UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FERRARA

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Il modello di Black e Scholes

RELATORE:
Prof. Michele Miranda

LAUREANDO:
Marco Castagnoli

SECONDO RELATORE:
Prof. Alessandra Borrelli

Anno accademico 2015-2016

Introduzione

L'obiettivo di questa tesi è di mostrare il modello matematico proposto da Black e Scholes per la valutazione del prezzo delle opzioni call europee. Per poterlo comprendere a pieno si sono innanzitutto esposte le definizioni dei diversi titoli finanziari, in modo particolare delle opzioni che rientrano nella classe dei titoli derivati e le leggi finanziarie che governano i titoli. Successivamente vengono inserite tre proposizioni che permettono l'estensione dell'applicazione del modello a opzioni call americane e put europee. Per concludere la parte economica viene introdotta una strategia di copertura del rischio detta delta hedging. Poiché i titoli non seguono andamenti lineari a causa della loro scarsa prevedibilità, è necessario, per lo studio del modello, introdurre i processi stocastici, in particolare i processi di Wiener, l'integrale di Itô, il differenziale stocastico ad esso associato e le relative equazioni differenziali.
Dopo aver esposto le ipotesi su cui poggia il modello, si considera un'opzione call europea e la creazione di un portafoglio coperto; studiandone il valore e sfruttando opportune ipotesi si ottiene l'equazione di Black e Scholes; a tale equazione è associata una condizione finale che deriva dal valore intrinseco della call stessa.
A questo punto, tramite una trasformazione regolare delle variabili indipendenti e con un cambiamento di funzione incognita è possibile ricondurci ad un'equazione di tipo parabolico ridotto alla seconda forma canonica e contemporaneamente trasformare la condizione finale in una usuale condizione iniziale. Da questa, attraverso alcuni cambi di variabile e scritture più compatte otteniamo la formula di Black and Scholes.
Nell'ultima parte si applica, sfruttando le suddette tre proposizioni, la formula alle call americane e alle put europee; queste estensioni della formula ci permettono di analizzare un esempio di valutazione dei titoli emessi da un'impresa.

Indice

Capitolo 1

Conoscenze preliminari

In questo primo capitolo raccogliamo le nozioni principali su cui è basata la presente tesi. Introdurremo anzitutto i principali concetti di finanza ed economia che tratteremo nel corso della tesi, quindi gli strumenti matematici che useremo per il nostro studio. Il materiale raccolto in questo capitolo è stato preso dalle note del corso "Calcolo Stocastico e Mercati Finanziari" della prof. Alessandra Borrelli [1]. Come testi di riferimento sull'argomento rimandiamo a Lamberton-Lapeyre [2], Oksendal [3] e Pascucci [4].

1.1 Parte economica finanziaria

Iniziamo con l'introdurre alcuni concetti di carattere economico/finanziario.

Definizione 1.1 *Un titolo finanziario è un contratto tra due controparti, il venditore e il compratore, che stabilisce per ciascuna data futura e per ogni stato la quantità (positiva o non) di una determinata merce o moneta o contratto finanziario che il venditore deve trasferire al compratore. Sono detti titoli primari quei contratti che stabiliscono direttamente trasferimenti di merci o moneta. Sono detti titoli derivati quelli in cui il trasferimento è regolato in modo indiretto, cioè mediante il trasferimento di altri contratti.*

Due esempi di titoli primari sono le obbligazioni e le azioni, titoli che vengono emessi dalle imprese per finanziarsi.
Le **obbligazioni** sono titoli di **debito**, cioè l'acquirente diventa creditore della società che le ha emesse. Il possessore ha diritto al rimborso del capitale prestato alla scadenza e agli interessi a date fissate. Le obbligazioni sono titoli a basso rischio e per esse è possibile stabilire due componenti di rischio:

- il rischio generico dipende dalle fluttuazioni del prezzo di mercato dei titoli stessi che varia con maggiore o minore continuità; ad esempio, se si vogliono vendere le obbligazioni prima della scadenza, bisogna fare i conti con il valore attuale del titolo;

- il rischio specifico dipende dalle caratteristiche peculiari dell'emittente, per esempio la società emittente può non essere in grado di pagare quanto stabilito.

Definizione 1.2 *Un'obbligazione priva di rischio è un contratto che attribuisce il diritto a ricevere interessi e capitale alle scadenze prefissate, con importi di rimborso uguali in tutti gli stati possibili relativi alla medesima data.*

Dunque con un'obbligazione priva di rischio la cifra che si riceve alle date di scadenza è quella prefissata, in qualunque stato e indipendentemente dagli eventi. Si tratta di un caso puramente ideale.
Le **azioni** sono titoli di **capitale**, cioè conferiscono all'acquirente i diritti patrimoniali della società emittente, ossia l'acquirente diventa proprietario della società per la quota di azioni acquistate. Le azioni conferiscono il diritto al dividendo, se questo viene distribuito all'interno della società. Ricordiamo che il dividendo è quella parte degli utili netti di una società per azioni che viene distribuita annualmente fra gli azionisti.
Le azioni, a differenza delle obbligazioni, sono investimenti rischiosi poiché l'acquirente partecipa a tutto ciò che accade alla società, cioè il valore delle azioni dipende dalla riuscita della società.
Se si rappresenta graficamente in funzione del tempo il valore di un'obbligazione poco rischiosa si ottiene un grafico abbastanza lineare con buona previdibilità e basso rischio, invece se si rappresenta in funzione del tempo il valore di azioni si ottiene un grafico molto frastagliato con scarsa prevedibilità ed alto rischio.
Per quanto riguarda i **titoli derivati**, il loro valore viene a dipendere da quello di un'altra attività finanziaria che prende il nome di **sottostante**. Esempi di sottostante sono merci, azioni, obbligazioni, ma anche valute, tassi d'interesse, ecc. Noi ci occuperemo nel seguito delle **opzioni**.

1.1.1 Leggi finanziarie

In primo luogo osserviamo che in ambito finanziario si assume un'ipotesi di fondo: l'impiego del denaro per un certo periodo di tempo o equivalentemente lo spostamento nel tempo del denaro ha un **prezzo** o **valore**.
Le operazioni finanziarie comportano l'impiego di **capitale**, denotiamo con C il capitale nell'unità monetaria.

Supponiamo che un operatore economico $\mathcal{E}$ disponga di un capitale C al tempo t.

Definizione 1.3 *Il tempo t al quale il capitale C è disponibile è detto valuta e la coppia ordinata (C, t) viene chiamata situazione finanziaria.*

Siano ora dati due operatori economici $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$ ed assumiamo che $\mathcal{E}_1$, che ha a disposizioni il capitale C_1 al tempo t_1, trovi equo affidare il suo capitale a $\mathcal{E}_2$ che al tempo $t_2 > t_1$ si impegna a restituire il capitale C_2. Allora diremo che le coppie (C_1, t_1), (C_2, t_2) sono *indifferenti*. Enunciamo dunque la seguente definizione.

Definizione 1.4 *Le coppie (C_1, t_1), (C_2, t_2), dove C_1, C_2 sono capitali disponibili al tempo t_1, t_2 rispettivamente, si dicono indifferenti e si scrive:*

$$(C_1, t_1) \approx (C_2, t_2)$$

se si è disposti a scambiarle ossia se possono essere scambiate alla pari.

Definizione 1.5 *Prese due coppie indifferenti (C_0, t_0), (C_t, t), si definisce legge finanziaria la funzione $\mathcal{L}(C_0, t, t_0)$ tale che*

$$C_t = \mathcal{L}(C_0, t, t_0).$$

Se ci limitiamo a considerare leggi omogenee di grado 1 nel capitale, abbiamo:

$$C_t = \mathcal{L}(C_0, t, t_0) = C_0\mathcal{L}(1, t, t_0).$$

Se $t > t_0$, $\mathcal{L}(1, t, t_0) =: m(t, t_0)$ è detta **legge di capitalizzazione**.

Se $t = t_0$, $\mathcal{L}(1, t_0, t_0) = 1$.

Se $t < t_0$, $\mathcal{L}(1, t, t_0) =: v(t, t_0)$ è detta **legge di sconto o di attualizzazione**.

Nel caso in cui $t > t_0$

$$C_t = C_0 m(t, t_0)$$

è detto **montante**. Dunque il montante è il valore del capitale ad un tempo posteriore rispetto a quello in cui è a disposizione.
In tal caso la differenza

$$C_t - C_0$$

è detta **interesse**.

Se un capitale viene dato in prestito per un certo periodo, alla scadenza la quantità restituita è il montante, cioè il capitale iniziale più l'interesse.
Nel caso in cui $t < t_0$

$$C_t = C_0 v(t, t_0)$$

è detto **valore scontato** o **valore attuale**. Dunque il valore scontato o valore attuale è il valore di un capitale ad un tempo anteriore rispetto a quello in cui è a disposizione.
In tal caso la differenza

$$C_0 - C_t$$

è detta **sconto**.
Assegnata una legge di capitalizzazione, è facile determinare la corrispondente legge di sconto. Infatti, se $t' < t$, avremo:

$$C_{t'} = C_t v(t', t),$$

ma d'altra parte:

$$C_t = C_{t'} m(t, t') = C_t v(t', t) m(t, t')$$

da cui

$$v(t', t) = \frac{1}{m(t, t')}.$$

Perciò se $t < t_0$, in corrispondenza della legge di capitalizzazione m, si ha la seguente legge di sconto:

$$v(t, t_0) = \frac{1}{m(t_0, t)}. \tag{1.1}$$

Nei contratti finanziari devono essere fissate alcune condizioni:

1. $r =$**tasso unitario d'interesse**, cioè l'interesse prodotto nell'unità di tempo da un'unità di capitale, espresso in percentuale;

2. **periodo di impiego del capitale**, cioè la durata del contratto;

3. **periodo di capitalizzazione (degli interessi)**, cioè il tempo dopo il quale l'interesse diventa disponibile, ossia diventa capitale;

4. **regime di capitalizzazione**, cioè le norme che regolano l'operazione.

In generale il periodo di capitalizzazione è minore o uguale al periodo d'impiego del capitale. Vediamo alcuni regimi di capitalizzazione.

1.1.2 Regime di capitalizzazione semplice

Si assume che il periodo di capitalizzazione coincida con il periodo di impiego del capitale. L'interesse maturato dal tempo t_0 al tempo t ($t > t_0$) è dato da

$$C_0 r(t - t_0),$$

ossia l'interesse è proporzionale al capitale C_0 ed all'intervallo di tempo $t - t_0$ con costante di proporzionalità il tasso di interesse r.
La corrispondente legge di capitalizzazione risulta

$$m(t, t_0) = 1 + r(t - t_0)$$

e il montante è

$$C_t = C_0[1 + r(t - t_0)].$$

Si può inoltre determinare la relativa legge di sconto; tenendo presente la (1.1), per $t < t_0$ si ha

$$v(t, t_0) = \frac{1}{m(t_0, t)} = \frac{1}{1 + r(t_0 - t)},$$

da cui il capitale scontato risulta

$$C_t = \frac{C_0}{1 + r(t_{0-t})}.$$

1.1.3 Regime di capitalizzazione composta

Si assume che il periodo di capitalizzazione sia minore del periodo di impiego del capitale e più precisamente:

$$\frac{P_i}{P_c} = n$$

con:

- P_i = periodo di impiego del capitale;
- P_c = periodo di capitalizzazione;
- n = numero naturale.

Posto $P_c = 1$, risulta $P_i = n$.

Indichiamo con C_n il capitale dopo il periodo di impiego pari a n. Supponiamo dapprima $n = 1$, per cui rientriamo nel regime di capitalizzazione semplice e per quanto visto prima otteniamo

$$C_1 = C_0(1 + r),$$

essendo $t - t_0 = 1$.
Se poi supponiamo che il periodo di impiego sia 2 ed esprimiamo C_2 in termini dapprima di C_1 e poi di C_0, otteniamo:

$$C_2 = C_1(1 + r) = C_0(1 + r)^2.$$

Al periodo n ci sarà un capitale

$$C_n = C_0(1 + r)^n.$$

Se l'intervallo temporale è $t - t_0$, si ha

$$C_t = C_0(1 + r)^{t-t_0},$$

per cui la legge di capitalizzazione risulta

$$m(t, t_0) = (1 + r)^{t-t_0}.$$

L'interesse al tempo $t > t_0$ è dato da

$$C_t - C_0 = C_0[(1 + r)^{t-t_0} - 1].$$

Per la relativa legge di sconto si trova per $t < t_0$

$$v(t, t_0) = (1 + r)^{-(t_0-t)}$$

e il valore scontato di C_0 è dato da

$$C_t = C_0(1 + r)^{-(t_0-t)}.$$

La legge di capitalizzazione composta è anche detta legge di capitalizzazione esponenziale.
Introduciamo ora il regime di capitalizzazione che utilizzeremo successivamente nel modello di Black e Scholes.

1.1.4 Regime di capitalizzazione istantanea o regime di capitalizzazione in tempo continuo

Consideriamo un intervallo di tempo $[t_0, t]$ che supponiamo di dividere in k intervalli di uguale ampiezza Δt per cui $\Delta t = \dfrac{t - t_0}{k}$.
Sia Δt il periodo di capitalizzazione ed r il tasso unitario d'interesse.
In regime di capitalizzazione composta, al tempo t il montante sarà dato da

$$C_t = C_0(1 + r\Delta t)^k = C_0\Big(1 + r\frac{t - t_0}{k}\Big)^k.$$

Nel regime di capitalizzazione istantanea si fa tendere Δt a zero o equivalentemente k a $+\infty$. Poiché

$$\lim_{k\to+\infty}\Big(1 + r\frac{t - t_0}{k}\Big)^k = e^{r(t-t_0)},$$

con tale regime la legge di capitalizzazione è

$$m(t, t_0) = e^{r(t-t_0)},$$

il montante risulta

$$C_t = C_0e^{r(t-t_0)}$$

e l'interesse è dato da

$$C_t - C_0 = C_0[e^{r(t-t_0)} - 1].$$

In corrispondenza, la legge di sconto per $t < t_0$ è

$$v(t, t_0) = e^{-r(t_0-t)}$$

per cui il valore scontato di C_0 al tempo $t < t_0$ è dato da

$$C_t = C_0e^{-r(t_0-t)}.$$

Nel regime di capitalizzazione istantanea gli interessi maturano ad ogni istante e si accumulano al capitale.
Tale regime, che è di scarsa importanza pratica, ha rilevante importanza teorica, come vedremo nel seguito.

1.2 Nozioni di base sulle Opzioni classiche

Raccogliamo in questa sezione le nozioni di base che riguardano il mercato delle opzioni classiche.

Definizione 1.6 *Le opzioni sono contratti derivati che attribuiscono ad un soggetto, dietro pagamento di un corrispettivo denominato premio (prezzo delle opzioni), la facoltà, da esercitare entro la data di scadenza o alla data di scadenza, detta data di esercizio, di acquistare o vendere determinate attività ad un prezzo fissato, detto prezzo di esercizio.*

Dunque nel contratto intervengono due soggetti:

- l'**acquirente** (**holder**) che pagando il premio acquista la facoltà di esercitare l'opzione al prezzo di esercizio. Assume dunque posizione lunga ed acquista un diritto sull'attività sottostante senza però essere soggetto ad alcun obbligo;
- il **venditore** (**writer**) che rilascia l'opzione alla controparte ed assume posizione corta. La sua posizione implica un obbligo e non un diritto.

Le attività sottostanti il contratto possono essere rappresentate da merci o da strumenti finanziari come titoli di Stato, azioni indici di Borsa, tassi d'interesse, ecc.
La principale classificazione delle opzioni consiste nella differenziazione tra:

- **opzioni di acquisto** o **call options** che conferiscono al possessore la facoltà di acquistare ad un prezzo prestabilito;
- **opzioni di vendita** o **put options** che attribuiscono al possessore la facoltà di vendere ad un prezzo prestabilito.

Sotto il profilo del tempo in cui il diritto può essere esercitato, è possibile distinguere:

- **opzioni europee** se la facoltà può essere esercitata esclusivamente alla data di esercizio;
- **opzioni americane** se la facoltà può essere esercitata in qualsiasi momento entro la data di esercizio.

Consideriamo un'opzione call europea che ha T come data di esercizio. Sia X il prezzo di esercizio e $S(T)$ il prezzo del sottostante alla data T. Se $S(T) > X$, all'acquirente della call conviene esercitare l'opzione poiché acquista l'attività sottostante al prezzo X che è inferiore al suo prezzo di mercato

e dunque ha un profitto dato da $S(T) - X$. Ovviamente, se $S(T) \leq X$, l'acquirente di una call non esercita l'opzione ed ha una perdita pari al premio pagato alla stipula del contratto.
Se invece l'opzione è una put, all'acquirente conviene esercitare l'opzione se $S(T) < X$ perché così vende l'attività sottostante al prezzo X che è superiore al prezzo di mercato e dunque ha un profitto dato da $X - S(T)$. Ovviamente, se $S(T) \geq X$, l'acquirente di una put non esercita l'opzione ed ha una perdita pari al premio.
Ovviamente se consideriamo call o put americane, tale argomentazione si dovrebbe fare relativamente a tutti i tempi precendenti T.
Chi vende l'opzione ha una perdita (o un profitto) pari al profitto (o alla perdita) di chi ha acquistato l'opzione.
L'acquirente di una call come il venditore di una put si attende un aumento del prezzo dell'attività sottostante, mentre l'acquirente di una put così come il venditore di una call si aspetta una diminuzione di prezzo dell'attività sottostante.
Gli acquirenti di opzioni pagano un premio perché hanno illimitate possibilità di profitto, mentre hanno limitate possibilità di perdita (al massimo perdono il premio versato), all'opposto i venditori di opzioni ricevono un premio perché a fronte di profitti limitati hanno potenziali perdite illimitate.

Definizione 1.7 *Il valore intrinseco di un'opzione ad un tempo $t \leq T$ con T data di esercizio è definito come il massimo tra 0 e il valore che l'opzione avrebbe se fosse esercitata immediatamente.*

Dunque per una call il valore intrinseco è dato da $\max\{S(t) - X, 0\}$ e per una put il valore intrinseco è dato da $\max\{X - S(t), 0\}$.
Introduciamo ora tre proprietà, delle opzioni call e put, che ci saranno utili nel seguito per applicare il modello di Black e Scholes anche ad opzioni diverse dalle call europee; a tal scopo introduciamo le seguenti notazioni:

- S è il prezzo dell'azione sottostante l'opzione;
- X è il prezzo di esercizio dell'opzione;
- τ è la vita residua, che al tempo t è uguale a $T - t$ con T data di esercizio;
- $c(S, \tau, X)$ è il valore (o prezzo) di una call europea, C se americana;
- $p(S, \tau, X)$ è il valore (o prezzo) di una put europea, P se americana;
- $B(\tau)$ il prezzo di un'obbligazione priva di rischio che paga un'unità di conto dopo un tempo pari a τ per cui $B(0) = 1$.

Per la dimostrazione delle seguenti proprietà rimandiamo a [1, paragrafi 2.2 e 2.3]

Proposizione 1.1 *In assenza di dividendi*

$$c(S, \tau, X) \geq \max\{S - XB(\tau), 0\}.$$

Proposizione 1.2 *In assenza di dividendi una call americana non verrà mai esercitata prima della scadenza e quindi ha lo stesso valore di una corrispondente call europea*

$$C(S, \tau, X) = c(S, \tau, X).$$

La proposizione seguente stabilisce un'importante relazione che lega le call e le put europee, aventi come sottostante un'azione, nota come **relazione di parità put - call**.

Proposizione 1.3 *Nelle ipotesi che i tassi d'interesse attivi e passivi siano uguali e in assenza di dividendi si ha:*

$$p(S, \tau, X) = c(S, \tau, X) - S + XB(\tau).$$

Come si può facilmente intuire le opzioni sono titoli rischiosi, tuttavia un loro aspetto importante che sfrutteremo nel modello di Black e Scholes è quello di **copertura del rischio**.
Infatti è possibile combinare una o più opzioni con il titolo sottostante, in modo tale che o il titolo sottostante protegga le opzioni in caso di perdita o le opzione proteggano il titolo da perdite.
Prima di fare ciò introduciamo la seguente definizione

Definizione 1.8 *Un portafoglio è un insieme di quantità detenute di titoli (una quantità per ogni titolo).*

Ora per attuare un esempio di copertura del rischio nel nostro portafoglio assumiamo simultaneamente una posizione di segno opposto su una o più call e sul titolo sottostante rappresentato da un certo numero di azioni, quindi a noi serve sapere qual è il numero ottimale di call e di azioni su cui assumere posizioni opposte per avere una protezione perfetta dal rischio.
Supponiamo di avere un portafoglio con una posizione lunga su una call avente come sottostante un'azione e con una posizione corta sull'azione stessa.
La Figura 1.1 mostra il grafico del prezzo della call in funzione del prezzo azionario.

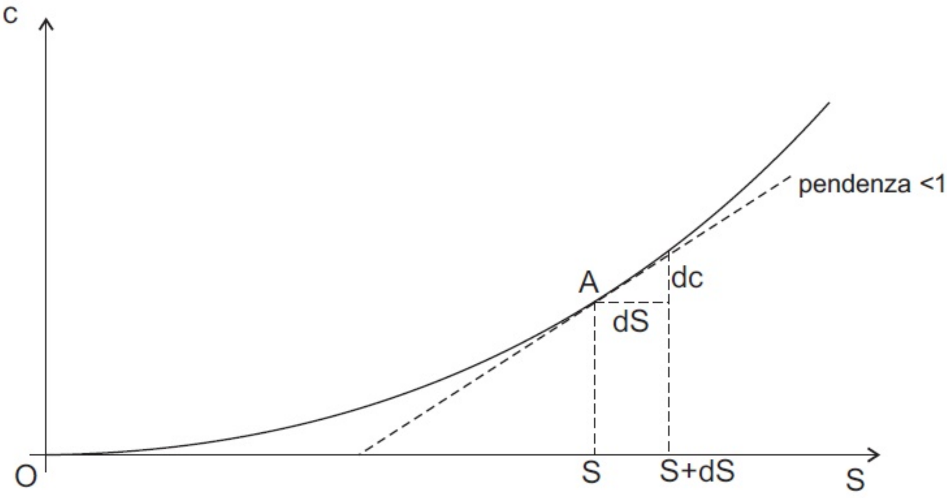


Figura 1.1: Delta hedging

Supponiamo che il prezzo dell'azione sia tale da trovarci nel punto A della figura. Se il prezzo azionario presenta un incremento dS, il nostro portafoglio, a causa della posizione corta sull'azione, subirà una variazione pari a $-dS$ e dunque una perdita, ma contemporaneamente avrà un guadagno pari all'incremento dc che il prezzo della call ha a causa dell'aumento del prezzo dell'azione. Tuttavia, se teniamo presente che $\partial_S c < 1$, deduciamo che $dc < dS$. Allora il portafoglio subisce in complesso una perdita a causa dell'aumento del prezzo azionario. Dunque con una call e una sola azione non si ha copertura perfetta dal rischio. Ma con opportuni aggiustamenti di posizioni si può eliminare la perdita del portafoglio.
Definiamo infatti la quantità denominata delta di un'opzione call:

$$\Delta = \partial_S c < 1.$$

Se anziché avere una posizione corta su un'azione si avesse una posizione corta su Δ azioni, allora un aumento del prezzo azionario di dS determinerebbe una perdita pari a ΔdS, che è molto vicino a dc se l'incremento dS è molto piccolo. Di conseguenza il guadagno nella posizione in opzioni viene controbilanciato, in via approssimata, dalla perdita nella posizione opposta nell'azione.
L'approssimazione è tanto migliore quanto più piccola è la variazione.
La procedura che consiste nel controbilanciare i cambiamenti in c con una posizione di segno opposto in Δ unità del titolo sottostante è detta **delta hedging**. Il portafoglio così ottenuto si dice **neutrale** rispetto a Δ. Un tale

portafoglio non è soggetto a movimenti imprevedibili, cioè coperto e come tale esente da rischi.
Osserviamo che la posizione del portafoglio resta neutrale, per un periodo relativamente breve perché Δ cambia durante la vita di un'opzione. In pratica, quando si utilizza una strategia di delta hedging, il portafoglio deve essere aggiustato periodicamente.
È facile provare che si può ottenere un portafoglio coperto anche assumendo una posizione lunga su un'azione e una posizione corta su un numero di opzioni call con sottostante l'azione stessa pari a $\frac{1}{\Delta}$.
Se consideriamo ora un'opzione put europea scritta su un'azione che non paga dividendi, definiamo la quantità denominata delta di un'opzione put nel modo seguente:

$$\Delta = \partial_S p < 0.$$

Poiché si tratta di un valore negativo, per avere copertura dal rischio bisogna assumere posizioni dello stesso segno sulla put e sull'azione sottostante.

1.3 Parte stocastica

Iniziamo col sottolineare che mentre nei processi deterministici si studia un fenomeno che dipende dal tempo, di cui siamo in grado di prevederne l'evoluzione esatta al trascorrere del tempo, per descrivere quei fenomeni la cui evoluzione è influenzata da eventi casuali non è più adeguata l'analisi classica ed occorre introdurre i **processi stocastici** studiati nell'ambito del calcolo stocastico che si basa sulla teoria della probabilità. In particolare nel settore finanziario, non è possibile prevedere con esattezza il prezzo futuro di un dato titolo rischioso, ad esempio un'azione, conoscendone la storia passata, perché questo presenta un'influenza del caso. Infatti eventi imprevedibili, come ad esempio il fallimento di una società, la caduta di un governo, un atto terroristico di notevole violenza possono produrre notevoli oscillazioni nel prezzo dei titoli in Borsa. A causa delle frequenti ed intense variazioni dovute ad eventi casuali la funzione che alla variabile t associa il valore di un'azione non risulta derivabile e dunque non può essere soluzione di un'equazione differenziale ordinaria.

1.3.1 Processi stocastici

Sia $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ uno spazio di probabilità e sia Λ un insieme non vuoto, i cui elementi sono gli istanti che vengono presi in considerazione ai fini dello studio del fenomeno evolutivo. In genere avremo $\Lambda = [0, +\infty)$ o $[0, T]$ o un sottoinsieme numerabile di $\mathbb{R}$ o anche $\mathbb{N}$.

Definizione 1.9 *Un processo stocastico è un'applicazione*

$$X : \Lambda \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad (o\ \mathbb{R}^n)$$

tale che per ogni $t \in \Lambda$ fissato

$$X(t, \cdot) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad (o\ \mathbb{R}^n)$$

è una variabile casuale sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Definizione 1.10 *Definiamo realizzazione o traiettoria o funzione campione del processo stocastico relativa allo stato ω fissato in Ω la funzione del tempo*

$$X(\cdot, \omega) : \Lambda \longrightarrow \mathbb{R} \quad (o\ \mathbb{R}^n).$$

Dunque un processo stocastico si può vedere come una famiglia di variabili casuali dipendente dal parametro reale t che varia in Λ o come l'insieme di tutte le funzioni campione relative agli stati, che sono funzioni del tempo definite in Λ.
Nel seguito useremo la notazione $X_t(\cdot)$ in luogo di $X(t, \cdot)$ e dunque scriveremo $X_t(\omega)$ in luogo di $X(t, \omega)$.
Introduciamo ora un processo stocastico per noi fondamentale, ovvero i processi di Wiener che giocano un ruolo importante nella descrizione, in tempo continuo, dell'andamento "normale" dei prezzi dei titoli di un mercato finanziario. Con l'aggettivo "normale" intendiamo escludere eventi rari, come un crollo finanziario.

Definizione 1.11 *Un processo di Wiener standard è un processo stocastico W_t con $t \geq 0$ tale che:*

- $W_0 = 0$ *quasi sicuramente;*
- W_t *ha incrementi indipendenti, ovvero scelti quattro tempi $0 \leq s_1 \leq t_1 \leq s_2 \leq t_2$ (tali che gli intervalli (s_1, t_1) e (s_2, t_2) non si intersecano), allora $W_{t_1} - W_{s_1}$ e $W_{t_2} - W_{s_2}$ sono variabili casuali indipendenti;*
- *ogni incremento $W_t - W_s$ con $0 \leq s < t$ ha distribuzione normale con media nulla e varianza $t - s$, ossia $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$.*

Nella definizione di processo di Wiener non standard va modificata soltanto la penultima proprietà nel modo seguente:

$$W_t - W_s \sim N(0, \sigma^2(t - s)) \quad \forall 0 \leq s < t$$

con σ costante positiva.
Per semplicità nel seguito ci limiteremo a prendere in considerazione solo processi di Wiener standard.

1.3.2 Integrale stocastico di Itô

Nel calcolo stocastico intervengono integrali in cui la funzione integranda può anche essere un processo stocastico G_t e l'integratore è un processo di Wiener, W_t, cioè integrali della forma

$$\int_{t_0}^{T} G_t dW_t.$$

Ovviamente in tal caso l'integrale non è un numero, ma una funzione a valori reali definita su Ω, essendo G_t e W_t variabili casuali per cui:

$$\forall \omega \in \Omega \quad \Big(\int_{t_0}^{T} G_t dW_t \Big)(\omega) = \int_{t_0}^{T} G(t,\omega) dW(t,\omega).$$

Dunque nell'integrale sopra scritto compaiono le traiettorie di W_t relative ai vari stati ω, che, come sappiamo, sono funzioni a variazione illimitata in ogni intervallo di tempo finito.
Diamo la definizione di integrale di Itô procedendo per passi successivi a partire dal caso più semplice per arrivare al caso più generale.
Siano $G(t,\omega)$ una funzione a valori reali definita su $[t_0, T] \times \Omega$ e W_t un processo di Wiener.

1. Supponiamo che la funzione G sia costante, ossia

   $$G(t,\omega) = g = \text{costante} \quad \forall (t,\omega) \in [t_0, T] \times \Omega.$$

   Allora definiamo l'integrale stocastico di Itô di G rispetto a W_t da t_0 a T nel modo seguente:

   $$I_G = \int_{t_0}^{T} G dW_t = g(W_T - W_{t_0}).$$

   Osservazione 1.1 Ovviamente, essendo W_T e W_{t_0} variabili casuali, l'integrale I_G così definito è a sua volta una variabile casuale e dunque

   $$\forall \omega \in \Omega \quad I_G(\omega) = g(W_T(\omega) - W_{t_0}(\omega)).$$

2. Supponiamo che la funzione G sia non stocastica, ossia che $G(t,\omega) = G(t)$ e che $G(t)$ sia una **funzione semplice elementare**, ossia che esista una partizione Π dell'intervallo $[t_0, T]$ ottenuta mediante i punti: $t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ tale che

   $$G(t) = g_j \quad (\textit{costante}) \quad \text{se} \quad t_{j-1} \leq t < t_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

e

$$G(t_n = T) = g_n.$$

Possiamo anche scrivere:

$$G(t) = \sum_{j=1}^{n} g_j \chi_{[t_{j-1},t_j)}(t) \quad \forall t \in [t_0, T)$$

e

$$G(t_n = T) = g_n,$$

dove $\chi_{[t_{j-1},t_j)}(t)$ è la funzione caratteristica dell'intervallo $[t_{j-1}, t_j)$.

In Figura 1.2 è rappresentato il grafico di una funzione $G(t)$ non stocastica semplice elementare.

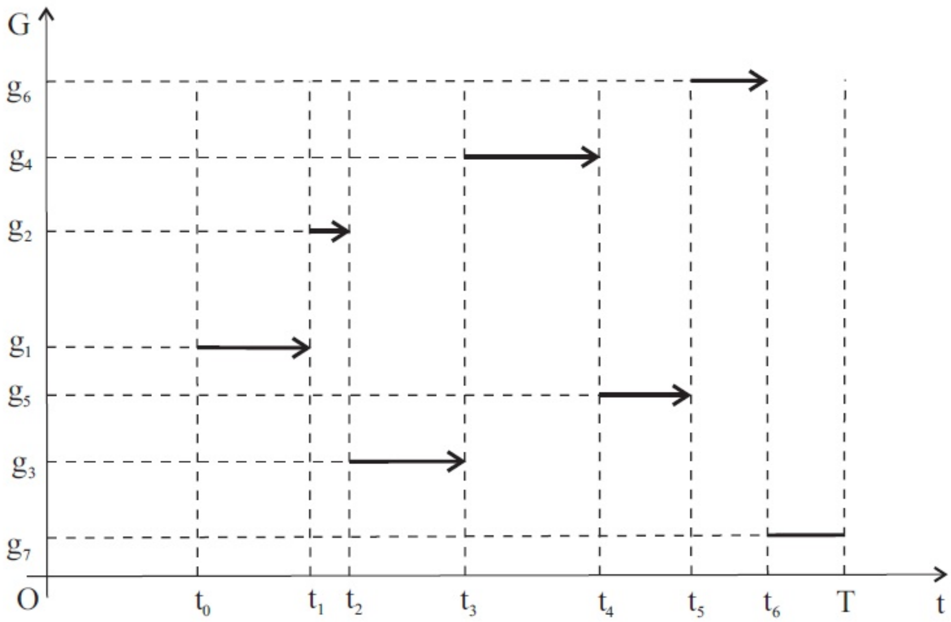


Figura 1.2: Grafico di una funzione semplice

Si definisce integrale stocastico di Itô di G rispetto a W_t a t_0 a T la seguente variabile casuale:

$$I_G = \int_{t_0}^{T} G(t) dW_t = \sum_{j=1}^{n} g_j (W_{t_j} - W_{t_{j-1}}).$$

3. Nel caso generale supponiamo che la funzione G sia stocastica, ossia:

$$G : [t_0, T] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(t, \omega) \longmapsto G(t, \omega).$$

L'integrale di Itô viene definito purché siano soddisfatte da G le ipotesi seguenti:

1. La funzione G è $\mathcal{B}([t_0, T]) \otimes \mathcal{A}$-misurabile;
2. $G(t, \omega)$ è non anticipante;
3. $E\Big(\displaystyle\int_{t_0}^{T} |G(t, \omega)|^2 dt\Big) < +\infty.$

Le condizioni 1. e 3. sono essenzialmente di carattere tecnico, mentre la 2., che ora definiremo, detta **condizione di non anticipazione (NA)**, è la più significativa.

Definizione 1.12 *Diciamo che la funzione stocastica $G : [t_0, T] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ soddisfa alla condizione di non anticipazione se $\forall t \in [t_0, T]$ $G(t, \cdot)$ è misurabile rispetto alla σ- algebra $\mathcal{I}_{[t_0,t]} = \sigma(\{W_\tau : t_0 \leq \tau \leq t\})$, ossia rispetto alla σ-algebra generata dai W_τ con $\tau \in [t_0, t]$.*

Osservazione 1.2 Richiedere che la funzione $G(t, \cdot)$ sia non anticipante equivale a richiedere che la variabile casuale $G(t, \cdot)$ dipenda soltanto dai valori passati e correnti del processo di Wiener e non dai suoi valori futuri. Se teniamo presente la definizione di processo di Wiener per cui l'incremento $W_s - W_t$ è indipendente da $W_t = W_t - W_0$ se $s > t$, deduciamo che, grazie alla condizione di non anticipazione, $G(t, \cdot)$ è indipendente da $W_s - W_t$ con $s > t$.

Denotiamo con $\mathcal{V}([t_0, T])$ la classe delle funzioni stocastiche soddisfacenti alle condizioni 1,2,3.
Noi definiremo l'integrale di Itô per funzioni appartenenti alla classe di funzioni $\mathcal{V}([t_0, T])$.
Prima di dare la definizione generale di integrale stocastico di Itô, enunciamo il seguente

Lemma 1.4 *Sia $G(t, \omega) \in \mathcal{V}([t_0, T])$; esiste allora una successione $G_n(t, \omega)$ di funzioni stocastiche semplici elementari appartenenti alla classe $\mathcal{V}([t_0, T])$ tale che*

$$\lim_{n \to +\infty} E\Big(\int_{t_0}^{T} |G_n(t, \omega) - G(t, \omega)|^2 dt\Big) = 0. \tag{1.2}$$

Diamo ora la definizione di integrale di Itô nel caso generale.

Definizione 1.13 *Se $G(t,\omega) \in \mathcal{V}([t_0,T])$, si definisce l'integrale stocastico di Itô di G rispetto a W_t da t_0 a T nel modo seguente:*

$$I_G := \int_{t_0}^{T} G(t,\cdot)dW_t = \lim_{n\to+\infty} \int_{t_0}^{T} G_n(t,\cdot)dW_t, \tag{1.3}$$

dove G_n è una successione di funzioni stocastiche semplici elementari appartenenti alla classe $\mathcal{V}([t_0,T])$ tale che sia soddisfatta la condizione (1.2) *e il limite è intenso nel senso della norma L^2, cioè in media quadratica.*

1.3.3 Differenziale stocastico ed equazioni differenziali stocastiche

In ambiente stocastico non c'è una definizione formale di derivata. Il differenziale stocastico acquista significato solo in virtù dell'integrale stocastico di Itô.

Definizione 1.14 *Sia X_t un processo stocastico (a valori in $\mathbb{R}$) definito in $[t_0,T]$ soddisfacente $\forall t \in [t_0,T]$ quasi certamente alla relazione seguente:*

$$X_t(\omega) = X_{t_0}(\omega) + \int_{t_0}^{t} F(\tau,\omega)d\tau + \int_{t_0}^{t} G(\tau,\omega)dW_\tau \tag{1.4}$$

dove F è una funzione reale misurabile rispetto alla σ-algebra $\mathcal{B}([t_0,T]) \otimes \mathcal{A}$, non anticipante e tale che l'integrale di Lebesgue $\int_{t_0}^{t} F(\tau,\omega)d\tau < +\infty$ quasi sicuramente $\forall t \in [t_0,T]$, G è una funzione reale che appartiene alla classe $\mathcal{V}([t_0,T])$ e X_{t_0} è una variabile casuale misurabile rispetto alla σ-algebra generata da W_{t_0}. Un tale processo stocastico prende il nome di processo di Itô. Diremo in tal caso che X_t ha differenziale stocastico dato da:

$$dX_t = F(t,\cdot)dt + G(t,\cdot)dW_t. \tag{1.5}$$

Il differenziale stocastico è, quindi, solo una scrittura simbolica per esprimere la relazione (1.4) in maniera più compatta.

Definizione 1.15 *Si definisce equazione differenziale stocastica di Itô un'equazione della forma:*

$$dX_t = \mu(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dW_t, \tag{1.6}$$

per la quale l'incognita è rappresentata dal processo stocastico X_t.

Del processo stocastico X_t si devono determinare le traiettorie e le probabilità ad esse associate.
Per quanto riguarda le funzioni μ e σ, il coefficiente σ è detto coefficiente di diffusione, mentre μ, detto coefficiente di drift ossia di direzione, è un coefficiente che descrive l'andamento del processo. Si assume che μ e σ siano funzioni deterministiche assegnate.
W_t è un processo di Wiener adattato ad una opportuna famiglia di strutture informative.
Il termine dW_t rappresenta gli eventi imprevedibili che si verificano durante l'intervallo temporale infinitesimo dt e che influenzano l'andamento del processo in tale intervallo.
All'equazione differenziale stocastica (1.6) si associa la condizione iniziale

$$X_{t_0} = \xi,$$

dove ξ è una variabile casuale nota che rappresenta il valore del processo stocastico all'istante iniziale t_0; per tale ragione ξ è detta valore iniziale.
La (1.6) unita alla condizione iniziale è un modo simbolico per scrivere:

$$X_t = \xi + \int_{t_0}^{t} \mu(\tau, X_\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t} \sigma(\tau, X_\tau)dW_\tau. \tag{1.7}$$

Come si vede dalla (1.7), trovare la soluzione di un'equazione differenziale stocastica di Itô significa determinare la dipendenza dai valori passati e contemporanei del processo di Wiener.
Si noti che se $\sigma = 0$, l'unica influenza stocastica su X_t è quella esercitata dalla variabile casuale ξ.
Noi ci limiteremo a considerare solo processi stocastici X_t e W_t a valori reali.

Definizione 1.16 *L'equazione differenziale stocastica* (1.6) *si dice linerare se μ e σ si presentano nella forma:*

$$\mu(t, X_t) = A_t X_t + a_t, \qquad \sigma(t, X_t) = B_t X_t + b_t, \tag{1.8}$$

con A_t, B_t, a_t, b_t. Se $a_t = b_t = 0$, l'equazione si dice lineare ed omogenea, se $B_t = 0$, l'equazione si dice lineare in senso stretto.

Passiamo ora a considerare le equazioni differenziali stocastiche lineari di tipo generale:

$$dX_t = (A_t X_t + a_t)dt + (B_t X_t + b_t)dW_t$$

con la condizione iniziale

$$X_{t_0} = \xi.$$

Mediante la formula di Itô (si veda ad esempio Borrelli [1, Teorema 6.1]), la formula risolutiva di tale problema è data da:

$$X_t = \Psi_{t,t_0}\Big(\xi + \int_{t_0}^{t} \Psi^{-1}_{\tau,t_0}(a_\tau - B_\tau b_\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t} \Psi^{-1}_{\tau,t_0} b_\tau dW_{tau}\Big), \tag{1.9}$$

dove Ψ_{t,t_0} è soluzione del problema

$$d\varphi_t = A_t\varphi_t dt + B_t\varphi_t dW_t$$

$$\varphi_{t_0} = 1. \tag{1.10}$$

Si noti che l'equazione differenziale stocastica soddisfatta da Ψ_{t,t_0} è l'equazione omogenea associata a quella di partenza.
Tuttavia la formula risolutiva scritta sopra non si può in genere esplicitare in forma completa perché non si riesce a determinare Ψ_{t,t_0} esplicitamente. Ciò è possibile se i coefficienti A_t e B_t sono costanti, ossia $A_t = A$, $B_t = B$ con A, B costanti. Infatti in tal caso si ha:

$$\Psi_{t,t_0} = e^{(A-\frac{B^2}{2})(t-t_0)+B(W_t-W_0)} = e^{(A-\frac{B^2}{2})(t-t_0)}e^{B(W_t-W_0)}. \tag{1.11}$$

1.3.4 Processo geometrico

Un processo geometrico è un processo stocastico che soddisfa l'equazione differenziale stocastica lineare omogenea:

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t$$

con μ e σ costanti e la condizione iniziale

$$X_0 = \xi \quad (t_0 = 0).$$

Dunque in tal caso:

$$A_t = \mu, \quad a_t = 0, \quad B_t = \sigma, \quad b_t = 0.$$

Si ha perciò:

$$\Psi_{t,0} = e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W_t}, \quad X_t = \xi\Psi_{t,0}. \tag{1.12}$$

Una proprietà interessante del processo geometrico la si ottiene esplicitando la (1.12) e tenendo presente che $X_0 = \xi$, otteniamo:

$$X_t = X_0 e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W_t} \tag{1.13}$$

da cui

$$\log \frac{X_t}{X_0} = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t, \tag{1.14}$$

dove abbiamo assunto $X_0 \neq 0$.
Si può dimostrare che $\log \frac{X_t}{X_0}$ segue una distribuzione Gaussiana con media $(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t$ e varianza $\sigma^2 t$.
Tenendo presente la definizione di variabile casuale avente distribuzione log-normale, possiamo asserire che, se X_t è un processo geometrico, allora $\frac{X_t}{X_0}$ ha una distribuzione log-normale.

Capitolo 2

Il modello di Black e Scholes

In questo capitolo ci occupiamo del modello di Black e Scholes; iniziamo col ricavare l'equazione e nella sezione successiva ci occupiamo della determinazione della sua soluzione.

2.1 L'equazione di Black e Scholes

La formula di Black e Scholes fu ottenuta da F. Black e M. Scholes nel 1973 e R.C. Merton nello stesso anno ne diede varie generalizzazioni. Essa consente di trovare una soluzione al problema della valutazione del prezzo delle opzioni call europee prima della data di esercizio.
Il modello poggia su alcune ipotesi, valide sia nel mercato delle opzioni sia in quello del titolo sottostante, che in questo caso è un'azione.
Le ipotesi sono le seguenti:

1. il mercato è perfetto, ovvero:
    - è perfettamente competitivo, ossia gli operatori non sono in grado di influenzare il prezzo dei titoli con le loro operazioni;
    - è privo di attriti, ossia non ci sono costi di transazione e/o tasse ed è possibile vendere allo scoperto senza nessuna penalità (ci si puó indebitare indefinitamente), si puó acquistare e/o vendere in quantità arbitrarie ed infinitamente divisibili ad un tasso d'interesse r a breve termine, noto e costante nel tempo;
    - c'è assenza di possibilità di arbitraggio;
2. il prezzo del titolo sottostante segue un processo geometrico per cui

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \tag{2.1}$$

con μ tasso d'interesse atteso, σ volatilità dell'azione e W_t processo di Wiener;

3. il prezzo di esercizio X dell'opzione è noto e costante nel tempo, il titolo sottostante non paga dividendi.

Consideriamo il caso di un'opzione call europea.
Il valore dell'opzione, grazie alle ipotesi formulate, dipende solo dal prezzo del sottostante e dal tempo t. Scriveremo dunque $c = c(t, S)$ dove S è il prezzo azionario e t indica il tempo. Supporremo $t \in (0, T]$, essendo T la data di scadenza della call. Teniamo poi presente che al tempo T, cioè alla scadenza dell'opzione, si deve avere

$$c(T, S_T) = \max\{S_T - X, 0\},$$

con S_T prezzo azionario al tempo T.
L'idea alla base del modello di valutazione di Black e Scholes consiste nella creazione di un portafoglio coperto formato da una posizione lunga sull'azione e una posizione corta su un certo numero di azioni in modo tale che, in equilibrio, il suo rendimento sia esattamente uguale a quello di un'attività priva di rischio. A tale scopo utilizziamo un procedimento di delta-hedging: il portafoglio pertanto è formato da un'azione su cui si assume posizione lunga e da un numero di call pari a $\frac{1}{\Delta}$, con $\Delta = \partial_S c$, su cui si assume posizione corta. Se la copertura viene realizzata con continuità il portafoglio diventa totalmente indipendente dalle fluttuazioni del prezzo dell'azione e il suo rendimento è certo.
Indicato con V il valore del portafoglio, avremo:

$$V = S - \frac{1}{\Delta} c.$$

L'unico fattore di rischio per V è rappresentato dal prezzo S dell'azione da cui V dipende sia direttamente che indirettamente tramite c.
Come sappiamo S ha carattere stocastico ed è descritto dal processo geometrico (2.1), anche c ha carattere stocastico ed è descritto dal processo stocastico

$$c_t = c(t, S_t).$$

Se assumiamo che la funzione $c(t, S_t)$ sia continua e siano continue $\partial_t c$,$\partial_S c$ e $\partial^2_{SS} c$, il differenziale stocastico di c_t è dato dalla formula di Itô. Tenendo presente che $S = S_t$ per cui $F = \mu S_t$ e $G = \sigma S_t$, otteniamo:

$$dc_t = \partial_t c(t, S_t)dt + \partial_S c(t, S_t)dS_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \partial^2_{SS} c(t, S_t)dt.$$

Consideriamo ora l'evoluzione temporale di V nell'intervallo $(t, t+\Delta t)$ con Δt così piccolo da poter ritenere costante in tale intervallo il Δ della call che perciò nelle successive argomentanzioni considereremo dato da $\Delta = \partial_S c(t, S_t)$. Nell'intervallo di tempo considerato, abbiamo che V è descritto dal processo stocastico:

$$V_t = S_t - \frac{c_t}{\Delta}$$

e quindi:

$$dV_t = dS_t - \frac{dc_t}{\Delta}. \tag{2.2}$$

Nel seguito, per non appesantire la scrittura, ometteremo il pedice t.
Se nella (2.2) andiamo a sostituire al differenziale stocastico del prezzo dell'azione la sua espressione e al differenziale stocastico di c la formula di Itô scritta sopra, deduciamo:

$$\begin{aligned} dV =& \mu S dt + \sigma S dW - \frac{1}{\Delta}\left(\partial_t c dt + \mu S \partial_S c dt + \sigma S \partial_S c dW + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \partial^2_{SS} c dt\right) \\ =& \left[\mu S - \frac{1}{\Delta}\left(\partial_t c + \mu S \partial_S c + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \partial^2_{SS} c\right)\right] dt + \sigma S\left(1 - \frac{1}{\Delta}\partial_S c\right) dW. \end{aligned}$$

D'altra parte il coefficiente di dW è nullo poiché $\Delta = \partial_S c$ e dunque con la strategia di delta-hedging viene eliminata l'influenza di eventi casuali sulla variazione del valore del portafoglio.
L'espressione di dV risulta perciò:

$$\begin{aligned} dV =& \left[\mu S\left(1 - \frac{1}{\Delta}\partial_S c\right) - \frac{1}{\Delta}\left(\partial_t c + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \partial^2_{SS} c\right)\right] dt \\ =& -\frac{1}{\Delta}\left(\partial_t c + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \partial^2_{SS} c\right) dt. \end{aligned} \tag{2.3}$$

A questo punto osserviamo che, avendo supposto l'assenza di possibilità di arbitraggio, poiché il portafoglio è privo di rischio, si comporta come un'obbligazione priva di rischio.
Adottando il regime di capitalizzazione istantanea, il valore B_t al tempo t di un'obbligazione che al tempo $t = 0$ ha valore B_0 sarà tale che:

$$B_t = B_0 e^{rt}$$

con r tasso d'interesse di mercato.
B_t è una funzione non stocastica e dunque il suo differenziale è dato da

$$dB_t = r B_0 e^{rt} dt = r B_t dt.$$

Avremo allora che per il portafoglio sussiste la relazione:

$$dV = rVdt = r\left(S - \frac{c}{\Delta}\right)dt. \tag{2.4}$$

Sostituendo nella (2.3), otteniamo

$$-\frac{1}{\Delta}\left(\partial_t c + \frac{\sigma^2}{2}S^2\partial^2_{SS}c\right)dt = r\left(S - \frac{c}{\Delta}\right)dt$$

da cui moltiplicando entrambi i membri per Δ deduciamo:

$$-\partial_t c - \frac{\sigma^2}{2}S^2\partial^2_{SS}c = r\Delta S - rc.$$

Infine, tenendo presente che $\Delta = \partial_S c$, arriviamo alla seguente equazione differenziale alle derivate parziali del secondo ordine:

$$\partial_t c + \frac{\sigma^2}{2}S^2\partial^2_{SS}c + rS\partial_S c - rc = 0 \tag{2.5}$$

L'equazione (2.5) è detta equazione di Black e Scholes.
L'incognita di tale equazione è la funzione di due variabili $c(t, S)$ che rappresenta il prezzo di una call europea.
All'equazione, che deve essere soddisfatta per $t \in (0, T)$, dobbiamo associare la condizione finale:

$$c(T, S_T) = \max\{S_T - X, 0\}. \tag{2.6}$$

2.2 La formula di Black e Scholes

Riscriviamo l'equazione di Black e Scholes:

$$\partial_t c + \frac{\sigma^2}{2}S^2\partial^2_{SS}c + rS\partial_S c - rc = 0.$$

Come osservato, è un'equazione alle derivate parziali nelle due variabili indipendenti (t, S) con funzione incognita $c(t, S)$; in particolare si tratta di un'equazione del II ordine, lineare ed omogenea.
Notiamo che l'equazione è di tipo parabolico in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(t, 0) : t \in \mathbb{R}\}$. Infatti in tale insieme i coefficienti delle derivate seconde non si annullano simultaneamente e il discriminante è nullo.
Possiamo inoltre notare che l'equazione non è ridotta alla II forma canonica perché il coefficiente della derivata seconda rispetto a S non è uguale a

1. Osserviamo poi che all'equazione è associata la condizione (2.6) che non è una condizione iniziale, bensì una condizione finale e dunque non rientra tra le usuali condizioni ai limiti che vengono associate ad un'equazione alle derivate parziali nella quale compaia tra le variabili il tempo.

Ci proponiamo di mostrare che con una trasformazione regolare delle variabili indipendenti e con un cambiamento di funzione incognita è possibile ricondurci ad un'equazione di tipo parabolico ridotta alla seconda forma canonica e contemporaneamente trasformare la condizione finale in una usuale condizione iniziale o di Cauchy per un'equazione di tipo parabolico.

Esponiamo il procedimento "originale" seguito da Black e Scholes.

Teniamo presente che, essendo nella realtà il prezzo di un'azione sempre positivo, noi consideriamo l'equazione (2.5) in $(0, T) \times (0, +\infty)$, dove l'equazione è di tipo parabolico.

Introduciamo in luogo di (t, S) le due nuove variabili (z, u) così definite:

$$\begin{aligned} z =& -\frac{2}{\sigma^2}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 (t - T) \\ u =& \frac{2}{\sigma^2}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\left[\log\frac{S}{X} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t - T)\right]. \end{aligned}$$

Ovviamente si assume $r \neq \dfrac{\sigma^2}{2}$.
Tale trasformazione delle variabili indipendenti risulta regolare, come si può facilmente verificare. Inoltre il trasformato del dominio $(0, T) \times (0, \infty)$ è $(0, z_0) \times \mathbb{R}$ con $z_0 = T\dfrac{2}{\sigma^2}\left(r - \dfrac{\sigma^2}{2}\right)^2$.
Facciamo poi un cambiamento di funzione incognita prendendo come nuova incognita la funzione $Y(z, u)$ tale che:

$$c(t, S) = e^{r(t-T)}Y(z, u).$$

Applicando il teorema di derivazione delle funzioni composte e denotando per semplicità con Y_u, Y_z, Y_{uu} la derivata prima rispetto a u e z e la derivata seconda rispetto a u della funzione Y, otteniamo:

$$
\begin{aligned}
\partial_t c(t,S) =& r e^{r(t-T)} Y(z,u) - e^{r(t-T)}[Y_z(z,u) + Y_u(z,u)] \frac{2}{\sigma^2}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 \\
\partial_S c(t,S) =& e^{r(t-T)} Y_u(z,u)\left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right)\frac{1}{S} \\
\partial^2_{SS} c(t,S) =& e^{r(t-T)} Y_{uu}(z,u)\left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right)^2 \frac{1}{S^2} - e^{r(t-T)} Y_u(z,u)\left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right)\frac{1}{S^2}.
\end{aligned}
$$

Se sostituiamo nell'equazione (2.5), dividendo entrambi i membri per $e^{r(t-T)}$ e facendo qualche prima semplificazione, deduciamo:

$$
\begin{aligned}
-\frac{2}{\sigma^2}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 (Y_z + Y_u) + \frac{\sigma^2}{2}\left[\left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right)^2 Y_{uu} - \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right) Y_u\right] + \\
+ r\left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right) Y_u = 0. \qquad (2.7)
\end{aligned}
$$

Dividendo entrambi i membri della (2.7) per $\left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right)$ e semplificando, otteniamo:

$$
-\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(Y_z + Y_u) + \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right) Y_{uu} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) Y_u = 0
$$

da cui

$$
-\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) Y_z + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) Y_{uu} = 0.
$$

Infine dividendo per $\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)$, arriviamo alla seguente equazione:

$$
Y_z = Y_{uu} \qquad (2.8)
$$

che ha la stessa forma dell'equazione del calore omogenea in due variabili in cui in luogo della variabile temporale t e della variabile spaziale x compaiono rispettivamente le variabili z e u definite in precedenza e $a = 1$. Ricordiamo infatti che quest'ultima equazione è usualmente scritta nella forma:

$$
\frac{1}{a^2} v_t = v_{xx}
$$

dove v è la funzione incognita e a è una costante positiva.
Mostriamo ora che con le nuove variabili indipendenti e con la nuova funzione incognita la condizione (2.6), che risultava finale per l'equazione (2.5), si

trasforma in una condizione iniziale per l'equazione trasformata (2.8).

Infatti:

$$c(T, S_T) = e^{r(T-T)} Y\left(0, \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right) \log \frac{S_T}{X}\right) = Y(0, u_T).$$

Dunque la (2.6), si riduce a:

$$Y(0, u_T) = \max\{S_T - X, 0\}$$

poiché per $t = T$ si ha $z = 0$.
Vediamo di esprimere anche il secondo membro di questa condizione iniziale mediante le nuove variabili.
Osserviamo in primo luogo che dalle equazioni della trasformazione delle variabili indipendenti si deduce

$$\log \frac{S}{X} = \frac{u - z}{\frac{2r}{\sigma^2} - 1}.$$

Quindi per $t = T$, ossia per $z = 0$, abbiamo

$$\log \frac{S_T}{X} = \frac{u_T}{\frac{2r}{\sigma^2} - 1} \qquad \Longrightarrow \qquad S_T = X e^{\frac{u_T}{\frac{2r}{\sigma^2} - 1}}.$$

In conclusione la condizione (2.6) ora si scrive nella forma:

$$Y(0, u_T) = \max\left\{X\left(e^{\frac{u_T}{\frac{2r}{\sigma^2} - 1}} - 1\right), 0\right\}. \tag{2.9}$$

Tale condizione può essere ulteriormente precisata.

Consideriamo dapprima il caso in cui $\frac{2r}{\sigma^2} - 1 > 0$.
Allora

$$e^{\frac{u_T}{\frac{2r}{\sigma^2} - 1}} - 1 \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{u_T}{\frac{2r}{\sigma^2} - 1} \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad u_T \geq 0.$$

Dunque nel caso in cui $\frac{2r}{\sigma^2} - 1 > 0$

$$\begin{aligned}
\max\left\{X\left(e^{\frac{u_T}{\frac{2r}{\sigma^2} - 1}} - 1\right), 0\right\} &= 0 && \text{se} \quad u_T < 0 \\
\max\left\{X\left(e^{\frac{u_T}{\frac{2r}{\sigma^2} - 1}} - 1\right), 0\right\} &= X\left(e^{\frac{u_T}{\frac{2r}{\sigma^2} - 1}} - 1\right) && \text{se} \quad u_T > 0
\end{aligned}$$

e la (2.6) diviene

$$\begin{aligned} Y(0,u_t) =&0 \qquad\qquad\qquad \text{se} \qquad u_T<0 \\ Y(0,u_t) =&X\left(e^{\frac{u_T}{\frac{2r}{\sigma^2}-1}}-1\right) \qquad \text{se} \qquad u_T>0. \end{aligned} \tag{2.10}$$

In maniera analoga si procede per il caso opposto: $\dfrac{2r}{\sigma^2}-1<0$.

In conclusione la determinazione del prezzo di una call europea è basata sulla ricerca della soluzione in $[0,z_0)\times\mathbb{R}$ del problema che si ottiene associando all'equazione (2.8) la condizione iniziale:

$$Y(0,u)=g(u)$$

dove, se per il momento ci limitiamo a considerare il caso $\dfrac{2r}{\sigma^2}-1>0$, g è così definità:

$$\begin{aligned} \text{se} \qquad u\geq 0 \qquad g(u) =&X\left(e^{\frac{u_T}{\frac{2r}{\sigma^2}-1}}-1\right) \\ \text{se} \qquad u<0 \qquad g(u) =&0. \end{aligned}$$

Ricaviamo ora la soluzione classica dell'equazione (2.8), cioè una funzione $v\in\mathbf{C}^{1,2}((0,+\infty)\times\mathbb{R})$, derivabile con continuità una volta nel tempo e due volte nello spazio, che soddisfa l'equazione data in ogni punto (t,x) con $t>0$. Si noti che condizione necessaria affinché il problema di Cauchy che abbiamo formulato ammetta soluzione è che $g\in\mathbf{C}(\mathbb{R})$.

Si possono dimostrare diversi teoremi di esistenza e unicità della soluzione del problema (2.8), (2.9) a seconda delle proprietà di regolarità del dato iniziale g.
Un teorema classico di esistenza della soluzione di Cauchy per l'equazione del calore richiede che la funzione g sia continua e limitata in $\mathbb{R}$. Ma per il problema di Black e Scholes tale teorema non è applicabile perché la funzione g non è limitata.

Ai fini di ciò che vogliamo ottenere è per noi conveniente enunciare il seguente teorema che stabilisce l'esistenza della soluzione classica del problema di Cauchy (2.8), (2.9) in $(0,+\infty)\times\mathbb{R}$ con un dato iniziale non limitato.

Teorema 2.1 *Supponiamo che la funzione g sia continua in $\mathbb{R}$ e sia tale che*

$$|g(x)|\leq Ce^{d|x|^\gamma} \qquad \forall x\in\mathbb{R} \tag{2.11}$$

dove C, d, γ sono costanti positive con $\gamma < 2$.
Allora la funzione $v(t,x)$ definita per ogni $(t,x) \in \forall(t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}$ da:

$$v(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_t(x,y)g(y)dy \tag{2.12}$$

con

$$K_t(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}},$$

è soluzione classica del problema di Cauchy (2.8)*),* (2.9) *in* $[0,+\infty) \times \mathbb{R}$.

<u>Dimostrazione</u>
In primo luogo osserviamo che la funzione

$$K_t(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}},$$

detta **nucleo di Gauss–Weierstrass**, definita in $(0,+\infty) \times \mathbb{R}^2$, per ogni y fissato in $\mathbb{R}$ gode delle seguenti proprietà, facilmente verificabili:

1. $\lim_{t \to 0^+} K_t(x,y) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{y\}$;

2. $K_t(x,y) \in \mathbf{C}^\infty((0,+\infty) \times \mathbb{R})$;

3. $K_t(x,y)$ è soluzione dell'equazione del calore (2.8) in $(0,+\infty) \times \mathbb{R}$;

4. $\forall t > 0$ fissato
$$\int_{-\infty}^{+\infty} K_t(x,y)dx = 1.$$

La proprietà 4. si ottiene immediatamente osservando che per y fissato in $\mathbb{R}$ e per $t > 0$ fissato, il nucleo di Gauss–Weierstrass rappresenta la funzione di densità di probabilità di una variabile casuale con distribuzione Gaussiana avente media uguale a y e varianza uguale a $2t$.
Se si fissa x in $\mathbb{R}$, il nucleo di Gauss–Weierstrass, come funzione di (t,y), gode di proprietà del tutto analoghe alle quattro sopra elencate.

Mostriamo ora che $v \in \mathbf{C}^{1,2}((0,+\infty) \times \mathbb{R})$, anzi che $\mathbf{C}^\infty((0,+\infty) \times \mathbb{R})$, ossia che la funzione v possiede continue le derivate di ogni ordine rispetto a t e a x in $(0,+\infty) \times \mathbb{R}$ e che tali derivate si ottengono dalla (2.12) derivando il nucleo di Gauss-Weierstrass sotto il segno di integrale.
A tal fine osserviamo che se deriviamo rispetto a t e a x un certo numero di volte sotto il segno di integrale, l'integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K_t(x,y)g(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} g(y)dy,$$

otteniamo una combinazione lineare a coefficienti costanti di integrali del tipo:

$$I_{k,m}(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^{k+\frac{1}{2}}}(x-y)^m e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} g(y)dy, \tag{2.13}$$

dove k, m sono numeri interi non negativi.
In particolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} g(y)dy = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} I_{0,0}(t,x).$$

Per il teorema di analisi di derivazione sotto il segno di integrale, il risultato che ci proponiamo di ottenere risulta provato se mostriamo che l'integrale (2.13) è uniformemente convergente rispetto a (t,x) su ogni rettangolo $\mathcal{R} := [t_0, T] \times [-l, l] \in \mathbb{R}^2$ con t_0, T, l numeri positivi arbitrari, qualunque siano k, m.
Ricordiamo che l'integrale (2.13) converge uniformemente rispetto a (t,x) su ogni rettangolo $[t_0, T] \times [-l, l]$ se in corrispondenza di ognuno di tali rettangoli esiste una funzione $\varphi(y)$ non negativa e sommabile in $\mathbb{R}$ tale che

$$\forall (t,x) \in \mathcal{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \left| \frac{1}{t^{k+\frac{1}{2}}}(x-y)^m e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} g(y) \right| \le \varphi(y). \tag{2.14}$$

D'altra parte, $\forall (t,x) \in \mathcal{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$\left| \frac{1}{t^{k+\frac{1}{2}}}(x-y)^m e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} g(y) \right| \le \frac{1}{t_0^{k+\frac{1}{2}}}(l+|y|)^m e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} |g(y)|. \tag{2.15}$$

Inoltre, se $(t,x) \in \mathcal{R}$, possiamo scrivere:

$$e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \le e^{-\frac{(x-y)^2}{4T}} = e^{-\frac{x^2+y^2-2xy}{4T}} = e^{-\frac{x^2}{4T}} e^{\frac{-y^2+2xy}{4T}} \le e^{\frac{-y^2+2l|y|}{4T}}. \tag{2.16}$$

Tenendo presente (2.15) e (2.16), preso un numero $\delta > 0$, che per il momento supponiamo arbitrario, otteniamo:

$$\forall (t,x) \in \mathcal{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

$$\left| \frac{1}{t^{k+\frac{1}{2}}}(x-y)^m e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} g(y) \right| \le \frac{1}{t_0^{k+\frac{1}{2}}}(l+|y|)^m e^{\frac{-y^2+2l|y|}{4T}} e^{\frac{y^2}{\delta}} |g(y)| e^{-\frac{y^2}{\delta}}. \tag{2.17}$$

Per la (2.11) abbiamo:

$$|g(y)| e^{-\frac{y^2}{\delta}} \le C e^{-\frac{y^2}{\delta}(1-d\delta|y|^{\gamma-2})}. \tag{2.18}$$

Poiché $\gamma < 2$, deduciamo che la funzione

$$\frac{C}{t_0^1 k + \frac{1}{2}}(l + |y|)^m e^{-\frac{y^2}{\delta}(1-d\delta|y|^{\gamma-2})}$$

è sommabile su $\mathbb{R}$.
Allora per concludere che ogni integrale $I_{k,m}(t,x)$ è uniformemente convergente rispetto a (t,x) su ogni rettangolo $\mathcal{R}$ è sufficiente provare che, scegliendo in maniera opportuna il numero δ, la funzione

$$e^{\frac{-y^2+2l|y|}{4T}} e^{\frac{y^2}{\delta}} = e^{\frac{(4T-\delta)y^2+2l\delta|y|}{4\delta T}}$$

è limitata in $\mathbb{R}$.
A tal fine poniamo:

$$f(y) = (4T-\delta)y^2 + 2l\delta|y| \qquad \forall y \in \mathbb{R}$$

ed assumiamo $\delta > 4T$.
Come si verifica facilmente, il grafico della funzione $f(y)$ per $y \geq 0$ è l'arco di parabola che parte dall'origine, ha la convessità rivolta verso il basso, ha il vertice nel punto di ascissa $y_v = \dfrac{l\delta}{\delta - 4T}$ e di ordinata $f(y_v) = \dfrac{l^2\delta^2}{\delta - 4T}$, interseca nuovamente l'asse y nel punto di ascissa $\dfrac{2l\delta}{\delta - 4T}$ e dopo tale punto giace al di sotto dell'asse y.
Ovviamente, il grafico di $f(y)$ per $y \leq 0$ è l'arco di parabola simmetrico rispetto all'asse delle ordinate dell'arco di parabola che rappresenta il grafico della funzione per $y \geq 0$.
Dunque

$$\forall y \in \mathbb{R} \qquad f(y) \leq f(y_v) = \frac{l^2\delta^2}{\delta - 4T},$$

da cui deduciamo

$$\forall y \in \mathbb{R} \qquad e^{\frac{-y^2+2l|y|}{4T}} e^{\frac{y^2}{\delta}} \leq e^{\frac{l^2\delta}{4T(\delta-4T)}}.$$

In conclusione, posto

$$M = \frac{C}{t_0^{k+\frac{1}{2}}} e^{\frac{l^2\delta}{4T(\delta-4T)}},$$

otteniamo la (2.14) con $\varphi(y)$ data da

$$\varphi(y) = M(l + |y|)^m e^{-\frac{y^2}{\delta}(1-d\delta|y|^{\gamma-2})}.$$

Perciò $v \in \mathbf{C}^\infty((0,+\infty)\times\mathbb{R})$, ossia la funzione v possiede continue le derivate di ogni ordine rispetto a t e a x in $(0,+\infty)\times\mathbb{R}$ e tali derivate si ottengono dalla (2.12) derivando il nucleo di Gauss–Weierstrass sotto il segno di integrale.
Da tale risultato deduciamo immediatamente che v è soluzione dell'equazione (2.8) in $(0,+\infty)\times\mathbb{R}$, poiché lo è il nucleo di Gauss–Weierstrass come funzione di (t,x) per ogni y fissato in $\mathbb{R}$.
Infatti $\forall (t,x) \in (0,+\infty)\times\mathbb{R}$ si ha

$$\partial_t v(t,x) - \partial^2_{xx} v(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\partial_t K_t(x,y) - \partial^2_{xx} K_t(x,y)] g(y) dy = 0.$$

Perché il teorema sia dimostrato in maniera completa occorre infine provare che la funzione v, che è continua in $(0,+\infty)\times\mathbb{R}$, è continua anche per $t=0$. Tenendo presente come v è definita per $t=0$, è sufficiente mostrare che

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \lim_{t\to 0^+} v(t,x) = g(x).$$

Per brevità omettiamo la dimostrazione di quest'ultimo risultato.

Osservazione 2.1 Il teorema continua a sussistere se nell'equazione del calore omogenea la costante positiva a è diversa da 1. In tal caso il nucleo di Gauss–Weierstrass ha la forma seguente:

$$K_t(x,y) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}}.$$

Ritorniamo ora al problema di Black e Scholes:

$$Y_z = Y_{uu} \tag{2.19}$$

$$Y(0,u) = g(u) \tag{2.20}$$

dove g è così definita:

$$\begin{array}{lll} \text{se} & u \geq 0 & g(u) = X\left(e^{\frac{u}{\frac{2r}{\sigma^2}-1}} - 1\right) \\ \text{se} & u < 0 & g(u) = 0. \end{array}$$

Poiché il problema di partenza era considerato in $(0,T]\times(0,+\infty)$, per la relazione che sussiste tra le vecchie variabili e (t,S) e le nuove (z,u), il problema (2.19), (2.20), cui siamo pervenuti deve essere risolto in $[0,z_0)\times\mathbb{R}$ dove z_0 è il valore che assume z per $t=0$ dato da

$$z_0 = \frac{2}{\sigma^2}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 T.$$

Come è facile verificare, la funzione g soddisfa alle ipotesi del Teorema 2.1. Infatti, tenendo presente la definizione di g, vediamo che è continua in $\mathbb{R}$ e che verifica la seguente disuguaglianza

$$|g(u)| \leq X e^{\frac{|u|}{\frac{2r}{\sigma^2}-1}} \qquad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Dunque è soddisfatta la condizione (2.11) con

$$C = X, \quad d = \frac{1}{\frac{2r}{\sigma^2}-1}, \quad \gamma = 1.$$

Allora, grazie al Teorema 2.1, sappiamo scrivere la soluzione del problema di Cauchy per l'equazione (2.19) con dato iniziale g e la soluzione del problema di Black e Scholes è la sua restrizione a $[0, z_0) \times \mathbb{R}$.
Dunque la soluzione del problema (2.19), (2.20) $\forall (z,u) \in (0, z_0) \times \mathbb{R}$ è data da

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi z}} e^{-\frac{(u-\xi)^2}{4z}} g(\xi) d\xi,$$

ossia per come è definita g

$$Y(z,u) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi z}} e^{-\frac{(u-\xi)^2}{4z}} X\left(e^{\frac{\xi}{\frac{2r}{\sigma^2}-1}} - 1\right) d\xi \qquad \forall (z,u) \in (0, z_0) \times \mathbb{R}. \tag{2.21}$$

Effettuiamo un cambiamento della variabile d'integrazione nella (2.21), ponendo $q = -\dfrac{u-\xi}{\sqrt{2z}}$.
Tenendo presente che se $\xi = 0$ allora $q = -\dfrac{u}{\sqrt{2z}}$, che se $\xi \to +\infty$ allora $q \to +\infty$ e che inoltre $dq = \dfrac{d\xi}{\sqrt{2z}}$, la (2.21) si scrive nella forma

$$Y(z,u) = \int_{-\frac{u}{\sqrt{2z}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2}{2}} X\left(e^{\frac{q\sqrt{2z}+u}{\frac{2r}{\sigma^2}-1}} - 1\right) dq. \tag{2.22}$$

A questo punto poniamo:

$$d_1 = \frac{\log \frac{S}{X} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\log \frac{S}{X} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

Allora per $t < T$:

$$\frac{u}{\sqrt{2z}} = \frac{\frac{2}{\sigma^2}\Big(r-\frac{\sigma^2}{2}\Big)\log\frac{S}{X} - \frac{2}{\sigma^2}\Big(r-\frac{\sigma^2}{2}\Big)^2(T-t)}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{2}{\sigma^2}}\sqrt{\Big(r-\frac{\sigma^2}{2}\Big)^2(T-t)}} =$$

$$= \frac{\log\frac{S}{X} + \Big(r-\frac{\sigma^2}{2}\Big)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_2,$$

$$\frac{q\sqrt{2z}+u}{\frac{2r}{\sigma^2}-1} = \sigma q\sqrt{T-t} + \log\frac{S}{X} + \Big(r-\frac{\sigma^2}{2}\Big)(T-t).$$

La (2.22) si può perciò scrivere nella forma

$$Y(z,u) = \int_{-d_2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2}{2}} X\Big(e^{\sigma q\sqrt{T-t}+\log\frac{S}{X}+\Big(r-\frac{\sigma^2}{2}\Big)(T-t)} - 1\Big)dq =$$

$$-\int_{-d_2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2}{2}} X dq + \int_{-d_2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2}{2}} X \frac{S}{X} e^{\sigma q\sqrt{T-t}+\Big(r-\frac{\sigma^2}{2}\Big)(T-t)} dq =$$

$$= -XN(d_2) + \int_{-d_2}^{+\infty} \frac{S}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(q^2-2\sigma q\sqrt{T-t}+\sigma^2(T-t))} e^{r(T-t)} dq =$$

$$= -XN(d_2) + \int_{-d_2}^{+\infty} \frac{S}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(q-\sigma\sqrt{T-t})^2} e^{r(T-t)} dq =$$

dove abbiamo posto:

$$N(d) = \int_{-\infty}^{d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds$$

che è la funzione di distribuzione per una distribuzione Gaussiana standard (media 0 e varianza 1) e nel I integrale a secondo membro (nella seconda riga) abbiamo fatto il cambiamento di variabile d'integrazione $q = -s$.
Riguardo al secondo integrale, cambiamo variabile d'integrazione ponendo $y = q - \sigma\sqrt{T-t}$ per cui $q = -d_2 \Longrightarrow y = -d_2 - \sigma\sqrt{T-t} = -d_1$. Perciò l'integrale si scrive come

$$\begin{aligned} S\int_{-d_2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(q-\sigma\sqrt{T-t})^2} e^{r(T-t)} dq =& Se^{r(T-t)} \int_{-d_1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\ =& Se^{r(T-t)} N(d_1). \end{aligned}$$

In conclusione per $Y(z,u)$ troviamo la seguente espressione:

$$Y(z,u) = Se^{r(T-t)}N(d_1) - XN(d_2).$$

Per la relazione tra $c(t,S)$ e $Y(z,u)$ infine deduciamo:

$$c(t,S) = SN(d_1) - Xe^{-r(T-t)}N(d_2) \tag{2.23}$$

che è la **formula di Black e Scholes per la valutazione del prezzo di una call europea**.

Alla formula (2.23) siamo pervenuti supponendo $\dfrac{2r}{\sigma^2} - 1 > 0$. Alla medesima formula si arriva nell'ipotesi opposta $\dfrac{2r}{\sigma^2} - 1 < 0$.
Possiamo riassumere i risultati trovati nel seguente teorema

Teorema 2.2 *Se sono soddisfatte le ipotesi enunciate all'inizio della sezione 2.1 il prezzo $c = c(t,S)$ di un'opzione call europea per $t < T$ è dato dalla formula di Black e Scholes (2.23).*

Notiamo che nell'espressione di $c(t,S)$ compaiono S e $Xe^{-r(T-t)}$ che rappresenta il prezzo scontato al tempo attuale e che questi sono ponderati con $N(d_1)$ e $N(d_2)$.

Osservazione 2.2 Dalla formula di Black e Scholes, tenendo presente le espressioni di d_1 e d_2, vediamo che per stabilire il prezzo di una call europea al tempo attuale bisogna conoscere i seguenti dati:

- il prezzo di esercizio X e la data di esercizio T stabiliti nel contratto;
- il tasso d'interesse di mercato r;
- il prezzo S e la volatilità σ dell'azione sottostante.

Esempio
Ci proponiamo di determinare il prezzo di una call europea al tempo attuale t conoscendo i seguenti dati:

$$S_t = 100 \quad X = 105 \quad r = 20\% \quad \sigma = 30\% \quad T - t = 0,5.$$

In primo luogo calcoliamo d_1 e d_2 che risultano dati da

$$d_1 \simeq 0,35, \quad d_2 \simeq 0,14.$$

In secondo luogo si determinano i valori approssimati di $N(d_1)$ e $N(d_2)$:

$$N(d_1) \simeq 0,6368, \quad N(d_2) \simeq 0,5557.$$

Infine sostituendo nella formula di Black e Scholes i valori trovati e i rimanenti datisi ottiene

$$c \simeq 10,89.$$

Rappresentiamo nella Figura 2.1 il grafico del prezzo al tempo t di un'opzione call in funzione del prezzo dell'azione sottostante assumendo il prezzo di esercizio $X = 105$, la vita residua $T - t = 0,5$, $r = 20\%$ e $\sigma = 30\%$.

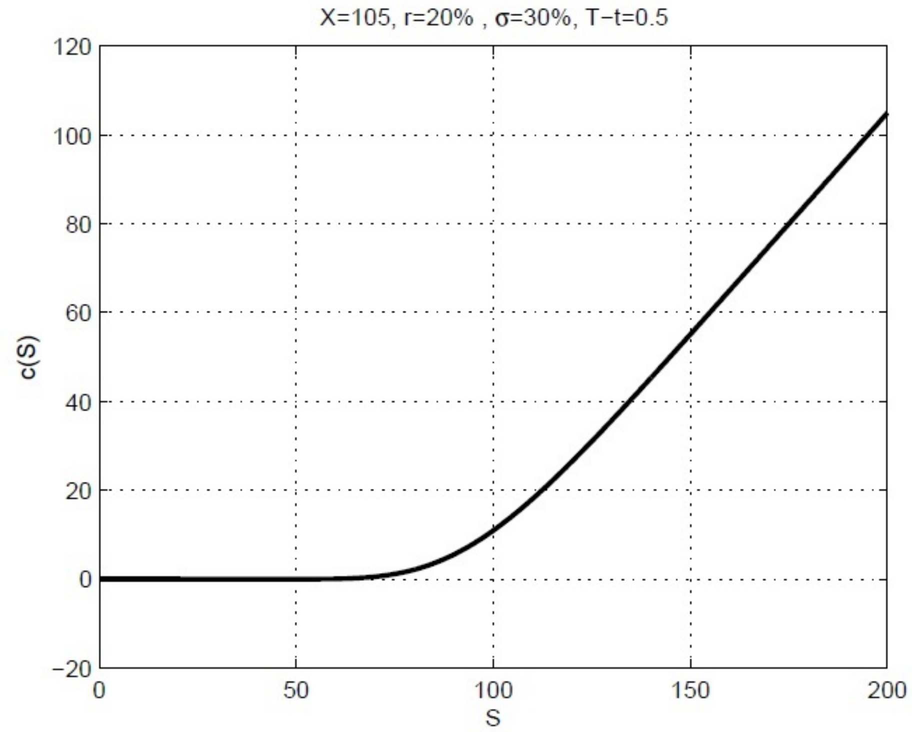


Figura 2.1: Prezzo di una opzione call in funzione del prezzo dell'azione sottostante.

2.3 Estensioni ed applicazioni

La formula che abbiamo stabilito per la valutazione del prezzo delle call europee si può estendere anche alle call americane aventi come sottostante un'azione, poiché siamo nelle ipotesi di assenza di arbitraggio e di assenza di dividendi. Infatti grazie alla proposizione (1.2), in tali ipotesi, il valore di una call americana è esattamente uguale a quello di una call europea.

Il modello di Black e Scholes può essere applicato, con opportune modifiche, anche alle opzioni put europee, tenendo presente che per tali opzioni Δ è negativo.
In questo caso, facendo le stesse ipotesi e sfruttando gli stessi argomenti visti per le call, si compone un portafoglio coperto costituito da una posizione lunga su un'azione e una posizione lunga su $\frac{1}{|\Delta|}$ opzioni put. La copertura perfetta è mantenuta modificando con continuità l'ammontare di put nel

portafoglio.
Seguendo lo stesso ragionamento svolto per le call, troviamo che il valore $p(t,S)$ di una put è soluzione di un'equazione differenziale analoga alla (2.5):

$$\partial_t p + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \partial^2_{SS} p + rS\partial_S p - rp = 0 \tag{2.24}$$

cui si associa la condizione alla scadenza T:

$$p(T, S_T) = \max\{X - S_T, 0\}.$$

Si ottiene pertanto una soluzione analoga alla (2.23), data da

$$p(t,S) = -SN(-d_1) + Xe^{-r(T-t)}N(-d_2). \tag{2.25}$$

Si può pervenire alla (2.25) anche più velocemente utilizzando la formula di Black e Scholes per la valutazione del prezzo delle opzioni call e la relazione di parità put-call vista nei preliminari.
Precisamente, se indichiamo con $p(t,S)$ il prezzo di una put europea, avente come sottostante un'azione con valore S, con prezzo di esercizio X e data di esercizio T, abbiamo:

$$p(t,S) = c(t,S) - S + XB(T-t) \tag{2.26}$$

dove $c(t,S)$ è il prezzo di una call europea con uguale prezzo di esercizio, uguale data di esercizio e uguale azione sottostante, mentre $B(\tau)$ è il prezzo di un'obbligazione priva di rischio che paga un'unità di conto dopo un tempo pari a τ.
Se si suppone costante il tasso annuo di interesse e che il regime di capitalizzazione sia quello di capitalizzazione istantanea, si ha

$$B(T-t) = e^{-r(T-t)},$$

per cui la (2.26) si scrive nella forma:

$$p(t,S) = c(t,S) - S + Xe^{-r(T-t)}.$$

Se ora a $c(t,S)$ sostituiamo l'espressione data dalla formula di Black e Scholes otteniamo:

$$\begin{aligned} p(t,S) =& SN(d_1) - Xe^{-r(T-t)}N(d_2) - S + Xe^{-r(T-t)} \\ =& S(N(d_1) - 1) + Xe^{-r(T-t)}(1 - N(d_2)). \end{aligned}$$

D'altra parte

$$1 - N(d) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \int_{-\infty}^{d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{d}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Se nell'ultimo integrale scritto sopra facciamo il cambiamento di variabile d'integrazione $x = -y$, deduciamo:

$$1 - N(d) = \int_{-\infty}^{-d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = N(-d).$$

In definitiva troviamo che la formula che consente di prevedere il prezzo di una put europea è la (2.25). Vediamo di ricalcolare il Δ per una put europea utilizzando non la (2.25) ma la relazione di parità put-call e il valore di Δ trovato per una call:

$$\Delta = \frac{\partial p}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial S}(c - S + Xe^{-r(T-t)}) = \frac{\partial c}{\partial S} - 1 = N(d_1) - 1 = -N(d_1).$$

Perciò per una put europea si ha $\Delta \in (-1, 0)$, questo ha delle conseguenze sulle strategie di delta-hedging che coinvolgono le opzioni put europee aventi un'azione come titolo sottostante. Infatti in tal caso, come abbiamo già osservato, occorre tenere una posizione dello stesso segno sulla put e sull'azione.

Usando la relazione di parità put-call oppure derivando direttamente la (2.25) si possono calcolare tutte le derivate di $p(t, S)$ corrispondenti a quelle di $c(t, S)$ che abbiamo calcolato nella sezione precedente.
Ad esempio si può provare che:

$$\frac{\partial p}{\partial S} < 0, \quad \frac{\partial^2 p}{\partial S^2} > 0, \ldots.$$

Nel caso generale di opzioni put americane non è possibile determinare una formula esplicita per la valutazione del loro prezzo $P(t, S)$ perché, essendo conveniente esercitarla prima della data di scadenza, è incerta la data in cui vengono esercitate.
Solo nel caso delle put americane perpetue, ossia senza data di scadenza, poiché il tempo è ininfluente, è possibile determinare un'espressione esplicita per il loro prezzo, ma su questo non ci dilunghiamo.

2.3.1 Applicazione della formula di Black e Scholes: valutazione dei titoli emessi da un'impresa

Consideriamo un'impresa che si finanzi emettendo obbligazioni zero-coupon (ossia privi di cedole) ed azioni, ossia titoli di debito e di capitale. Alla

scadenza T l'impresa è soggetta ad una promessa di pagamento pari a D (valore nominale del debito) agli obbligazionisti.
Al tempo T l'impresa liquida i beni e distribuisce i ricavi. Sia V il valore di liquidazione dell'impresa. In primo luogo al tempo T devono essere pagati i detentori delle obbligazioni e in un secondo tempo gli azionisti se vi è la possibilità di pagarli, ossia:

- se $V > D$ gli obbligazionisti ricevono D e gli azionisti $V - D$;
- se $V \leq D$ gli obbligazionisti ricevono V e gli azionisti 0.

Perciò al tempo T gli azionisti ricevono $\max\{V - D, 0\}$ e dunque la valutazione delle azioni emesse dall'impresa è analoga a quella di un'opzione call europea avente come sottostante il valore V dell'impresa, prezzo di esercizio uguale a D e scadenza uguale alla scadenza T del debito.
Se assumiamo che il valore V dell'impresa segua un processo geometrico, cioè che si abbia

$$dV = \mu V dt + \sigma V dW$$

con μ e σ costanti e W processo di Wiener, la formula di valutazione delle azioni è ottenibile dalla formula di Black e Scholes sostituendo V al posto di S, D al posto di X, interpretrando $T - t$ come la vita residua del debito e σ^2 come il tasso d'interesse del rendimento dell'impresa.
Si ottiene:

$$c = VN(d_1') - De^{-r(T-t)}N(d_2')$$

dove

$$d_1' = \frac{\log \frac{V}{D} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2' = \frac{\log \frac{V}{D} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1' - \sigma\sqrt{T-t}.$$

Dividendo il valore di c per il numero delle azioni emesse dall'impresa è possibile valutare il prezzo equo dell'azione.
Consideriamo ora quanto ricevono alla data T gli obbligazionisti.
Gli obbligazionisti ricevono $\min\{V, D\} = D - \max\{D - V, 0\}$.
Il termine $\max\{D - V, 0\}$ viene a rappresentare il pagamento di un'opzione put europea avente come sottostante il valore V dell'impresa, prezzo di esercizio uguale a D e scadenza uguale alla scadenza T del debito. Il valore di tale put al tempo t è dato allora da

$$p = -VN(-d_1') + De^{-r(T-t)}N(-d_2')$$

dove d_1' e d_2' sono i parametri definiti in precedenza che compaiono in c. Allora al tempo T il valore delle obbligazioni emesse dall'impresa è dato da

$$y_T = D - p_T$$

e dunque al tempo $0 \leq t < T$ il valore delle obbligazioni è

$$\begin{aligned} y = &\quad De^{-r(T-t)} - p \\ = &\quad De^{-r(T-t)} + VN(-d_1') - De^{-r(T-t)}N(-d_2') \\ = &\quad VN(-d_1') + De^{-r(T-t)}(1 - N(-d_2')) \\ = &\quad VN(-d_1') + De^{-r(T-t)}N(d_2'). \end{aligned}$$

Perciò in ogni istante possiamo valutare il valore complessivo delle obbligazioni emesse da un'impresa e dividendo per il numero delle obbligazioni possiamo dedurre il valore equo di ogni obbligazione.

Esempio
Si considerino i seguenti dati relativi ad un'impresa:
$D = 80$, $V = 70$, $r = 1\%$ annuo, data di liquidazione $T = 10$ anni, $\sigma = 40\%$ annuo.
Se non ragioniamo in termini di formula di Black e Scholes ed andiamo a valutare la situazione dell'impresa al tempo $t = 0$ facendo la differenza tra il valore dell'impresa e il valore scontato del debito si ottiene:

$$V - De^{-rT} = 70 - 80e^{-0,1} = -2,317.$$

L'impresa appare indebitata e un investitore su tale base non comprerebbe azioni dell'impresa stessa.
Se invece calcoliamo il valore dell'impresa distribuito in azioni utilizzando la formula di Black e Scholes, otteniamo:

$$c = VN(d_1') - De^{-r(T-t)}N(d_2') = 32,485.$$

Dunque l'impresa, pur indebitata, può suscitare interesse negli investitori poiché ha ampi margini di miglioramento.

2.4 Alcune simulazioni con Matlab

Abbiamo implementato nell'ambiente Matlab la formula discreta per il modello di Black-Scholes:

$$S_n = x \exp\left((r - \sigma^2)n\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\sum_{i=1}^{n} G_i) \right);$$

come riferimento per questa sezione abbiamo preso il libro di Lamberton-Lapeyre [2]. Abbiamo approssimato i processi di Wiener W_t con le variabili aleatorie G_i che si possono rappresentare con variabili di Bernoulli che valgono 1 o -1 con probabilità $\frac{1}{2}$ e sono state implementate con la funzione rand di Matlab.
Abbiamo ottenuto in questo modo l'andamento del sottostante al variare di $n = \frac{t}{\Delta t}$ discretizzazione del tempo.
Si allegano per la simulazione in matlab della formula di Black e Scholes la function e lo script rispettivamente, con a fianco anche i commenti che ne spiegano il significato.

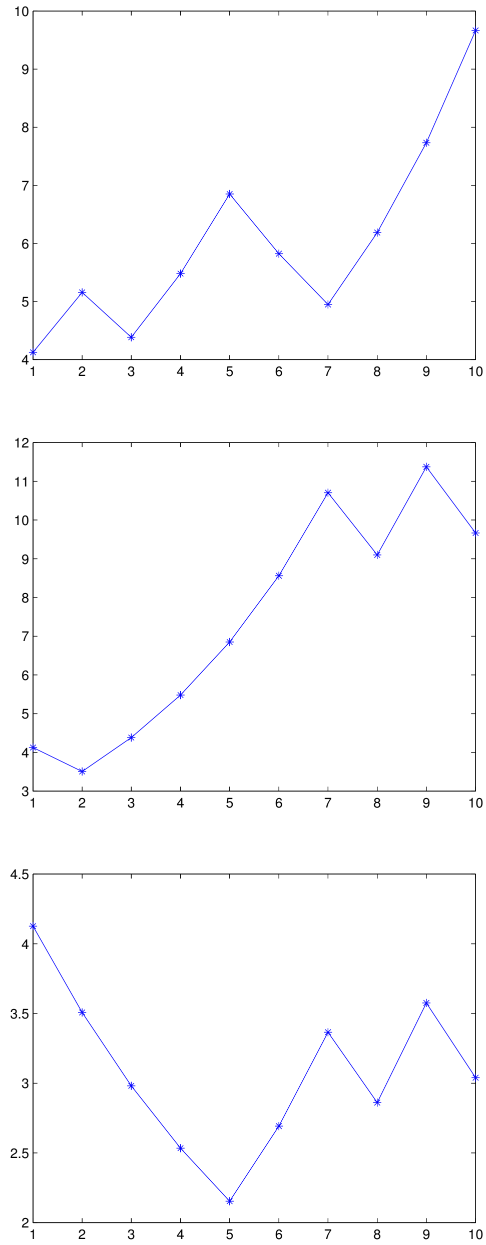
```
function y=BS(x_0,r,sigma,t) %funzione formula di Black e Scholes


for i=1:length(t)   % ciclo che scorre il vettore degli anni
    delta=1;        % ad ogni anno è associato un valore
    c=rand(1);      %|
    if c>0.5        %|
        v=1;        %|implementazione della funzione di bernoulli
    else            %|per ogni istante di tempo i
        v=-1;       %|
    end
    y(i)=x_0 * (1+r*delta+sigma*v*(delta^(0.5))); %valore all'istante
    x_0=y(i);                                      %iniziale
end
```

Figura 2.2: Funzione BS richiamata nel codice Matlab

```
t=linspace(1,10,10);     %il vettore degli intervalli di tempo

x_0=3.301;               %valore iniziale dell'azione sottostante

r=0.05;                  %tasso d'interesse

sigma=0.2;               %volatilità dell'azione sottostante

y=BS(x_0,r,sigma,t);     %utilizzo della function BS

plot(t,y,'b*-')          %grafico 2D
```

Figura 2.3: Codice Matlab.

Ottenendo i seguenti grafici per i dati sopra indicati nello script (si veda Figura 2.3) che mostrano, nonostante la funzione e i dati siano invariati, andamenti molto diversi l'uno dall'altro.



Bibliografia

[1] Alessandra Borrelli. *Calcolo Stocastico e Mercati Finanziari.* Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Ferrara, 2014/15. Corso di Laurea Triennale in Matematica.

[2] Damien Lamberton and Bernard Lapeyre. *Introduction to stochastic calculus applied to finance.* Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, second edition, 2008.

[3] Bernt Øksendal. *Stochastic differential equations.* Universitext. Springer-Verlag, Berlin, sixth edition, 2003. An introduction with applications.

[4] Andrea Pascucci. *PDE and martingale methods in option pricing*, volume 2 of *Bocconi & Springer Series.* Springer, Milan; Bocconi University Press, Milan, 2011.