

Uno dei problemi più importanti della termotecnica consiste nel determinare la distribuzione spaziale della temperatura in un dominio assegnato (per esempio in una stanza) e la sua evoluzione nel tempo, una volta che si conosca il tipo di sorgenti di calore (per esempio i termoradiatori), la distribuzione iniziale di temperatura e le proprietà del contorno del dominio (pareti isolate, finestre ecc.)

L'analisi di Fourier costituisce uno strumento fondamentale per affrontare questo tipo di problema e costituisce uno dei maggiori successi dell'analisi matematica applicata a problemi di fisica matematica e di ingegneria.

Scopo di questa tesi è lo studio del problema ai valori iniziali ed al contorno per l'equazione del calore.

Dopo aver derivato l'equazione sulla base di considerazioni fisico-matematiche sulla conservazione dell'energia, vengono introdotti i diversi problemi al contorno che saranno esaminati nel caso particolare di domini monodimensionali.

Si passa, quindi, ad uno studio generale delle serie di Fourier, che costituiscono lo strumento che usiamo per costruire le soluzioni.

Il metodo di Fourier viene, quindi, adoperato per determinare soluzioni del problema ai valori iniziali ed al contorno del tipo di Dirichlet, nel quale si assegnano i valori della temperatura sul contorno del dominio, e di Neumann, nel quale si prescrivono i flussi di calore al bordo. Le soluzioni vengono determinate sia nel caso omogeneo sia in quello non omogeneo, anche in presenza di sorgenti di calore assegnate. L'unicità delle soluzioni viene poi dimostrata con l'ausilio del metodo dell'energia.

Infine, viene mostrato come costruire soluzioni esplicite di tipo numerico, utilizzando dei codici Mathematica.

1. Equazione del calore

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con $n \geq 1$, Ω' un qualsiasi sottoinsieme spaziale di Ω ($\Omega' \subset \Omega$), $\Gamma' = \partial\Omega'$ il bordo di Ω' e $x \equiv (x_1, \dots, x_n)$. L'energia interna contenuta in Ω' al tempo t è data da:

$$E_{\Omega'}(t) = \int_{\Omega'} \rho(x)c(x)u(x,t)dx \quad (1)$$

dove ρ è la densità, c il calore specifico, cioè la quantità di energia che occorre fornire all'unità di massa perchè la sua temperatura aumenti (diminuisca) di un grado di Kelvin, u la temperatura. Detta $f(x,t)$ l'energia prodotta da eventuali sorgenti di calore presenti in Ω' ed indicati rispettivamente con $q(x,t)$ il flusso di calore attraverso l'unità di superficie e con $n(x)$ il versore della normale esterna a Γ' , l'equazione del bilancio dell'energia interna in Ω' (primo principio della termodinamica) è:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega'} \rho(x)c(x)u(x,t)dx \\ = \int_{\Omega'} f(x,t)dx - \int_{\Gamma'} q(x,t) \cdot n(x)dA(x), \end{aligned} \quad (2)$$

dove il segno meno a secondo membro deriva dal considerare positivo il flusso di calore entrante in Ω

Poiché Ω' è un dominio spaziale che non cambia nel tempo, il primo membro della (2) diventa:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega'} \rho(x)c(x)u(x,t)dV \\ = \int_{\Omega'} \rho(x)c(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} dx. \end{aligned} \quad (3)$$

Utilizzando il teorema della divergenza di Gauss, l'ultimo integrale a secondo membro della (2) diventa:

$$\int_{\Gamma'} \mathbf{q}(x,t) \cdot \mathbf{n}(x) dA(x) = \int_{\Omega'} \nabla \cdot \mathbf{q}(x,t) dx. \quad (4)$$

da cui troviamo che

$$\int_{\Omega'} \left(\rho(x)c(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} dx - f(x,t) + \nabla \cdot \mathbf{q}(x,t) \right) dx = 0.$$

Stante l'arbitrarietà di $\Omega' \subset \Omega$, segue:

$$\rho(x)c(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = f(x,t) - \nabla \cdot \mathbf{q}(x,t). \quad (5)$$

E' ora necessario introdurre una relazione costitutiva che legghi il flusso di calore $\mathbf{q}(x,t)$ al campo di temperatura $u(x,t)$. Il legame costitutivo più adoperato è la legge di Fick-Fourier:

$$\mathbf{q}(x,t) = -\chi \nabla u(x,t), \quad (6)$$

dove χ è la conducibilità termica. Supponendo quest'ultimo costante e sostituendo (6) in (5) troviamo:

$$\begin{aligned} \rho(x)c(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= f(x,t) + \chi \nabla \cdot \nabla u(x,t) \\ &= f(x,t) + \chi \Delta u(x,t), \end{aligned} \quad (7)$$

Supponendo ρ e c indipendenti dal punto, dividendo ambo i membri della (7) per $(\rho c \neq 0)$ e ponendo $a^2 = \chi/\rho c > 0$ e $Q(x,t) = f(x,t)/\rho c$ troviamo finalmente:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \Delta u(x, t) + Q(x, t). \quad (8)$$

che prende il nome di equazione del calore inomogenea.

Considerazioni sulla buona posizione del problema.

Osserviamo che se la funzione incognita $u(x, t) = u(x)$ e $Q(x, t) = -f(x)$ sono indipendenti dal tempo (caso stazionario), allora la (8) si riduce all'equazione di Poisson:

$$\Delta u(x) = f(x) \quad (9)$$

dove $f(x)$ è una funzione assegnata in Ω .

Se non ci sono sorgenti del calore nella (8), cioè $Q(x, t) = 0$ otteniamo l'equazione omogenea del calore:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \Delta u(x, t), \quad (10)$$

mentre l'equazione di Poisson (9) si riduce all'equazione di Laplace:

$$\Delta u(x) = 0.$$

Per l'equazione (10), come del resto per la sua variante inomogenea, possono porsi diversi tipi di problemi. Il primo problema considerato è il problema ai valori iniziali, detto anche Problema di Cauchy.

Per l'equazione del calore omogenea, che è del primo ordine nel tempo, il Problema di Cauchy è:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = a^2 \Delta u(x, t) & x \in \Omega, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) & x \in \Omega \end{cases}$$

dove $g(x)$ rappresenta la temperatura iniziale in Ω .

Se il dominio Ω è limitato, oltre ai dati iniziali è necessario assegnare anche dei dati sul contorno $\partial\Omega$ di Ω . In questo caso si parla di problema ai valori iniziali ed al contorno. A seconda del tipo di dato che si assegna su $\partial\Omega$ si distinguono diversi tipi di problemi. Il problema di Dirichlet corrisponde ad assegnare su $\partial\Omega$ il valore della funzione incognita $u(x, t)$.

Il problema di Dirichlet per l'equazione del calore è:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = a^2 \Delta u(x, t) & x \in \Omega, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \Omega \\ u(x, t) = g(x, t) & x \in \partial\Omega, t > 0 \end{cases}$$

dove $g(x, t)$ è il dato di Dirichlet sul contorno di Ω .

Nel problema di Neumann invece, si assegna sul contorno Ω il valore della derivata

$\frac{\partial u}{\partial n}(x, t) = n(x) \cdot \nabla u(x, t)$ nella direzione normale a $\partial\Omega$. Con problema di Neumann si intende quindi il seguente problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = a^2 \Delta u(x, t) & x \in \Omega, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \Omega \\ \nabla u(x, t) \cdot n_{\partial\Omega}(x) = g(x, t) & x \in \partial\Omega, t > 0 \end{cases}$$

In questa tesi ci limitiamo al caso $n=1$, cioè $\Omega = (0, L) \subseteq \mathbb{R}$ e quindi ai due seguenti problemi, dove per comodità abbiamo posto $a^2 = 1$:

1) Dirichlet

$$(D) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + f(x, t) \\ u(x, 0) = u_0(x) \\ u(0, t) = T_1(t), \quad u(L, t) = T_2(t); \end{cases}$$

2) Neumann

$$(N) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + f(x, t) \\ u(x, 0) = u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = T_1(t) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = T_2(t). \end{cases}$$

Useremo, per la determinazione delle soluzioni, la teoria delle Serie di Fourier.

Unicità

Chiudiamo questo primo capitolo con la discussione dell'unicità delle soluzioni dei problemi di Dirichlet e Neumann; limitiamo la dimostrazione al caso uni-dimensionale, anche se la stessa dimostrazione, grazie al teorema della divergenza di Gauss, resta valida anche nel caso di dimensione maggiore. Per completare la teoria bisognerebbe dimostrare anche l'esistenza delle soluzioni; esiste un teorema generale di esistenza che però qui non presenteremo; tale teorema diventa nel nostro caso superfluo in quanto le soluzioni le determineremo esplicitamente.

Consideriamo quindi il seguente problema:

$$(D) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + f(x, t) \\ u(x, 0) = u_0(x) \\ u(0, t) = T_1(t) \quad , \quad u(L, t) = T_2(t); \end{cases}$$

dimostriamo l'unicità supponendo che esistano due soluzioni $u_1(x,t)$ e $u_2(x,t)$ siano due diversi soluzioni del problema (D) e definiamo :

$$v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t).$$

Tale funzione risolve il problema

$$\partial_t v = \partial_t(u_1 - u_2)$$

$$= \partial_t u_1 - \partial_t u_2$$

$$\begin{aligned}
&= \partial_{xx}^2 u_1(x, t) + f(x, t) - \partial_{xx}^2 u_2(x, t) + f(x, t) \\
&= \partial_{xx}^2 (u_1 - u_2) = \partial_{xx}^2 v
\end{aligned}$$

con le seguenti condizioni iniziali ed al contorno :

$$v(x, 0) = u_1(x, 0) - u_2(x, 0) = u_0(x) - u_0(x) = 0$$

$$v(0, t) = u_1(0, t) - u_2(0, t) = T_1(t) - T_1(t) = 0$$

$$v(L, t) = u_1(L, t) - u_2(L, t) = T_2(t) - T_2(t) = 0.$$

Allora v è soluzione di

$$\begin{cases} \partial_t v(x, t) = \partial_{xx}^2 v(x, t) & (*)^1 \\ v(x, 0) = 0 & \\ v(0, t) = v(L, t) = 0 & (*)^3 \end{cases}$$

Dimostriamo che $v(0, t) \equiv 0$: per fare ciò si introduce la quantità detta “energia” :

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L v(x, t)^2 dx .$$

Notiamo anzitutto che:

$$E(0) = \frac{1}{2} \int_0^L v(x, 0)^2 dx = 0.$$

Derivando poi rispetto al tempo, si ottiene:

$$E'(t) = \int_0^L v(x, t) \cdot \partial_t v(x, t) dx \quad (1)$$

Sostituiamo in (1) il termine $\partial_t v(x, t)$ dalla (*)¹ e integriamo per parti

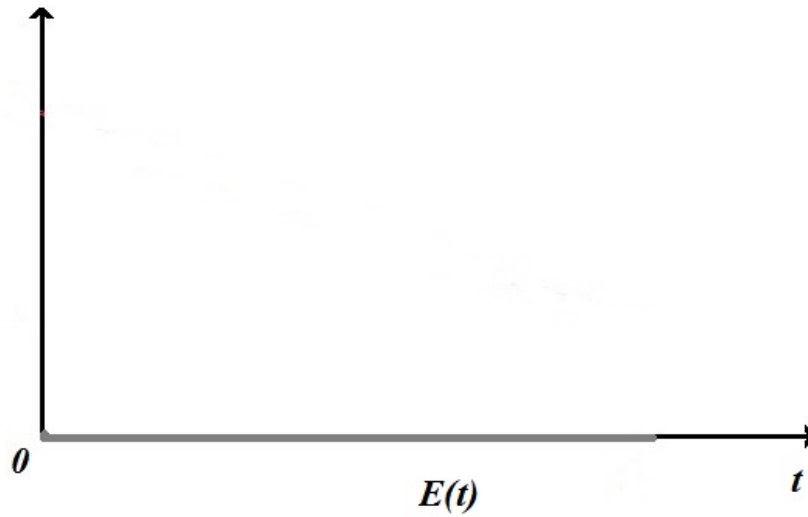
$$\begin{aligned} &= \int_0^L v(x, t) \cdot \partial_{xx}^2 v(x, t) dx \\ &= [v(x, t) \cdot \partial_x v(x, t)]_{x=0}^{x=L} - \int_0^L |\partial_x v(x, t)|^2 dx \end{aligned}$$

Dalle (*)³ si deduce che $[v(x, t) \cdot \partial_x v(x, t)]_{x=0}^{x=L} = 0$ e si trova quindi che che:

$$= - \int_0^L |\partial_x v(x, t)|^2 dx \leq 0$$

Allora : $E(0) = 0$ $E'(t) \leq 0 \Rightarrow E(t) \searrow$ (monotona decrescente)

$$E(t) \geq 0 \Rightarrow E(t) \equiv 0 \quad \forall t$$



- $\Rightarrow v(x, t)^2 \equiv 0 \quad \forall t$, $v(x, t) = 0 \quad \forall t$
 \Rightarrow da cui si trova che $u_1 = u_2$ cioè ha una sola soluzione di (*).

Osservazione: Si nota che il termine $[v(x, t) \cdot \partial_x v(x, t)]_{x=0}^{x=L}$ è nullo anche per il problema di Neumann, quindi l'unicità della soluzione sussiste anche in questo ultimo caso.

2. Serie di Fourier

In questo capitolo richiameremo alcune nozioni relative alle Serie di Fourier che utilizzeremo in questa tesi.

Gli sviluppi in Serie di Fourier si applicano alle funzioni periodiche. Ricordiamo che una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ viene detta T-periodica se $f(x + T) = f(x)$ per ogni $(x \in \mathbb{R})$. Inoltre il periodo T di f viene definito come il più piccolo numero $T \geq 0$, per il quale vale la precedente proprietà.

Osserviamo che, se f è T-periodica allora $f(x + kT) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Fissato $T > 0$, posto $\omega = \frac{2\pi}{T}$, le funzioni $\sin(k\omega x)$ e $\cos(k\omega x)$ sono T-periodiche per ogni $(k \in \mathbb{Z})$. Il numero ω si dice pulsazione.

Al contrario degli sviluppi in Serie di Taylor, che presuppongono di partire da funzioni di classe C^∞ , gli sviluppi in Serie di Fourier si possono considerare per funzioni assai poco regolari: i coefficienti degli sviluppi in Serie di Fourier si ottengono calcolando degli integrali e non delle derivate. Introduciamo una classe funzionale in cui si possono considerare gli sviluppi di Fourier.

Definiamo le funzioni **continue a tratti** come le funzioni $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che per ogni intervallo limitato $I \subset \mathbb{R}$, sono continue in I eccetto che in un numero finito di punti di I ed in tali punti ammettono limiti finiti a destra ed a sinistra. Se f è continua a tratti, per ogni punto x_0 di \mathbb{R} , poniamo:

$$f(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \quad , \quad f(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x);$$

f sarà continua in x_0 se $f(x_0^+) = f(x_0^-)$.

Sappiamo che una funzione continua a tratti è integrabile in ogni intervallo limitato: quindi possiamo dare la seguente definizione

Serie di Fourier : sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua a tratti e T - periodica , e sia $\omega = \frac{2\pi}{T}$ posto

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) dx,$$

e per ogni $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$,

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos(k\omega x) dx \quad , \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin(k\omega x) dx,$$

i numeri a_0, a_k, b_k , vengono detti i coefficienti di Fourier della funzione f . Si chiama Serie di Fourier associata ad f la serie :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)).$$

In generale non si può affermare che la serie di Fourier converga, né, se converge, che la sua somma sia f : ciò vale sotto ipotesi più restrittive su f rispetto alla continuità a tratti.

Definiamo le funzioni **regolari a tratti** come le funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue a tratti, per quali valgono le seguenti condizioni :

- (i) f è derivabile in ogni intervallo di continuità, eccetto un numero finito di punti;
- (ii) in ogni punto di discontinuità x_0 di f' esistono finiti i limiti

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x).$$

Teorema. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodica e regolare a tratti. Allora, la serie di Fourier associata ad f converge puntualmente per ogni $x \in \mathbb{R}$ alla funzione regolarizzata di f definita da

$$\tilde{f}(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2};$$

la convergenza è uniforme in ogni intervallo chiuso contenuto negli intervalli di continuità di f .

Osserviamo i seguenti fatti.

1. Si vede facilmente con un cambiamento di variabili che per calcolare i coefficienti di Fourier non bisogna necessariamente integrare sull'intervallo $(-T/2, T/2)$, ma basta integrare su un qualsiasi intervallo di ampiezza T . Infatti presa g una funzione T -periodica, come ad esempio $g(x) = \sin(k\omega x)$, $g(x) = \cos(k\omega x)$, con $\omega = \frac{2\pi}{T}$, allora fissato l'intervallo $[a, a + T]$, esiste un unico $k \in \mathbb{Z}$ tale che $a \leq kT < a + T$ quindi

$$\int_a^{a+T} g(x) dx = \int_a^{kT} g(x) dx + \int_{kT}^{a+T} g(x) dx. \tag{1} \tag{2}$$

Svolgiamo tale integrale (cambiamento di variabile)

per (1): $x = y + (k-1)T$, $y \in [a - (k-1)T, kT - (k-1)T]$ dove $kT - (k-1)T = T$

per (2): $x = y + kT$, $y \in [0, a - (k-1)T]$

da cui

$$= \int_{a-(k-1)T}^T g(y + (k-1)T) dy + \int_0^{a-(k-1)T} g(y + kT) dy$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{a-(k-1)T}^T g(y)dy + \int_0^{a-(k-1)T} g(y)dy \\
&= \int_0^T g(y)dy
\end{aligned}$$

Nello stesso modo si fa vedere che

$$\int_0^T g(y)dy = \int_0^{T/2} g(y)dy + \int_{T/2}^T g(y)dy \quad (3)$$

per (3) : $y = z + T$, $z \in [-T/2, 0]$

$$\int_0^{T/2} g(y)dy + \int_{-T/2}^T g(z + T)dy = \int_{-T/2}^{T/2} g(y)dy.$$

2. Se f è periodica, regolare a tratti e continua in \mathbb{R} allora la sua Serie di Fourier converge uniformemente in \mathbb{R} ad f .

3. Il termine $\frac{a_0}{2}$ che compare nella Serie di Fourier di f esprime la media integrale di f nel periodo.

Funzioni pari e dispari: ricordiamo che f si dice pari se $f(x) = f(-x)$ per ogni $(x \in \mathbb{R})$, e si dice dispari se $f(x) = -f(-x)$ per ogni $(x \in \mathbb{R})$. Le funzioni $\cos(k\omega x)$ sono pari, mentre le funzioni $\sin(k\omega x)$ sono dispari. Possiamo osservare che se f è pari allora tutti i coefficienti b_k sono nulli, mentre se f è dispari sono nulli tutti i coefficienti a_k . In entrambi i casi nelle formule della definizione della serie di Fourier, detti coefficienti si ottengono attraverso integrale di funzioni dispari su intervalli simmetrici rispetto all'origine, che danno risultato nullo. Si possono ottenere i coefficienti non nulli usando le formule semplificate

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \cos(k\omega x) dx, \quad b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \sin(k\omega x) dx \quad k \geq 0,$$

$$a_0 = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) dx,$$

per f pari e dispari rispettivamente.

Data una funzione f definita in un intervallo limitato qualunque, che senza ledere la generalità possiamo supporre sia del tipo $[0, L]$, si può definire una estensione periodica arbitraria di f e studiare la convergenza della serie di Fourier dell'estensione. Il teorema di convergenza della serie di Fourier implica, in particolare, che se due funzioni sviluppabili in serie di Fourier coincidono in un intervallo J allora le loro serie convergono allo stesso limite in J .

Di conseguenza, se si considerano due estensioni periodiche differenti di f , e le rispettive serie di Fourier convergono entrambe ed esse, si ottengono due serie di Fourier diversi convergenti, nell'intervallo $(0, L)$, alla stessa funzione f . Queste considerazioni portano ad associare una serie di Fourier anche ad una funzione non periodica, passando per una sua estensione periodica. le estensioni periodiche naturali di una $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ sono le seguenti :

(i) l'estensione $f^*(x) = f(x + kL)$, ($x \in \mathbb{R}$).

dove per ogni ($x \in \mathbb{R}$), ($k \in \mathbb{Z}$) è l'unico intero tale ($x + kL$) $\in [0, L[$.

(ii) l'estensione dispari f_d di periodo $2L$ così definita:

$$f_d(x) = -f(-x) \quad \text{per ogni } x \in [0, L[, \quad f_d^*(x) = f_d(x + 2kL), \quad (x \in \mathbb{R}).$$

(iii) l'estensione pari f_p di periodo $2L$ così definita:

$$f_p(x) = f(-x) \quad \text{per ogni } x \in [0, L[, \quad f_p^*(x) = f_p(x + 2kL), \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Queste considerazioni saranno fondamentali quando risolveremo l'equazione del calore; utilizzeremo in particolare l'estensione dispari nel caso del Problema di Dirichlet, in quanto questa definisce funzioni che necessariamente valgono 0 in 0 (e quindi soddisferà la condizione di Dirichlet omogenea), mentre useremo l'estensione pari per il Problema di Neumann, in quanto questa definisce funzioni con derivata nulla nell'origine (e quindi soddisferà la condizione di Neumann omogenea).

Usando le formule di Prostaferesi si verificano facilmente le seguenti uguaglianze:

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(k\omega x) \cos(h\omega x) dx = 0,$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(k\omega x) \sin(h\omega x) dx = \frac{T}{2} \delta_{hk},$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(k\omega x) \cos(h\omega x) dx = \frac{T}{2} \delta_{hk},$$

Dove $\delta_{hk} = 1$ se $h = k$, $\delta_{hk} = 0$ se $h \neq k$, da cui passando al limite sotto il segno di integrale, si può dedurre l'eguaglianza di Parseval :

$$\int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 dx = \frac{T}{2} \left(\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 + |b_k|^2 \right).$$

Regolarità delle Serie di Fourier

In questa sezione ci occuperemo dello studio delle regolarità della Serie di Fourier associata ad una funzione regolare a tratti $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo f dispari e poniamo $L = \frac{T}{2}$ (la dimostrazione per funzioni pari è del tutto analoga): allora

$$b_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(k\omega x) dx, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{L}. \quad (2)$$

Definiamo la seguente funzione di due variabili

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k e^{-\frac{k^2 \pi^2}{L^2} t} \sin(k\omega t), \quad (1)$$

e dimostriamo che $\forall t > 0$ tale funzione è derivabile infinite volte sia rispetto a t che rispetto ad x e che vale l'identità

$$\partial_t u(x,t) = \partial_{xx}^2 u(x,t).$$

Sappiamo già che la serie (1) converge; in particolare avremo che $\exists M > 0, \forall k \in \mathbb{N}$ t.c.

$$|b_n| \leq M < +\infty \quad (3)$$

e anche che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0.$$

La limitazione (3) si può vedere anche direttamente da (2) in quanto se $\mathbf{f}: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ regolare a tratti, allora \mathbf{f} è limitata e quindi

$$\sup_{x \in [0, L]} |f(x)| \leq C < +\infty$$

per una qualche costante $C > 0$ quindi

$$|b_k| \leq \frac{1}{L} \int_0^L |f(x)| \cdot |\text{sen}(k\omega t)| dx \leq C.$$

Definiamo quindi $\mathbf{u}: [0, L] \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ usando l'equazione (1).

È chiaro che $\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{f}(x)$. Discutiamo la regolarità di \mathbf{u} per $t > 0$: osserviamo che $\forall t > 0$ e

$$\forall p > 0$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} k^p e^{-\frac{k^2 \pi^2}{L^2} t} = 0. \quad (4)$$

Quindi, se definiamo

$$u_k(x, t) = b_k e^{-\frac{k^2 \pi^2}{L^2} t} \text{sen}\left(\frac{k\pi}{L} x\right),$$

otteniamo che $\forall p > 0, \forall M > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|u_k(x, t)| = |b_k| \cdot e^{-\frac{k^2 \pi^2}{L^2} t} \leq \frac{M}{k^p} \quad \forall k \geq k_0,$$

e quindi prendendo $p > 1, \forall t > 0$ ricaviamo che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sup_{x \in [0, L]} |u_k(x, t)| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{M}{k^p} < +\infty,$$

da cui la convergenza totale della serie

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x, t) \quad x \in [0, L] \text{ (ma anche } x \in \mathbb{R})$$

Dato poi che le u_k sono continue anche \mathbf{u} è continua come variabile delle \mathbf{x} e dalla \mathbf{t} .

Studiamo la derivabilità di \mathbf{u} , sia rispetto ad \mathbf{x} che rispetto a \mathbf{t} .

Basta notare che

$$\frac{\partial u_k(x, t)}{\partial t} = -b_k \frac{k^2 \pi^2}{L^2} e^{-\frac{k^2 \pi^2}{L^2} t} \text{sen}\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$$

$$\frac{\partial u_k(x, t)}{\partial x} = b_k \frac{k\pi}{L} e^{-\frac{k^2 \pi^2}{L^2} t} \text{cos}\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$$

e quindi che

$$\left| \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right| \leq |b_n| \frac{k^2 \pi^2}{L^2} e^{-\frac{k^2 \pi^2}{L^2} t}$$

$$\leq \frac{M\pi^2}{L^2} \cdot \frac{k}{k^p} = \frac{M\pi^2}{L^2} \cdot \frac{1}{k^{p-1}}$$

$$\left| \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right| \leq \frac{M\pi}{L} \cdot \frac{k}{k^p} = \frac{M\pi}{L} \cdot \frac{1}{k^{p-1}}$$

E quindi prendendo $p > 3$ nel primo caso e $p > 2$ nel secondo caso

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sup_{x \in L} \left| \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right| \leq \frac{M\pi^2}{L^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p-1}} < +\infty$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sup_{x \in L} \left| \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right| \leq \frac{M\pi}{L} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p-1}} < +\infty$$

Da cui la convergenza totale delle serie delle derivate. Quindi per il teorema di derivazione per serie, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ è derivabile sia rispetto a \mathbf{t} che rispetto ad \mathbf{x} .

Si può ripetere il ragionamento per trovare che in realtà

$$u \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$$

Il conto precedente dice anche che

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{+\infty} -b_k \frac{k^2 \pi^2}{L^2} e^{-\frac{k^2 \pi^2}{L^2} t} \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi}{L} x \right),$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \frac{k\pi}{L} e^{-\frac{k^2 \pi^2}{L^2} t} \operatorname{cos} \left(\frac{k\pi}{L} x \right).$$

Derivando la precedente identità ancora una volta rispetto ad x troviamo quindi

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} -b_k \frac{k^2 \pi^2}{L^2} e^{-\frac{k^2 \pi^2}{L^2} t} \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi}{L} x \right) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$$

E che u risolve l'equazione del calore

$$\partial_t u(x, t) = \partial_{xx}^2 u(x, t).$$

3. Costruzione della soluzione.

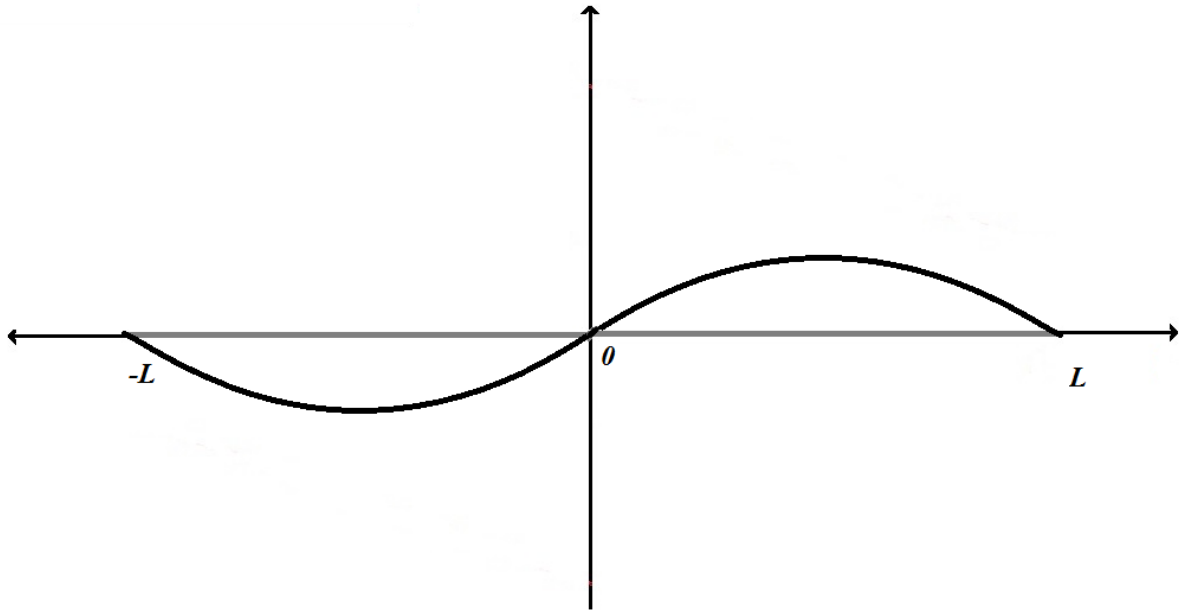
In questo capitolo applichiamo le considerazioni fatte nei capitoli precedenti per determinare le soluzioni dei problemi sia di Dirichlet che di Neumann mediante sviluppi in serie di Fourier. Cominciamo con il problema di Dirichlet per poi presentare la soluzione del problema di Neumann.

Analisi di Fourier per il Problema di Dirichlet.

Vediamo ora come trovare la soluzione di (D) utilizzando la teoria delle serie di Fourier ; iniziamo col caso omogeneo, cioè con il problema

$$(**) \begin{cases} \partial_t u(x,t) = \partial_{xx}^2 u(x,t) & x \in [0, L], t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in [0, L] \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \end{cases} .$$

Per utilizzare i risultati della sezione precedente, estendiamo u_0 e quindi la $u(x,t)$ in maniera dispari nell'intervallo $[-L, L]$ e prolunghiamo su tutto \mathbb{R} in maniera $2L$ - periodica



Consideriamo quindi la serie di Fourier associata all'estensione $2L$ – periodica dispari di u_0 :

$$a_k = 0$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u_0(x) \sin(k\omega x) dx \quad , \quad \text{dove } T = 2L ,$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{L}$$

$$= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} u_0(x) \sin(k\omega x) dx$$

$$= \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx$$

e definisco:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k e^{-\frac{k^2 \pi^2}{L^2} t} \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right).$$

Tale funzione è derivabile sia in x che in t , $\forall t > 0$ e risolve l'equazione $\partial_t u(x,t) = \partial_{xx}^2 u(x,t)$. All'istante $t=0$ tale funzione coincide con $u_0(x)$ grazie al fatto che abbiamo preso proprio i coefficienti di Fourier del dato iniziale; il fatto poi che le condizioni al bordo siano soddisfatte segue dalla scelta fatta di aver preso le funzioni seno (e quindi l'estensione dispari). Abbiamo quindi che la funzione così definita è soluzione di (**).

Nel caso di Problema di Dirichlet omogeneo con equazione inhomogenea

$$\begin{cases} \partial_t v(x,t) = \partial_{xx}^2 v(x,t) + f(x) & x \in [0, L], t > 0 \\ v(x,0) = v_0(x) & x \in [0, L] \\ v(0, t) = v(L, t) = 0 & t > 0 \end{cases} \quad (1)$$

si cerca la soluzione sempre nella forma

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k(t) \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right); \quad (A)$$

Per capire quando tale funzione è soluzione del nostro problema, cerchiamo di capire la forma dei coefficienti $b_k(t)$. Derivando nell'espressione (A) ed inserendo in (1), troviamo che v sarà soluzione se

$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k'(t) \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} -\frac{k^2 \pi^2}{L^2} b_k(t) \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right) + \sum_{k=1}^{+\infty} B_k \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right) \quad (2)$$

(*¹)

dove (*¹) è lo sviluppo in Serie di Fourier di $f(x)$,

$$B_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx.$$

L'equazione (2) è soddisfatta se e solo se

$$\begin{cases} b'_k(t) = -\frac{k^2\pi^2}{L^2} b_k(t) + B_k \\ b_k(0) = bv_k \end{cases} \quad (\text{B})$$

dove bv_k è il k -esimo coefficiente di Fourier di v_0 , cioè

$$bv_k = \frac{2}{L} \int_0^L v_0(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx.$$

La soluzione di (B), dato che siamo in presenza di una equazione differenziale lineare del primo ordine, si scrive:

$$\begin{aligned} b_k(t) &= e^{-\frac{k^2\pi^2}{L^2}t} \left(bv_k + \int_0^t B_k e^{\frac{k^2\pi^2}{L^2}s} ds \right) \\ &= e^{-\frac{k^2\pi^2}{L^2}t} \left(bv_k + \frac{L^2}{\pi^2 k^2} \left(e^{\frac{k^2\pi^2}{L^2}t} - 1 \right) B_k \right). \quad (**) \end{aligned}$$

Il ragionamento appena fatto si può generalizzare al caso in cui il termine inhomogeneo f dipenda anche dal tempo; in tal caso i suoi coefficienti di Fourier saranno dati da

$$B_k(t) = \frac{2}{L} \int_0^L f(x, t) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx.$$

In tal caso la soluzione dell'equazione (B) sarà data da

$$b_k(t) = e^{-\frac{k^2\pi^2}{L^2}t} \left(bv_k + \int_0^t B_k(s) e^{\frac{k^2\pi^2}{L^2}s} ds \right) \quad (***)$$

In ogni caso, sostituendo (**) oppure (***) in (A) si trova la soluzione di (1)

$$\Rightarrow v(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k(t) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \text{ è la soluzione di}$$

$$\begin{cases} \partial_t v(x,t) = \partial_{xx}^2 v(x,t) + f(x,t) & x \in [0,L], t > 0 \\ v(x,0) = v_0(x) & x \in [0,L] \\ v(0,t) = v(L,t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

Per concludere, possiamo considerare il Problema di Dirichlet non omogeneo con equazione inomogenea

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) = \partial_{xx}^2 u(x,t) + f(x,t) & x \in [0,L], t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in [0,L] \\ u(0,t) = T_1(t), \quad u(L,t) = T_2(t) & t > 0. \end{cases}$$

Ci si riconduce al caso omogeneo introducendo la funzione

$$m(x,t) = T_1(t) + \frac{T_2(t) - T_1(t)}{L} x;$$

In tal modo infatti la funzione

$$v(x,t) = u(x,t) - m(x,t)$$

ha la proprietà che

$$v(x,0) = u_0(x) - m(x,0) = v_0(x).$$

Inoltre, l'equazione soddisfatta da v è

$$\begin{aligned} \partial_t v(x,t) &= \partial_t u(x,t) - \partial_t m(x,t) = \partial_{xx}^2 u(x,t) - \partial_t m(x,t) + f(x,t) \\ &= \partial_{xx}^2 v(x,t) - \partial_t m(x,t) + f(x,t) \end{aligned}$$

$$= \partial_{xx}^2 v(x,t) + F(x,t),$$

dove abbiamo posto

$$F(x,t) = f(x,t) - \partial_t m(x,t) = f(x,t) - T_2'(t) - \frac{T_2'(t) - T_1'(t)}{L} x.$$

Quindi la funzione v risolve il seguente problema

$$\begin{cases} \partial_t v(x,t) = \partial_{xx}^2 v(x,t) + F(x,t) \\ v(x,0) = v_0(x) \\ v(0,t) = v(L,t) = 0. \end{cases}$$

Come visto prima, la soluzione di tale problema è data da

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k(t) \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$$

con b_k soluzione di

$$\begin{cases} b_k'(t) = -\frac{k^2\pi^2}{L^2} b_k(t) + B_k(t) \\ b_k(0) = bv_k \end{cases}$$

cioè:

$$B_k(t) = \frac{2}{L} \int_0^L F(x,t) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx, \quad bv_k = \frac{2}{L} \int_0^L v_0(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx$$

$$\Rightarrow b_k(t) = e^{-\frac{k^2\pi^2}{L^2} t} \left(bv_k + \int_0^t B_k(s) e^{\frac{k^2\pi^2}{L^2} s} ds \right).$$

In definitiva, la soluzione cercata è data da

$$u(x, t) = m(x, t) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k(t) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right).$$

Analisi di Fourier per il Problema di Neumann

La soluzione del Problema di Neumann si ottiene in modo analogo; la differenza fondamentale sta nell'estensione pari del dato iniziale e non in quella dispari.

Per risolvere quindi il problema

$$(N) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + f(x, t) \\ u(x, 0) = u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = T_1(t) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = T_2(t), \end{cases}$$

introducendo la funzione

$$m(x, t) = T_1(t)x + \frac{T_2(t) - T_1(t)}{2L} x^2$$

e quindi la funzione

$$v(x, t) = u(x, t) - m(x, t)$$

è soluzione del problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t) + F(x, t) \\ v(x, 0) = v_0(x) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial v}{\partial x}(L, t) = 0, \end{cases}$$

dove

$$F(x, t) = f(x, t) - \partial_t m(x, t), \quad v_0(x) = u_0(x) - m(x, 0).$$

Scriveremo quindi

$$u(x, t) = m(x, t) + \frac{a_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k(t) \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right),$$

dove

$$a_0(t) = \left(av_0 + \int_0^t A_0(s) ds \right),$$

$$a_k(t) = e^{-\frac{k^2\pi^2}{L^2}t} \left(av_k + \int_0^t A_k(s) e^{\frac{k^2\pi^2}{L^2}s} ds \right).$$

4. Codice Mathematica

Problema di Dirichlet

Definizione dei parametri:

```
L=Pi;  
Kmax=100;  
Tmax=5;
```

Dati del problema:

```
f[x_,t_]=2*Boole[L/4<x<L/2];  
u0[x_]=1;
```

```
t1[t_]=0;  
t2[t_]=0;
```

Algoritmo:

```
m[x_,t_]=t1[t]+(t2[t]-t1[t])*x/L;  
v0[x_]=u0[x]-m[x,0];  
F[x_,t_]=f[x,t]-D[m[x,t],t];  
bF[k_,t_]=Integrate[2/L*F[x,t]*Sin[k*x*Pi/L],{x,0,L}];  
bv[k_]=Integrate[2/L*v0[x]*Sin[k*x*Pi/L],{x,0,L}];  
B[k_,t_]=Exp[-  
k^2*Pi^2*t/L^2]*(bv[k]+Integrate[Exp[k^2*Pi^2*s/L^2]*bF[k,s],{s,0,t}]);  
v[x_,t_]=Sum[B[k,t]*Sin[k*Pi*x/L],{k,1,Kmax}];  
Animate[Plot[{v[x,t]+m[x,t],Pi^2/4,-1},{x,0,L},AspectRatio->1, Axes-  
>True],{t,0,Tmax},AnimationRunning->False]
```

Problema di Neumann

Definizione dei parametri:

```
L=Pi;  
Kmax=100;  
Tmax=5;
```

Dati del problema:

```
f[x_,t_]=2*Boole[L/4<x<L/2];  
u0[x_]=1;
```

```
t1[t_]=0;  
t2[t_]=0;
```

Algoritmo:

```
m[x_,t_]=t1[t]*x+(t2[t]-t1[t])*x^2/(2*L);  
v0[x_]=u0[x]-m[x,0];  
F[x_,t_]=f[x,t]-D[m[x,t],t];  
aF[k_,t_]=Integrate[2/L*F[x,t]*Cos[k*x*Pi/L],{x,0,L}];  
av[k_]=Integrate[2/L*v0[x]*Cos[k*x*Pi/L],{x,0,L}];  
A[k_,t_]=Exp[-  
k^2*Pi^2*t/L^2]*(av[k]+Integrate[Exp[k^2*Pi^2*s/L^2]*aF[k,s],{s,0,t}]);  
v[x_,t_]=A[0,t]+Sum[A[k,t]*Cos[k*Pi*x/L],{k,1,Kmax}];  
Animate[Plot[{v[x,t]+m[x,t],Pi^2/4,-1},{x,0,L},AspectRatio->1, Axes-  
>True],{t,0,Tmax},AnimationRunning->False]
```