in un punto P e finisce in un punto Q , con $P, Q \in \partial C \cap \partial E$, si ha un corrispondente arco di $\partial E \setminus \partial C$, che comincia in P e finisce in Q , o viceversa; ma poiché $\partial C \setminus \partial E$ è localmente rettilineo, l'arco suddetto è un segmento, e quindi il piú breve arco tra P e Q , di lunghezza inferiore a quello di $\partial E \setminus \partial C$. Quindi la lunghezza complessiva di $\partial C \setminus \partial E$ è minore o uguale a quella di $\partial E \setminus \partial C$.

In conclusione,

$$l(\partial C) = l(\partial C \cap \partial E) + l(\partial C \setminus \partial E) \leq l(\partial C \cap \partial E) + l(\partial E \setminus \partial C) = l(\partial E). \square$$

Osservazione In \mathbb{R}^n , per $n \geq 3$, non è detto che il perimetro dell'involuppo convesso sia inferiore a quello dell'insieme di partenza: per esempio non è così per un toro sufficientemente sottile ma di largo raggio interno. L'involuppo convesso ha superficie pari almeno al doppio del cerchio che ha raggio uguale al raggio interno, ma assottigliando il diametro, la superficie del toro può essere diminuita a piacere.

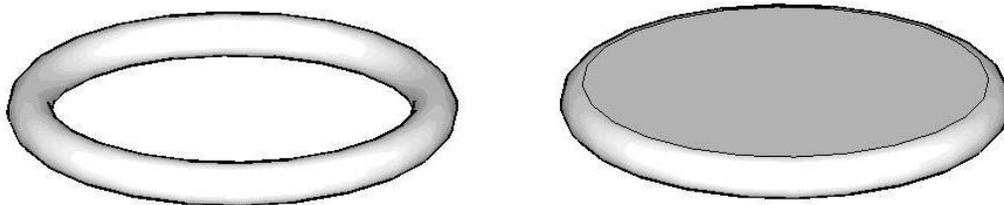


Figura 2.7: Toro e suo involuppo convesso

Invece, per quanto visto, in \mathbb{R}^2 possiamo restringere il problema isoperimetrico ai soli convessi.

2.4 Proprietá dei convessi in \mathbb{R}^n

Per una esposizione dettagliata delle proprietá dei convessi si veda [7]. Sia C un convesso in \mathbb{R}^{n+1} , e consideriamo un iperpiano H , a n dimensioni. Sia D la proiezione di C su H , ovvero l'insieme di punti che sono proiezione su H di qualche punto di C . Anche D sará convesso: infatti, dati due punti di D , x_1 e x_2 , proiezione di due punti di C , y_1 e y_2 , il segmento compreso tra y_1 e y_2 sará in C e quindi il suo proiettato sará in D , e coinciderá con il segmento di estremi x_1 e x_2 . A ogni punto x di D si può associare l'insieme di punti di C di cui x è la proiezione, ovvero dell'intersezione tra la retta per x ortogonale a H e C ; per quanto visto, si tratterá di un segmento i cui estremi si trovano su ∂C . Posso allora definire due funzioni Ψ_1 e Ψ_2 su D , ove, per ogni $x \in D$, $\Psi_1(x)$ sia l'estremo inferiore del segmento suddetto, e $\Psi_2(x)$ sia l'estremo superiore (avendo definito sull'ortogonale ad H un verso, in base al quale distinguere tra superiore e inferiore sui segmenti ad essa paralleli). C è dunque compreso tra i grafici di Ψ_1 e Ψ_2 ; inoltre, per definizione, Ψ_1 è convesso e Ψ_2 è concavo.

Osservazione. La concavitá per una funzione f in \mathbb{R}^n si esprime anche cosí: se $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$, $\lambda_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, allora $f(x) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$.

Proposizione 13 *Una funzione a valori reali Ψ definita in un compatto $D \subseteq H$, convessa o concava, è localmente Lipschitziana in ogni sottoinsieme C interno di D .*

Dimostrazione. Dato un x interno a D , consideriamo una bolla chiusa B interna a D , contenente x : dimostreremo che Ψ è Lipschitziana in B . Consideriamo due punti qualsiasi x e y di B . Se consideriamo la retta r per x e y , Ψ ristretto a r è una funzione concava (o convessa) f_r ; f_r , in ogni intervallo $[a_0, b_0] \subseteq (a, b)$, per la Proposizione 9 è localmente Lipschitziana con costante

$$\frac{\max_{[a,b]} 2|f_r|}{\min\{a_1 - a, b - b_1\}}.$$

Nel nostro caso, su r , $[a, b]$ è l'intersezione di r con D (con $\{a, b\} = r \cap \partial D$); allora si può considerare come $[a_1, b_1]$ l'intersezione tra B e r (con $\{a_1, b_1\} = r \cap \partial B$); essa infatti è un segmento strettamente contenuto in (a, b) . Quindi, in tale intervallo, si può attribuire a f la costante di Lipschitz scritta sopra. Dunque, si può scrivere

$$\frac{\Psi(x) - \Psi(y)}{d(x, y)} = \frac{f_r(x) - f_r(y)}{d(x, y)} \leq \frac{\max_{[a,b]} 2|f_r|}{\min\{a_1 - a, b - b_1\}} = \lambda_r.$$

In generale, si può dire che la distanza minima tra a_1 e a e tra b e b_1 è maggiore o uguale alla distanza minima tra B e ∂D , e tale distanza è non nulla perché B è all'interno di D ed è compatto (quindi deve esistere un punto x di B a distanza minima da ∂D , non nulla, perché x interno a D); viceversa, è chiaro che

$$\max_{[a,b]} |f_r| \leq \max_D |\Psi|,$$

per ogni r . Dunque la costante di Lipschitz di cui sopra, su ogni sezione $r \cap B$, in B , è sempre inferiore a

$$\lambda = \frac{\max_D 2|\Psi|}{d(C, \partial D)}.$$

Quindi

$$\frac{\Psi(x) - \Psi(y)}{d(x, y)} \leq \lambda.$$

Quindi λ limita tutti i rapporti incrementali in B , ovvero è una costante di Lipschitz in B . \square

Proposizione 14 *Sia Ψ funzione o convessa, definita in $D \subseteq \mathbb{R}^n$; essa è continua, e differenziabile quasi ovunque.*

Dimostrazione. Lo dimostriamo solo per nel caso concavo, Ψ ; se Ψ è convessa varrà lo stesso: basta osservare che, in tal caso, $-\Psi$ è concavo, dunque per esso vale la proposizione; quindi vale anche per Ψ .

Sappiamo che Ψ è localmente Lipschitziana, e da ciò segue ovviamente la continuità in ogni punto. Consideriamo $x \in D$, e una qualsiasi direzione su D , ovvero una retta r su \mathbb{R}^n per x . È chiaro che Ψ , ristretta a r , è una funzione convessa, quindi, per la Proposizione 9, continua e derivabile quasi ovunque (ossia, quasi ovunque su r , Ψ ammette derivata parziale nella direzione di r). I punti in cui la derivata parziale nella direzione r non sono definiti, formano un insieme in cui tutte le sezioni parallele a r hanno misura nulla; quindi, per il Teorema di Fubini, l'insieme ha complessivamente misura nulla.

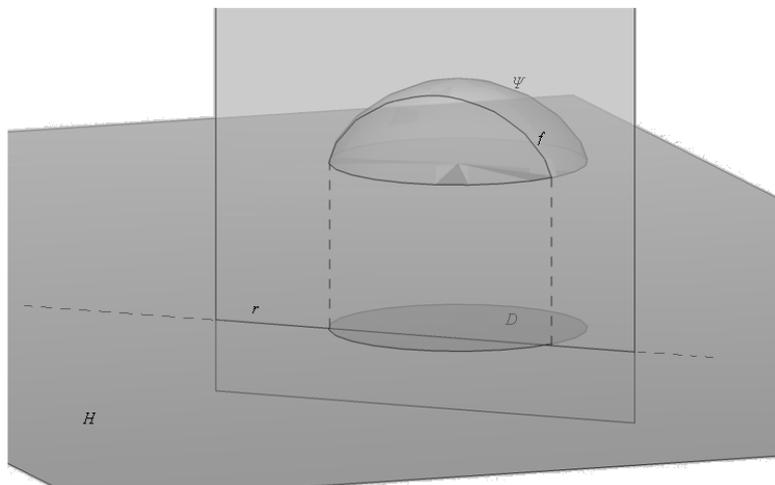


Figura 2.8: Funzione concava ristretta a una retta

Se ora consideriamo le direzioni principali, i punti per i quali una delle derivate principali non è definita costituiscono $\bigcup_{i \in \{1, \dots, n\}} D_i$, ove D_i è l'insieme in cui la i -esima derivata principale non è definita; ma l'unione di una famiglia numerabile di insiemi a misura nulla ha misura nulla. Dunque, per quasi ogni punto di D , sono definite le n derivate principali.

Dimostriamo ora che, se su un punto $x_0 \in D$ esistono n derivate parziali indipendenti di Ψ , esiste il differenziale (quindi, per quanto visto, ψ è differenziabile quasi ovunque). Effettueremo il ragionamento sul traslato di vettore $(-x_0, -\Psi(x_0))$: $F(x) = \Psi(x + x_0) - \Psi(x_0)$; dunque si deve valutare la differenziabilità di F nell'origine O , e $F(O) = 0$. Consideriamo la funzione lineare

$L : \mathbb{R}^n \rightarrow +\infty$, che associa agli n versori associati alle suddette direzioni le n derivate parziali di F ; individuiamo le funzioni di variabile reale

$$f_m(\lambda) = F(\lambda\nu_m) - L(\lambda\nu_m) = F(\lambda\nu_m) - \lambda L(\nu_m) = F(\lambda\nu_m) - \lambda \partial_{\nu_m}(F)$$

(per linearità di L). Per definizione di derivata parziale, f_n sarà un $o(\lambda)$. Consideriamo ora un generico vettore x ; poiché i ν sono indipendenti, si può riscrivere come

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \nu_i = \sum_{i=1}^n \lambda'_i \mu \frac{\lambda_i}{|\lambda_i|} \nu_i$$

ove $\mu = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|$, $\lambda'_i = \frac{|\lambda_i|}{\mu} \geq 0$; dunque $\sum_{i=1}^n \lambda'_i = \sum_{i=1}^n \frac{|\lambda_i|}{\mu} = \frac{\mu}{\mu} = 1$, $\lambda'_i \geq 0$. Poiché F è concava, L è lineare e per quanto sopra, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} F(x) &\geq \sum_{i=1}^n \lambda'_i F\left(\mu \frac{\lambda_i}{|\lambda_i|} \nu_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda'_i L\left(\mu \frac{\lambda_i}{|\lambda_i|} \nu_i\right) + \sum_{i=1}^n \lambda'_i f_i\left(\mu \frac{\lambda_i}{|\lambda_i|}\right) \geq \\ &\geq \sum_{i=1}^n \lambda_i L(\nu_i) - \sum_{i=1}^n \lambda'_i \max\{|f_i(\mu)|, |f_i(-\mu)|\} = L(x) - g(x). \end{aligned}$$

$\lambda'_i = \frac{\lambda_i}{\mu}$, dunque $\lambda'_i f_i(\mu)$ è un $o(\lambda)$; allora $g(x) = \sum_{i=1}^n \lambda'_i \max\{|f_i(\mu)|, |f_i(-\mu)|\}$ è $o(x)$. Con un ragionamento simmetrico posso scrivere $F(-x) \geq L(-x) - g(-x) = -L(x) - g(x)$, poiché L è lineare e g è pari. Allora, poiché $\frac{x-x}{2} = O$, $0 = F(O) \geq \frac{F(x)+F(-x)}{2}$. Dunque $F(x) \leq -F(-x) \leq L(x) + g(x)$. Quindi $|F(x) - L(x)| \leq g(x) = o(x)$. Ovvero F è differenziabile in O , dunque Ψ lo è in x_0 .

Dunque, Ψ è derivabile quasi ovunque. \square

Proposizione 15 *Sia dato un convesso $C \subseteq \mathbb{R}^n$, un iperpiano H , e la proiezione di C su H , detta D . Costruiamo un sistema di riferimento basato su H come iperpiano contenente i primi $(n-1)$ assi, e con un n -esimo asse perpendicolare ad H . ∂C si divide allora in tre parti: il grafico di una funzione convessa $\Psi'_1 : D \setminus \partial D \rightarrow \mathbb{R}$; il grafico della una funzione concava $\Psi'_2 : D \setminus \partial D \rightarrow \mathbb{R}$; la parte che ha proiezione ∂D , formata da un'unione di segmenti perpendicolari ad H . C è nell'intersezione tra il sottografico di Ψ_2 e il sopragrafico di Ψ_1 .*

Dimostrazione. Data una retta ortogonale ad H passante per $x \in D$, per il Corollario 2 essa interseca C in un segmento (non vuoto perché $x \in D$); come prima si possono definire Ψ_1 e Ψ_2 come gli estremi rispettivamente inferiore e superiore di tale segmento. Allora $\Psi_1(x)$ e $\Psi_2(x)$ hanno x come proiezione su H coincidente con x , e quindi, nel suddetto sistema di riferimento, $\Psi_1(x) =$

$(x, \Psi'_1(x))$, e $\Psi_2(x) = (x, \Psi'_2(x))$. Allora il supporto di Ψ_1 e il grafico di Ψ'_1 coincidono, e lo stesso per Ψ_2 e Ψ'_2 .

Inoltre, dati due punti del grafico di Ψ'_1 , il segmento che li ha per estremi è all'interno di C , e quindi al di sotto del grafico di Ψ'_2 , che dunque è una funzione concava; viceversa, dati due punti del grafico di Ψ'_2 , il segmento che li ha per estremi è pure all'interno di C , e quindi al di sopra del grafico di Ψ'_1 , che dunque è una funzione convessa.

Per quanto detto prima, è evidente che le tre parti suddette non si intersecano. L'unica cosa da dimostrare è che un qualsiasi punto P di ∂C è nel grafico di Ψ_1 o di Ψ_2 , o ha proiezione su ∂D . Consideriamo una retta $r \subseteq H$ che passi per la proiezione di P , x : come già visto, esiste un piano bidimensionale passante per la retta e ortogonale ad H , la cui intersezione con C sarà un convesso C' , e per esso vale la Proposizione 10; P è nel bordo di C' , rispetto al piano suddetto. Allora, per la proposizione, P si trova nel grafico di f_1 (che è la restrizione di Ψ_1 a $r \cap D$), nel grafico di f_2 (che è la restrizione di Ψ_2 a $r \cap D$), oppure in un segmento verticale in corrispondenza dell'estremità (e dunque la cui proiezione si trova su ∂D). \square

Non abbiamo considerato i convessi illimitati, perché hanno tutti misura infinita o 0; lo dimostreremo tra breve.

Proposizione 16 *Tutti i convessi hanno chiusura convessa, e interno convesso, e la chiusura e l'interno differiscono dall'insieme di partenza per un insieme di misura nulla.*

La chiusura di un convesso è un convesso, per il Lemma 2. Consideriamo due punti P e Q dell'interno $int(C)$ e la retta r per P e Q , per il Corollario 2 la sua intersezione con C è un segmento (dato che contiene due punti distinti), rispondente al caso i) del corollario (poiché vi sono punti interni), con gli estremi su ∂C e l'interno in $int(C)$. Allora, il segmento PQ si trova nell'interno di tale segmento, e i suoi punti sono tutti interni a PQ ; quindi $int(C)$ è convesso.

Per dimostrare l'ultima parte dell'enunciato, è sufficiente mostrare che ∂C ha misura nulla; lo facciamo per induzione sulla dimensione. Il bordo di un convesso in una dimensione (cioè di un segmento) ha misura 1-dimensionale 0 (essendo formato da 1 o 2 punti). Per quanto visto, ∂C è formato dall'unione di due grafici di funzione in \mathbb{R}^n (che dunque hanno n -misura di Lebesgue 0), e di un insieme la cui proiezione su un piano è il contorno di un convesso in $(n - 1)$ dimensioni; quindi, se l'enunciato è vero in $(n - 1)$ dimensioni, per Fubini, anche la terza parte di ∂C ha misura nulla. Dunque ∂C ha sempre misura nulla. \square

Proposizione 17 *I convessi illimitati hanno misura di Lebesgue infinita o nulla.*

Dimostrazione. Consideriamo un convesso $C \subseteq \mathbb{R}^n$ illimitato e chiuso (per la Proposizione 4 non è restrittivo). Dimostriamo che, in tal caso, contiene almeno una semiretta. Si prende un punto P ; si considera una successione di punti $\{P_n\}$ la cui distanza da P tende all'infinito; i vettori direzione dei P_n rispetto a P sono contenuti in una n -sfera, dunque un compatto, per cui vi è una sottosuccessione che convergerà a una direzione ν . Ciò equivale a dire che vi è una sottosuccessione di $\{P_{n_k}\}$ tali che i segmenti PP_{n_k} convergono in direzione a ν e in lunghezza divergono: per la chiusura di C ciò porta ad affermare che almeno una semiretta con origine in P è contenuta in C .

Ora, se C è contenuto in un iperpiano, ha misura nulla. Se C non ha misura nulla, data una semiretta, deve esistere un iperpiano perpendicolare a essa la cui intersezione D con C ha misura non nulla (altrimenti, per Fubini, C avrebbe misura nulla). Allora, dato un qualsiasi punto Q di r , per convessità, l'ipercono di base D e vertice Q è contenuto in C perché questi è convesso, e ha misura non nulla e tendente all'infinito, per Q che si allontana all'infinito da D . Dunque C ha misura infinita. \square

Lemma 3 *I convessi sono sempre misurabili secondo Lebesgue.*

Dimostrazione. Lo facciamo per induzione sulla dimensione. I convessi in 1 dimensione sono segmenti, quindi misurabili. Ogni convesso è definibile come la parte di spazio compresa tra due grafici continui (e quindi misurabili) definiti su un D , convesso a $(n - 1)$ dimensioni; quindi, se i convessi in $(n - 1)$ dimensioni sono sempre misurabili secondo Lebesgue, lo sono anche quelli in n dimensioni. Quindi, si può affermare che i convessi sono sempre misurabili. \square

Abbiamo visto che, dato un convesso, la sua frontiera è costituita dall'unione di tre superfici. Ψ_1 e Ψ_2 sono localmente Lipschitziane e derivabili quasi ovunque; la parte laterale è un'unione di segmenti paralleli, corrispondenti ai vari punti di D , e la lunghezza dei segmenti varia con continuità su ∂D ; quindi, intuitivamente, si potrebbe affermare la "regolarità" (ovvero l'essere localmente parametrizzabile con una funzione Lipschitziana e derivabile quasi ovunque) delle frontiere dei convessi, sempre per induzione (se la frontiera dei convessi a $(n - 1)$ dimensioni sono sempre regolari, anche la terza parte dei convesso a n dimensioni lo è, ecc...).

Inoltre, si potrebbe dimostrare che la frontiera di un convesso coincide con la frontiera essenziale. Quindi, per quanto detto, il perimetro del convesso è

la somma della misura secondo Hausdorff delle tre parti suddette. Quindi, per la Proposizione 3, tale perimetro è

$$\int_D \sqrt{1 + |\nabla \Psi_1(y)|^2} + \sqrt{1 + |\nabla \Psi_2(y)|^2} dy + \int_{\partial D} l(y) d\mathcal{H}^{n-2}.$$

Proposizione 18 *Se D è un convesso in \mathbb{R}^n , e $\Psi : D \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione concava, il suo sottografico è un convesso; se f è una funzione convessa, il suo sopragrafico è un convesso.*

Dimostrazione. Sia Ψ funzione concava, e P e Q due punti al di sotto del grafico: sia T un punto del segmento PQ . Poiché P e Q hanno le loro proiezioni verticali P' e Q' in D , che è un convesso, il segmento $P'Q'$ è in D ; dunque la proiezione T' di T , che si trova in $P'Q'$ è in D . Di seguito indicheremo l'ordinata di ogni punto S con S_y . Sappiamo che esiste $\lambda, 0 \leq \lambda \leq 1$, tale che, vettorialmente:

$$T = \lambda P + (1 - \lambda)Q,$$

dunque

$$T' = \lambda P' + (1 - \lambda)Q', \quad T_y = \lambda P_y + (1 - \lambda)Q_y.$$

Per cui, per la concavità di f e poiché P e Q sono nel sottografico (ossia $P_y \leq f(P')$, $Q_y \leq f(Q')$)

$$T_y = \lambda P_y + (1 - \lambda)Q_y \leq \lambda \Psi(P') + (1 - \lambda)\Psi(Q') \leq \Psi(\lambda P' + (1 - \lambda)Q') = \Psi(T').$$

Ovvero T è nel sottografico, che quindi è convesso.

Sia Ψ convessa: allora, effettuando una simmetria rispetto all'iperpiano di base sul sopragrafico, si ottiene il sottografico della funzione $-\Psi$ concava, e dunque convesso. \square

2.5 Altri risultati utili

Dimostriamo e ricordiamo alcuni risultati e definizioni che saranno utili per la risoluzione del problema in \mathbb{R}^n .

Definizione 8 *Diremo che le funzioni f_k definite in un insieme $I \subseteq \mathbb{R}$ sono equilimitate se*

$$\exists M > 0 \text{ tale che } |f_k(x)| \leq M, \forall x \in I, \forall f_k.$$

Definizione 9 Diremo che le funzioni f_k definite in un insieme $I \subseteq \mathbb{R}$ sono equicontinue se

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall x, y \in I, \forall f_k \\ |x - y| < \delta \Rightarrow |f_k(x) - f_k(y)| \leq \epsilon.$$

Definizione 10 Diremo che le funzioni f_k definite in un insieme $I \subseteq \mathbb{R}$ sono equi-Lipschitziane se

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tale che } \frac{|f_k(x) - f_k(y)|}{|x - y|} \leq \lambda, \forall x, y \in I$$

ovvero se sono tutte Lipschitziane per una stessa costante di Lipschitz.

è chiaro che una successione di funzioni equi-Lipschitziane di costante λ è equicontinua: dato ϵ , allora sia $\delta = \frac{\epsilon}{\lambda}$, ne segue

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f_k(x) - f_k(y)| \leq |x - y|\lambda \leq \delta\lambda = \epsilon.$$

Ricordiamo ora il teorema

Teorema 2 (Ascoli-Arzelá) Data una successione f_k di funzioni equicontinue ed equilimitate definite nell'intervallo chiuso e limitato $I \subseteq \mathbb{R}$, esiste una sua sottosuccessione che converge uniformemente a una funzione f .

Questo teorema si può trovare in [5]

Proposizione 19 Data una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, derivabile a destra e a sinistra in ogni punto, se esiste λ tale che $f'^+(x), f'^-(x) \leq \lambda$ per ogni x , allora la funzione è Lipschitziana con costante di Lipschitz λ .

Dimostrazione. In primo luogo, consideriamo tre punti $x_0 < x_1 < x_2$ e il rapporto incrementale tra essi per una certa funzione f ; se, per $\lambda' > 0$:

$$\left| \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| \leq \lambda', \left| \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right| \leq \lambda' \Rightarrow \\ \Rightarrow \left| \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \right| \leq \frac{|f(x_2) - f(x_1)| + |f(x_1) - f(x_0)|}{x_2 - x_0} \leq \\ \leq \frac{\lambda'(x_2 - x_1) + \lambda'(x_1 - x_0)}{x_2 - x_0} = \lambda'.$$

Supponiamo, per assurdo, che esista una funzione f che soddisfi le ipotesi della proposizione ma non la tesi; esistono quindi x, y per cui il rapporto incrementale è maggiore in valore assoluto, di $\lambda + \epsilon$ per qualche ϵ . Se dividiamo l'intervallo $[x, y]$ in due parti uguali, $[x, x_1], [x_1, y]$, per quanto sopra almeno una

delle due deve avere rapporto incrementale maggiore in valore assoluto di $\lambda + \epsilon$. Si sceglie dunque un intervallo con questa proprietà e si ripete il procedimento per esso, e così via, all'infinito. Si ottiene una successione di intervalli chiusi di lunghezza tendente a 0, uno interno all'altro, la cui intersezione infinita consiste in un punto y , e in ogni intervallo il rapporto incrementale risulta superiore a $\lambda + \epsilon$. Allora, suddividendo ogni intervallo $[x_{n_1}, x_{n_2}]$ in $[x_{n_1}, y]$, $[y, x_{n_2}]$ si ha che almeno uno dei due sottointervalli ha rapporto maggiore di $\lambda + \epsilon$; per cui o a destra, o a sinistra, vi sono infiniti sottointervalli in cui il rapporto incrementale è maggiore di $\lambda + \epsilon$, da cui segue che, rispettivamente a destra o a sinistra, la derivata è maggiore o uguale (sempre in valore assoluto) di $\lambda + \epsilon$, e quindi strettamente maggiore di λ ; assurdo. \square

Capitolo 3

Soluzione del problema isoperimetrico in \mathbb{R}^2

Affrontiamo il problema isoperimetrico in \mathbb{R}^2 .

Esistenza della soluzione Dimostreremo ora che, in \mathbb{R}^2 , il problema isoperimetrico ammette almeno una soluzione. Ci limiteremo per il momento agli insiemi connessi.

Si nota che la soluzione del problema isoperimetrico, se esiste, deve essere limitata, e anzi, nei Problemi 4 e 5, si può fissare un diametro massimo. Supponiamo che il perimetro sia fissato e pari a l , come nel Problema 4, o sempre minore o uguale a l : prendiamo due punti del contorno, e i due archi di contorno che li hanno per estremi (ricordiamo che stiamo parlando di figure convesse e semplicemente connesse, in cui il bordo è formato da un'unica curva chiusa); la distanza tra i due punti sarà sicuramente inferiore alla lunghezza di ognuno dei due archi, e quindi se l'insieme A ha perimetro minore o uguale a l , e la distanza tra i due punti è a , $l \geq 2a$, e quindi $\frac{l}{2}$ è la distanza massima tra due punti del contorno (dunque il contorno deve essere limitato, e anche la figura deve esserlo) e quindi, a maggior ragione, $\frac{l}{2}$ è la distanza massima tra due punti qualsiasi di A (infatti due punti di E sono sempre compresi tra due punti del suo contorno, se E è limitato), e quindi gli insiemi convessi di \mathbb{R}^2 a perimetro limitato sono limitati. Se invece ci troviamo nel Problema 5, possiamo considerare un insieme qualsiasi e il suo perimetro l ; la soluzione del problema isoperimetrico si può allora cercare solo tra gli insiemi che hanno perimetro minore o uguale a l , e dunque sono comunque limitati, come già visto.

Nota. In \mathbb{R}^n per $n > 2$, invece, non è detto che una figura di perimetro finito debba essere limitata.

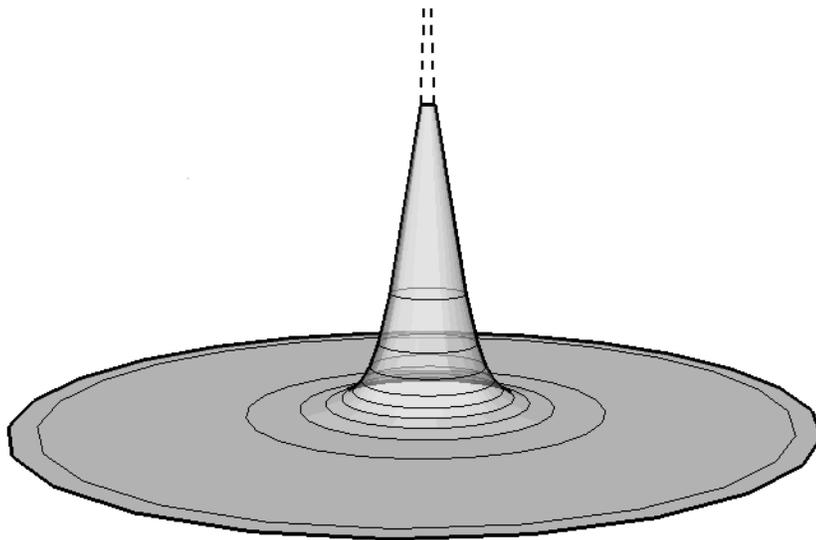


Figura 3.1: Un esempio di figura in tre dimensioni illimitata a perimetro limitato

Teorema 3 *Limitandosi ai connessi, esiste almeno una soluzione del problema isoperimetrico in \mathbb{R}^2 , ovvero un insieme che, fra tutti quelli con misura fissata, ha lunghezza del contorno minima.*

Dimostrazione. Consideriamo in \mathbb{R}^2 tutti i convessi (per quanto detto non è restrittivo) di area 1. Consideriamo tutti i loro perimetri: è un insieme $I \subseteq [0, +\infty]$ che ammette $\inf(I) = p$. Vogliamo mostrare che necessariamente esiste un insieme di area 1 che ha perimetro pari a p .

Per cominciare, per definizione di \inf , vi saranno sicuramente convessi con perimetro inferiore a $p + 1$; ha senso limitarsi ad essi. Considereremo dunque l'insieme \mathcal{C} dei convessi compatti di misura 1, perimetro inferiore a $p + 1$, e tutti con il baricentro in un determinato punto O ; questo non restringe il problema, perché i suddetti insiemi, tutti misurabili e di misura non nulla, hanno un baricentro, che può essere poi traslato fino a farlo coincidere con O senza che ciò cambi le misure. O è interno a tutti i convessi: se O si trovasse su ∂C , con C soddisfacente alle condizioni, data una tangente t (destra o sinistra) a C in O (sappiamo che t esiste sempre per la Proposizione 10), C si troverebbe tutto da una parte rispetto a t (per la proposizione 8), e cioè, poiché il suddetto insieme ha misura non nulla, contraddirebbe il fatto che O è il baricentro.

Sappiamo allora, per un'osservazione precedente, che a ogni convesso di \mathcal{C} con baricentro in O , corrisponde una curva γ che parametrizza ∂C e una funzione $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(\theta) = |\gamma(\theta)|$. Dimosteremo adesso che

tali f sono equilimitate e equi-Lipschitziane, in modo tale da poter in seguito usare il Teorema di Ascoli-Arzelá.

In primo luogo, come osservato prima, i convessi di \mathcal{C} sono tutti limitati e di diametro massimo $\frac{p+1}{2}$, e, poiché contengono O , sono tutti contenuti nel cerchio di centro O e raggio $\frac{p+1}{2}$. Abbiamo cosí che le f , distanze dei punti da O , sono equilimitate.

In secondo luogo, per $l = \frac{1}{2(p+1)}$ il cerchio di raggio l e centro O è contenuto in tutti i convessi (dunque $f(x) > l > 0$ per ogni x e per ogni convesso dell'insieme); supponiamo per assurdo che non sia cosí. Allora c'è almeno un convesso C con baricentro in O e un punto P tali che $|P - O| = r < l$ ma $P \notin C$; allora per la Proposizione 11 esiste una retta s per P che non interseca C . Se consideriamo s e la sua parallela per O , s_1 , si nota che una parte C' di C è compresa tra le due rette, la cui area è la metà di quella di C (poiché O è il baricentro, ogni retta che lo attraversa divide C a metà). Allora, poiché C' è limitato nel cerchio di raggio $\frac{p+1}{2}$ (e diametro $p+1$) ed è compreso tra due rette distanti r , si trova in un rettangolo con due lati lunghi r e due lunghi $p+1$, di area pari a $(p+1)r < (p+1)l \leq \frac{1}{2}$, quindi l'area di C' è inferiore a $\frac{1}{2}$, per cui l'area totale di C non potrebbe essere 1.

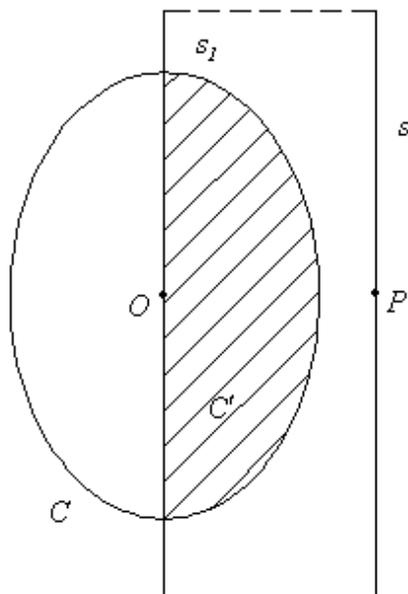


Figura 3.2: Dimostrazione per assurdo che P è in C

Usiamo ora il fatto che il cerchio di raggio l è contenuto in tutti i convessi di \mathcal{C} per mostrare che esiste un $\omega_0 < \frac{\pi}{2}$ tale che, per qualsiasi $C \in \mathcal{C}$, entrambi gli angoli \widehat{tPO} che la tangente t in un punto P formano con la congiungente PO sono sempre compresi in un intervallo $[\frac{\pi}{2} - \omega_0, \frac{\pi}{2} + \omega_0]$. Se consideriamo una retta t tangente (a destra o a sinistra) a uno dei convessi suddetti, C , in un punto P , si hanno due casi: se è perpendicolare a $P - O$, non c'è niente da aggiungere ($\widehat{tPO} = \frac{\pi}{2}$); consideriamo l'altro caso. Per la Proposizione 10, C sarà tutto da una parte rispetto a t ; dunque, t non conterrà alcun punto interno a C e in particolare alcun punto distante da O meno di l (poiché tali punti sono interni a tutti i convessi). Ciò varrà anche per la proiezione O' di O su t . Ora, il triangolo OPO' è retto in O' . Osserviamo che: l'ipotenusa OP è lunga meno di $\frac{p+1}{2}$, il cateto OO' è più lungo di l , e quindi l'angolo a questo opposto, ossia l'angolo acuto tra t e la congiungente OP (uguale all'angolo opposto) è

$$\arcsin\left(\frac{d(O, O')}{d(O, P)}\right) \geq \omega_1 = \arcsin\left(\frac{2l}{p+1}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{(p+1)^2}\right)$$

per quanto detto e perché \arcsin è una funzione crescente. Di conseguenza l'angolo ottuso è minore di $\pi - \omega_1$. Quindi, data la tangente destra o sinistra in un punto, essa formerà con la congiungente un angolo compreso in $[\frac{\pi}{2} - \omega_0, \frac{\pi}{2} + \omega_0]$ con $\omega_0 = \frac{\pi}{2} - \omega_1$; l'angolo formato con la normale alla congiungente è minore di ω_0 .

Dato un insieme come quelli suddetti, consideriamo, come si diceva prima, la curva γ che parametrizza il suo bordo nel modo spiegato, definita in $[0, 2\pi]$. Consideriamo anche la funzione f a essa legata. Come visto $f(\theta) = |\gamma(\theta)| \leq \frac{p+1}{2}$, e poiché $\gamma(\theta)$ è sempre non nulla ed ammette sempre derivata destra e sinistra finita (poiché esiste sempre la tangente destra e sinistra in ogni punto del bordo, che è esterna e dunque non parallela a OP), ciò vale anche per f . Viceversa, poiché $\gamma(\theta) = f(\theta)(\cos(\theta), \sin(\theta))$ ne segue che la derivata, destra o sinistra di γ è

$$\gamma'(\theta) = f'(\theta)(\cos(\theta), \sin(\theta)) + f(\theta)(-\sin(\theta), \cos(\theta)),$$

che esprime il vettore tangente (risp. destro o sinistro). La direzione della normale alla congiungente è espressa dal vettore $(\cos(\theta), \sin(\theta))$, mentre la direzione della congiungente è $(-\sin(\theta), \cos(\theta))$. L'angolo che tale vettore forma con la normale alla congiungente il punto con O ha modulo della tangente $\left|\frac{f'(\theta)}{f(\theta)}\right| \leq |\tan(\omega_0)|$, perché \tan è una funzione crescente nell'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$; da quanto visto, segue

$$|f'(\theta)| \leq f(\theta) \tan(\omega_0) \leq \frac{p+1}{2} \tan(\omega_0) = \lambda.$$

Dunque le derivate destre e sinistre di f sono limitate, e, per quanto detto nella Proposizione 19, ne segue che f è Lipschitziana con costante λ . Poiché ciò vale per ogni f che rappresenta un elemento di \mathcal{C} , abbiamo che tali f sono equilimitate ed equi-Lipschitziane.

Prima di procedere, osserviamo che dati due insiemi associati nel modo visto a due funzioni f_1 e f_2 definite in $[0, 2\pi]$, la loro differenza simmetrica avrà misura (ricordando che funzioni continue definite in un intervallo chiuso ammettono sempre massimo)

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_{\min\{f_1(\theta), f_2(\theta)\}}^{\max\{f_1(\theta), f_2(\theta)\}} r dr d\theta \leq \\ & \leq \int_0^{2\pi} \int_{\min\{f_1(\theta), f_2(\theta)\}}^{\max\{f_1(\theta), f_2(\theta)\}} \max\{f_1(\theta), f_2(\theta)\} d\theta \leq \\ & \leq \int_0^{2\pi} \max\{|f_1(\theta) - f_2(\theta)|, \max\{f_1(\theta), f_2(\theta)\}\} d\theta = \\ & = 2\pi ab \end{aligned}$$

ove

$$a = \max\{|f_1(\theta) - f_2(\theta)| \mid \theta \in [0, 2\pi]\}, b = \max\{f_1(\theta), f_2(\theta) \mid \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

Poiché p è l'inf dei perimetri degli elementi di \mathcal{C} , esiste una successione $\{C_n\} \subseteq \mathcal{C}$ di convessi di area 1 il cui perimetro, decrescendo, tende a p da sopra. Per ognuno di essi si può considerare la corrispondente curva γ_n e la funzione f_n . Poiché, come visto, la successione di funzioni, definite su $[0, 2\pi]$ è equilimitata e equi-Lipschitziana, per il Teorema di Ascoli-Arzelá, deve esistere una sottosuccessione f_{n_t} che converge uniformemente a una funzione $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$; evidentemente anche f è positiva, e $f(0) = f(2\pi)$; quindi a f si potrà associare una curva γ e un insieme C . È evidente che C è il limite dei convessi C_t associati alle funzioni della sottosuccessione convergente, nel senso che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{L}^2(C \Delta C_t) \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} 2\pi a_t b_t = 0$$

ove

$$b_t = \max\{f(\theta), f_t(\theta) \mid \theta \in [0, 2\pi]\}, a_t = \max\{|f(\theta) - f_t(\theta)| \mid \theta \in [0, 2\pi]\}$$

infatti

$$\max\{f(\theta), f_t(\theta) \mid \theta \in [0, 2\pi]\} \leq \frac{p+1}{2}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \max\{|f(\theta) - f_t(\theta)| \mid \theta \in [0, 2\pi]\} = 0.$$

Quindi, come i C_t , C ha area 1; infatti

$$|\mathcal{L}^2(C) - \mathcal{L}^2(C_t)| \leq |\mathcal{L}^2(C \setminus C_t)| + |\mathcal{L}^2(C_t \setminus C)| = \mathcal{L}^2(C \Delta C_t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

Mostriamo ora che C è soluzione del problema isoperimetrico. Sia γ la curva suddetta che rappresenta il bordo di C , associata a f . Come f_n tende uniformemente a f , così γ_n tende uniformemente a γ ; questo è praticamente ovvio, dato che in generale $\gamma_j(\theta) = f_j(\theta)(\cos(\theta), \sin(\theta))$, e il vettore $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ ha sempre lunghezza 1; quindi

$$|\gamma_i - \gamma| = \max |f_i - f|.$$

Sappiamo che la funzione che a ogni curva associa la lunghezza è semicontinua inferiormente. Di conseguenza, la lunghezza di γ ha misura non superiore al lim inf delle lunghezze delle curve di cui è limite; e poiché queste hanno la lunghezza (cioè il perimetro dei rispettivi insiemi) che tende a p , la lunghezza di γ , ovvero il perimetro di C , sarà non inferiore a p ; ed essendo p l'inf dei perimetri degli insiemi di area 1, tra i quali è C , il perimetro di C è proprio p . \square

Unicità della soluzione Avendo dimostrato che *esiste* un insieme di perimetro p , ovvero una soluzione del problema isoperimetrico in \mathbb{R}^2 , bisogna dimostrare che esso è unica e coincide con un cerchio.

Teorema 4 *La soluzione del problema isoperimetrico in \mathbb{R}^2 , è unica ed è il cerchio.*

Dimostrazione. Consideriamo un insieme C che sia soluzione del problema isoperimetrico. Per quanto visto, esso è convesso. Consideriamo una retta passante per il baricentro. Essa divide C in due parti di area uguale; considerando la porzione del contorno di C che va ad ogni parte, la loro lunghezza dá due “semiperimetri” la cui somma dá il perimetro totale: se una delle due ha “semiperimetro” p' minore dell'altra, allora, facendone la simmetria lungo la retta suddetta e unendo la metà suddetta al suo simmetrizzato, si ottiene un nuovo insieme con area uguale al precedente, e perimetro minore; ma allora, C non sarebbe, evidentemente, soluzione del problema isoperimetrico.

Quindi, le due parti devono avere “semiperimetro” uguale; simmetrizzando una qualsiasi delle due parti, si ottiene un insieme con area e perimetro uguale a quello di partenza, ovvero una nuova soluzione del problema isoperimetrico,

che, di conseguenza, sarà convessa. Prendiamo ora un qualsiasi punto P del bordo in cui tangenti destra e sinistra coincidono. Supponiamo, per assurdo, che essa non sia perpendicolare alla congiungente PO con il baricentro. Data tale congiungente, è una retta passante per il baricentro, e rientra quindi nel caso precedente, dividendo C in C_1 e C_2 ; la tangente forma angoli acuti con la congiungente; consideriamo la parte corrispondente alla semiretta che ha l'angolo acuto opposto alla figura. Simmetrizzandola come detto sopra, si otterrà un insieme, soluzione del problema isoperimetrico, e quindi convesso, in cui in corrispondenza del suddetto punto P , la tangente corrispondente alla vecchia parte dell'insieme è la stessa di prima, e la tangente dall'altro lato sarà simmetrica. Nel complesso, le due semirette tangenti, destra e sinistra, formeranno un angolo concavo in direzione della figura; ma questo è impossibile, per la Proposizione 10.

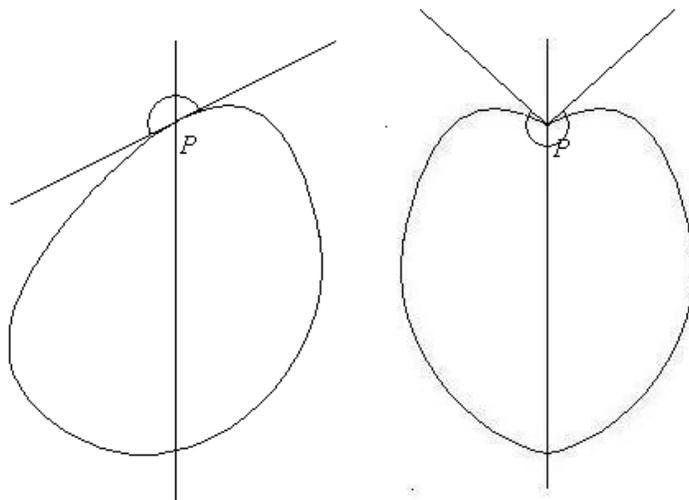


Figura 3.3: Simmetrizzazione in P

Quindi, in ogni punto dove le tangenti coincidono, esse sono perpendicolari alla congiungente; ricordando che

$$\gamma'(\theta) = f'(\theta)(\cos(\theta), \sin(\theta)) + f(\theta)(-\sin(\theta), \cos(\theta)),$$

e che $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ rappresenta la direzione della congiungente e il versore $(-\sin(\theta), \cos(\theta))$ della perpendicolare, se ne deduce che in quei punti $f'(x) = 0$.

I punti di $[0, 2\pi]$ in cui le tangenti coincidono sono i punti in cui γ è derivabile, e dunque, ancora per la Proposizione 10 sono quasi tutta la curva; in particolare, sono densi.

Consideriamo ora un punto qualsiasi, e la sua tangente destra: per la Proposizione 10 essa ha coefficiente angolare che è il limite destro delle tangenti; poiché l'insieme dei valori in cui la tangente è perpendicolare alla congiungente è denso in ogni intorno destro del punto, e poiché le congiungenti variano direzione con continuità, ne segue che la congiungente e la tangente destra sono perpendicolari nel punto, e lo stesso vale per la tangente sinistra. Dunque le tangenti coincidono sempre, ovvero, per quanto detto, in ogni punto $f'(x) = 0$, il che equivale a dire che $f(x) = r$ costante, ovvero che l'insieme cercato deve essere un cerchio. Con ciò troviamo anche il valore minimo del perimetro, per insiemi di area 1: il cerchio di area 1 ha raggio $\sqrt{\frac{1}{\pi}}$ e dunque ha perimetro $2\pi\sqrt{\frac{1}{\pi}} = 2\sqrt{\pi}$. Quindi il rapporto massimo r è

$$\frac{1}{(2\sqrt{\pi})^2} = \frac{1}{4\pi}.$$

□

Caso non connesso Tutto questo per quanto riguarda insiemi connessi. Supponiamo ora di avere un insieme non connesso e chiuso, il cui bordo è rappresentabile con un insieme di curve iniettive. È chiaro che sostituendo ogni sua parte connessa con un cerchio di area uguale, il perimetro dovrà diminuire o rimanere uguale; resta solo da dimostrare che un cerchio con area uguale alla somma di quella di tutti i cerchi ha perimetro inferiore alla somma di tutti i perimetri, o, alternativamente, che il rapporto r suddetto è in questo caso minore del rapporto del cerchio. Consideriamo l'insieme I dei cerchi che costituiscono le parti dell'insieme; per ogni cerchio $i \in I$ sia λ_i il raggio corrispondente: allora l'area complessiva è $\sum_{i \in I} \pi \lambda_i^2$ e il perimetro complessivo è $\sum_{i \in I} 2\pi \lambda_i$. Allora il rapporto r è:

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i \in I} \pi \lambda_i^2}{(\sum_{i \in I} 2\pi \lambda_i)^2} &= \frac{\pi \sum_{i \in I} \lambda_i^2}{4\pi^2 (\sum_{i \in I} \lambda_i)^2} = \\ &= \frac{\sum_{i \in I} \lambda_i^2}{4\pi (\sum_{i \in I} \lambda_i)^2} < \frac{1}{4\pi} \end{aligned}$$

infatti $\sum_{i \in I} \lambda_i^2 \leq (\sum_{i \in I} \lambda_i)^2$ per $\lambda_i \geq 0$ e $\sum_{i \in I} \lambda_i^2 = (\sum_{i \in I} \lambda_i)^2$ solo se i λ_i sono tutti nulli tranne al più uno (ovvero se l'insieme ha un'unica parte connessa). Abbiamo quindi dimostrato:

Teorema 5 *La soluzione del problema isoperimetrico in \mathbb{R}^2 , a meno di omotetie, è unica ed è il cerchio.*

Capitolo 4

Soluzione del problema isoperimetrico in \mathbb{R}^n

Esistenza della soluzione Si potrebbe dimostrare:

Proposizione 20 *Sia E un misurabile a perimetro finito: allora esiste una successione (E_h) di misurabili con frontiera poliedrale tale che $E_h \rightarrow E$ e $P(E_h) \rightarrow P(E)$*

La successione definita nella proposizione, è tale che anche il rapporto

$$r(E_h) = \frac{\mathcal{L}^n(E_h)}{P(E_h)^{\frac{n}{n-1}}}$$

converge, nei poliedrali, a $r(E)$. Si potrebbe anche dimostrare:

Proposizione 21 *Per le due precedenti proposizioni, consultare [1]. Se I è un insieme di misurabili in \mathbb{R}^n , tutti contenuti in una sfera, e tutti con perimetro inferiore a un certo valore M , allora tale insieme è compatto; ovvero l'insieme formato dalle funzioni caratteristiche dei suddetti insiemi è compatto in L^1 .*

Teorema 6 *Il problema isoperimetrico ammette soluzione in \mathbb{R}^n .*

Dimostrazione. Consideriamo dunque l'insieme dei misurabili di misura 1, contenuti nella bolla di raggio R , e con perimetro inferiore a un certo valore p : sia i l'inf dei perimetri degli elementi dell'insieme. Per definizione di inf, si può trovare, per ogni n , un insieme che abbia perimetro inferiore a $i + \frac{1}{n}$. Avremo così una successione $\{E_n\}$ di elementi dell'insieme I , tale che $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(E_n) = i$; poiché esso costituisce una topologia metrica compatta, e quindi compatta per successioni, esiste una sottosuccessione $\{E_{n_h}\}$ che converge a un misurabile

E . Poiché P è semicontinua inferiormente, $P(E) \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} P(E_{n_h}) = i$ e poiché E è misurabile, contenuto nella bolla (ovviamente), ha perimetro finito, e ha misura 1 (per la continuità della misura di Lebesgue nella suddetta topologia), e per definizione di i , $i \leq P(E)$. Dunque $P(E) = i$. Quindi, abbiamo determinato che, in uno spazio limitato, il problema isoperimetrico ammette soluzione; grazie alla simmetrizzazione di Steiner, dimostreremo che tale soluzione è unica e limitata, S , ed è l'ipersfera di misura unitaria (a meno di insiemi di misura nulla).

Ricordando la terza versione del problema isoperimetrico, possiamo ora estendere la soluzione trovata agli illimitati. Supponiamo che esista un insieme illimitato E' tale che $r(E') > r(S)$: per quanto visto, esiste allora anche un poliedrale E (evidentemente limitato) tale che $r(E'') > r(S)$. Poiché S è la soluzione del problema in ambito limitato, questo è assurdo. \square

La simmetrizzazione di Steiner Definiamo ora la *simmetrizzazione di Steiner*. Consideriamo un misurabile E , e un fascio di rette parallele e l'iperpiano H a esso perpendicolare, in \mathbb{R}^n ; a ogni retta corrisponde uno e un unico punto y di H che le appartiene: perciò la indicheremo con r_y ; per il Teorema di Fubini, l'intersezione delle rette r_y con E è misurabile per quasi ogni y su H .

Definizione 11 Sia fissato un insieme misurabile $E \subseteq \mathbb{R}^n$, e un versore $\nu \in \mathbb{R}^n$. Considero l'iperpiano H ortogonale a ν , passante per l'origine: $H = \{y \in \mathbb{R}^n : y \cdot \nu = 0\}$. Definisco $l : H \rightarrow [0, +\infty]$ in questo modo: se $E \cap \{y + t\nu\}$ è misurabile, $l(y) = \mathcal{L}^1(E \cap \{y + t\nu\})$, altrimenti $l = 0$. Allora il simmetrizzato di Steiner di E rispetto a ν è

$$E_\nu^s = \left\{ y + t\nu : y \in H, t \in \mathbb{R}, l(y) > 0, |t| \leq \frac{l(y)}{2} \right\}.$$

In pratica, a ogni gruppo di segmenti di E contenuto in una stessa retta parallela a ν , di misura complessiva non nulla, viene sostituito un unico segmento della stessa lunghezza complessiva, con la stessa direzione, in posizione tale da essere simmetrico rispetto a H ; infatti, metà di esso si trova da un lato, e l'altra metà dall'altro.

E_ν^s è misurabile, ed ha la stessa misura di E : per il Teorema di Fubini, infatti, la misura di E è l'integrale su H delle misure delle varie sezioni di E perpendicolari ad H : questo coinciderà con l'integrale su H della funzione l , e delle analoghe sezioni di E_ν^s , e i gli y per cui $\mathcal{L}^1(r_y \cap E)$ non è definita hanno complessivamente misura nulla, e quindi non contano.

Introduciamo alcune proposizioni:

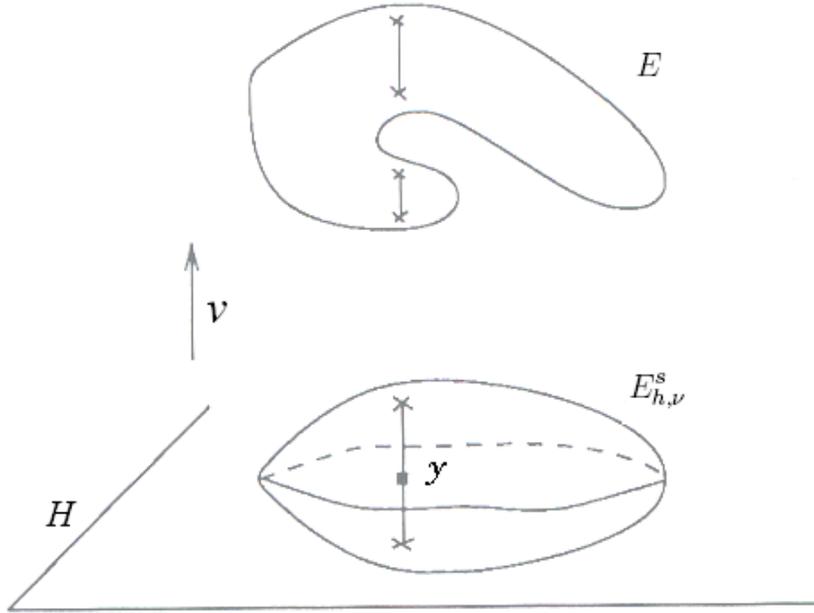


Figura 4.1: Simmetrizzato di Steiner

Proposizione 22 *Dato un insieme E misurabile limitato, a frontiera regolare o quasi regolare e perimetro finito, per ogni $\epsilon \in \mathbb{R}$, e per ogni punto O , esiste un angolo α tale che ogni rotazione (attorno a un qualsiasi sottospazio lineare $(n - 2)$ -dimensionale) di angolo inferiore a α è tale che la distanza tra E e il ruotato è inferiore a ϵ .*

Dimostrazione. Fissato un sottospazio lineare $(n - 2)$ -dimensionale, consideriamo una rotazione attorno ad esso di un angolo α e centro O , che trasformi l'insieme E nell'insieme E'' ; ogni punto ruotato dista dalla sua posizione precedente per un distanza di $2r \sin \frac{\alpha}{2}$, ove r è la distanza del punto da O ; quindi, rimpicciolendo α , la distanza massima di ogni punto dal suo corrispondente può essere resa piccola a piacere. Se consideriamo una famiglia di insiemi misurabile, limitati, regolari o quasi regolari (ad esempio a frontiera poliedrale), a perimetro limitato, ogni punto dista dal suo ruotato per meno di $l = 2R \sin \frac{\alpha}{2}$, ove R è la distanza massima da O . Se consideriamo l'insieme E' dei punti che distano da un qualche punto di E per meno di $\lambda \in \mathbb{R}$, otteniamo, poiché E è regolare, in parte i punti di E stesso, al quale si aggiunge un insieme $E \setminus E'$ la cui misura si può esprimere con $\lambda P(E) + o(\lambda) \leq \lambda P(E) + o(\lambda)$: quindi, rimpicciolendo λ , E' può essere reso vicino a piacere (diciamo per meno di a) a E . A sua volta α può essere rimpicciolito tanto che il ruotato E'' abbia ogni

punto a distanza dal punto di origine inferiore a λ , per cui $E' \subseteq E''$; e poiché $\mathcal{L}^n(E') = \mathcal{L}^n(E) + a = \mathcal{L}^n(E'') + a$, E'' dista da E' per meno di a : dunque E'' ed E distano per meno di $2a$. Poiché a può essere piccolo a piacere, può essere reso inferiore a $\frac{\epsilon}{2}$ e si è ottenuto l'enunciato. \square

Proposizione 23 *La funzione, definita in \mathbb{R}^n , $y = \sqrt{1 + |x|^2}$ è convessa, ovvero il suo sottografico è convesso.*

Dimostrazione. Consideriamo la funzione, definita in \mathbb{R}^+ , $y = f(x) = \sqrt{1 + x^2}$. Il suo grafico è la metà destra del ramo superiore di un'iperbole con la concavità verso l'alto e asintoto $y = x$; e quindi una funzione strettamente convessa e crescente. Consideriamo ora la funzione definita in \mathbb{R}^n , $g(x) = f(|x|) = \sqrt{1 + |x|^2}$. Dimostriamo che tale funzione è convessa: prendiamo due punti x_1 e x_2 , $\lambda \in (0, 1)$ e $x_3 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$; allora

$$|x_3| = |\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2| \leq \lambda|x_1| + (1 - \lambda)|x_2|,$$

quindi, poiché f è crescente e strettamente convessa,

$$\begin{aligned} g(x_3) &= f(|x_3|) \leq f(\lambda|x_1| + (1 - \lambda)|x_2|) < \\ &< \lambda f(|x_1|) + (1 - \lambda)f(|x_2|) = \lambda g(x_1) + (1 - \lambda)g(x_2) \end{aligned}$$

e quindi g è strettamente convessa.

Teorema 7 *Consideriamo un insieme E di misura finita in \mathbb{R}^n e il suo simmetrizzato di Steiner rispetto a ν , E_ν^s ; allora $P(E_\nu^s) \leq P(E)$. Inoltre:*

i) se $P(E) = P(E_\nu^s)$ allora, se E^ è l'insieme dei punti con densità di Lebesgue 1 in E , allora per ogni y in H , l'intersezione della perpendicolare a H per y con E^* è un convesso;*

ii) se $P(E) = P(E_\nu^s)$ e E è convesso, $E = E_\nu^s + t\nu$, ovvero E_ν^s è il traslato di E .

La dimostrazione di questo teorema richiederà vari passi.

I) Consideriamo ora un insieme E a frontiera poliedrale, tale che nessuna delle sue facce sia perpendicolare a H ; dimostriamo che per esso valgono le tesi e il punto i) del teorema. Considereremo solo la frontiera essenziale di E , che sarà anch'essa poliedrale.

Stabiliamo un sistema di riferimento a $(n - 1)$ dimensioni su H , con l'aggiunta di un n -esimo asse ortogonale ad H . Proiettiamo ogni faccia di E su H ; saranno tutti poliedri a $(n - 1)$ dimensioni; consideriamo poi tutte le possibili

intersezioni e sottrazioni (non vuote) di questi poliedri proiettati, ottenendo cosí altri poliedri a $(n - 1)$ dimensioni, fino ad avere i piú piccole; avremo cosí un numero finito di poliedri C_j in H , la cui unione coincide col proiettato di E . Essa ha le due seguenti proprietá: nessun C_j condivide con un altro dei punti interni; se un punto interno di un C_j è in una faccia proiettata di E , tutto C_j lo è. La prima è vera perché, se C_1 e C_2 condividono dei punti interni, allora la loro intersezione e le rispettive sottrazioni sarebbero poliedri a $n - 1$ -dimensioni e darebbero uno spezzamento piú piccolo. La seconda è vera perché, se in un C_j vi è un punto y_1 che corrisponde al punto interno di una faccia F_1 , e un altro punto y_2 che non corrisponde a nessun punto di F_1 , allora l'intersezione e la sottrazione di C_j con il proiettato di F_1 dovrebbe dare almeno due poliedri n -dimensionali piú piccoli.

In effetti, $\{C_j\}$ sará uno spezzamento del proiettato di E in tanti poliedri $(n-1)$ -dimensionali, tale da indurre (tramite la controimmagine della proiezione) un simile spezzamento delle facce della frontiera di E . Per quanto detto, ogni C_j sará anche il proiettato di una parte di E : la sua controimmagine su ∂E sará formata da $N(j)$ coppie di poliedri $A_{j,k}, B_{j,k}$ che comprenderanno, superiormente e inferiormente, una parte della controimmagine di C_j su E . Poiché ogni $A_{j,k}$ e ogni $B_{j,k}$ sono parte di un poliedro non perpendicolare a H e quindi a C_j , la proiezione da $A_{j,k}$ in C_j è suriettiva, iniettiva, affine e dunque invertibile con una funzione $f'_{j,k}$; definiamo $f_{j,k}(y) = (f'_{j,k}(y))_n$ (ovvero la n -esima componente di $f'_{j,k}(y)$, o distanza di $f'_{j,k}(y)$ da H), anche $f_{j,k}$ è affine; essendo $f'_{j,k}$ l'inverso della proiezione, $f'_{j,k}(y) = (y, f_{j,k}(y))$. In modo analogo si definisce, per $B_{j,k}$, $g'_{j,k}$ e $g_{j,k}$.

Dato $y \in C_j$ consideriamo ora l'intersezione tra la retta r_y perpendicolare ad H per y ed E . Essa sará formata da un'unione di $N(j)$ segmenti, di estremi $g'_{j,k}(y)$ e $f'_{j,k}(y)$; per cui, tale intersezione sará un segmento se e solo se $N(j) = 1$, e l'insieme sará convesso se $N(j) = 1$ per ogni j . Inoltre, se $y \in C_j$, $l(y) = \sum_{k=1}^{N(j)} (f_{j,k} - g_{j,k})$. La somma della $(n - 1)$ -misura delle $N(j)$ facce è

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{N(j)} \int_{C_j} \sqrt{1 + |\nabla f_{j,k}(y)|^2} dy + \int_{C_j} \sqrt{1 + |\nabla g_{j,k}(y)|^2} dy = \\ & = \int_{C_j} \sum_{k=1}^{N(j)} (\sqrt{1 + |\nabla f_{j,k}(y)|^2} + \sqrt{1 + |\nabla g_{j,k}(y)|^2}) dy. \end{aligned}$$

Anche il bordo di E_ν^s è scomponibile in base ai poligoni C_j : per quanto detto, il bordo superiore del segmento di intersezione tra r_y ed E_ν^s ha ordinata $\frac{l(y)}{2}$ e l'inferiore ha ordinata $-\frac{l(y)}{2}$. Per definizione, l è affine (essendo somma

di affini) ed è regolare: la parte del bordo di E_ν^s in corrispondenza di C_j ha allora $(n-1)$ -misura

$$2 \int_{C_j} \sqrt{1 + \left| \nabla \frac{l(y)}{2} \right|^2} dy = \int_{C_j} \sqrt{4 + |\nabla l(y)|^2} dy.$$

Per dimostrare che $P(E_\nu^s) \leq P(E)$, è sufficiente mostrare che per ogni C_j , le corrispondenti parti di E_ν^s hanno $(n-1)$ -misura complessiva inferiore a quella di E ;

$$\int_{C_j} \sum_{k=1}^{N(j)} (\sqrt{1 + |\nabla f_{j,k}(y)|^2} + \sqrt{1 + |\nabla g_{j,k}(y)|^2}) dy \geq \int_{C_j} \sqrt{4 + |\nabla l(y)|^2} dy;$$

basterà dimostrare dunque che

$$\sum_{k=1}^{N(j)} (\sqrt{1 + |\nabla f_{j,k}(y)|^2} + \sqrt{1 + |\nabla g_{j,k}(y)|^2}) \geq \sqrt{4 + |\nabla l(y)|^2}$$

per ogni y in C_j .

Per la stretta convessità della funzione $\sqrt{1 + |x|^2}$ e per la linearità del gradiente,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{N(j)} (\sqrt{1 + |\nabla f_{j,k}(y)|^2} + \sqrt{1 + |\nabla g_{j,k}(y)|^2}) = \\ & = \sum_{k=1}^{N(j)} 2 \left(\frac{\sqrt{1 + |\nabla f_{j,k}(y)|^2}}{2} + \frac{\sqrt{1 + |\nabla g_{j,k}(y)|^2}}{2} \right) \geq \\ & \geq \sum_{k=1}^{N(j)} 2 \left(\sqrt{1 + \left| \frac{\nabla f_{j,k}(y)}{2} - \frac{\nabla g_{j,k}(y)}{2} \right|^2} \right) = N(j) \sum_{k=1}^{N(j)} 2 \frac{1}{N(j)} \left(\sqrt{1 + \frac{|\nabla(f_{j,k}(y) - g_{j,k}(y))|^2}{2}} \right) \geq \\ & \geq 2N(j) \sqrt{1 + \left| \sum_{k=1}^{N(j)} \frac{\nabla(f_{j,k}(y) - g_{j,k}(y))}{2N(j)} \right|^2} = \sqrt{4N(j)^2 + \left| \nabla \sum_{k=1}^N (f_{j,k}(y) - g_{j,k}(y)) \right|^2} = \\ & = \sqrt{4N(j)^2 + |\nabla l(y)|^2} \geq \sqrt{4 + |\nabla l(y)|^2}. \end{aligned}$$

L'ultima disuguaglianza, che sfrutta il fatto che la funzione radice quadrata è crescente, rende chiaro che l'uguaglianza invece è possibile solo se $N(j) = 1$ per ognuno dei C_j ; il che equivale a dire che E deve essere convesso.

Sia F l'insieme dei punti y di H per cui $E \cap r_y$ non è un segmento, ovvero l'unione dei C_j tali che $N(j) > 1$. Per quanto visto, poiché

$$\sum_{k=1}^{N(j)} (\sqrt{1 + |\nabla f_{j,k}(y)|^2} + \sqrt{1 + |\nabla g_{j,k}(y)|^2}) \geq \sqrt{4N(j)^2 + |\nabla l(y)|^2},$$

allora

$$\begin{aligned} P(E) - P(E_\nu^s) &= \sum_{j=1}^M \int_{C_j} \sum_{k=1}^{N(j)} (\sqrt{1 + |\nabla f_{j,k}(y)|^2} + \sqrt{1 + |\nabla g_{j,k}(y)|^2}) dy + \\ &\quad - \sum_{j=1}^M \int_{C_j} \sqrt{4 + |\nabla l(y)|^2} dy \geq \\ &\geq \sum_{j=1}^M \int_{C_j} \sqrt{4N(j)^2 + |\nabla l(y)|^2} - \sqrt{4 + |\nabla l(y)|^2} dy = \\ &= \sum_{j=1}^M \int_{C_j} \frac{4N(j)^2 - 4}{\sqrt{4N(j)^2 + |\nabla l(y)|^2} + \sqrt{4 + |\nabla l(y)|^2}} dy \geq \\ &\geq 2 \sum_{j=1}^M \int_{F \cap C_j} \frac{1}{\sqrt{4N(j)^2 + |\nabla l(y)|^2}} dy. \end{aligned}$$

L'ultima disuguaglianza è ottenuta escludendo i casi in cui $N(j) = 1$, ovvero $y \in F$, e considerando che negli altri $4N(j)^2 - 4 \geq 4$, e, poiché $\sqrt{4 + |\nabla l(y)|^2} \leq \sqrt{4N(j)^2 + |\nabla l(y)|^2}$,

$$\sqrt{4N(j)^2 + |\nabla l(y)|^2} + \sqrt{4 + |\nabla l(y)|^2} \leq 2\sqrt{4N(j)^2 + |\nabla l(y)|^2}.$$

Dunque

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{n-1}(F) &= \int_F \sum_{j=1}^M \chi_{F \cap C_j}(y) dy = \\ &= \int_F \sum_{j=1}^M \chi_{F \cap C_j}(y) \frac{1}{\sqrt[4]{4N(j)^2 + |\nabla l(y)|^2}} \sqrt[4]{4N(j)^2 + |\nabla l(y)|^2} dy \leq \\ &\leq \int_D \left(\sum_{j=1}^M \frac{\chi_{F \cap C_j}(y)}{\sqrt[4]{4N(j)^2 + |\nabla l(y)|^2}} \right) \left(\sum_{j=1}^M \chi_{D \cap C_j}(y) \sqrt[4]{4N(j)^2 + |\nabla l(y)|^2} \right) dy \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\int_F \sum_{j=1}^M \frac{\chi_{D \cap C_j}(y)}{\sqrt{4N(j)^2 + |\nabla l(y)|^2}} dy \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_D \sum_{j=1}^M \chi_{D \cap C_j}(y) \sqrt{4N(j)^2 + |\nabla l(y)|^2} dy \right)^{\frac{1}{2}} = \\
&= \left(\sum_{j=1}^M \int_{F \cap C_j} \frac{1}{\sqrt{4N(j)^2 + |\nabla l(y)|^2}} dy \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{j=1}^M \int_{F \cap C_j} \sqrt{4N(j)^2 + |\nabla l(y)|^2} dy \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq \left(\frac{1}{2} (P(E) - P(E_\nu^s)) \right)^{\frac{1}{2}} P(E)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Nella prima disuguaglianza si è usato il fatto che i valori in questione sono tutti positivi; nella seconda la disuguaglianza di Hölder, con $p = 2$; nell'ultima le disuguaglianze via via viste.

II) Consideriamo un generico insieme E e un versore ν : esiste una successione E'_h di insiemi a frontiera poliedrale, dunque limitati, che tende ad E , e tale che il suo perimetro tende a quello di E . Ora consideriamo un qualsiasi E'_h che abbia una o piú facce parallele a ν , e consideriamo tutte le sue possibili rotazioni: ognuna di esse farà corrispondere a ν una differente direzione, cui sarà associato un versore ν' . I possibili ν' formano una $((n - 1))$ -sfera S ; ci sarà un $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che ogni rotazione di angolo α o inferiore darà un nuovo E_h distante da E'_h per meno di quanto questo distasse da E ; a tali rotazioni corrisponderanno dei ν' formanti una calotta di S di $(n - 1)$ -misura di Hausdorff non nulla; per ogni faccia, i ν' paralleli a quella faccia sono compresi in una $(n - 2)$ -sfera, e quindi un insieme a $(n - 1)$ -misura di Hausdorff nulla; e l'insieme di tutte le direzioni parallele a una delle facce, che sono finite, ha parimenti misura nulla. Quindi, almeno una delle direzioni che con una rotazione di angolo minore di α possono essere portate a corrispondere a ν non è parallela ad alcuna faccia. Si attua dunque su E'_h una di tali rotazioni. Dopo questa operazione, effettuata per ogni h , si ha ancora una successione di insiemi a frontiera poligonale E_h convergente ad E , perché, per quanto visto,

$$\mathcal{L}^n(E_h \Delta E) \leq 2\mathcal{L}^n(E'_h \Delta E),$$

quindi,

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \mathcal{L}^n(E_h \Delta E) = 2 \lim_{h \rightarrow +\infty} \mathcal{L}^n(E'_h \Delta E) = 0,$$

e $P(E_h) = P(E'_h)$ converge a $P(E)$; inoltre nessuno ha facce parallele a ν , quindi vale quanto fatto nel passo precedente.

Consideriamo i simmetrizzati E_ν^s e $E_{h,\nu}^s$. Per la Proposizione 5

$$|E_h \Delta E| \leq ||E_h| - |E||.$$

Quindi, considerando $||$ come la misura di Lebesgue su r_y (e quindi 1-dimensionale):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n(E_h \Delta E) &= \int_H \mathcal{L}^1((E \Delta E_h) \cap r_y) dy = \int_H |(E \cap r_y) \Delta (E_h \cap r_y)| dy \geq \\ &\geq \int_H ||E \cap r_y| - |E_h \cap r_y|| dy = \int_H |l(y) - l_h(y)| dy \geq 0. \end{aligned}$$

Osserviamo che, poiché E_h converge a E , $\mathcal{L}^n(E_h \Delta E) \rightarrow 0$, quindi, per quanto sopra $\int_H |l_h(y) - l(y)| dy \xrightarrow{h \rightarrow +\infty} 0$. Per definizione del simmetrizzato di Steiner,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n(E_{h,\nu}^s \Delta E_\nu^s) &= \int_H \mathcal{L}^1((E_\nu^s \Delta E_{h,\nu}^s) \cap r_y) dy = \\ &= \int_H 2 \left| \frac{l_h(y) - l(y)}{2} \right| dy = \int_H |l_h(y) - l(y)| dy \xrightarrow{h \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Quindi, per quanto detto $E_{h,\nu}^s \rightarrow E_\nu^s$. Per I), $P(E_{h,\nu}^s) \leq P(E_h)$, e, poiché P è semicontinua inferiormente

$$P(E_\nu^s) = P(\lim_{h \rightarrow +\infty} E_h^s) \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} P(E_h^s) \leq \lim_{h \rightarrow +\infty} P(E_h) = P(E).$$

Per ogni E_h , sia F_h l'insieme dei punti per cui $N(j)$ è maggiore di 1, ovvero dei punti y per i quali $r_y \cap E_h$ non è un segmento. Supponiamo che $P(E) = P(E_{h,\nu}^s)$: allora, per quanto detto,

$$\liminf_{h \rightarrow +\infty} P(E_{h,\nu}^s) = \lim_{h \rightarrow +\infty} P(E_h) = P(E_{h,\nu}^s).$$

Di conseguenza esiste una sottosuccessione $\{E_{h_n}\}$ tale che $P(E_{h_n,\nu}^s)$ converge a $P(E)$. Ribattezzando questa sottosuccessione $\{E_h\}$, ho

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} P(E_{h,\nu}^s) = \lim_{h \rightarrow +\infty} P(E_h).$$

Poiché

$$0 \leq \mathcal{L}^{n-1}(F_h) \leq \left(\frac{1}{2} (P(E_h) - P(E_{h,\nu}^s)) \right)^{\frac{1}{2}} P(E_h)^{\frac{1}{2}},$$

e $P(E_h) - P(E_{h,\nu}^s) \rightarrow 0$ mentre $P(E_h)$ è evidentemente limitato, si ha che $\mathcal{L}^{n-1}(F_h) \rightarrow 0$. Usiamo quest'ultimo fatto per mostrare che l'insieme dei punti di Lebesgue E^* è tale che, data una retta r di direzione ν , $r \cap E^*$ è un segmento.

Se $r \cap E^*$ è vuoto o è formato da un solo punto, non c'è niente da aggiungere. Altrimenti, dati $P_1, P_2 \in r \cap E^*$, $P_1 \neq P_2$, mostriamo che ogni punto P_3 interno al segmento P_1P_2 si trova in $r \cap E^*$, ovvero (poiché si trova sicuramente su r) che si trova su E^* . Indicheremo con $B(P, s)$ o $B_s(P)$ la bolla di centro P e raggio s . Fissiamo un $\epsilon > 0$ a piacere. Per definizione di densità di Lebesgue, poiché $\Theta(E, P_1) = 1$ deve esistere un $s_1 > 0$ tale che, per ogni $s < s_1$,

$$\frac{\mathcal{L}^n(B(P_1, s) \cap E)}{\mathcal{L}^n(B(P_1, s))} > 1 - \epsilon;$$

analogamente esiste, per P_2 , un s_2 tale che, per ogni $s < s_2$,

$$\frac{\mathcal{L}^n(B(P_2, s) \cap E)}{\mathcal{L}^n(B(P_2, s))} > 1 - \epsilon.$$

Sia allora $s < \min\{s_1, s_2, \frac{d(P_1, P_3)}{2}, \frac{d(P_3, P_2)}{2}\}$: considereremo $B_1 = B(P_1, s)$, $B_2 = B(P_2, s)$, $B_3 = B(P_3, s)$, $\omega = \mathcal{L}^n(B(P_1, s))$ (ω ovviamente non cambia a seconda del punto). Di seguito useremo $||$ per indicare la misura di Lebesgue. Abbiamo

$$\frac{\mathcal{L}^n(B_1 \cap E)}{\omega} > 1 - \epsilon, \quad \frac{\mathcal{L}^n(B_2 \cap E)}{\omega} > 1 - \epsilon;$$

$$|B_1 \cap E| > \omega - \omega\epsilon, \quad |B_2 \cap E| > \omega - \omega\epsilon;$$

Inoltre B_1, B_2, B_3 hanno a due a due intersezione vuota. Poiché $E_h \rightarrow E$, esiste un h_1 tale che, per ogni $h > h_1$, $|E \Delta E_h| \leq \epsilon\omega$, e, poiché $\mathcal{L}^{n-1}(F_h) \rightarrow 0$, esiste un h_2 tale che per ogni $h > h_2$,

$$\mathcal{L}^{n-1}(F_h) < \frac{\epsilon\omega}{2s};$$

considero allora gli $h > \max\{h_1, h_2\}$. Per tali h , usando la Proposizione 5:

$$|B_1 \setminus E_h| \leq |B_1 \setminus E| + |E_h \setminus E| \leq 2\omega\epsilon;$$

$$|B_2 \setminus E_h| \leq |B_2 \setminus E| + |E_h \setminus E| \leq 2\omega\epsilon;$$

$$|B_1 \cap E_h| = |B_1| - |B_1 \setminus E_h| \geq \omega - 2\omega\epsilon;$$

$$|B_2 \cap E_h| = |B_2| - |B_2 \setminus E_h| \geq \omega - 2\omega\epsilon.$$

Consideriamo l'insieme F'_h dei punti di B_3 che corrispondono a qualche punto di F_h ; l'intersezione di una retta con B_3 ha ovviamente misura inferiore

al diametro $2s$, di conseguenza per la misura n -dimensionale di F_h si può scrivere:

$$|F'_h| = \int_{F_h} \mathcal{L}^1(F'_h \cap r_y) dy \leq \int_{F_h} 2s = \mathcal{L}^{n-1}(F_h)2s < \epsilon\omega.$$

Consideriamo dunque solo i punti di $B_3 \setminus F'_h$. Le tre bolle possono essere messe in corrispondenza con una traslazione parallela a ν ; ogni punto di B_3 si troverá compreso nel segmento con estremi i suoi corrispondenti su B_1 e B_2 . Escludiamo da B_3 anche tutti i punti che non sono in corrispondenza con punti di $B_1 \cap E_h$ o di $B_2 \cap E_h$; questi insiemi hanno entrambi misura minore di $2\omega\epsilon$, e quindi ciò varrá anche per i loro corrispondenti B'_1, B'_2 su B_3 . Consideriamo dunque un qualsiasi punto P' su $B'_3 = B_3 \setminus (F'_h \cup B'_1 \cup B'_2)$; poiché questo punto non si trova né su B'_1 , né su B'_2 , ne segue che i suoi corrispondenti P'_1 in B_1 e P'_2 in B_2 sono compresi in E_h ; poiché inoltre esso non appartiene a C'_h , la sua proiezione su H (e proiezione dei suoi corrispondenti) non appartiene a F_h ; per cui il segmento $P'_1P'_2$, che comprende P' , sará compreso in E_h . Ne consegue che tutto l'insieme B'_3 è compreso in E_h , e dunque $B'_3 \setminus E \subseteq E_h \setminus E$, dunque

$$|B'_3 \setminus E| \leq \omega\epsilon.$$

Inoltre

$$|B'_3 \Delta B_3| = |B_3 \setminus B'_3| = |(B_3 \cap D'_h) \cup B'_1 \cup B'_2| \leq |D'_h| + |B'_1| + |B'_2| \leq 5\epsilon\omega.$$

Dunque, poiché, per la Proposizione 5,

$$|B_3 \setminus E| \leq |B_3 \setminus B'_3| + |B'_3 \setminus E| = 6\omega\epsilon.$$

Quindi

$$|B_3 \cap E| = |B_3| - |B_3 \setminus E| \geq \omega - 6\omega\epsilon;$$

poiché ciò può essere ottenuto per ϵ sufficientemente piccoli, si ha che

$$\Theta(E, P_3) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(B_s(P_3) \cap E)}{\mathcal{L}^n(B_s(x))} = 1;$$

ovvero P_3 è un punto di Lebesgue.

III) Se E è convesso, sia D proiezione di E su H , D è ovviamente convesso: per al proposizione si può supporre, senza perdere di generalitá, che C sia aperto, e dunque anche D lo sia (e quindi $D = D \setminus \partial D$). Per la Proposizione 15, si può dire che E è la parte di \mathbb{R}^n strettamente compresa tra i grafici di due

funzioni Ψ_1 e Ψ_2 , con Ψ_1 convessa e Ψ_2 concava, inoltre ∂C può essere visto come diviso in tre parti: il grafico di Ψ_1 , quello di Ψ_2 (con Ψ_1 e Ψ_2 funzioni su D differenziabili quasi ovunque), e la parte perpendicolare ad H sul bordo di D .

$$E = \{y + t\nu \mid y \in H, \Psi_1(y) < t < \Psi_2(y)\},$$

$$E_\nu^s = \{y + t\nu \mid y \in H, \frac{\Psi_1 - \Psi_2}{2} < t < \frac{\Psi_2 - \Psi_1}{2}\}.$$

Poiché Ψ_1 è convessa e Ψ_2 è concava, ne segue che $\frac{\Psi_1 - \Psi_2}{2}$ è convessa e $\frac{\Psi_2 - \Psi_1}{2}$ è concava; allora, poiché E_s è l'intersezione tra il sopragrafico della prima funzione e il sottografico della seconda, per la proposizione 18 esso è un convesso; allora, ∂E_ν^s sarà anch'esso diviso in tre parti: il grafico di $\frac{\Psi_1 - \Psi_2}{2}$, quello di $\frac{\Psi_2 - \Psi_1}{2}$, e la parte perpendicolare ad H sul bordo di D .

La misura di Hausdorff $(n - 1)$ -dimensionale della terza parte di ∂E , formata da segmenti perpendicolari ad H passanti per ∂D ,

$$\int_{\partial D} \mathcal{L}^1(r_y \cap \partial E) d\mathcal{H}^{n-2} = \int_{\partial D} l(y) d\mathcal{H}^{n-2}$$

Quella di E_ν^s ha misura

$$\int_{\partial D} l(y) d\mathcal{H}^{n-2}$$

uguale alla precedente. Possiamo quindi scrivere

$$\begin{aligned} P(E) &= \int_D \sqrt{1 + |\nabla \Psi_1(y)|^2} + \sqrt{1 + |\nabla \Psi_2(y)|^2} dy + \int_{\partial D} l(y) d\mathcal{H}^{n-2} = \\ &= \int_D \sqrt{1 + |\nabla \Psi_1(y)|^2} + \sqrt{1 + |\nabla - \Psi_2(y)|^2} dy + \int_{\partial D} l(y) d\mathcal{H}^{n-2}, \\ P(E_\nu^s) &= \int_D \sqrt{1 + \left| \nabla \frac{\Psi_1 - \Psi_2}{2} \right|^2} + \sqrt{1 + \left| \nabla \frac{\Psi_2 - \Psi_1}{2} \right|^2} dy + \int_{\partial D} l(y) d\mathcal{H}^{n-2} = \\ &= 2 \int_D \sqrt{1 + \left| \nabla \frac{\Psi_1 - \Psi_2}{2} \right|^2} dy + \int_{\partial D} l(y) d\mathcal{H}^{n-2}. \end{aligned}$$

$P(E) = P(E_\nu^s)$ implica

$$\begin{aligned} \int_D \sqrt{1 + |\nabla \Psi_1(y)|^2} + \sqrt{1 + |\nabla - \Psi_2(y)|^2} dy &= \\ &= 2 \int_D \sqrt{1 + \left| \frac{\nabla \Psi_1 - \nabla \Psi_2}{2} \right|^2} dy, \end{aligned}$$

cioè

$$\int_D \sqrt{1 + |\nabla \Psi_1(y)|^2} + \sqrt{1 + |\nabla - \Psi_2(y)|^2} - 2\sqrt{1 + \left| \frac{\nabla \Psi_1 - \nabla \Psi_2}{2} \right|^2} dy = 0.$$

Dunque

$$\sqrt{1 + |\nabla \Psi_1(y)|^2} + \sqrt{1 + |\nabla - \Psi_2(y)|^2} - 2\sqrt{1 + \left| \frac{\nabla \Psi_1 - \nabla \Psi_2}{2} \right|^2} = 0$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{1 + |\nabla \Psi_1(y)|^2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + |\nabla - \Psi_2(y)|^2} = \sqrt{1 + \left| \frac{\nabla \Psi_1 - \nabla \Psi_2}{2} \right|^2}$$

quasi ovunque su D ; allora, per la stretta convessità di $\sqrt{1 + |x|^2}$, $\nabla \Psi_1 = -\nabla \Psi_2$, da cui $\nabla(\Psi_1 + \Psi_2) = 0$, e $\Psi_1 + \Psi_2 = c$ costante quasi ovunque, e quindi ovunque, per la continuità delle funzioni Ψ . Dunque,

$$\Psi_1 = -\Psi_2 + c = \frac{\Psi_1 - \Psi_2}{2} + \frac{c}{2} = -\frac{\Psi_2 - \Psi_1}{2} + \frac{c}{2},$$

e quindi $E = E_\nu^s + c\nu$. \square

Unicità della soluzione Ora è possibile dimostrare l'unicità della soluzione del problema isoperimetrico, e che essa è rappresentata dall'ipersfera.

Teorema 8 *La soluzione del problema isoperimetrico in \mathbb{R}^n è unica ed è l'ipersfera.*

Dimostrazione. Consideriamo una soluzione E del problema isoperimetrico; il suo simmetrizzato E_ν^s avrà la stessa misura e perimetro inferiore o uguale. Poiché E è soluzione del problema, E_ν^s dovrà avere perimetro uguale.

Allora, per il teorema visto sopra, l'insieme E' formato dai punti di Lebesgue di E è convesso; sappiamo, per la proposizione 6, che esso è equivalente ad E . Di conseguenza, E' è un insieme convesso ed è soluzione del problema isoperimetrico: quindi, per ogni ν ha lo stesso perimetro di E_ν^s ; sempre per il teorema, dunque, deve essere il traslato di E_ν^s di un vettore $c\nu$, e quindi a esso congruente. Ma E_ν^s è simmetrico rispetto a ν ; ne consegue che anche E' lo è. Dunque E' è simmetrico rispetto a qualsiasi direzione, e deve essere l'ipersfera; quindi ogni soluzione del problema isoperimetrico è un insieme che dista da un'ipersfera per un insieme di misura nulla; il rapporto r massimo, in \mathbb{R}^n è dato dal rapporto $\frac{\mathcal{L}^n(B)}{P(B)^{\frac{n}{n-1}}}$, ove B è una bolla qualsiasi. \square

Bibliografia

- [1] L. Ambrosio, N. Fusco, and D. Pallara. *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*, Oxford University Press, 2000.
- [2] I. Chavel. *Isoperimetric Inequalities*, Cambridge University Press, 2001.
- [3] E. De Giorgi. Sulla proprietà isoperimetrica dell'ipersfera, nella classe degli insiemi aventi frontiera orientata di misura finita, *Atti Accad. Naz. Lincei. Mem. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. Sez. I* (8)5, 33–44, 1958.
- [4] L.C. Evans, and R.F. Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions*, CRC Press, 1992.
- [5] N. Fusco, P. Marcellini, e C. Sbordone. *Analisi Matematica due*, Liguori Editore, 1995.
- [6] F. Maggi. Some methods for studying stability in isoperimetric type problems, *Bul. Am. Math. Soc.* volume 45, Number 3, Pages 367-408, July 2008.
- [7] R. T. Rockafellar. *Convex Analysis*, Princeton Univ. Press, 1970.