



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FERRARA

FACOLTÀ DI SCIENZE MM. FF. NN.

**Struttura degli insiemi di perimetro
finito e applicazioni alla teoria
delle superfici minime**

Relatore:
Prof. Michele Miranda

Laureanda:
Giada Scarpone

Anno accademico 2012/2013

Indice

1	Cenni di teoria della misura	5
2	Derivazione di misure	15
2.1	Teoremi di ricoprimento	15
2.2	Decomposizione di Radon-Nikodym	19
3	Teorema di Riesz e convergenza debole	23
3.1	Misure di Hausdorff	30
3.2	Insiemi rettificabili	37
3.3	Misure tangenti	46
4	Insiemi di perimetro finito	55
5	Superfici minime	73
6	Esempi di superfici minime	83
A	Formula dell'area	91
B	Convoluzione	99
C	Curve e ipersuperfici in \mathbb{R}^d	103

Capitolo 1

Cenni di teoria della misura

In questo capitolo richiameremo alcune nozioni di base di teoria della misura a partire dalla definizione di misura esterna, che permette di introdurre il concetto di misura positiva tramite il criterio di Carathéodory, fino ad arrivare ad importanti proprietà delle misure di Borel definite sui Boreliani di uno spazio metrico localmente compatto Ω . Queste nozioni ci serviranno in seguito per lo studio più particolareggiato della teoria in \mathbb{R}^d .

Definizione 1.1. *Sia Ω un insieme diverso dal vuoto. Si definisce misura esterna una funzione, definita sull'insieme delle parti di Ω , $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, +\infty]$ tale che*

(a) $\mu^*(\emptyset) = 0$;

(b) (monotonia) se $A \subset B$ allora $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$;

(c) (subadditività numerabile) se $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ allora $\mu^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$.

Vediamo alcuni esempi:

- (1) La misura di Lebesgue su \mathbb{R}^d . In tal caso $\Omega = \mathbb{R}^d$ e $\mu^* = \mathcal{L}^d$. Ricordiamo che la misura di Lebesgue viene costruita a partire dalla misura di un rettangolo di \mathbb{R}^d , ovvero

$$R = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d] \quad \text{con } a_i, b_i \in \mathbb{R} \text{ e } a_i \leq b_i.$$

Tale misura è così definita

$$\mathcal{L}^d(R) = \prod_{i=1}^d (b_i - a_i);$$

similmente viene definita la misura di un pluri-rettangolo, unione di rettangoli con parte interna disgiunta, $P = \cup_{i=1}^m R_i$ in questo modo

$$\mathcal{L}^d(P) = \sum_{i=1}^m \mathcal{L}^d(R_i).$$

Quindi dato un insieme limitato $E \subset \mathbb{R}^d$ si definisce misura esterna

$$\mathcal{L}_e^d(E) = \inf \left\{ \sum \mathcal{L}^d(R_i) : \bigcup R_i \supseteq E \right\}$$

mentre per un insieme illimitato $E \subset \mathbb{R}^d$, se consideriamo i sottoinsiemi limitati di E , $B_r \cap E$ per ogni $r > 0$, allora la misura esterna diventa

$$\mathcal{L}_e^d(E) = \sup_{r>0} \mathcal{L}_e^d(B_r \cap E).$$

Osserviamo che la misura di Lebesgue \mathcal{L}^d è invariante per traslazioni, infatti le traslazioni trasformano plurirettangoli in plurirettangoli. Inoltre $\mathcal{L}^d(\lambda E) = \lambda^d \mathcal{L}^d(E)$. Infatti, dato R un rettangolo di \mathbb{R}^d , allora $\lambda R = \lambda[a_1, b_1] \times \dots \times \lambda[a_d, b_d]$, e quindi $\mathcal{L}^d(\lambda R) = \prod_{i=1}^d \lambda(b_i - a_i)$.

(2) La misura Delta di Dirac per un punto $\omega_0 \in \Omega$, $\mu^* = \delta_{\omega_0}$, è così definita

$$\delta_{\omega_0}(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega_0 \in A, \\ 0 & \text{se } \omega_0 \notin A. \end{cases}$$

(3) La misura indicatrice, così definita

$$I(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } A \neq \emptyset, \\ 0 & \text{se } A = \emptyset. \end{cases}$$

Il concetto di misura particolareggia quello di misura esterna richiedendo la proprietà di σ -additività cioè data $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una famiglia numerabile di insiemi disgiunti a due a due allora

$$\mu^* \left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \right) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu^*(A_j).$$

In particolare si dimostra che una misura esterna diventa misura con la sola ipotesi di finita additività:

Lemma 1.2. *Sia μ^* una misura esterna. Se, per ogni A e $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tali che $A \cap B = \emptyset$, $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$, allora μ^* è σ -additiva.*

Dimostrazione. La tesi è dimostrabile sia utilizzando la proprietà di σ -subadditività, sia utilizzando la continuità su successioni monotone. Infatti, data $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una famiglia numerabile di insiemi disgiunti a due a due, dalla σ -subadditività, segue

$$\mu^* \left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j \right) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \mu^*(A_j) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n \mu^*(A_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^* \left(\bigcup_{j=1}^n A_j \right) \leq \mu^* \left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j \right).$$

Utilizziamo ora la proprietà di continuità su successioni monotone, ovvero data una successione $(F_n)_n$ tale che $F_{n+1} \subset F_n$ con $\bigcap_n F_n = \emptyset$, allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu^*(F_n) = 0.$$

Da questa proprietà, data $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una famiglia numerabile di insiemi disgiunti a due a due, segue

$$\mu^* \left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j \right) = \mu^* \left(\bigcup_{j=1}^n A_j \right) + \mu^* \left(\bigcup_{j=n+1}^{+\infty} A_j \right) = \sum_{j=1}^n \mu^*(A_j) + \mu^* \left(\bigcup_{j=n+1}^{+\infty} A_j \right)$$

e mandando n all'infinito si ottiene la tesi. \square

Facciamo una piccola digressione richiamando alcune nozioni importanti che ci serviranno in seguito.

Definizione 1.3. Sia Ω un insieme non vuoto e \mathcal{A} una collezione di sottoinsiemi di Ω .

- \mathcal{A} è detta algebra di Ω se
 - (i) $\Omega \in \mathcal{A}$
 - (ii) $A \cup B \in \mathcal{A}$ per ogni A e $B \in \mathcal{A}$
 - (iii) $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ per ogni $A \in \mathcal{A}$.
- \mathcal{A} è detta σ -algebra di Ω se è un algebra e per ogni infinità numerabile di insiemi $\{A_i\}_{i=1,2,\dots} \subset \mathcal{A}$ l'unione $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ appartiene ad \mathcal{A} .
- Se \mathcal{A} è una σ -algebra di Ω , la coppia (Ω, \mathcal{A}) è detta spazio misurabile.
- Se Ω è uno spazio topologico definiamo σ -algebra di Borel, e la indichiamo con $\mathcal{B}(\Omega)$, la σ -algebra minimale di Ω che contiene tutti gli aperti di Ω .

Osserviamo che ogni σ -algebra e ogni algebra contiene sempre il vuoto e Ω .

Vediamo ora come rendere μ^* una misura partendo dalla definizione di insieme μ^* -misurabile (misurabile secondo Carathéodory).

Definizione 1.4. Un insieme M si dice misurabile per μ^* , e scriveremo $M \in \mathcal{M}(\mu^*)$, se per ogni $T \in \mathcal{P}(\Omega)$ vale

$$\mu^*(T) = \mu^*(T \setminus M) + \mu^*(T \cap M).$$

Proposizione 1.5. $\mathcal{M}(\mu^*) = \{M \in \mathcal{P}(\Omega) : M \text{ } \mu^*\text{-misurabile}\}$ è una σ -algebra e $\mu = \mu^*_{|\mathcal{M}(\mu^*)}$ è una misura.

Dimostrazione. Osserviamo che $\mathcal{M}(\mu^*) \neq \emptyset$ poiché Ω e $\emptyset \in \mathcal{M}(\mu^*)$. Siano M_1 e $M_2 \in \mathcal{M}(\mu^*)$ e $T \in \mathcal{P}(\Omega)$ allora si ha

$$\begin{aligned} \mu^*(T) &= \mu^*(T \cap M_1) + \mu^*(T \setminus M_1) \\ &= \mu^*(T \cap M_1) + \mu^*(T \cap M_2 \setminus M_1) + \mu^*(T \setminus (M_1 \cup M_2)) \\ &= \mu^*(T \cap (M_1 \cup M_2) \cap M_1) + \mu^*(T \cap (M_1 \cup M_2) \setminus M_1) + \mu^*(T \setminus (M_1 \cup M_2)) \\ &= \mu^*(T \cap (M_1 \cup M_2)) + \mu^*(T \setminus (M_1 \cup M_2)). \end{aligned}$$

quindi $M_1 \cup M_2 \in \mathcal{M}$.

Vediamo ora che $\mu = \mu^*_{|\mathcal{M}(\mu^*)}$ è additiva sugli elementi disgiunti di \mathcal{M} . Siano $M_1, M_2 \in \mathcal{M}(\mu^*)$ allora

$$\mu(M_1 \cup M_2) = \mu((M_1 \cup M_2) \cap M_1) + \mu((M_1 \cup M_2) \setminus M_1) = \mu(M_1) + \mu(M_2).$$

Grazie all'ipotesi di subadditività di μ^* , μ è anche σ -additiva. Resta da dimostrare che $\mathcal{M}(\mu^*)$ è chiusa per un'unione numerabile. Sia M_j una successione di insiemi μ^* -misurabili disgiunti tale che $M = \bigcup_{j=0}^{+\infty} M_j$ e $T \subset \Omega$. Allora si ha

$$\begin{aligned} \mu^*(T) &\leq \mu^*(T \setminus M) + \mu^*(T \cap M) \leq \mu^*(T \setminus M) + \sum_{j=0}^{+\infty} \mu^*(T \cap M_j) \\ &= \mu^*(T \setminus M) + \lim_{h \rightarrow +\infty} \sum_{j=0}^h \mu^*(T \cap M_j) \\ &\leq \lim_{h \rightarrow +\infty} \left[\mu^* \left(T \setminus \bigcup_{j=0}^h M_j \right) + \mu^* \left(T \cap \bigcup_{j=0}^h M_j \right) \right] = \mu^*(T). \end{aligned}$$

Quindi le disuguaglianze diventano uguaglianze e $M \in \mathcal{M}(\mu^*)$. □

Abbiamo quindi dimostrato che data una misura esterna, i misurabili formano una σ -algebra e che la misura esterna ristretta a tale σ -algebra è numerabilmente additiva, quindi è una misura.

Riferendoci agli esempi precedenti, possiamo osservare che per la Delta di Dirac è facile vedere che tutti i sottoinsiemi di Ω sono misurabili $\mathcal{M}(\delta_{\omega_0}) = \mathcal{P}(\Omega)$, mentre per la funzione indicatrice solo il vuoto e tutto lo spazio lo sono, $\mathcal{M}(I) = \{\Omega, \emptyset\}$. Invece, per la misura di Lebesgue la questione è più delicata in quanto esistono insiemi non misurabili, quali ad esempio l'insieme di Vitali: consideriamo l'intervallo reale $[0, 1]$ e su esso la relazione d'equivalenza $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$. Sia V l'insieme dei rappresentanti delle classi d'equivalenza (ottenuto mediante l'assioma della scelta) allora

$$[0, 1] \subset \bigcup_{q \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}} (V + q)$$

da cui segue che $1 = \mathcal{L}^1([0, 1]) \leq \sum_{q \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}} \mathcal{L}^1(V)$.

Se chiamiamo $c = \mathcal{L}^1(V) > 0$, poichè $\bigcup_{q \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}} (V + q) \subset [-1, 2]$, allora

$$3 \geq \mathcal{L}^1 \left(\bigcup_{q \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}} (V + q) \right) = \sum_{q \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}} \mathcal{L}^1(V) = \sum_{q \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}} c$$

quindi $c = 0$, ed ecco l'assurdo dovuto all'aver supposto che V sia misurabile.

Diamo ora la definizione di misura:

Definizione 1.6. *Dato uno spazio misurabile (Ω, \mathcal{E}) dove \mathcal{E} è una sotto- σ -algebra delle parti di Ω , si definisce misura μ una funzione $\mu : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^p$ tale che*

(a) $\mu(\emptyset) = 0$

(b) per ogni successione $(A_j)_j \in \mathcal{E}$ disgiunta si ha la σ -additività, cioè posto $A = \bigcup_j A_j$,

$$\mu(A) = \sum_j \mu(A_j).$$

Si definisce quindi $(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$ uno spazio misura.

In questa definizione non si richiede la monotonia per inclusione, che però è conseguenza dell'additività sui disgiunti. Una misura si definisce positiva quando il codominio è $[0, +\infty]$, con segno o scalare, se il codominio è $[-\infty, +\infty]$ ed infine vettoriale se il codominio è \mathbb{R}^p e $p > 1$. In questi ultimi

due casi la condizione (b) dovendo valere per ogni successione A_j , implica che la serie

$$\sum_j \mu(A_j)$$

deve essere assolutamente convergente, altrimenti facendo dei riordinamenti potremmo ottenere qualsiasi numero.

Definizione 1.7. Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$ uno spazio misura. La misura μ si dice completa se dato un insieme $E \in \mathcal{E}$ tale che $\mu(E) = 0$, per ogni $A \subset E$ allora $A \in \mathcal{E}$.

Definizione 1.8. Sia (Ω, d) uno spazio metrico. Una funzione $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$ si definisce metrica se dati $A, B \subset \Omega$ tali che $d(A, B) > 0$, allora $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$.

Teorema 1.9. (criterio di Carathéodory) Se la misura esterna $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$ è metrica allora $\mathcal{B}(\Omega) \subset \mathcal{M}(\mu^*)$ e quindi $\mu = \mu^*_{|\mathcal{B}(\Omega)}$ è una misura.

Dimostrazione. Definiamo

$$\mathcal{F} := \{E \in \mathcal{B}(\Omega) : \mu^*(B \cap E) + \mu^*(B \setminus E) = \mu^*(B) \forall B \subset \Omega\},$$

chiaramente $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}(\mu^*)$. Basta dimostrare che $\mathcal{B}(\Omega) = \mathcal{F}$, in particolare basta dimostrare che ogni chiuso $C \subset \Omega$ è μ^* -misurabile e quindi che per ogni Boreliano B valga

$$\mu^*(B) \geq \mu^*(B \cap C) + \mu^*(B \setminus C)$$

in quanto l'altra disuguaglianza segue dalla subadditività. Non è restrittivo supporre che $\mu^*(B) < +\infty$. Chiamiamo $\tilde{B}_p = \{x \in B : d(x, C) \leq \frac{1}{p}\}$ e

$$B_j = \left\{x \in B : \frac{1}{j+1} \leq d(x, C) < \frac{1}{j}\right\}$$

per $j \geq 1$. Dunque per l'ipotesi di additività sui disgiunti avremo

$$\sum_{j=1}^p \mu^*(B_{2j}) \leq \mu^*(B), \quad \sum_{j=0}^p \mu^*(B_{2j+1}) \leq \mu^*(B)$$

e quindi $\sum_{j=1}^{+\infty} \mu^*(B_j) < +\infty$. Usando ora la subadditività di μ^* otteniamo

$$\mu^*(B \cap C) + \mu^*(B \setminus C) \leq \mu^*(B \cap C) + \mu^*(B \setminus \tilde{B}_p) + \sum_{j=p}^{+\infty} \mu^*(B_j) \leq \mu^*(B) + \sum_{j=p}^{+\infty} \mu^*(B_j).$$

Facendo tendere p a $+\infty$ otteniamo la tesi. \square

Pertanto, dal fatto che la misura di Lebesgue di un insieme limitato E può essere definita come

$$\mathcal{L}_e^d(E) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \mathcal{L}^d(R), E \subset R = \bigcup_{j=1}^m R_j \text{ con } \text{diam } R_j < \delta \right\}$$

deriva che \mathcal{L}_e^d è metrica e quindi $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{M}(\mathcal{L}^d)$.

Vediamo ora alcune proprietà delle misure, dando prima la definizione di misura di Borel.

Definizione 1.10. *Sia $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mu)$ uno spazio misura. Allora la misura $\mu : \mathcal{B}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^p$ si definisce misura di Borel.*

D'ora in poi ci riferiremo, se non diversamente indicato, a misure di Borel, ma teniamo presente che molte delle successive proprietà valgono anche per generiche misure.

Definizione 1.11. *Sia μ una misura scalare o vettoriale. La variazione totale $|\mu|$ di μ è una misura così definita*

$$|\mu|(B) := \sup \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} |\mu(B_i)| : B = \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i, B_i \cap B_j = \emptyset \right\}$$

dove il sup è fatto al variare di tutte le partizioni di B in insiemi disgiunti di Borel.

Proposizione 1.12. *Se μ è una misura non positiva su Ω , allora $|\mu|$ è una misura positiva e finita cioè $|\mu|(\Omega) < +\infty$. Inoltre $|\mu|(B) \geq |\mu(B)|$ per ogni $B \in \mathcal{B}(\Omega)$.*

Dimostrazione. Dimostriamo inizialmente la subadditività di $|\mu|$. Sia $B \subset \Omega$ insieme di Borel e B_h una successione di sottoinsiemi di Ω di Borel tali che $B \subset \bigcup_{h=0}^{\infty} B_h$. Definiamo una nuova successione disgiunta di insiemi $B'_0 = B_0$, $B'_i = B_i \setminus \bigcup_{h=0}^{i-1} B_h$ per ogni $i \geq 1$ e consideriamo una partizione numerabile di B , (A_j) . Allora si osserva che la successione $(A_j \cap B_h)_h$ per ogni $j \in \mathbb{N}$ è una partizione numerabile di A_j e con l'ipotesi che μ sia σ -additiva abbiamo:

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\mu(A_j)| = \sum_{j=0}^{\infty} \left| \sum_{h=0}^{\infty} \mu(B'_h \cap A_j) \right| \leq \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |\mu(B'_h \cap A_j)| \leq \sum_{h=0}^{\infty} |\mu|(B'_h).$$

Per l'arbitrarietà della partizione (A_j) , abbiamo la subadditività di $|\mu|$. Dimostriamo ora l'additività. Siano B_1 e B_2 due sottoinsiemi di Ω di Borel

disgiunti. Per ogni $\epsilon > 0$ possiamo trovare due partizioni numerabili di B_1 e B_2 , (B_h^1) e (B_h^2) tali che

$$|\mu|(B_1) \leq \sum_{h=0}^{\infty} |\mu(B_h^1)| + \epsilon, \quad |\mu|(B_2) \leq \sum_{h=0}^{\infty} |\mu(B_h^2)| + \epsilon$$

ed inoltre $B_h^1 \cap B_k^2 = \emptyset$ per ogni $h, k \in \mathbb{N}$. Pertanto l'insieme $B_1 \cup B_2$ ammette una partizione numerabile formata dagli insiemi delle due partizioni (B_h^1) e (B_h^2) e quindi vale la relazione:

$$|\mu|(B_1 \cup B_2) \geq \sum_{i=1}^2 \sum_{h=0}^{\infty} |\mu(B_h^i)| \geq |\mu|(B_1) + |\mu|(B_2) - 2\epsilon.$$

Per arbitrarietà di ϵ abbiamo l'additività di $|\mu|$ che unita alla subadditività mi permette di dire che $|\mu|$ è σ -additiva, quindi è una misura.

Resta da dimostrare che $|\mu|$ è finita. Per questa dimostrazione consideriamo μ reale infatti nel caso in cui μ sia vettoriale per esempio $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ vale la disuguaglianza:

$$|\mu|(B) \leq \sum_{h=1}^m |\mu_h|(B)$$

per ogni insieme di Borel $B \subset \Omega$.

Assumiamo per assurdo che $|\mu|(\Omega) = \infty$. Allora esiste una partizione numerabile (X_h) di Ω e un $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sum_{h=1}^n |\mu(X_h)| > 2(|\mu(\Omega)| + 1)$$

Inoltre dividendo i termini positivi con i termini negativi è possibile formare un insieme B unione di alcuni di questi X_h tale che $|\mu(B)| > |\mu(\Omega)| + 1$; chiamiamo $C = \Omega \setminus B$ allora $|\mu(C)| = |\mu(\Omega) - \mu(B)| \geq |\mu(B)| - |\mu(\Omega)| > 1$ e per additività di $|\mu|$ o $|\mu|(C) = \infty$ o $|\mu|(B) = \infty$. Assumiamo che $|\mu|(C) = \infty$ e chiamiamo $B_1 = B$. Ripetiamo il ragionamento appena fatto applicandolo a C unione disgiunta di B_2 e C_1 con $|\mu(B_2)| > 1$ e $|\mu|(C_1) = \infty$. Di questo passo otteniamo una successione di insiemi (B_h) tale che $|\mu(B_h)| > 1$ e quindi la serie $\sum_{h=1}^{\infty} \mu(B_h)$ non può convergere e ciò è assurdo. Quindi $|\mu|$ è finita. \square

Da questo risultato segue quindi che μ è una misura ben definita, nel caso non positivo, se e solo se $|\mu|(\Omega) < +\infty$.

Definizione 1.13. *Sia Ω uno spazio metrico localmente compatto e separabile. Una misura μ su Ω si dice finita se $|\mu|(\Omega) < +\infty$. Una funzione d'insieme*

$\mu : \mathcal{B}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^p$ si chiama misura σ -finita se esiste $(\Omega_h)_h$ tale che $\Omega = \bigcup_{h=1}^{\infty} \Omega_h$ e $\mu|_{\Omega_h} : \mathcal{B}(\Omega_h) \rightarrow \mathbb{R}^p$ è una misura finita. Diremo invece che μ , misura di Borel, è una misura localmente finita o di Radon in Ω se è una misura finita su $(K, \mathcal{B}(K))$ per ogni insieme di Borel relativamente compatto $K \subset \mathcal{B}(\Omega)$.

In questa tesi denoteremo con $\mathcal{M}_f(\Omega, \mathbb{R}^p)$ l'insieme delle misure in Ω a valori in \mathbb{R}^p finite e con $\mathcal{M}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^p)$ l'insieme delle misure di Radon.

In seguito vedremo che lo spazio vettoriale $\mathcal{M}_f(\Omega, \mathbb{R}^p)$, diventa uno spazio di Banach se come norma si considera la variazione totale.

Definizione 1.14. Sia μ una misura scalare. Possiamo definire parte positiva e parte negativa di μ in questo modo

$$\mu^+ = \frac{|\mu| + \mu}{2} \quad \mu^- = \frac{|\mu| - \mu}{2}.$$

Chiaramente μ^+ e μ^- sono misure positive e vediamo che $\mu = \mu^+ - \mu^-$ e $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$.

Definizione 1.15. Il supporto di una misura μ su Ω , $\text{supp } \mu$, è il più piccolo chiuso $C \subset \Omega$ tale che

$$|\mu|(\Omega \setminus C) = 0.$$

Se μ è una misura non negativa e $f \in L^1(\Omega, \mu; \mathbb{R}^p)$ oppure μ è una misura vettoriale e $f \in L^1(\Omega, |\mu|)$ indichiamo con $\mu \llcorner f$ o semplicemente $f\mu$ (da Federer indicata con la notazione $f \otimes \mu$) la misura così definita

$$\mu \llcorner f(B) := \int_B f(x) d\mu(x)$$

per ogni insieme di Borel di Ω . La misura $\mu \llcorner f$ è Boreliana se la funzione f è Boreliana.

Proposizione 1.16. $|\mu \llcorner f| = |\mu| \llcorner |f|$.

Dimostrazione. Sia $B \in \mathcal{B}(\Omega)$. Dimostriamo prima che $|\mu \llcorner f|(B) \leq |\mu| \llcorner |f|(B)$:

$$\begin{aligned} |\mu \llcorner f|(B) &= \sup \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} |\mu \llcorner f(B_i)| : B = \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i, B_i \cap B_j = \emptyset \right\} \\ &= \sup \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \left| \int_{B_j} f d\mu \right| : B = \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i, B_i \cap B_j = \emptyset \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \int_{B_j} |f| d|\mu| : B = \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i, B_i \cap B_j = \emptyset \right\} \\ &= \sup \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} |\mu| \llcorner |f|(B_i) : B = \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i, B_i \cap B_j = \emptyset \right\} = |\mu| \llcorner |f|(B) \end{aligned}$$

Pertanto per dimostrare che $|\mu \llcorner f|(B) = |\mu| \llcorner |f|(B)$ bisogna trovare una opportuna partizione di B . Possiamo supporre che μ sia una misura scalare e $f \in L^1(\Omega, |\mu|)$; il caso vettoriale infatti si dimostra considerando componente per componente. Definiamo la seguente partizione di B

$$B_1 = \{x \in B : f(x) \leq 0 \mu(x) \leq 0\}, \quad B_2 = \{x \in B : f(x) \leq 0 \mu(x) > 0\},$$

$$B_3 = \{x \in B : f(x) > 0 \mu(x) \leq 0\}, \quad B_4 = \{x \in B : f(x) > 0 \mu(x) > 0\}.$$

Dividiamo f e μ in parte positiva e parte negativa

$$f = f^+ - f^- \quad \mu = \mu^+ - \mu^-$$

allora abbiamo

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 |\mu \llcorner f(B_i)| &= \sum_{i=1}^4 \left| \int_{B_j} f(x) d\mu(x) \right| = \int_{B_1} f^- d\mu^- + \int_{B_2} f^- d\mu^+ + \\ &+ \int_{B_3} f^+ d\mu^- + \int_{B_4} f^+ d\mu^+ = \int_{B_1 \cup B_3} (f^- + f^+) d\mu^- + \int_{B_2 \cup B_4} (f^- + f^+) d\mu^+ \\ &= \int_{B_1 \cup B_3} |f| d\mu^- + \int_{B_2 \cup B_4} |f| d\mu^+ = \int_B |f| d|\mu| \end{aligned}$$

come volevasi dimostrare. \square

In generale, data una misura μ e E un insieme di Borel si denota con $\mu \llcorner E$ la restrizione di μ a E , ovvero

$$\mu \llcorner E(A) = \mu(E \cap A).$$

Quindi nel caso in cui $f = \chi_E$, dove χ_E è la funzione caratteristica di un insieme di Borel E , scriveremo $\mu \llcorner \chi_E = \mu \llcorner E$. Infatti

$$\mu \llcorner f(B) = \int_B f(x) d\mu(x) = \int_B \chi_E d\mu(x) = \int_{B \cap E} d\mu(x) = \mu(E \cap B) = \mu \llcorner E(B).$$

Definizione 1.17. Siano X e Y spazi metrici. Una funzione $f : X \rightarrow Y$ è detta funzione di Borel se, per ogni aperto $A \subset Y$, $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(X)$.

Proposizione 1.18. Sia μ una misura positiva localmente finita in Ω . Per ogni insieme di Borel $B \subset \Omega$ si ha

$$\mu(B) = \sup \{ \mu(K) \mid K \subset B \text{ compatto} \}$$

$$\mu(B) = \inf \{ \mu(A) \mid B \subset A \text{ aperto} \}$$

Le proprietà precedentemente enunciate sono definite regolarità interna ed esterna di una misura.

Capitolo 2

Derivazione di misure

2.1 Teoremi di ricoprimento

Definizione 2.1. Una famiglia di sottoinsiemi di \mathbb{R}^d , \mathcal{B} , si dice *disgiunta* se $B \cap B' = \emptyset$ per ogni $B, B' \in \mathcal{B}$, $B \neq B'$.

Per la separabilità di \mathbb{R}^d , ogni famiglia disgiunta costituita da insiemi aventi parte interna non vuota è al più numerabile.

In seguito scriveremo

$$\bigcup \mathcal{B} := \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B.$$

Definizione 2.2. Sia $A \subset \mathbb{R}^d$. Una famiglia di palle chiuse \mathcal{B} si dice *ricoprimento fine* di A se per ogni $x \in A$ esiste una palla in \mathcal{B} di centro x e con raggio arbitrariamente piccolo cioè

$$\inf \{ \rho > 0 \mid \overline{B}_\rho(x) \in \mathcal{B} \} = 0 \quad \forall x \in A.$$

Teorema 2.3. (Besicovitch) Esiste un numero intero $\xi(d)$ (dipendente solo dalla dimensione dello spazio) con la seguente proprietà: se \mathcal{B} è una famiglia di palle chiuse di \mathbb{R}^d tale che $A = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \exists \rho > 0 \overline{B}_\rho(x) \in \mathcal{B}\}$ (insieme dei centri) è limitato allora esistono ξ famiglie disgiunte e al più numerabili $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_\xi$ tale che

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\xi} \bigcup \mathcal{B}_i.$$

Dimostrazione. Possiamo supporre che

$$\sup \{ r : \overline{B}_r(x) \in \mathcal{B}, x \in A \} < +\infty, \quad (2.1)$$

perchè se così non fosse, dimostriamo il teorema considerando una sottofamiglia $\overline{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B}$ che verifica (2.1). Dividiamo la dimostrazione in tre parti.

Parte prima. Costruiamo una sottofamiglia al più numerabile $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ che ricopre A . Definiamo per induzione su n una famiglia decrescente di insiemi in questo modo $A_0 = A$, $A_1 = A_0 \setminus B(1)$, \dots , $A_{n+1} = A_n \setminus B(n+1)$ dove

$$B(1) \in \left\{ \overline{B_\varrho}(x) \in \mathcal{B} : \varrho > \frac{2}{3} \sup \left\{ r : \overline{B_r}(x) \in \mathcal{B}, x \in A_0 \right\} \right\}$$

$$B(n+1) \in \left\{ \overline{B_\varrho}(x) \in \mathcal{B} : x \in A_n, \varrho > \frac{2}{3} \sup \left\{ r : \overline{B_r}(x) \in \mathcal{B}, x \in A_n \right\} \right\}.$$

Quindi avremo una successione $A_0 \supset A_1 \dots \supset A_n \supset \dots$ ed in particolare $A_0 \setminus A_n \subset \bigcup_{h=1}^n B(h)$, dove scriveremo $B(h) = \overline{B_{\varrho_h}}(x_h)$.

Nel caso in cui n sia il più piccolo numero naturale tale che $A_n = \emptyset$ allora poniamo $n_\infty = n+1$, altrimenti, se tale n non esiste, poniamo $n_\infty = \infty$. In entrambi i casi si dimostra che $\mathcal{B}' = \{B(h) : 1 \leq h < n_\infty\}$ ricopre A . Questo è ovvio se $n_\infty < \infty$, ma vediamo l'altro caso: consideriamo la successione $(x_h)_h$ e $k > h \geq 1$ allora $|x_h - x_k| > \varrho_h$ e $\varrho_k < \frac{3}{2}\varrho_h$, per come abbiamo definito i $B(n)$, ma siccome A è limitata $\varrho_h \rightarrow 0$. Quindi se supponiamo che esista un $x \in A_h$ per ogni h allora dovrebbe esistere $\overline{B_{\bar{\varrho}}}(x) \in \mathcal{B}$ tale che $\varrho_h > \frac{2}{3}\bar{\varrho}$ ma ciò è in contraddizione con il fatto che la successione dei ϱ_h è infinitesima.

Parte seconda. In questa parte dimostreremo che la cardinalità dell'insieme

$$I_n = \{h \in [1, n-1] : B(h) \cap B(n) \neq \emptyset\}$$

non supera ξ , costante dipendente solo dalla dimensione N dello spazio, per ogni $n < n_\infty$. Definiamo $I'_n = \{h \in I_n : \varrho_h < 7\varrho_n\}$ e $I''_n = I_n \setminus I'_n$.

Ragioniamo prima su I'_n . Sappiamo che, per $k > h$, $|x_h - x_k| > \varrho_h$ e $\varrho_k < \frac{3}{2}\varrho_h$ e da ciò segue che le palle $\overline{B_{\frac{2\varrho_h}{5}}}(x_h)$ sono a due a due disgiunte e per $h \in I'_n$ sono contenute in $\overline{B_{\frac{54\varrho_n}{5}}}(x_n)$. Infatti se $x \in \overline{B_{\frac{2\varrho_h}{5}}}(x_h)$ e $h \in I'_n$ abbiamo

$$|x - x_n| \leq |x - x_h| + |x_h - x_n| \leq \frac{2\varrho_h}{5} + \varrho_h + \varrho_n \leq \frac{14\varrho_n}{5} + 7\varrho_n + \varrho_n = \frac{54\varrho_n}{5}.$$

Inoltre, siccome $h < n$, $\varrho_h > \frac{2}{3}\varrho_n$ e quindi $\overline{B_{\frac{4\varrho_n}{15}}}(x_h) \subset \overline{B_{\frac{2\varrho_h}{5}}}(x_h)$ per ogni $h \in [1, n-1]$. Da ciò segue che I'_n non contiene più di $(\frac{81}{2})^d$ elementi. Infatti usando la misura di Lebesgue abbiamo

$$\mathcal{L}^d(\overline{B_{\frac{54\varrho_n}{5}}}(x_n)) \geq \sum_{h \in I'_n} \mathcal{L}^d(\overline{B_{\frac{2\varrho_h}{5}}}(x_h)) \geq \#I'_n \mathcal{L}^d(\overline{B_{\frac{4\varrho_n}{15}}}(x_h))$$

e quindi $\omega_d\left(\frac{54\varrho_n}{5}\right)^d \geq \#I'_n \omega_d\left(\frac{4\varrho_n}{15}\right)^d$ cioè semplificando $\#I'_n \leq \left(\frac{81}{2}\right)^d$.
Stimiamo ora la cardinalità di I''_n . Siano $h, k \in I''_n$ con $h < k$ e definiamo

$$\gamma = \frac{x_h - x_n}{|x_h - x_n|}, \quad \eta = \frac{x_k - x_n}{|x_k - x_n|}.$$

I vettori γ ed η sono unitari. Dimosteremo che $|\gamma - \eta| > \delta$ dove δ è una costante positiva, infatti in questo modo la cardinalità di I''_n sarà minore del massimo numero di punti sulla sfera \mathbb{S}^{d-1} che distano tra di loro di un valore maggiore di δ . Dall'identità

$$\langle \gamma, \eta \rangle = \frac{|x_h - x_n|^2 + |x_k - x_n|^2 - |x_h - x_k|^2}{2|x_h - x_n||x_k - x_n|}$$

deduciamo

$$\begin{aligned} \langle \gamma, \eta \rangle &< \frac{(\varrho_h + \varrho_n)^2 + |x_k - x_n|^2 - \varrho_h^2}{2\varrho_h|x_k - x_n|} = \frac{\varrho_n}{|x_k - x_n|} + \frac{\varrho_n^2}{2\varrho_h|x_k - x_n|} + \frac{|x_k - x_n|}{2\varrho_h} \\ &\leq \frac{\varrho_n}{\varrho_n} + \frac{\varrho_n^2}{2\varrho_h\varrho_k} + \frac{\varrho_k + \varrho_n}{2\varrho_h} = \frac{1}{7} + \frac{1}{98} + \frac{3}{4} + \frac{1}{14} = \frac{191}{196} < 1. \end{aligned}$$

Dunque se prendiamo $\delta = \frac{\sqrt{10}}{14}$ abbiamo $|\gamma - \eta| > \delta$, come volevamo dimostrare.
Parte terza. Disponiamo in righe le palle $B(h)$ per $h \in [1, n_\infty)$ in modo che palle nella stessa riga siano a due a due disgiunte: poniamo $B(1)$ nella prima riga, e $B(h)$ nella prima riga nella quale troviamo palle che non la intersecano. Se chiamiamo \mathcal{B}_i la famiglia disgiunta delle palle della riga i , allora dalla seconda parte segue che il numero delle righe è finito ξ , dalla prima parte segue che $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_\xi$ ricoprono A . \square

Teorema 2.4. *Sia $A \subset \mathbb{R}^d$ limitato e $\rho : A \rightarrow (0, \infty)$ allora esiste $S \subset A$ al più numerabile tale che*

$$A \subset \bigcup_{x \in S} B_{\rho(x)}(x)$$

e ogni punto di \mathbb{R}^d appartiene ad al più ξ palle centrate in punti di S , ovvero

$$\sum_{x \in S} \chi_{B_{\rho(x)}(y)} \leq \xi \quad \forall y \in \mathbb{R}^d.$$

Il teorema precedente vale anche per famiglie di palle aperte e si possono anche prendere in considerazione famiglie più generali di insiemi.

Dimostrazione. Se poniamo $\mathcal{B} = \{B_{\rho(x)}(x) \mid x \in A\}$ allora A è l'insieme dei centri di \mathcal{B} e quindi per il Teorema 2.3 esistono $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_\xi$ sottofamiglie disgiunte al più numerabili tali che

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\xi} \mathcal{B}_i$$

e S è l'insieme dei centri delle palle delle famiglie \mathcal{B}_i . \square

Teorema 2.5. (Vitali-Besicovitch) *Sia $A \subset \mathbb{R}^d$ un insieme di Borel limitato e \mathcal{B} un ricoprimento fine di A . Allora per ogni misura μ localmente finita e positiva su \mathbb{R}^d esiste una famiglia numerabile e disgiunta $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ tale che*

$$\mu\left(A \setminus \bigcup \mathcal{B}'\right) = 0.$$

Dimostrazione. Siccome \mathcal{B} è un ricoprimento fine di A per il Teorema 2.3 è possibile trovare ξ famiglie disgiunte al più numerabili $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_\xi$ che ricoprono A . Inoltre esiste un intero $i \in [1, \xi]$ tale che

$$\mu(A \cap \bigcup \mathcal{D}_i) \geq \frac{1}{\xi} \mu(A),$$

e quindi esiste una sottofamiglia finita disgiunta $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{D}_i$ tale che

$$\mu(A \cap \bigcup \mathcal{B}_1) \geq \frac{1}{2\xi} \mu(A).$$

Consideriamo ora $A_1 = A \setminus \bigcup \mathcal{B}_1$, allora

$$\mu(A_1) \leq \left(1 - \frac{1}{2\xi} \mu(A)\right)$$

e sia

$$\mathcal{D} = \left\{ \overline{B}_\rho(x) \in \mathcal{B} \mid \overline{B}_\rho(x) \cap \bigcup \mathcal{B}_1 = \emptyset \right\}.$$

\mathcal{D} è un ricoprimento fine di A_1 , dunque ripetendo il ragionamento appena fatto possiamo dire che esiste una sottofamiglia finita disgiunta $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{D}$ (quindi anche disgiunta da \mathcal{B}_1) tale che

$$\mu(A_1 \cap \bigcup \mathcal{B}_2) \geq \frac{1}{2\xi} \mu(A_1).$$

Proseguendo in questo modo otteniamo una successione $(A_h)_{h \in \mathbb{N}}$ tale che

$$\mu(A_{h+1}) \leq \left(1 - \frac{1}{2\xi}\right) \mu(A_h) \leq \left(1 - \frac{1}{2\xi}\right)^{h+1} \mu(A_1)$$

e quindi $\mu(A_h)$ è infinitesimo. In conclusione se poniamo $\mathcal{B}' = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}_i$, abbiamo una sottofamiglia numerabile disgiunta e tale che

$$\mu\left(A \setminus \bigcup \mathcal{B}'\right) \leq \mu\left(\bigcap_{h=1}^{\infty} A_h\right) = 0.$$

\square

2.2 Decomposizione di Radon-Nikodym

Definizione 2.6. Sia μ una misura di Borel su Ω . Diciamo che μ è concentrata in un insieme di Borel E se

$$\mu(B) = \mu(B \cap E)$$

per ogni insieme $B \in \mathcal{B}(\Omega)$.

Ricordiamo che un insieme A si dice trascurabile per una misura μ se $\mu(A) = 0$. Questa definizione è legata al fatto che noi considereremo sempre misure complete.

Definizione 2.7. Sia λ una misura scalare o vettoriale su Ω e μ una misura positiva su Ω . Diciamo che

1. λ è assolutamente continua rispetto a μ , $\lambda \ll \mu$, se ogni insieme di Borel μ -trascurabile è λ -trascurabile.
2. λ è singolare rispetto a μ , $\lambda \perp \mu$, se esiste un insieme di Borel μ -trascurabile B tale che λ è concentrata in B .

Un esempio per quest'ultima definizione è $\mathcal{L}^d \perp \delta_{\omega_0}$ dove δ_{ω_0} , ricordiamo, è la misura Delta di Dirac e \mathcal{L}^d la misura di Lebesgue. Infatti l'insieme $\{\omega_0\}$ è trascurabile per la misura di Lebesgue mentre la Delta di Dirac si concentra su di esso.

Osserviamo che le due definizioni precedenti valgono non solo per le misure di Borel, come nel caso considerato, ma anche per misure più generali.

Teorema 2.8. (di Radon-Nikodym) Sia λ una misura vettoriale su Ω di codominio \mathbb{R}^p e μ una misura positiva σ -finita su Ω . Allora esistono un'unica funzione $f \in L^1(\Omega, \mu, \mathbb{R}^p)$ e una misura λ^s tali che

$$\lambda = f\mu + \lambda^s \quad e \quad \lambda^s \perp \mu.$$

La funzione f è chiamata derivata di λ fatta rispetto a μ .

Corollario 2.9. Dal teorema precedente segue che, siccome $\mu \ll |\mu|$, esiste $\nu \in L^1(\Omega, \mu, \mathbb{R}^p)$ tale che

$$\mu = \nu|\mu|.$$

In particolare si dimostra che $\nu : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^{p-1}$ per $|\mu|$ -quasi ogni $x \in \Omega$.

Passeremo ora ad introdurre il concetto di derivata di una misura rispetto ad un'altra, partendo da questa definizione:

Definizione 2.10. Siano μ e ν due misure di Radon positive e $x \in \text{supp } \mu$. Definiamo allora due funzioni di Borel:

$$D_\mu^+ \nu(x) := \limsup_{\rho \rightarrow 0} \frac{\nu(B_\rho(x))}{\mu(B_\rho(x))}, \quad D_\mu^- \nu(x) := \liminf_{\rho \rightarrow 0} \frac{\nu(B_\rho(x))}{\mu(B_\rho(x))}.$$

Definiamo dunque derivata di ν fatta rispetto a μ la misura $D_\mu \nu := \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\nu(B_\rho(x))}{\mu(B_\rho(x))}$.

Osserviamo che le due densità non cambiano se al posto di palle aperte consideriamo palle chiuse.

Proposizione 2.11. Siano μ e ν due misure di Radon positive in \mathbb{R}^d e sia $t \in [0, \infty)$. Per ogni insieme di Borel $E \subset \text{supp } \mu$ valgono le due implicazioni:

$$\begin{aligned} D_\mu^- \nu(x) \leq t \quad \forall x \in E &\implies \nu(E) \leq t\mu(E), \\ D_\mu^+ \nu(x) \geq t \quad \forall x \in E &\implies \nu(E) \geq t\mu(E). \end{aligned}$$

In particolare se ν è finita allora $\mu(\{x \mid D_\mu^+ \nu(x) = \infty\}) = 0$.

Dimostrazione. Dimostriamo che se $D_\mu^- \nu(x) \leq t$ allora $\nu(E) \leq t\mu(E)$. Non è restrittivo supporre che E sia limitato; sia A un insieme aperto limitato tale che $E \subset A$, e per $\epsilon > 0$ definiamo

$$\mathcal{B} = \{\overline{B}_\rho(x) \mid x \in E, \overline{B}_\rho(x) \subset A, \nu(\overline{B}_\rho(x)) < (t + \epsilon)\mu(\overline{B}_\rho(x))\}.$$

\mathcal{B} è un ricoprimento fine di E e quindi per il Teorema 2.5 esiste una famiglia numerabile disgiunta $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ tale che $\nu(E \setminus \bigcup \mathcal{B}') = 0$ e quindi avremo

$$\nu(E) \leq \nu(\bigcup \mathcal{B}') \leq (t + \epsilon)\mu(\bigcup \mathcal{B}') \leq (t + \epsilon)\mu(A).$$

Mandando $\epsilon \rightarrow 0$ e grazie alla regolarità esterna di μ , Proposizione 1.18, otteniamo $\nu(E) \leq t\mu(E)$. La dimostrazione dell'altra implicazione è analoga a questa. \square

Teorema 2.12. (di derivazione di Besicovitch) Siano μ una misura positiva localmente finita in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ e $\nu : \mathcal{B}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^p$ una misura vettoriale localmente finita. Allora, per μ -quasi ogni $x \in \text{supp } \mu$, il limite

$$f(x) := \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\nu(B_\rho(x))}{\mu(B_\rho(x))}$$

esiste in \mathbb{R}^p e la decomposizione di Radon-Nikodym di ν è data da $\nu = f\mu + \nu^s$ dove $\nu^s = \nu \llcorner E$ ed E è un insieme μ -trascurabile così definito

$$E = (\Omega \setminus \text{supp } \mu) \cup \left\{ x \in \text{supp } \mu \mid \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{|\nu|(B_\rho(x))}{\mu(B_\rho(x))} = \infty \right\}.$$

Dimostrazione. Non è restrittivo supporre che ν sia una misura positiva e ν e μ siano misure finite. In tal caso, per la Proposizione 2.11, l'insieme $\{x \in \text{supp } \mu \mid \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\nu(B_\rho(x))}{\mu(B_\rho(x))} = \infty\}$ è μ -trascurabile quindi E è μ -trascurabile.

Il nostro obiettivo è dimostrare che $f = D_\mu \nu$ esiste μ -quasi ovunque e che $\mu \llcorner f = \nu \llcorner F$ dove $F = \Omega \setminus E$. Definiamo quindi

$$\lambda^+(B) := \int_B D_\mu^+ \nu(x) d\mu(x), \quad \lambda^-(B) := \int_B D_\mu^- \nu(x) d\mu(x)$$

per ogni insieme di Borel B di Ω . Se verifichiamo che $\lambda^+ \leq \nu \llcorner F \leq \lambda^-$ allora la dimostrazione è conclusa, infatti se così fosse avremmo

$$\limsup_{\rho \rightarrow 0} \frac{\nu(B_\rho(x))}{\mu(B_\rho(x))} \leq \liminf_{\rho \rightarrow 0} \frac{\nu(B_\rho(x))}{\mu(B_\rho(x))}$$

μ -quasi ovunque e quindi le disuguaglianze diventerebbero uguaglianze. In tal caso quindi f esiste μ -quasi ovunque e $\mu \llcorner f = \nu \llcorner F$.

Proviamo prima che $\lambda^+ \leq \nu$; sia $t > 1$ e $B \in \mathcal{B}(\Omega)$ fissato, tale che $B \subset \text{supp } \mu$ e $D_\mu^+ \nu \in (0, \infty)$ su B , quindi contenuto in F . Definiamo

$$B_n := \{x \in B : D_\mu^+ \nu(x) \in (t^n, t^{n+1}]\} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Dal fatto che $D_\mu \nu^+ \leq t^{n+1}$ segue direttamente che $\lambda^+(B_n) \leq t^{n+1} \mu(B_n)$ mentre dalla Proposizione 2.11 dal fatto che $D_\mu \nu^+ \geq t^n$ segue che $t^{n+1} \mu(B_n) \leq t \nu(B_n)$; unendo le due cose e sommando rispetto a n otteniamo $\lambda^+(B) \leq t \nu \llcorner F(B)$, e mandando $t \rightarrow 1$ otteniamo la disuguaglianza. Analogamente si dimostra l'altra disuguaglianza. \square

Siamo finalmente arrivati alla definizione di derivata di una misura rispetto ad un'altra, infatti la funzione f che abbiamo appena dimostrato esistere μ -quasi ovunque è:

$$f(x) = \frac{d\nu}{d\mu}(x) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\nu(B_\rho(x))}{\mu(B_\rho(x))}.$$

Corollario 2.13. *Sia μ una misura di Radon positiva su un insieme aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ e $f \in L^1(\Omega, \mu)$. Allora per μ -quasi ogni $x \in \Omega$ vale la seguente uguaglianza:*

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B_\varrho(x))} \int_{B_\varrho(x)} |f(y) - f(x)| d\mu(y) = 0.$$

Ogni punto $x \in \Omega$ per cui vale l'uguaglianza è chiamato punto di Lebesgue di f rispetto a μ .

Dimostrazione. Consideriamo $\nu_q = \mu \llcorner |f - q|$ con $q \in \mathbb{Q}$ e applichiamo il Teorema 2.12:

$$|f(x) - q| = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\nu_q(B_\rho(x))}{\mu(B_\rho(x))} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B_\rho(x))} \int_{B_\rho(x)} |f(y) - q| d\mu(y). \quad (2.2)$$

Questa uguaglianza vale per ogni $x \in \Omega \setminus N_q$ dove N_q è un insieme trascurabile per la misura μ . Chiamiamo ora $E = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} N_q$, allora $\mu(E) = 0$, e per ogni $x \in \Omega \setminus E$ e per ogni $q \in \mathbb{Q}$ vale (2.2). Da ciò segue che per ogni $q \in \mathbb{Q}$ vale

$$\begin{aligned} & \limsup_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B_\rho(x))} \int_{B_\rho(x)} |f(y) - f(x)| d\mu(y) \\ & \leq \limsup_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B_\rho(x))} \int_{B_\rho(x)} |f(y) - q| d\mu(y) + |q - f(x)| = 2|f(x) - q|. \end{aligned}$$

e quindi per la densità di \mathbb{Q} l'enunciato è dimostrato. \square

Riprendiamo ora il Corollario 2.9 e vediamo che dal Teorema di derivazione di Besicovitch segue che $|\nu(x)| \leq 1$ per $|\mu|$ -quasi ogni $x \in \Omega$: supponiamo infatti che $\mu = f\lambda$ allora

$$f(x) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\mu(B_\rho(x))}{\lambda(B_\rho(x))} = \frac{\partial \mu}{\partial \lambda}(x)$$

cioè

$$f(x) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda(B_\rho(x))} \int_{B_\rho(x)} f(y) d\lambda(y).$$

Nel nostro caso abbiamo $\mu \ll |\mu|$ e quindi esiste $\nu \in L^1(\Omega, \mu, \mathbb{R}^d)$ tale che $\mu = \nu|\mu|$ ma allora per $|\mu|$ -quasi ogni $x \in \Omega$ vale che

$$|\nu(x)| = \left| \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{|\mu|(B_\rho(x))} \int_{B_\rho(x)} \nu(y) d|\mu|(y) \right|.$$

Osserviamo però che

$$|\mu|(B_\rho(x)) \geq |\mu(B_\rho(x))| = \left| \int_{B_\rho(x)} \nu(y) d|\mu|(y) \right|$$

da cui segue, per $|\mu|$ -quasi ogni $x \in \Omega$

$$|\nu(x)| = \left| \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{|\mu|(B_\rho(x))} \int_{B_\rho(x)} \nu(x) d|\mu|(x) \right| \leq 1.$$

Capitolo 3

Teorema di Riesz e convergenza debole di misure

Anche in questa sezione considereremo Ω uno spazio metrico localmente compatto e separabile.

In seguito denoteremo con $C_c(\Omega, \mathbb{R}^p)$ l'insieme delle funzioni continue in Ω a valori in \mathbb{R}^p a supporto compatto e con $C_0(\Omega, \mathbb{R}^p)$ la sua chiusura nella norma $\|f\|_\infty = \sup_{x \neq 0} |f(x)|$, dove C_0 è l'insieme delle funzioni continue che si annullano sul bordo di Ω . Pertanto, data una successione $(x_n)_n$ di elementi di Ω convergente a $x \in \partial\Omega$, allora, se $f \in C_0$, $f(x_n) \rightarrow 0$. Similmente, data una successione $(x_n)_n \subset \Omega$ tale che $\|x_n\| \rightarrow \infty$, allora $f(x_n) \rightarrow 0$.

Enunciamo un'importante proprietà delle funzioni di Borel:

Teorema 3.1. (Lusin) Sia $f \in L^\infty(\Omega, |\mu|, \mathbb{R}^p)$. Per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\phi_\epsilon \in C_0(\Omega, \mathbb{R}^p)$ tale che

$$|\mu|(\{f \neq \phi_\epsilon\}) < \epsilon.$$

Questo teorema può anche essere riformulato in questo modo: data una funzione di Borel $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ esiste una successione $(K_h)_h$ di compatti di Ω tale che $f|_{K_h}$ è continua per ogni h e

$$|\mu|(\Omega \setminus \cup_{h=0}^{+\infty} K_h) = 0.$$

Vedremo ora un importante risultato che permette di identificare il duale di $C_0(\Omega, \mathbb{R}^p)$ con l'insieme $\mathcal{M}_f(\Omega, \mathbb{R}^p)$ e similmente il duale di $C_c(\Omega, \mathbb{R}^p)$ con $\mathcal{M}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^p)$; questo permette di utilizzare proprietà note dei funzionali lineari per dedurre ulteriori caratterizzazioni delle misure finite. Inoltre si osserva che la variazione totale coincide con la norma dello spazio di Banach $\mathcal{M}_f(\Omega, \mathbb{R}^p)$.

Teorema 3.2. (Riesz) Per ogni funzionale $L \in (C_0(\Omega, \mathbb{R}^p))'$ esiste ed è unica una misura $\mu \in \mathcal{M}_f(\Omega, \mathbb{R}^p)$ tale che

$$L(\phi) = \sum_{i=1}^p \int_{\Omega} \phi_i(x) d\mu_i(x) \quad \forall \phi \in C_0(\Omega, \mathbb{R}^p).$$

Inoltre $\|L\| = |\mu|(\Omega)$.

Dimostrazione. Possiamo supporre $L : C_0(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, e dimostrare che esiste $\mu \in \mathcal{M}_f(\Omega)$, perché il caso vettoriale segue dall'analisi componente per componente. Supponiamo prima $L(\phi) \geq 0 \quad \forall \phi \geq 0$. Per ogni $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ definiamo

$$\mu(A) := \sup \{L\phi : 0 \leq \phi \leq \chi_A\}$$

e dimostriamo che μ è una misura positiva. Chiaramente $\mu(\emptyset) = 0$. Sia (A_j) una successione di insiemi di Borel tali che $A = \bigcup A_j$, vediamo che $\mu(A) \leq \sum \mu(A_j)$. Poiché gli insiemi

$$K = \{\phi \in C_0(\Omega) : 0 \leq \phi \leq \chi_A\} \text{ e } T = \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j : \phi_j \in C_0(\Omega) \text{ e } 0 \leq \phi_j \leq \chi_{A_j} \right\}$$

coincidono, risulta

$$\mu(A) = \sup_{\phi \in K} L\phi = \sup_{\phi \in T} L\phi = \sup_{0 \leq \phi_j \leq \chi_{A_j}} \sum_{j=0}^{\infty} L\phi_j \leq \sum_{j=0}^{\infty} \sup L\phi_j = \sum_{j=0}^{\infty} \mu(A_j).$$

Applichiamo ora il criterio di Carathéodory. Siano A e B sottoinsiemi di Ω tali che $d(A, B) > 0$. Ogni funzione $\phi \in C_0$ tale che $0 \leq \phi \leq \chi_{A \cup B}$ può essere scritto come somma $\phi = \phi_A + \phi_B$ dove $\phi_A, \phi_B \in C_0$, $0 \leq \phi_A \leq \chi_A$, $0 \leq \phi_B \leq \chi_B$, pertanto

$$\mu(A \cup B) = \sup_{0 \leq \phi \leq \chi_{A \cup B}} L\phi = \sup_{0 \leq \phi_A \leq \chi_A} L\phi_A + \sup_{0 \leq \phi_B \leq \chi_B} L\phi_B = \mu(A) + \mu(B).$$

Resta da verificare che $L\phi = \int_{\Omega} \phi d\mu$

□

Dal teorema di Riesz, sostituendo Ω con un qualsiasi aperto A , segue:

Corollario 3.3. Se $A \subset \Omega$ è un insieme aperto avremo

$$|\mu|(A) = \sup \left\{ \int_A \varphi(x) d\mu(x) \mid 0 \leq \varphi(x) \leq \chi_A(x), \varphi \in C(A) \right\}.$$

Dimostrazione. Del teorema di Riesz abbiamo dedotto che

$$|\mu|(\Omega) = \sup \left\{ \int_{\Omega} \langle \phi, \nu \rangle d|\mu| \mid \phi \in C_0(\Omega, \mathbb{R}^p) \text{ e } \|\phi\| \leq 1 \right\}$$

ma ripetendo il ragionamento per ogni aperto $A \subset \Omega$ e considerando che se μ è positiva allora $\mu = |\mu|$, quindi $\nu = 1$, avremo

$$\mu(A) = \sup \left\{ \int_A \phi d\mu \mid \phi \in C_0(A), |\phi| \leq 1 \right\}.$$

□

Dal Corollario 3.3 segue la seguente proprietà:

Proposizione 3.4. *Siano λ e μ due misure definite in $\mathcal{B}(\Omega)$. Se $\lambda \perp \mu$ allora*

$$|\mu + \lambda|(\Omega) = |\mu|(\Omega) + |\lambda|(\Omega).$$

Dimostrazione. L'ipotesi $\lambda \perp \mu$ significa che esiste $B \in \mathcal{B}(\Omega)$ tale che $\mu(B) = 0$ e per ogni $E \in \mathcal{B}(\Omega)$ $\lambda(E) = \lambda(B \cap E)$. Dal Corollario 3.3 segue

$$\begin{aligned} |\mu + \lambda|(\Omega) &= \sup \left\{ \int_{\Omega} \phi(x) d(\mu + \lambda) \mid 0 \leq \phi(x) \leq \chi_{\Omega}(x), \phi \in C(\Omega) \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_B \phi(x) d(\mu + \lambda) \mid 0 \leq \phi(x) \leq \chi_B(x), \phi \in C(B) \right\} \\ &\quad + \sup \left\{ \int_{\Omega \setminus B} \phi(x) d(\mu + \lambda) \mid 0 \leq \phi(x) \leq \chi_{\Omega \setminus B}(x), \phi \in C(\Omega \setminus B) \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_B \phi(x) d\lambda \mid 0 \leq \phi(x) \leq \chi_B(x), \phi \in C(B) \right\} \\ &\quad + \sup \left\{ \int_{\Omega \setminus B} \phi(x) d\mu \mid 0 \leq \phi(x) \leq \chi_{\Omega \setminus B}(x), \phi \in C(\Omega \setminus B) \right\} \\ &= |\lambda|(\Omega) + |\mu|(\Omega). \end{aligned}$$

□

Parleremo ora di convergenza debole di misure, utilizzando la definizione e le proprietà della convergenza nella topologia debole $*$, $\sigma(E', E)$, quella topologia indotta da un generico spazio normato E sul suo duale E' :

Definizione 3.5. *Una successione di misure $(\mu_h)_h$ converge debole $*$ a μ se i funzionali indotti L_{μ_h} convergono nella topologia debole $*$ a L_{μ} cioè*

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^p \int_{\Omega} \phi_i(x) d\mu_{h,i}(x) = \sum_{i=1}^p \int_{\Omega} \phi_i(x) d\mu_i(x) \quad \forall \phi \in C_0(\Omega, \mathbb{R}^p).$$

In seguito parleremo di convergenza debole di misure riferendoci alla convergenza debole * e scriveremo $\mu_h \rightharpoonup \mu$.

In certi casi si utilizza la convergenza debole * locale, che si ha quando

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^p \int_{\Omega} \phi_i(x) d\mu_{h,i}(x) = \sum_{i=1}^p \int_{\Omega} \phi_i(x) d\mu_i(x) \quad \forall \phi \in C_c(\Omega, \mathbb{R}^p).$$

Chiaramente la convergenza debole implica la convergenza debole locale, ma vedremo che sotto opportune ipotesi vale anche il viceversa.

Dal teorema di Banach-Steinhaus segue che ogni successione convergente debolmente soddisfa la condizione

$$\sup_h |\mu_h|(\Omega) < +\infty.$$

Viceversa, data una successione $(\mu_h)_h$ di misure, alle quali posso associare i funzionali L_h , se $\sup_h |\mu_h|(\Omega) \leq M < +\infty$ e supponiamo che $L_h(f)$ converge nella topologia forte a $L(f)$ per ogni $f \in C_c(\Omega, \mathbb{R}^p)$, allora la successione di misure converge debolmente e quindi

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^p \int_{\Omega} f_i(x) d\mu_{h,i}(x) = \sum_{i=1}^p \int_{\Omega} f_i(x) d\mu_i(x) \quad \forall f \in C_0(\Omega, \mathbb{R}^p).$$

Ciò segue dalla densità di C_c in C_0 , infatti in tal caso per ogni $f \in C_0(\Omega, \mathbb{R}^p)$ e per ogni $\epsilon > 0$ esiste $f_\epsilon \in C_c(\Omega, \mathbb{R}^p)$ tale che $\|f - f_\epsilon\|_\infty < \epsilon$ e quindi

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (f - f_\epsilon) d\mu_h \right| &\leq \int_{\Omega} |f - f_\epsilon| d|\mu_h| \leq \\ &\int_{\Omega} \|f - f_\epsilon\|_\infty d|\mu_h| = \|f - f_\epsilon\|_\infty |\mu_h|(\Omega) < \epsilon M. \end{aligned}$$

Pertanto avremo

$$-\epsilon M < \liminf_{h \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (f - f_\epsilon) d\mu_h \leq \limsup_{h \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (f - f_\epsilon) d\mu_h \leq \epsilon M.$$

Inoltre, possiamo scrivere

$$\int_{\Omega} f d\mu_h = \int_{\Omega} f_\epsilon d\mu_h + \int_{\Omega} (f - f_\epsilon) d\mu_h.$$

Da queste ultime due osservazione, con l'ipotesi che $L_h(f) \rightarrow L(f)$ per ogni $f \in C_c$, segue:

$$\limsup_{h \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f d\mu_h = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_\epsilon d\mu_h + \limsup_{h \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} (f - f_\epsilon) d\mu_h \leq \int_{\Omega} f_\epsilon d\mu + \epsilon M$$

$$\liminf_{h \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f \, d\mu_h = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_{\epsilon} \, d\mu_h + \liminf_{h \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} (f - f_{\epsilon}) \, d\mu_h \geq \int_{\Omega} f_{\epsilon} \, d\mu - \epsilon M$$

e quindi per arbitrarietà di ϵ si ottiene la convergenza debole.

Quindi abbiamo dimostrato che, con l'ipotesi $\sup_h |\mu_h|(\Omega) < +\infty$, la convergenza debole locale implica la convergenza debole.

Richiamiamo la definizione di funzione semicontinua inferiormente, e un risultato legato ad essa:

Definizione 3.6. Una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *sequenzialmente semicontinua inferiormente* se per ogni $x \in \Omega$ e per ogni successione $(x_h)_h$ tale che $x_h \rightarrow x$ allora $f(x) \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} f(x_h)$

Proposizione 3.7. Sia $\mathcal{F} = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua}\}$, allora $g(x) = \sup_{f \in \mathcal{F}} f(x)$ è *semicontinua inferiormente*.

Dimostrazione. Sia $x_h \rightarrow x$. Per definizione di sup esiste $f_{\epsilon} \in \mathcal{F}$ per ogni $\epsilon > 0$ tale che $g(x) \leq f_{\epsilon}(x) + \epsilon$. Inoltre:

$$f_{\epsilon}(x) = \liminf_{h \rightarrow \infty} f_{\epsilon}(x_h) \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} g(x_h)$$

da cui segue che $g(x) \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} g(x_h) + \epsilon$. □

Corollario 3.8. Per ogni aperto A di Ω , la funzione $\mu \rightarrow |\mu|(A)$ è *semicontinua inferiormente*.

Dimostrazione. Segue dal Corollario 3.3 e dalla Proposizione 3.7. □

Teorema 3.9. (*Proprietà della convergenza debole di misure*) Siano (μ_h) misure in Ω a valori in \mathbb{R}^p tali che la successione $|\mu_h|(\Omega)$ è limitata. Allora

- (a) esiste una sottosuccessione (μ_{h_k}) convergente debolmente in Ω ;
- (b) se $p = 1$ e le misure sono non negative, allora $\mu_h \rightarrow \mu$ implica

$$\liminf_{h \rightarrow \infty} \mu_h(A) \geq \mu(A)$$

per ogni insieme aperto $A \subset \Omega$ e

$$\limsup_{h \rightarrow \infty} \mu_h(K) \leq \mu(K)$$

per ogni insieme chiuso $K \subset \Omega$;

(c) se $\mu_h \rightharpoonup \mu$ e $|\mu_h| \rightharpoonup \sigma$ si ha $|\mu| \leq \sigma$ e

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \mu_h(E) = \mu(E)$$

per ogni insieme di Borel $E \subset \subset \Omega$ tale che $\sigma(\partial E) = 0$.

Dimostrazione. (a): Consideriamo $B_M = \{L_h \in C'_0 : \|L_h\| < M\}$, dove gli L_h sono i funzionali associati alle misure μ_h , per il teorema di Riesz. Allora per il teorema di Alaoglu-Bourbaki, essendo C_0 uno spazio di Banach, esiste una sottosuccessione (L_{h_k}) che converge nella topologia debole * e quindi, sempre grazie al teorema di Riesz, esiste una sottosuccessione di misure (μ_{h_k}) convergente debolmente.

(b) Prima parte: Definiamo $\Lambda_\phi(\mu) = \int_A \phi d\mu$ per ogni $\phi \in C_0(\Omega)$ $|\phi| \leq 1$ e per ogni μ misura positiva; Λ_ϕ è sequenzialmente continua, perché se $\mu_h \rightharpoonup \mu$, per definizione si ha

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \Lambda_\phi(\mu_h) = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_A \phi d\mu_h = \int_A \phi d\mu = \Lambda_\phi(\mu).$$

Sia $\mathcal{F} = \{\phi \in C_0(\Omega) : |\phi| \leq 1\}$ e $\Gamma(\mu) = \sup_{\phi \in \mathcal{F}} \Lambda_\phi(\mu)$ allora dalla Proposizione 3.7 segue che $\Gamma(\mu)$ è semicontinua inferiormente; inoltre dal Corollario 3.3 segue che

$$\Gamma(\mu) = \sup_{\phi \in \mathcal{F}} \Lambda_\phi(\mu) = \sup_{\phi \in \mathcal{F}} \int_A \phi d\mu = \mu(A),$$

pertanto avremo

$$\mu(A) = \Gamma(\mu) \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} \Gamma(\mu_h) = \liminf_{h \rightarrow \infty} \mu_h(A).$$

Seconda parte: Sia K un compatto allora $K = \Omega \setminus A$ dove A è un aperto e quindi $\mu_h(K) = \mu_h(\Omega) - \mu_h(A)$ per ogni h . Da ciò e dalla prima parte del punto (b) segue

$$\limsup_{h \rightarrow \infty} \mu_h(K) = \limsup_{h \rightarrow \infty} (\mu_h(\Omega) - \mu_h(A)) \leq \limsup_{h \rightarrow \infty} \mu_h(\Omega) +$$

$$\limsup_{h \rightarrow \infty} (-\mu_h(A)) = \mu(\Omega) - \liminf_{h \rightarrow \infty} \mu_h(A) \leq \mu(\Omega) - \mu(A).$$

(c) Prima parte: Sia $A \subset \Omega$ un aperto dimostriamo che $|\mu|(A) \leq \sigma(A)$. Sia $\phi \in C_0(A, \mathbb{R}^p)$ allora

$$\left| \sum_{i=1}^p \int_A \phi_i(x) d\mu_{h,i}(x) \right| \leq \int_A |\phi(x)| d|\mu_h|(x)$$

e mandando $h \rightarrow \infty$

$$\left| \sum_{i=1}^p \int_A \phi_i(x) d\mu_i(x) \right| \leq \int_A |\phi(x)| d\sigma(x).$$

Ma dal Corollario 3.3, sappiamo che $|\mu|(A) = \sup \{ \int_A \phi d\mu \mid \phi \in C_0(A), |\phi| \leq 1 \}$ quindi $|\mu|(A) \leq \sigma(A)$.

Seconda parte: Sia $E \in \mathcal{B}(\Omega)$ tale che $\sigma(\partial E) = 0$ e μ_h^+, μ_h^- le parti positive e negative di μ_h ; per il punto (a) possiamo supporre che $\mu_h^+ \rightarrow \nu^+$ e $\mu_h^- \rightarrow \nu^-$ e quindi avremo $\mu = \nu^+ - \nu^-$ e $\sigma \geq |\mu| \geq |\nu^\pm| = \nu^\pm$. Sia ora K la chiusura di E e A la parte interna di E . Usando il punto (b) e il fatto che $\sigma \geq \nu^\pm$ abbiamo

$$\begin{aligned} \limsup_{h \rightarrow \infty} \mu_{h,i}^\pm(E) &\leq \limsup_{h \rightarrow \infty} \mu_{h,i}^\pm(K) = \nu_{h,i}^\pm(K) = \\ &= \nu_{h,i}^\pm(A) + \nu_{h,i}^\pm(\partial E) \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} \mu_{h,i}^\pm(A) \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} \mu_{h,i}^\pm(E) \end{aligned}$$

e quindi

$$\liminf_{h \rightarrow \infty} \mu_h(E) = \limsup_{h \rightarrow \infty} \mu_h(E) = \lim_{h \rightarrow \infty} \mu_h(E) = \mu(E).$$

□

3.1 Misure di Hausdorff

Le misure di Hausdorff k -dimensionali in \mathbb{R}^d sono misure esterne o misure di Borel molto importanti in teoria geometrica della misura perché la loro definizione è indipendente dalle parametrizzazioni locali ed ha senso anche per insiemi non regolari.

Al fine di comprendere la definizione di tale misura ricordiamo che il diametro di un sottoinsieme $E \subset \mathbb{R}^d$ non vuoto è definito da

$$\text{diam}(E) = \sup \{|x - y| : x, y \in E\}.$$

Sia $k \in \mathbb{N}$, e ω_k la misura di Lebesgue della palla unitaria di \mathbb{R}^k . La definizione di ω_k si può dare per ogni $k \in [0, +\infty)$ in questo modo

$$\omega_k = \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(1 + \frac{k}{2})}, \quad k \geq 0$$

dove $\Gamma(t) = \int_0^\infty s^{t-1} e^{-s} ds$ è la funzione di Eulero.

Definizione 3.10. *Sia $k \in [0, \infty)$ e $E \subset \mathbb{R}^d$. La misura di Hausdorff k -dimensionale di E è data da:*

$$\mathcal{H}^k(E) := \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^k(E)$$

dove, per $0 < \delta \leq +\infty$, $\mathcal{H}_\delta^k(E)$ è così definita:

$$\mathcal{H}_\delta^k(E) := \frac{\omega_k}{2^k} \inf \left\{ \sum_{i \in I} [\text{diam}(E_i)]^k : \text{diam}(E_i) < \delta, E \subset \bigcup_{i \in I} E_i \right\}.$$

Osserviamo che la definizione è ben posta infatti l'applicazione $\delta \rightarrow \mathcal{H}_\delta^k(E)$ è monotona decrescente ed in particolare da ciò segue che in $(0, \infty]$:

$$\mathcal{H}^k(E) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^k(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^k(E).$$

Si può anche parlare di misura di Hausdorff sferica \mathcal{S}^k definita in modo analogo alla misura di Hausdorff ma in cui i ricoprimenti sono fatti non con insiemi generici E_i ma con palle B_i .

Teorema 3.11. (Proprietà delle misure di Hausdorff)

- (a) *Le misure \mathcal{H}^k sono monotone, numerabilmente subadditive sulle parti di \mathbb{R}^d e, in particolare, σ -additive sugli insiemi di Borel;*

(b) \mathcal{H}^k è identicamente nulla per $k > d$ e coincide con la misura del conteggio quando $k = 0$;

(c) se $k > k' \geq 0$ allora

$$\mathcal{H}^k(E) > 0 \implies \mathcal{H}^{k'}(E) = \infty;$$

(d) per ogni insieme di Borel $B \subset \mathbb{R}^d$ ed ogni $\delta > 0$ si ha

$$\mathcal{L}^d(B) = \mathcal{H}_\delta^d(B) = \mathcal{H}^d(B)$$

dove \mathcal{L}^d è la misura di Lebesgue in \mathbb{R}^d ;

(e) $\mathcal{H}^k \leq \mathcal{S}^k \leq 2^k \mathcal{H}^k$;

(f) per ogni insieme di Borel $B \subset \mathbb{R}^n$ ed ogni $k > 0$ si ha

$$\mathcal{H}^k(B) = 0 \iff \mathcal{H}_\infty^k(B) = 0.$$

Dimostrazione. (a) Prima parte: basta dimostrare che le funzioni \mathcal{H}_δ^k per ogni $\delta > 0$ sono numerabilmente subadditive cioè

$$E \subset \bigcup_{j=0}^{+\infty} E_j \implies \mathcal{H}_\delta^k(E) \leq \sum_{j=0}^{+\infty} \mathcal{H}_\delta^k(E_j)$$

in tale caso infatti, passando al sup si ha la stessa proprietà per \mathcal{H}^k .

Supponiamo che $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ con $E_j \subset \mathbb{R}^d$ e $\mathcal{H}_\delta^k(E_j) < +\infty$. Sia poi per ogni j , $(E_i^j)_i$ un ricoprimento di E_j tale che $\text{diam}(E_i^j) < \delta$ e tale che, fissato $\epsilon > 0$ si abbia:

$$\frac{\omega_k}{2^k} \sum_{i=0}^{+\infty} (\text{diam}(E_i^j))^k \leq \mathcal{H}_\delta^k(E_j) + 2^{-j}\epsilon.$$

Dato che (E_i^j) al variare di i e j è anche un ricoprimento di E si ha

$$\mathcal{H}_\delta^k(E) \leq \frac{\omega_k}{2^k} \sum_{i,j} (\text{diam}(E_i^j))^k \leq \sum_{j=0}^{+\infty} (\mathcal{H}_\delta^k(E_j) + 2^{-j}\epsilon) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathcal{H}_\delta^k(E_j) + \epsilon$$

e dall'arbitrarietà di ϵ segue la disuguaglianza cercata.

Seconda parte: utilizziamo il criterio di Carathéodory per dimostrare la σ -additività sugli insiemi di Borel. Supponiamo che A e B siano insiemi distanti e $0 < \delta < \frac{d(A,B)}{2}$, allora ogni insieme di diametro minore di δ interseca A o B , ma non entrambi; allora $\mathcal{H}_\delta^k(A) + \mathcal{H}_\delta^k(B) = \mathcal{H}_\delta^k(A \cup B)$ e quindi passando al sup abbiamo che \mathcal{H}^k è additivo sugli insiemi distanti.

(b) Prima parte. La tesi segue dalla σ -subadditività e dall'invarianza per traslazioni della misura di Hausdorff. Consideriamo Q , il cubo di lato 1 di \mathbb{R}^d ; questo può essere ricoperto da n^d cubi chiusi di lato $\frac{1}{n}$ e quindi diametro $\frac{\sqrt{d}}{n}$; pertanto avremo $\mathcal{H}_\delta^k(Q) \leq \omega_k \frac{(\sqrt{d})^k n^{d-k}}{2^k}$ con $\delta > \frac{\sqrt{d}}{n}$. Mandando $n \rightarrow \infty$ $\mathcal{H}^k(Q) = 0$ e quindi dall'ipotesi di σ -subadditività e invarianza per traslazioni segue che \mathcal{H}^k è identicamente nulla.

Seconda parte. Supponiamo che E sia un insieme finito di s elementi e δ_0 la minima distanza degli elementi di E , allora per $\delta < \delta_0$ ogni ricoprimento di E fatto da insiemi aventi diametro minore di δ è costituito da almeno s insiemi; ma in particolare esiste un ricoprimento costituito da esattamente s insiemi e quindi $\mathcal{H}_\delta^0 = s$ se $\delta < \delta_0$ e quindi $\mathcal{H}^0(E) = s$. Se E invece è costituito da infiniti punti, si considera $E_s \subset E$ una selezione di s elementi di E ; dalla monotonia segue $\mathcal{H}^0(E) \geq \mathcal{H}^0(E_s) = s$ per ogni $s \in \mathbb{N}$, quindi $\mathcal{H}^0(E) = +\infty$.

(c) Segue dalla disuguaglianza

$$\frac{2^k}{\omega_k} \mathcal{H}_\delta^k(E) \leq \delta^{k-k'} \frac{2^{k'}}{\omega_{k'}} \mathcal{H}_\delta^{k'}(E)$$

facendo tendere $\delta \rightarrow 0$.

(d) Da questo punto risulta chiara la ragione della scelta di una tale normalizzazione nella definizione di misura di Hausdorff. Per dimostrare questo punto è necessaria la disuguaglianza isodiametrica, in base alla quale l'insieme avente misura di Lebesgue massima tra quelli di diametro fissato è la palla, cioè

$$\mathcal{L}^d(B) \leq \omega_d \left(\frac{\text{diam}(B)}{2} \right)^d.$$

Dimostriamo prima che $\mathcal{H}^d(B) \leq \mathcal{L}^d(B)$. Supponiamo che B sia un insieme limitato. Dal fatto che la misura di Hausdorff è invariante per traslazioni e omotetie, risulta quindi finita sugli insiemi limitati. Dato $\delta > 0$ e un aperto limitato A contenente B , possiamo considerare la famiglia \mathcal{B} di tutte le palle chiuse aventi centri in A e diametro minore di δ ; siamo però nelle ipotesi del Teorema 2.5 pertanto esiste una famiglia numerabile e disgiunta $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ tale che

$$\mathcal{H}^d \left(A \setminus \bigcup \mathcal{B}' \right) = 0.$$

Quindi \mathcal{B}' ricopre \mathcal{H}^d -quasi tutto B e in particolare i suoi elementi li denotiamo: $B_h = \overline{B}_{\rho_h}(x_h) \subset A$. Allora avremo:

$$\mathcal{H}_\delta^d(B) \leq \sum_{h=0}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^d(B_h) \leq \omega_d \sum_{h=0}^{\infty} \rho_h^d = \sum_{h=0}^{\infty} \mathcal{L}^d(B_{\rho_h}) \leq \mathcal{L}^d(A)$$

dove, nel primo passaggio, abbiamo utilizzato la subadditività numerabile di \mathcal{H}_δ^d . Sfruttando l'arbitrarietà di δ e di A si ottiene la disuguaglianza cercata.

Per dimostrare che $\mathcal{L}^d(B) \leq \mathcal{H}_\delta^d(B)$ usiamo la disuguaglianza isodiametrica. Sia $(B_h)_h$ un ricoprimento di B tale che $\text{diam}(B_h) < \delta$ per ogni h , allora otteniamo:

$$\mathcal{L}^d(B) \leq \sum_{h=0}^{\infty} \mathcal{L}^d(B_h) \leq \frac{\omega_d}{2^d} \sum_{h=0}^{\infty} (\text{diam}(B_h))^d$$

e quindi dall'arbitrarietà del ricoprimento la disuguaglianza è verificata.

(e) La prima disuguaglianza è ovvia perché nella misura di Hausdorff abbiamo più insiemi; la seconda segue dal fatto che un insieme E_i lo si può mettere in una palla centrata in un punto di E_i con raggio uguale al diametro di E_i , da cui il coefficiente 2^k .

(f) La prima implicazione \Rightarrow è ovvia. Dimostriamo \Leftarrow . Supponiamo $\mathcal{H}_\infty^k(B) = 0$, allora possiamo trovare per ogni $\sigma > 0$ un ricoprimento di B costituito da insiemi $(B_i)_i$ aventi diametro $2b_i$ e tale che $\sum_i \omega_k b_i^k < \sigma$. Siccome il massimo dei b_i può essere stimato con $\left(\frac{\sigma}{\omega_k}\right)^{\frac{1}{k}}$ allora

$$\mathcal{H}_{\delta(\sigma)}^k(B) < \sigma \quad \text{con} \quad \delta(\sigma) := 2 \left(\frac{\sigma}{\omega_k}\right)^{\frac{1}{k}},$$

e quindi mandando $\sigma \rightarrow 0$, si ottiene $\mathcal{H}^k(B) = 0$. \square

Osserviamo che dal punto (d) del Teorema 3.11 si può dedurre che per ogni insieme B contenuto in un k -piano $\pi \subset \mathbb{R}^d$ si ha

$$\mathcal{H}^k(B) = \mathcal{H}_\pi^k(B) = \mathcal{L}_\pi^k(B) \quad (3.1)$$

dove \mathcal{H}_π^k e \mathcal{L}_π^k indicano la misura di Hausdorff k -dimensionale e la misura di Lebesgue k -dimensionale sul piano π . Per k -piano si intende un sottospazio di \mathbb{R}^d di dimensione k .

Grazie alle proprietà viste nel Teorema 3.11 ha senso la seguente definizione:

Definizione 3.12. *Se $E \subset \mathbb{R}^d$, definiamo la sua dimensione di Hausdorff mediante*

$$\dim_{\mathcal{H}}(E) := \inf \left\{ k \geq 0 : \mathcal{H}^k(E) = 0 \right\}.$$

Osserviamo quindi che per il Teorema 3.11 se $k < \dim_{\mathcal{H}}(E)$ allora $\mathcal{H}^k(E) = +\infty$ e se $k > \dim_{\mathcal{H}}(E)$ allora $\mathcal{H}^k(E) = 0$.

Definizione 3.13. Sia μ una misura di Radon positiva in un insieme aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ e $k \geq 0$. Le densità superiore e inferiore k -dimensionali di μ in x sono rispettivamente:

$$\Theta_k^*(\mu, x) := \limsup_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\mu(B_\varrho(x))}{\omega_k \varrho^k}, \quad \Theta_{*k}(\mu, x) := \liminf_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\mu(B_\varrho(x))}{\omega_k \varrho^k}.$$

Se $\Theta_k^*(\mu, x) = \Theta_{*k}(\mu, x)$, allora si parla di densità k -dimensionale di μ in x e si indica $\Theta_k(\mu, x)$.

Per ogni insieme di Borel $E \subset \Omega$ definiamo inoltre

$$\Theta_k^*(E, x) := \limsup_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^k(E \cap B_\varrho(x))}{\omega_k \varrho^k}, \quad \Theta_{*k}(E, x) := \liminf_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^k(E \cap B_\varrho(x))}{\omega_k \varrho^k}.$$

e se questi coincidono, denotiamo il valore comune delle densità con $\Theta_k(E, x)$. Quando $k = d$ otteniamo

$$\Theta^*(E, x) := \limsup_{\varrho \rightarrow 0} \frac{|E \cap B_\varrho(x)|}{|B_\varrho(x)|}, \quad \Theta_*(E, x) := \liminf_{\varrho \rightarrow 0} \frac{|E \cap B_\varrho(x)|}{|B_\varrho(x)|}.$$

Se le due densità coincidono otteniamo $\Theta(E, x)$ che viene chiamata densità dell'insieme E in x .

Definizione 3.14. Sia $E \subset \mathbb{R}^d$ in insieme di Borel. Definiamo l'insieme

$$E^\alpha = \{x \in \mathbb{R}^d : \Theta(E, x) = \alpha\}.$$

Chiaramente, dal Teorema di Besicovitch, segue che, per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^d$, $x \in E^0 \cup E^1$.

Teorema 3.15. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un insieme aperto e μ una misura di Radon positiva in Ω . Allora per ogni $t \in (0, \infty)$ e ogni insieme di Borel $B \in \Omega$ valgono le seguenti implicazioni:

$$\Theta_k^*(\mu, x) \geq t \quad \forall x \in B \implies \mu \geq t \mathcal{H}^k \llcorner B$$

$$\Theta_k^*(\mu, x) \leq t \quad \forall x \in B \implies \mu \leq 2^k t \mathcal{H}^k \llcorner B.$$

Dimostrazione. Senza perdere di generalità possiamo supporre $t = 1$, $k > 0$ e B limitato.

Dimostriamo la prima parte. Fissato $\delta \in (0, 1)$, consideriamo le palle aperte C contenute in un aperto limitato A centrate in punti di B e con diametro $d_C < \delta$ tali che $\mu(C) \geq (1 - \delta) \omega_k \frac{d_C^k}{2^k}$. Applicando il Teorema 2.4 a

questo ricoprimento di B otteniamo una famiglia di palle (C_i) , con intersezione controllata da una costante $\xi(d)$ che ancora ricopre B . In particolare:

$$\mathcal{H}_\delta^k(B) \leq \sum_i \frac{\omega_k}{2^k} d_{C_i}^k \leq \sum_i \frac{1}{1-\delta} \mu(C_i) \leq \frac{\xi(d)}{1-\delta} \mu(A).$$

Mandando $\delta \rightarrow 0$, otteniamo $\mathcal{H}^k(B) \leq \xi(d)\mu(A) < +\infty$. Quindi possiamo applicare il Teorema 2.5 al ricoprimento di B costituito dalle palle iniziali C contenute in A e ottenere quindi una sottofamiglia numerabile disgiunta di palle C_i che ricopre \mathcal{H}^k -quasi tutto B . Pertanto avremo:

$$\mathcal{H}_\delta^k(B) \leq \sum_i \frac{\omega_k}{2^k} d_{C_i}^k \leq \sum_i \frac{1}{1-\delta} \mu(C_i) \leq \frac{1}{1-\delta} \mu(A)$$

cioè sfruttando l'arbitrarietà di δ e di A si ottiene $\mathcal{H}^k(B) \leq \mu(B)$. Potendo ripetere questo discorso per qualsiasi sottoinsieme di Borel di B , si ha la prima disuguaglianza.

Dimostriamo ora la seconda disuguaglianza. Fissato $t > 1$, per ogni intero $h \geq 1$ consideriamo gli insiemi

$$B_h := \left\{ x \in B : \frac{\mu(\overline{B}_\rho(x))}{\omega_k \rho^k} < t \quad \forall \rho \in (0, \frac{1}{h}) \right\}.$$

La successione $(B_h)_h$ è crescente e la sua unione è l'insieme B . Fissato h , siano (C_i) gli insiemi con diametro minore di $\frac{1}{h}$ la cui unione contiene B_h e tali che

$$\sum_{i=0}^{\infty} \omega_k \rho_i^k < \mathcal{H}_{\frac{1}{h}}^k(B_h) + \frac{1}{h}$$

con $\rho_i := \frac{\text{diam} C_i}{2}$. Possiamo supporre che gli insiemi C_i intersechino gli insiemi B_h in punti x_i . Definiamo allora gli insiemi $C'_i = B_{2\rho_i}(x_i)$, che ricoprono ancora B_h e si ha

$$\mu(B_h) \leq \sum_i \mu(C'_i) \leq t \sum_i \omega_k (2\rho_i)^k < t2^k \left(\mathcal{H}^k(B) + \frac{1}{h} \right).$$

Facendo tendere $h \rightarrow +\infty$ e $t \rightarrow 1$ si ottiene la disuguaglianza voluta. \square

Osserviamo che la seconda disuguaglianza non necessita del 2^k se usiamo la misura di Hausdorff sferica al posto della misura di Hausdorff.

Corollario 3.16. *Due conseguenze importanti del Teorema 3.15 sono*

$$(1) \quad \Theta_k^*(\mu, x) < \infty \quad \text{per } \mathcal{H}^k - \text{quasi ogni } x \in \Omega; \quad (3.2)$$

$$(2) \quad B \in \mathcal{B}(\Omega), \mu(B) = 0 \Rightarrow \Theta_k^*(\mu, x) = 0 \quad \text{per } \mathcal{H}^k - \text{quasi ogni } x \in B. \quad (3.3)$$

Dimostrazione. Per ogni insieme $B \subset \{x \in \Omega : \Theta_k^*(\mu, x) = \infty\}$ limitato, dal Teorema 3.15 segue che $\mu(B) \leq t\mathcal{H}^k(B)$ per ogni t , dunque $\mathcal{H}^k(B) = 0$. Dalla subaddittività di \mathcal{H}^k segue la prima disuguaglianza. Similmente si dimostra anche la seconda implicazione. \square

3.2 Insiemi rettificabili

Partiamo con la definizione e alcune proprietà delle funzioni Lipschitziane, classe di funzioni molto utilizzata nella teoria geometrica della misura.

Definizione 3.17. Sia $E \subset \mathbb{R}^d$ e $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$. Diciamo che f è una funzione Lipschitziana in E e scriviamo $f \in [Lip(E)]^m$ se

$$Lip(f, E) := \sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} : x \neq y, x, y \in E \right\} < \infty$$

Per definizione $Lip(f, E)$ è il minimo $M \in [0, \infty]$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq M |x - y| \quad \forall x, y \in E, x \neq y.$$

Vedremo ora che è possibile estendere una funzione Lipschitziana, definita in un sottoinsieme di \mathbb{R}^d a valori reali, all'intero spazio mantenendo la stessa costante di Lipschitz:

Proposizione 3.18. Sia $E \subset \mathbb{R}^d$ e sia $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione Lipschitziana; allora esiste $\tilde{f} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\tilde{f}(x) = f(x)$ per ogni $x \in E$ e $Lip(\tilde{f}, \mathbb{R}^d) = Lip(f, E)$.

Dimostrazione. Sia $L = Lip(f, E)$ e sia $\tilde{f} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, quella funzione che ad x associa

$$\tilde{f}(x) = \inf_{z \in E} \{f(z) + L|x - z|\}.$$

Per ogni $x \in E$, dalla lipschitzianità di f segue che $f(x) \leq f(z) + L|x - z|$ per ogni $z \in E$, quindi

$$f(x) \leq \tilde{f}(x) = \inf_{z \in E} \{f(z) + L|x - z|\} \leq f(x)$$

cioè $f(x) = \tilde{f}(x)$ per ogni $x \in E$. Dimostriamo ora che

$$Lip(\tilde{f}, \mathbb{R}^d) = \sup \left\{ \frac{|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)|}{|x - y|} : x, y \in \mathbb{R}^d, x \neq y \right\} = L. \quad (3.4)$$

Nel caso in cui $x, y \in E$, (3.4) è ovvia. Supponiamo ora $x \in E$ e $y \notin E$, allora per ogni $\epsilon > 0$ esiste $z_\epsilon \in E$ tale che

$$\tilde{f}(y) > f(z_\epsilon) + L|y - z_\epsilon| - \epsilon.$$

e quindi

$$\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y) \leq f(x) - f(z_\epsilon) - L|y - z_\epsilon| + \epsilon \leq L|x - z_\epsilon| - L|y - z_\epsilon| + \epsilon$$

$$\leq L|x - z_\epsilon - y + z_\epsilon| + \epsilon = L|x - y| + \epsilon.$$

Inoltre se $y \notin E$, allora per ogni $z \in E$

$$\tilde{f}(y) \leq f(z) + L|y - z|$$

in particolare anche per $z = x$, pertanto

$$\tilde{f}(y) - \tilde{f}(x) \leq f(x) + L|y - x| - f(x) \leq L|x - y|.$$

In conclusione

$$-L|x - y| \leq \tilde{f}(x) - \tilde{f}(y) \leq L|x - y| + \epsilon$$

e (3.4) deriva dall'arbitrarietà di ϵ . Supponiamo ora $x, y \notin E$, allora per ogni $\epsilon > 0$ esistono y_ϵ e x_ϵ in E tali che

$$\tilde{f}(y) > f(y_\epsilon) + L|y - y_\epsilon| - \epsilon, \quad \tilde{f}(x) > f(x_\epsilon) + L|x - x_\epsilon| - \epsilon.$$

Pertanto, utilizzando quanto abbiamo appena dimostrato, segue

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) - \tilde{f}(y) &\leq \tilde{f}(x) - f(y_\epsilon) - L|y - y_\epsilon| + \epsilon \leq L|x - y_\epsilon| - L|y - y_\epsilon| + \epsilon \\ &\leq L|x - y_\epsilon - y + y_\epsilon| + \epsilon = L|x - y| + \epsilon \end{aligned}$$

ma anche

$$\begin{aligned} \tilde{f}(y) - \tilde{f}(x) &\leq \tilde{f}(y) - f(x_\epsilon) - L|x - x_\epsilon| + \epsilon \leq L|y - x_\epsilon| - L|x - x_\epsilon| + \epsilon \\ &\leq L|y - x_\epsilon - x + x_\epsilon| + \epsilon = L|x - y| + \epsilon. \end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di ϵ segue (3.4), e la tesi è dimostrata. \square

Esiste anche un Teorema più generale per funzioni vettoriali; in tal caso è facile costruire una estensione ragionando componente per componente ma meno facile è farlo in modo che la costante di Lipschitz sia la stessa. La dimostrazione generale va sotto il nome di

Osserviamo che la funzione utilizzata nella dimostrazione della Proposizione 3.18 viene anche indicata con f^+ ed è la più grande estensione di f ; similmente viene anche definita la più piccola estensione di f in questo modo

$$f^-(x) := \sup \{f(y) - L|x - y| : y \in E\}.$$

Esiste un particolare legame tra le funzioni Lipschitziane e la misura di Hausdorff:

Proposizione 3.19. *Sia $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione Lipschitziana, e $E \subset \mathbb{R}^d$. Allora*

$$\mathcal{H}^k(f(E)) \leq (\text{Lip}(f))^k \mathcal{H}^k(E).$$

Dimostrazione. Escludiamo i casi banali e supponiamo $k > 0$, $\mathcal{H}^k(E) < \infty$ e $L = \text{Lip}(f) > 0$. Fissati $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$, si ha $\mathcal{H}_\delta^k(E) < \infty$ ed esiste un ricoprimento di E , $(E_i)_i$, con $\text{diam}(E_i) < \delta$, tale che

$$\frac{\omega_k}{2^k} \sum_i (\text{diam } E_i)^k \leq \mathcal{H}_\delta^k(E) + \epsilon.$$

Osserviamo che $\text{diam}(f(E_i)) \leq L \text{diam}(E_i)$ e quindi $\{f(E_i)\}$ è un ricoprimento di $f(E)$ tale che $\text{diam}(f(E_i)) \leq L\delta$. Allora avremo

$$\mathcal{H}_{L\delta}^k(f(E)) \leq \frac{\omega_k}{2^k} \sum_i (\text{diam}(f(E_i)))^k \leq L^k \frac{\omega_k}{2^k} \sum_i (\text{diam}(E_i))^k \leq L^k (\mathcal{H}_\delta^k(E) + \epsilon)$$

e quindi mandando ϵ e δ a zero otteniamo la tesi. \square

Un'altra proprietà importante delle funzioni Lipschitziane in \mathbb{R}^d è la differenziabilità \mathcal{L}^d -quasi ovunque:

Teorema 3.20. (Rademacher) *Sia $f : D \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$ Lipschitziana. Allora f è differenziabile in \mathcal{L}^d -quasi ogni punto di D .*

Dimostrazione. Ricordiamo che una funzione $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$ è differenziabile in $x \in \mathbb{R}^d$ se esiste una mappa lineare $L : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$ tale che

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{|f(x) - f(y) - L(x - y)|}{|x - y|} = 0.$$

Se questa mappa esiste è chiaramente unica e la si indica con Df_x .

Osserviamo che $f = (f_1, \dots, f_m)$ è differenziabile in a se e solo se ogni funzione f_i è differenziabile in a , quindi non è restrittivo supporre $m=1$.

Prima parte: dimostriamo prima che $f \in \text{Lip}(a, b)$, con $-\infty < a < b < +\infty$, è differenziabile in \mathcal{L}^1 -quasi ogni punto di (a, b) .

Sia $g \in C_c^1(a, b)$ e definiamo l'operatore

$$L_f^{(h)}(g) := \int_a^b \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x) dx = - \int_a^b f(x) \frac{g(x-h) - g(x)}{h} dx$$

dove h è tale che $|h| < \text{dist}(\text{supp } g, (a, b)^c)$ e la seconda uguaglianza è ottenuta mediante un cambiamento di variabile. Osserviamo che

$$|L_f^{(h)}(g)| \leq \int_a^b \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| |g(x)| dx \leq L \|g\|_\infty (b-a)$$

dove L è la costante di Lipschitz della funzione f , e quindi applicando la convergenza dominata si ottiene

$$\lim_{h \rightarrow 0} L_f^{(h)}(g) = - \int_a^b f(x)g'(x) dx = L_f(g).$$

Siccome $L_f \in (C_c(a, b))'$, per il Teorema di Riesz esiste una misura $\mu \in \mathcal{M}_{loc}(a, b)$ tale che

$$L_f(g) = \int_a^b g(x) d\mu(x) = - \int_a^b f(x)g'(x) dx \quad \forall g \in C_c^1(a, b).$$

Dimostriamo ora che $\mu \ll \mathcal{L}^1$. Sia $(c, d) \subset (a, b)$ tale che $|d - c| < \delta$. Dal Corollario 3.3 segue

$$\begin{aligned} \mu(c, d) &= \sup \left\{ \int_c^d g(x) d\mu(x) \mid g \in C_c(c, d), \|g\| \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ - \int_c^d f(x)g'(x) dx \mid g \in C_c(c, d), \|g\| \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \lim_{h \rightarrow 0} \int_c^d \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x) dx \mid g \in C_c(c, d), \|g\| \leq 1 \right\} \leq L\delta. \end{aligned}$$

Allora per il teorema di Radon-Nikodym esiste $q \in L^1(a, b)$ tale che $\mu = q\mathcal{L}^1$ e quindi

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = - \int_a^b g(x)q(x) dx \quad \forall g \in C_c^1(a, b).$$

Per ogni $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 \neq x_2$, e $h \leq \min\{x_1 - a, b - x_2\}$ consideriamo la funzione $g(x) \in C_c(a, b)$ tale che nell'intervallo $[x_1, x_2]$ assume valore costante 1, in $[x_1 - \frac{1}{h}, x_1]$ è la retta $y = hx + 1 - x_1h$ in $[x_2, x_2 + \frac{1}{h}]$ è la retta $y = -hx + 1 + hx_2$ e fuori dall'intervallo $[x_1 - \frac{1}{h}, x_2 + \frac{1}{h}]$ è nulla. Allora avremo

$$h \int_{x_1 - \frac{1}{h}}^{x_1} f(x) dx - h \int_{x_2}^{x_2 + \frac{1}{h}} f(x) dx = - \int_{x_1 - \frac{1}{h}}^{x_2 + \frac{1}{h}} g(x)q(x) dx$$

e mandando $h \rightarrow \infty$

$$f(x_2) - f(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} q(x) dx.$$

Pertanto per ogni $x_0 \in (a, b)$ e per ogni $0 < \epsilon < (b - x_0)$ avremo

$$\frac{f(x_0 + \epsilon) - f(x_0)}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon} \int_{x_0}^{x_0 + \epsilon} q(x) dx$$

e quindi per il Teorema di Lebesgue per quasi ogni $x_0 \in (a, b)$ esiste il $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x_0+\epsilon)-f(x_0)}{\epsilon}$ e coincide con $q(x_0)$. Quindi esiste $N \subset (a, b)$, $\mathcal{L}^1(N) = 0$, tale che f è differenziabile per ogni $x \in (a, b) \setminus N$ e $f'(x) = q(x)$.

Seconda parte: Sia ora $d > 1$. Per la Proposizione 3.18 possiamo considerare l'estensione $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. Dalla prima parte segue che per ogni $x, v \in \mathbb{R}^d$, la funzione Lipschitziana $f_{x,v}(t) = f(x + tv)$ di una variabile, è differenziabile per quasi ogni $t \in \mathbb{R}$. Dunque, fissato $v \in \mathbb{R}^d$, per il Teorema di Fubini e i precedenti risultati, per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^d$ esiste

$$D_v f(x) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}.$$

In particolare, se consideriamo (e_1, \dots, e_d) la base canonica di \mathbb{R}^d , avremo quindi

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = D_{e_i} f,$$

cioè per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^d$ esiste il gradiente $\nabla f(x) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_d})$. Vogliamo ora mostrare che per ogni $v \in \mathbb{R}^d$ e per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^d$ abbiamo

$$D_v f(x) = v \cdot \nabla f(x).$$

Fissato $v = (v_1, \dots, v_d) \in \mathbb{R}^d$ e fissata una funzione $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} D_v f(x) \phi(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} \phi(x) dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} -f(x) \frac{\phi(x) - \phi(x - tv)}{t} dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^d} f(x) D_v \phi(x) dx \\ &= - \sum_{i=1}^d v_i \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^d v_i \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \phi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} v \cdot \nabla f(x) \phi(x) dx. \end{aligned}$$

Per arbitrarietà di ϕ l'asserto è dimostrato per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^d$. Consideriamo ora un insieme denso e numerabile di direzioni v_i di \mathbb{R}^d , che chiamiamo $V \subset \mathcal{S}^{d-1}$. Fino ad ora abbiamo dimostrato che esiste un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}^d$ tale che $\mathcal{L}^d(\mathbb{R}^d \setminus A) = 0$ e che per ogni v_i e per ogni $a \in A$ vale

$$D_{v_i} f(a) = v_i \cdot \nabla f(a).$$

Ora fissiamo $a \in A$. Per ogni $v \in D$ e $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$ definiamo

$$D(v, t) := \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} - v \cdot \nabla f(a).$$

Dobbiamo dimostrare che $D(v, t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow 0$ indipendentemente da v . Fissato $\epsilon > 0$ scegliamo $v_1, \dots, v_{k_\epsilon} \in V$ tali che per ogni $v \in V$ esiste un qualche $i = 1, \dots, k_\epsilon$ tale che $|v - v_i| < \epsilon$, allora avremo:

$$\begin{aligned} |D(v, t) - D(v_i, t)| &\leq \left| \frac{f(a + tv) - f(a + tv_i)}{t} \right| + |(v - v_i) \cdot \nabla f(a)| \\ &\leq L|v - v_i| + |\nabla f(a)| |v - v_i| \leq C\epsilon, \end{aligned}$$

dove $C = (1 + \sqrt{d})L$ non dipende da v . Infatti

$$|\nabla f| = \sqrt{\sum_{i=1}^d \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + te_i) - f(x)}{t} \right)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^d \lim_{t \rightarrow 0} \left(L \frac{|te_i|}{t} \right)^2} = L\sqrt{d}.$$

Poiché $\lim_{t \rightarrow 0} D(v_i, t) = 0$ per ogni v_i , allora possiamo scegliere un $\delta > 0$ tale che per $|t| < \delta$, $D(v_i, t) < \epsilon$ per ogni $i = 1, \dots, k$ e quindi, per $|t| < \delta$

$$|D(v, t)| < C\epsilon$$

dove C non dipende da v , come volevasi dimostrare. \square

Iniziamo ora lo studio degli insiemi rettificabili a partire dalla definizione:

Definizione 3.21. *Sia $E \subset \mathbb{R}^d$ un insieme \mathcal{H}^k -misurabile. Diciamo che E è σ - k -rettificabile se esiste una famiglia numerabile di funzioni Lipschitziane $f_i : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^d$ tale che*

$$E \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} f_i(\mathbb{R}^k).$$

Diciamo che E è σ - \mathcal{H}^k -rettificabile se esiste una famiglia numerabile di funzioni Lipschitziane $f_i : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^d$ tale che

$$\mathcal{H}^k(E \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} f_i(\mathbb{R}^k)) = 0.$$

Infine diciamo che E è \mathcal{H}^k -rettificabile se E è σ - \mathcal{H}^k -rettificabile e $\mathcal{H}^k(E) < \infty$.

Per $k = 0$ insiemi σ - k -rettificabile e σ - \mathcal{H}^k -rettificabile corrispondono a insiemi finiti o numerabili, mentre insiemi \mathcal{H}^k -rettificabile corrispondono a

insiemi finiti. Dalla Proposizione 3.19 segue che insiemi rettificabili sono stabili sotto trasformazioni Lipschitziane.

Facciamo ora alcune premesse. Per k -grafico in \mathbb{R}^d rispetto al piano π si intende l'insieme

$\{x \in \mathbb{R}^d : \phi(\pi x) = \pi^\perp x\}$ dove ϕ è una funzione definita nel k -piano di \mathbb{R}^d , π a valori in π^\perp . Ricordiamo che per k -piano intendiamo un sottospazio di \mathbb{R}^d di dimensione k e quindi con π^\perp , intendiamo il sottospazio di \mathbb{R}^d ortogonale a π . Infine con πx si intende la proiezione ortogonale di x sul sottospazio π .

Facciamo un esempio di insieme σ - k -rettificabile:

Esempio 3.22. Il grafico di una funzione Lipschitziana di k variabili (k -grafico) è un esempio di insieme σ - k -rettificabile. Sia $\phi : \pi \rightarrow \pi^\perp$ una funzione Lipschitziana e Γ il grafico di ϕ . Scelta $\{e_1, \dots, e_k\}$ una base di π e data una funzione $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \Gamma$ così fatta

$$f(y) := \sum_{i=1}^k y_i e_i + \phi \left(\sum_{i=1}^k y_i e_i \right)$$

otteniamo che Γ è σ - k -rettificabile.

Definizione 3.23. Sia $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}^m$ una misura vettoriale di Radon. Diciamo che μ è k -rettificabile se esiste un insieme S σ - \mathcal{H}^k -rettificabile e una funzione di Borel $\theta : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ tale che $\mu = \theta \mathcal{H}^k \llcorner S$.

Nel caso in cui $k = d$ le misure k -rettificabili coincidono con le misure assolutamente continue rispetto a \mathcal{L}^d . Inoltre, dal Teorema di Radon-Nikodym segue che $\mu = \theta \mathcal{H}^k \llcorner S$, dove $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, se e solo se μ è assolutamente continua rispetto a \mathcal{H}^k ed è concentrata in S .

Definizione 3.24. Sia $\pi \subset \mathbb{R}^d$ un k -piano e $M \geq 0$; il cono $K_M(\pi)$ con asse π e apertura M è definito da

$$K_M(\pi) := \{x \in \mathbb{R}^d : |\pi^\perp x| \leq M |\pi x|\}.$$

Osserviamo che se $M = 0$ allora $K_M(\pi) = \pi$, mentre per $M \rightarrow \infty$ allora $K_M(\pi) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^d \setminus \pi^\perp$.

Proposizione 3.25. Sia S un sottoinsieme del k -grafico di una funzione Lipschitziana f , allora per ogni $x \in S$ esiste un k -piano π e una costante M tale che $S \subset x + K_M(\pi)$. Viceversa, se per ogni $x \in S$ esiste un k -piano π e una costante M tale che $S \subset x + K_M(\pi)$ allora S è grafico di una funzione Lipschitziana.

Dimostrazione. Sia $f : \pi \rightarrow \pi^\perp$ una funzione Lipschitziana di k -grafico Γ e $S \subset \Gamma$. Siano $x_1, x_2 \in S$, allora $x_i = \pi x_i + \pi^\perp x_i = \pi x_i + f(\pi x_i)$ per $i = 1, 2$. Da ciò e dal fatto che f è Lipschitziana segue che

$$|\pi^\perp(x_1 - x_2)| \leq M|\pi(x_1 - x_2)| \quad \text{con } M \geq \text{Lip}(f).$$

Pertanto, per ogni $x \in S$, ogni elemento z di S è anche contenuto nel cono $x + K_M(\pi) = \{y \in \mathbb{R}^d : |\pi^\perp(y - x)| \leq M|\pi(y - x)|\}$ con $M \geq \text{Lip}(f)$.

Viceversa, per ogni $x \in S$, $S \subset x + K_M(\pi)$, perciò per ogni $y \in S$ vale

$$|\pi^\perp(x - y)| \leq M|\pi(x - y)|$$

e ponendo $f(\pi(x)) = \pi^\perp(x)$, $f(\pi(y)) = \pi^\perp(y)$ si ottiene che S è grafico di una funzione f , Lipschitziana. \square

Dalla precedente dimostrazione si può osservare che la costante di Lipschitz non supera M .

Nel prossimo risultato vedremo una condizione sufficiente affinché un insieme sia σ - k -rettificabile. Parliamo di distanza tra due k -piani, riferendoci alla norma dell'operatore lineare individuato dalla matrice di rappresentazione $[v_1, \dots, v_k] \in \mathbb{R}^{k \times d}$, dove (v_1, \dots, v_k) è una base ortonormale del k -piano.

Teorema 3.26. (criterio di rettificabilità per insiemi) *Sia $S \subset \mathbb{R}^d$ e assumiamo che per ogni $x \in S$ esiste $\varrho(x) > 0$, $M(x) > 0$ e un k -piano $\pi(x) \subset \mathbb{R}^d$ tale che*

$$S \cap B_{\varrho(x)}(x) \subset x + K_{M(x)}(\pi(x)). \quad (3.5)$$

Allora, S è contenuto nell'unione di una famiglia numerabile di k -grafici di funzioni Lipschitziane con costante di Lipschitz non superiore a $2 \sup_x M(x)$.

Dimostrazione. Consideriamo i sottoinsiemi di S :

$$S_i := \left\{ x \in S : \varrho(x) > \frac{1}{i} \right\} \quad i \in \mathbb{N}, i \geq 1$$

e dimostriamo l'enunciato per questi insiemi. Possiamo assumere senza perdere di generalità che $\alpha = \sup_x M(x) \in (0, \infty)$ infatti se così non fosse si modificano i sottoinsiemi S_i in S_{ij} aggiungendo la condizione $M(x) \leq j$. Sia $\delta > 0$ soddisfacente

$$\frac{\alpha + \delta(\alpha + 1)}{1 - \delta(\alpha + 1)} \leq 2\alpha \quad \delta(\alpha + 1) < 1$$

e sia $\{\pi_1, \dots, \pi_n\}$ un insieme di k -piani tali che $\min_j |\pi_j - \pi| < \delta$ per ogni k -piano π , dove $|\pi_j - \pi| = d(\pi_j, \pi)$. Definiamo ora

$$S_{ij} := \{x \in S_i : |\pi(x) - \pi_j| < \delta\} \quad 1 \leq j \leq n;$$

dobbiamo allora dimostrare che ogni sottoinsieme $T \subset S_{ij}$ con diametro minore di $\frac{1}{i}$ è contenuta in un k -grafico di una funzione Lipschitziana con costante di Lipschitz minore di 2α . Siano $x, x' \in T$, allora

$$\begin{aligned} |\pi_j^\perp(x - x')| &\leq |\pi_j^\perp(x - x') - \pi^\perp(x)(x - x')| + |\pi^\perp(x)(x - x')| \\ &\leq |\pi_j^\perp - \pi(x)^\perp| |x - x'| + |\pi(x)^\perp(x - x')| \end{aligned}$$

ricordando che ci troviamo in S_{ij} e applicando la condizione di cono (3.5), otteniamo

$$\begin{aligned} |\pi_j^\perp - \pi(x)^\perp| |x - x'| + |\pi(x)^\perp(x - x')| &\leq \delta |x - x'| + |\pi(x)^\perp(x - x')| \\ &\leq \delta |x - x'| + \alpha |\pi(x)(x - x')| \leq \delta |x - x'| + \alpha (|\pi(x) - \pi_j| |x - x'| + |\pi_j(x - x')|) \\ \delta(1+\alpha) |x - x'| + \alpha |\pi_j(x - x')| &\leq (\alpha + \delta(1+\alpha)) |\pi_j(x - x')| + |\pi_j^\perp(x - x')| \delta(1+\alpha). \end{aligned}$$

Da questa successione di disuguaglianze segue quindi

$$|\pi_j^\perp(x - x')| \leq \frac{(\alpha + \delta(1+\alpha))}{1 - \delta(1+\alpha)} |\pi_j(x - x')| \leq 2\alpha |\pi_j(x - x')|$$

cioè $T \subset x + K_{2\alpha}(\pi_j)$; grazie alla Proposizione 3.25 la dimostrazione è conclusa. \square

Esistono anche altre condizioni necessarie e sufficienti per un insieme rettificabile che noi ci limiteremo ad enunciare: la prima coinvolge il concetto di densità, la seconda il concetto di k -grafico di una funzione Lipschitziana:

Proposizione 3.27. *Sia $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ con $\mathcal{H}^k(E) < \infty$. Allora, E è \mathcal{H}^k -rettificabile se e solo se $\Theta_k(E, x) = 1$ per \mathcal{H}^k -quasi ogni $x \in E$.*

Proposizione 3.28. *Ogni insieme E , \mathcal{H}^k -misurabile, è σ - \mathcal{H}^k -misurabile se e solo se esiste una famiglia numerabile di k -grafici di funzioni Lipschitziane $\Gamma_i \subset \mathbb{R}^d$ tale che*

$$\mathcal{H}^k \left(E \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} \Gamma_i \right) = 0.$$

Inoltre, dato $\epsilon > 0$, i grafici Γ_i possono essere scelti in modo che la costante di Lipschitz sia minore di ϵ .

3.3 Misure tangenti

In questa sezione considereremo μ una misura vettoriale di Radon a valori in \mathbb{R}^m definita in un aperto $\Omega \in \mathbb{R}^d$. Inoltre definiamo $\mu_{x,\varrho}(B) := \mu(x + \varrho B)$ una misura che per $\varrho < \text{dist}(x, \partial\Omega)$ è definita per ogni insieme di Borel $C \subset B_1$, dove B_1 è la palla unitaria di \mathbb{R}^d .

Definizione 3.29. Denotiamo con $\text{Tan}(\mu, x)$ l'insieme delle misure ν finite di Radon definite in B_1 a valori in \mathbb{R}^m limiti debole* delle misure

$$\frac{1}{c_{x,\varrho_i}} \mu_{x,\varrho_i} \quad \text{con } c_{x,\varrho} := |\mu|(B_\varrho(x))$$

per una qualche successione infinitesimale $(\varrho_i) \subset (0, \infty)$. Gli elementi di $\text{Tan}(\mu, x)$ sono le misure tangenti a μ in x .

La scelta di una tale normalizzazione è dovuta al fatto che

$$\frac{1}{c_{x,\varrho}} |\mu_{x,\varrho}|(B_1) = \frac{1}{c_{x,\varrho}} |\mu|(B_\varrho(x)) = 1 \quad \forall \varrho \in (0, \text{dist}(x, \partial\Omega)).$$

Questo implica, ricordando il Teorema 3.9, che l'insieme $\text{Tan}(\mu, x)$ è non vuoto. Inoltre per la semicontinuità inferiore di $\mu \rightarrow |\mu|(B_1)$, e per definizione di misura tangente

$$|\nu|(B_1) \leq 1 \quad \forall \nu \in \text{Tan}(\mu, x).$$

Infatti supponiamo che $\nu \in \text{Tan}(\mu, x)$, cioè esiste una successione infinitesimale (ϱ_i) tale che

$$\frac{1}{c_{x,\varrho_i}} \mu_{x,\varrho_i} \rightharpoonup \nu.$$

Allora dal Corollario 3.8 segue

$$|\nu|(B_1) \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{c_{x,\varrho_i}} |\mu_{x,\varrho_i}|(B_1) = 1.$$

Esempio 3.30. Sia $\Sigma \subset \mathbb{R}^d$ una superficie k -dimensionale di classe C^1 e sia $\mu = \mathcal{H}^k \llcorner \Sigma$. Allora $\text{Tan}(\mu, x)$ contiene solo la misura

$$\frac{1}{\omega_k} \mathcal{H}^k \llcorner \pi(x)$$

per ogni $x \in \Sigma$, dove $\pi(x) = T_x \Sigma$ è lo spazio tangente a Σ in x .

Infatti supponiamo di avere una k -varietà regolare parametrizzata da $r : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\Sigma = r(D)$. Sia $\Sigma_{x_0,\rho} = \frac{\Sigma - x_0}{\rho}$ parametrizzata da $r_{x_0,\rho}(u) =$

$\frac{r(u)-x_0}{\rho}$ dove $x_0 = r(u_0)$, $u_0 \in D$ e sia $r > 0$ tale che $B_r(u_0) \subset D$. Nel nostro caso $\mu = \mathcal{H}^k \llcorner \Sigma$ quindi $\frac{\mu_{x_0, \rho}}{c_{x_0, \rho}} = \frac{\mathcal{H}^k \llcorner \Sigma_{x_0, \rho}}{\omega_k}$, pertanto basta dimostrare che $\mathcal{H}^k \llcorner \Sigma_{x_0, \rho} \rightarrow \mathcal{H}^k \llcorner T_{x_0} \Sigma$. Sia $\phi \in C_0(\mathbb{R}^d)$, utilizzando la Formula dell'area, otteniamo

$$\int_{\frac{\Sigma-x_0}{\rho}} \phi(x) d\mathcal{H}^k(x) = \int_D \phi\left(\frac{r(u)-x_0}{\rho}\right) \mathcal{J}_k dr_{x_0, \rho}(u) du.$$

Poiché $dr_{x_0, \rho}(u) = \frac{1}{\rho} dr(u)$, abbiamo

$$\begin{aligned} \int_D \phi\left(\frac{r(u)-x_0}{\rho}\right) \mathcal{J}_k dr_{x_0, \rho}(u) du &= \frac{1}{\rho^k} \int_D \phi\left(\frac{r(u)-r(u_0)}{\rho}\right) \mathcal{J}_k dr(u) du \\ &= \frac{1}{\rho^k} \int_D \phi\left(dr(u_0) \frac{u-u_0}{\rho} + \frac{o(\|u-u_0\|)}{\rho}\right) \mathcal{J}_k dr(u) du \\ &= \int_{\frac{D-u_0}{\rho}} \phi\left(dr(u_0)v + \frac{o(\rho\|v\|)}{\rho}\right) \mathcal{J}_k dr(u_0 + \rho v) dv \end{aligned}$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo utilizzato un cambio di variabile $v = \frac{u-u_0}{\rho}$. Poiché $B_r(u_0) \subset D$ allora $B_{\frac{r}{\rho}} \subset \frac{D-u_0}{\rho}$, e quindi se $\rho \ll 1$, $r_{x_0, \rho}^{-1}(\text{supp } \phi) \subset B_{\frac{r}{\rho}}$. Utilizzando queste ultime osservazioni proseguiamo le uguaglianze:

$$= \int_{\mathbb{R}^k} \phi\left(dr(u_0)v + \|v\| \frac{o(\rho\|v\|)}{\rho\|v\|}\right) \mathcal{J}_k dr(u_0 + \rho v) dv$$

e mandano $\rho \rightarrow 0$

$$\int_{\mathbb{R}^k} \phi(dr(u_0)v) \mathcal{J}_k dr(u_0) dv = \int_{T_{x_0} \Sigma} \phi(w) d\mathcal{H}^k(w)$$

come volevasi dimostrare.

Teorema 3.31. *Sia μ una misura di Radon vettoriale a valori in \mathbb{R}^m definita in Ω e sia $\mu = f|\mu|$ la sua decomposizione polare. Per ogni punto di Lebesgue x di f relativo a μ vale la seguente proprietà:*

$$\frac{\mu_{x, \varrho_i}}{c_{x, \varrho_i}} \rightarrow \nu \in \text{Tan}(\mu, x) \iff \frac{|\mu|_{x, \varrho_i}}{c_{x, \varrho_i}} \rightarrow |\nu|$$

e $\nu = f(x)|\nu|$. In particolare

$$\text{Tan}(\mu, x) = f(x) \text{Tan}(|\mu|, x).$$

Dimostrazione. Siano μ^i per $i = 1, \dots, m$ le componenti di μ e scriveremo $\mu_\rho = \mu_{x,\rho}$, $c_\rho = |\mu|(B_\rho(x))$. Sia $\phi \in C_c(B_1)$, allora abbiamo

$$\begin{aligned} & \int_{B_1} \phi(z) d|\mu_\rho|(z) - \sum_{i=1}^m f_i(x) \int_{B_1} \phi(z) d\mu_\rho^i(z) \\ &= \int_{B_1} \phi(z) d|\mu_\rho|(z) - \sum_{i=1}^m f_i(x) \int_{B_1} \phi(z) f_i(x + \rho z) d|\mu_\rho^i|(z) \\ &= \int_{B_1} \phi(z) (1 - \langle f(x + \rho z), f(x) \rangle) d|\mu_\rho|(z) \\ &= \int_{B_\rho(x)} \phi\left(\frac{y-x}{\rho}\right) (1 - \langle f(y), f(x) \rangle) d|\mu|(y). \end{aligned}$$

Poiché $|1 - \langle f(y), f(x) \rangle| \leq |f(y) - f(x)|$ e ϕ è limitata, supponendo di poterla maggiorare con una costante M , abbiamo

$$\int_{B_\rho(x)} \phi\left(\frac{y-x}{\rho}\right) (1 - \langle f(y), f(x) \rangle) d|\mu|(y) \leq M \int_{B_\rho(x)} |f(y) - f(x)| d|\mu|(y).$$

Pertanto, essendo x punto di Lebesgue:

$$\int_{B_1} \phi(z) d|\mu_\rho|(z) - \sum_{i=1}^m f_i(x) \int_{B_1} \phi(z) d\mu_\rho^i(z) = o(c_\rho).$$

Dunque vale

$$\frac{\mu_{\rho_i}}{c_{\rho_i}} \rightharpoonup \nu \quad \Rightarrow \quad \frac{|\mu_{\rho_i}|}{c_{\rho_i}} \rightharpoonup \sigma = \sum_i f_i(x) \nu_i$$

dove le convergenze deboli sono da intendersi in B_1 . Scrivendo $\nu = g|\nu|$ e utilizzando il punto (c) del Teorema 3.9, possiamo dire che $|\nu| \leq \sigma$ e quindi $\langle f(x), g \rangle |\nu| \geq |\nu|$. Questo implica che $g = f(x) |\nu|$ -quasi ovunque in B_1 e quindi $|\nu| = \sigma$ e $\nu = f(x)|\nu| = f(x)\sigma$. Abbiamo così dimostrato la prima implicazione e l'inclusione $\text{Tan}(\mu, x) \subset f(x) \text{Tan}(|\mu|, x)$.

Viceversa se supponiamo che $\frac{|\mu_{\rho_i}|}{c_{\rho_i}}$ converga debolmente a σ in B_1 , allora possiamo supporre grazie al punto (a) del Teorema 3.9 che $\frac{\mu_{\rho_i}}{c_{\rho_i}}$ converga debolmente in B_1 a una misura ν . Ma allora, per il punto precedente, abbiamo che $\nu = f(x)|\nu|$, $|\nu| = \sigma$ e quindi $f(x)\sigma = f(x)|\nu| = \nu$. Con ciò abbiamo concluso la dimostrazione. □

Vedremo successivamente un'importante proprietà delle misure k -rettificabili. Queste misure infatti, per quasi ogni x nel supporto, sono asintoticamente concentrate vicino ad x , su un k -piano. Possiamo quindi definire quello che viene chiamato piano tangente approssimato alla misura:

Definizione 3.32. Sia μ una misura vettoriale di Radon a valori in \mathbb{R}^m definita in un aperto $\Omega \in \mathbb{R}^d$ e $x \in \Omega$. Diciamo che μ ha uno spazio tangente approssimato in x , π , con molteplicità $\theta \in \mathbb{R}^m$, dove π è un k -piano di \mathbb{R}^d e scriveremo

$$\text{Tan}^k(\mu, x) = \theta \mathcal{H}^k \llcorner \pi$$

se $\varrho^{-k} \mu_{x, \varrho}$ converge debolmente localmente a $\theta \mathcal{H}^k \llcorner \pi$ in \mathbb{R}^d per $\varrho \rightarrow 0$.

In altre parole possiamo dire che lo spazio tangente approssimato a μ in x è quell'unico k piano π nel quale le misure $\varrho^{-k} \mu_{x, \varrho}$ sono asintoticamente concentrate. Quindi se consideriamo il cono $K_M(\pi)$ di asse π e apertura M vale

$$|\mu|(B_\varrho(x) \setminus (x + K_M(\pi))) = o(\varrho^k) \quad \forall M > 0. \quad (3.6)$$

Ricordando la definizione di convergenza debole locale, possiamo dire che la misura μ ammette un piano tangente approssimato, π , in x con molteplicità θ se

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \varrho^{-k} \int_{\Omega} \phi \left(\frac{y-x}{\varrho} \right) d\mu(y) = \theta \int_{\pi} \phi(y) d\mathcal{H}^k(y) \quad \forall \phi \in C_c(\mathbb{R}^d)$$

dove abbiamo anche utilizzato la definizione di $\mu_{x, \varrho}$.

Corollario 3.33. Siano μ e ν misure di Radon definite in $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ a valori in \mathbb{R}^m . Se $\text{Tan}^k(\mu, x) = \sigma$ e $|\nu - \mu|(B_\varrho(x)) = o(\varrho^k)$ allora $\text{Tan}^k(\nu, x) = \sigma$.

Osserviamo un caso particolare: sia $E \subset \mathbb{R}^d$ un insieme \mathcal{H}^k -misurabile con misura finita, e sia $\mu = \mathcal{H}^k \llcorner E$. Osserviamo che $\varrho^{-k} \mu_{x, \varrho} = \mathcal{H}^k \llcorner E_{x, \varrho}$ con $E_{x, \varrho} = \frac{E-x}{\varrho}$, infatti

$$\begin{aligned} \varrho^{-k} \mu_{x, \varrho}(B) &= \varrho^{-k} \mu(x + \varrho B) = \varrho^{-k} \mathcal{H}^k \llcorner E(x + \varrho B) = \\ &= \varrho^{-k} \int_{E \cap (x + \varrho B)} d\mathcal{H}^k(y) = \int_{E_{x, \varrho} \cap B} d\mathcal{H}^k(z) = \mathcal{H}^k \llcorner E_{x, \varrho}(B) \end{aligned}$$

dove abbiamo applicato un cambio di variabile $y = x + \varrho z$ e abbiamo utilizzato la proprietà della misura di Hausdorff di essere invariante per traslazioni e $\mathcal{H}^k(\lambda E) = \lambda^k \mathcal{H}^k(E)$. Quindi possiamo dire il k -piano π è uno spazio tangente approssimato di $\mathcal{H}^k \llcorner E$, in x con molteplicità 1 se e solo se

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \int_{E_{x, \varrho}} \phi(y) d\mathcal{H}^k(y) = \int_{\pi} \phi(y) d\mathcal{H}^k(y) \quad \forall \phi \in C_c(\mathbb{R}^d).$$

Vediamo ora una proprietà dello spazio tangente approssimato:

Teorema 3.34. *Sia μ una misura vettoriale di Radon a valori in \mathbb{R}^m definita in \mathbb{R}^d e assumiamo che $\varrho^{-k}|\mu|(B_\varrho(x))$ è limitata per $\varrho \rightarrow 0$. Se $\mu = f|\mu|$ e x è un punto di Lebesgue per f relativo a $|\mu|$, allora*

$$v = \text{Tan}^k(\mu, x) \quad \iff \quad |\nu| = \text{Tan}^k(|\mu|, x).$$

La dimostrazione è simile alla dimostrazione dell'analogo Teorema 3.31.

Utilizzando questo ultimo risultato osserviamo che se $\text{Tan}(\mu, x) = \theta \mathcal{H}^k \llcorner \pi$ dove $\mu = f|\mu|$ e x un punto di Lebesgue di f allora $\varrho^{-k}|\mu|_{x,\varrho}$ converge debolmente localmente a $|\theta(x)|\mathcal{H}^k \llcorner \pi$ in \mathbb{R}^d quando $\varrho \rightarrow 0$, quindi per il punto (c) del Teorema 3.9 vale che

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\mu(B_\varrho(x))}{\varrho^k} = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{1}{\varrho^k} \mu_{x,\varrho}(B_1) = \theta(x) \mathcal{H}^k \llcorner \pi(B_1) = \theta(x) \omega_k.$$

Da ciò segue che

$$\text{Tan}^k(\mu, x) = \theta(x) \mathcal{H}^k \llcorner \pi \quad \Rightarrow \quad \Theta_k(\mu, x) = \theta(x). \quad (3.7)$$

Quando abbiamo definito la misura k -rettificabile, cioè una misura μ rappresentabile come $\theta \mathcal{H}^k \llcorner S$, dove S è un insieme σ - \mathcal{H}^k -rettificabile e $\theta : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ è una funzione di Borel, abbiamo anche osservato che per il Teorema di Radon-Nikodym $\mu = \theta \mathcal{H}^k \llcorner S$, per un qualche $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ e $\theta : S \rightarrow \mathbb{R}^m$, se e solo se μ è assolutamente continua rispetto a \mathcal{H}^k e concentrata in S . Però il teorema di Radon-Nikodym non fornisce una forma esplicita per θ , mentre il seguente teorema, grazie anche al risultato (3.7), mostra che, quando μ è concentrata in un insieme σ - \mathcal{H}^k -rettificabile, $\theta(x)$ coincide μ -quasi ovunque con $\Theta_k(\mu, x)$. In particolare vedremo che è possibile usare lo spazio tangente approssimato per caratterizzare la rettificabilità.

Teorema 3.35. (Criterio di rettificabilità per misure) *Sia μ una misura positiva di Radon definita in un insieme aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.*

- (a) *Se $\mu = \theta \mathcal{H}^k \llcorner S$ e S è σ - \mathcal{H}^k -rettificabile, allora μ ammette uno spazio tangente approssimato con molteplicità $\theta(x)$ per \mathcal{H}^k -quasi ogni $x \in S$. In particolare $\theta(x) = \Theta_k(\mu, x)$ per \mathcal{H}^k -quasi ogni $x \in S$.*
- (b) *Se μ è concentrata in un insieme di Borel S e ammette uno spazio tangente approssimato con molteplicità $\theta(x) > 0$ per μ -quasi ogni $x \in S$, allora S è σ - k -rettificabile e $\mu = \theta \mathcal{H}^k \llcorner S$. In particolare*

$$\text{esiste } \text{Tan}^k(\mu, x) \text{ per } \mu\text{-quasi ogni } x \in \Omega \quad \implies \quad \mu \text{ è } k\text{-rettificabile.}$$

Dimostrazione. (a) Prima parte. Supponiamo che $S = f(K)$ dove $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^d$ è una funzione Lipschitziana iniettiva e K è un compatto di \mathbb{R}^k . Sia E un sottoinsieme di K costituito da quegli elementi y tali che esiste df_y e $\mathcal{J}_k df_y > 0$, $\Theta_k(K, y) = 1$ e

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \varrho^{-k} \int_{B_\varrho(y)} |\theta(f(z))\mathcal{J}_k df_z - \theta(f(y))\mathcal{J}_k df_y| dz = 0. \quad (3.8)$$

cioè y è punto di Lebesgue per θ : chiaramente $\mathcal{H}^k(K \setminus E) = 0$. Dobbiamo dimostrare che per ogni $x \in f(E)$ esiste il piano tangente approssimato a $\theta\mathcal{H}^k \llcorner f(K)$. Sia $y_0 \in E$, $x_0 = f(y_0)$ e $\phi \in C_c(\mathbb{R}^d)$ allora applicando la formula dell'area si ottiene

$$\begin{aligned} \varrho^{-k} \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) d\mu_{x_0, \varrho}(x) &= \varrho^{-k} \int_{\mathbb{R}^d} \phi\left(\frac{x - x_0}{\varrho}\right) d\mu(x) = \\ &= \varrho^{-k} \int_S \theta(x) \phi\left(\frac{x - x_0}{\varrho}\right) d\mathcal{H}^k(x) = \varrho^{-k} \int_K \theta(f(y)) \phi\left(\frac{f(y) - f(y_0)}{\varrho}\right) \mathcal{J}_k df_y dy = \\ &= \int_{K_\varrho} \theta(f(y_0 + \varrho z)) \phi\left(\frac{f(y_0 + \varrho z) - f(y_0)}{\varrho}\right) \mathcal{J}_k df_{y_0 + \varrho z} dy \end{aligned}$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo applicato un cambio di variabile $y = y_0 + \varrho z$ e abbiamo posto $K_\varrho = \frac{K - y_0}{\varrho}$. Per la convergenza dominata e per la Formula dell'area, mandando $\varrho \rightarrow 0$, otteniamo

$$\begin{aligned} \lim_{\varrho \rightarrow 0} \varrho^{-k} \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) d\mu_{x_0, \varrho}(x) &= \theta(x_0) \mathcal{J}_k df_{y_0} \int_{\mathbb{R}^k} \phi(df_{y_0}(z)) dz \\ &= \theta(x_0) \int_{\pi_0} \phi(x) d\mathcal{H}^k(x) \end{aligned}$$

con $\pi_0 = df_{y_0}(\mathbb{R}^k)$. Abbiamo così dimostrato che $\theta(x_0)\mathcal{H}^k \llcorner \pi_0 = \text{Tan}^k(\mu, x_0)$. Osserviamo che da $\mathcal{L}^k(K \setminus E) = 0$ segue $\mathcal{H}^k(f(K) \setminus f(E)) = 0$, grazie alla Proposizione 3.19, e quindi $\text{Tan}^k(\mu, x)$ esiste per \mathcal{H}^k -quasi ogni $x \in f(K)$.

Seconda parte. Affrontiamo ora il caso generale. S , essendo $\sigma\mathcal{H}^k$ -rettificabile, può essere considerato, \mathcal{H}^k -quasi ovunque, come l'unione di un'infinità numerabile di insiemi compatti S_i parametrizzati da funzioni Lipschitziane iniettive. Definiamo $\mu_i = \mu \llcorner S_i$ allora $\text{Tan}^k(\mu_i, x)$ esiste con molteplicità $\theta(x)$ per \mathcal{H}^k -quasi ogni $x \in S_i$. Inoltre per il punto (2) del Corollario 3.16 vale

$$\Theta_k(\mu \llcorner (S \setminus S_i)) = 0 \quad \text{per } \mathcal{H}^k - \text{quasi ogni } x \in S_i.$$

Ora, poichè $\mu = \mu_i + \mu \llcorner (S \setminus S_i)$, da queste ultime osservazioni e dal Corollario 3.33, segue che $\text{Tan}(\mu, x)$ esiste con molteplicità $\theta(x)$ per \mathcal{H}^k -quasi ogni $x \in S_i$,

e quindi per arbitrarietà di i la dimostrazione è conclusa. L'ultima parte segue dall'equazione (3.7).

(b) Per ogni numero intero $n \geq 1$ definiamo

$$S_n := \left\{ x \in S : \mu(B_\varrho(x)) \geq \frac{\varrho^k}{n} \quad \forall \varrho \in \left(0, \frac{1}{n}\right) \right\}.$$

Dall'implicazione (3.7), l'unione degli S_n ricopre μ -quasi tutto S , infatti, poiché $\Theta_k(\mu, x) = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\mu(B_\varrho(x))}{\omega_k \varrho^k}$,

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n = \{x \in S : \theta(x) > 0\}.$$

Dimostriamo perciò che S_n per ogni n è k -rettificabile. Dimostriamo per assurdo che S_n verifica le ipotesi del Teorema 3.26 con $M(x) = 2$ e $\varrho(x) > 0$ sufficientemente piccolo. Sia $(x_h)_h \subset S_n \setminus (x + K_2(\pi(x)))$ una successione convergente a $x \in S_n$; allora poiché $x_h \notin x + K_2(\pi(x))$ vale

$$|\pi^\perp(x)(x_h - x)| \geq 2|\pi(x)(x_h - x)|$$

e dal fatto che

$$|x_h - x|^2 = |\pi(x)(x_h - x)|^2 + |\pi^\perp(x)(x_h - x)|^2,$$

unendo le due cose troviamo

$$|x_h - x|^2 \leq \frac{1}{4}|\pi^\perp(x)(x_h - x)|^2 + |\pi^\perp(x)(x_h - x)|^2 = \frac{5}{4}|\pi^\perp(x)(x_h - x)|^2.$$

In conclusione

$$|\pi^\perp(x)(x_h - x)| \geq \frac{2}{\sqrt{5}}|x_h - x|. \quad (3.9)$$

Si dimostra inoltre che se $\varrho_h = \frac{|x_h - x|}{2\sqrt{5}}$ allora $B_{\varrho_h}(x_h) \cap x + K_1(\pi(x)) = \emptyset$. Infatti, preso $y \in B_{\varrho_h}(x_h)$ e quindi $|y - x_h| \leq \frac{|x_h - x|}{2\sqrt{5}}$, vale

$$\begin{aligned} |\pi^\perp(x)(y - x)| &\geq |\pi^\perp(x)(x_h - x)| - |\pi^\perp(x)(y - x_h)| \geq |\pi^\perp(x)(x_h - x)| - |y - x_h| \\ &\geq |\pi^\perp(x)(x_h - x)| - \frac{|x_h - x|}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{2}|\pi^\perp(x)(x_h - x)| + \frac{1}{2}|\pi^\perp(x)(x_h - x)| - \frac{|x_h - x|}{2\sqrt{5}} \end{aligned}$$

dalla disuguaglianza (3.9) e dal fatto che $x_h \notin x + K_2(\pi(x))$ segue

$$\geq \left| \frac{1}{2}\pi^\perp(x)(x_h - x) \right| + \frac{|x_h - x|}{2\sqrt{5}} \geq |\pi(x)(x_h - x)| + \frac{|x_h - x|}{2\sqrt{5}}$$

e infine sempre utilizzando $|y - x_h| \leq \frac{|x_h - x|}{2\sqrt{5}}$

$$\geq |\pi(x)(x_h - x)| + |y - x_h| \geq |\pi(x)(x_h - x)| + |\pi(x)(y - x_h)| \geq |\pi(x)(y - x)|.$$

Quindi $y \notin x + K_1(\pi(x))$. Consideriamo ora $\alpha = 1 + 2\sqrt{5}$ e $\varrho_h < \frac{1}{n}$. Poiché $x_h \in S_n$, $\mu(B_{\varrho_h}(x_h)) \geq \frac{\varrho_h^k}{n}$. Inoltre da $\varrho_h < \frac{1}{n}$ segue che $|x_h - x| < \frac{2\sqrt{5}}{n}$ mentre se $y \in B_{\varrho_h}(x_h)$, allora

$$|y - x| \leq |y - x_h| + |x_h - x| \leq \varrho_h + 2\sqrt{5}\varrho_h = \alpha\varrho_h$$

e quindi $y \in B_{\alpha\varrho_h}(x)$. Da ciò segue

$$\mu(B_{\alpha\varrho_h}(x) \setminus (x + K_1(\pi(x)))) \geq \mu(B_{\varrho_h}(x_h))$$

che è in contraddizione con (3.6), quindi dall'assurdo deduciamo che S_n è k -rettificabile.

Consideriamo ora $S = \{x \in \Omega : \text{esiste } \text{Tan}(\mu, x)\}$. Dal Teorema 3.15 e dall'implicazione (3.7) segue che μ è concentrata in S e in particolare $\mu \ll \mathcal{H}^k \llcorner S$. Pertanto per il Teorema di Radon-Nikodym anche l'ultima implicazione è dimostrata. \square

Capitolo 4

Insiemi di perimetro finito

In questa sezione, se non diversamente indicato, Ω verrà considerato un aperto di \mathbb{R}^d . Prima di definire la funzione perimetro e affrontare le relative proprietà, introduciamo il concetto di funzione a variazione limitata.

Definizione 4.1. Sia $\Omega \in \mathbb{R}^d$ un insieme aperto e sia $u \in L^1(\Omega)$. Diremo che u ha variazione limitata in Ω , e scriveremo $u \in BV(\Omega)$, se

$$|Du|(\Omega) := \sup \left\{ \int_{\Omega} u \operatorname{div} g \, dx \mid g \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^d), |g| \leq 1 \right\} < \infty.$$

Lo spazio vettoriale delle funzioni a variazione limitata in Ω lo indicheremo con $BV(\Omega)$. Diamo subito un esempio di funzione a variazione limitata.

Esempio 4.2. Sia $E \subset \mathbb{R}^d$ un insieme limitato, non vuoto e ∂E regolare. Allora $\chi_E \in L^1(\Omega)$, poiché

$$\int_{\Omega} \chi_E \, dx = \mathcal{L}^d(E \cap \Omega) < \infty.$$

Sia ora $g \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$ tale che $\|g\|_{\infty} \leq 1$, dal Teorema della divergenza, chiamando ν il versore normale interna a ∂E , segue

$$\int_{\Omega} \chi_E \operatorname{div} g \, dx = \int_{\Omega \cap E} \operatorname{div} g \, dx = - \int_{\Omega \cap \partial E} \langle g, \nu \rangle \, d\mathcal{H}^{d-1}(x) \leq \mathcal{H}^{d-1}(\Omega \cap \partial E)$$

e quindi $|D\chi_E|(\Omega) < \infty$ cioè $\chi_E \in BV(\Omega)$. In particolare dal Corollario 3.3 segue che

$$\begin{aligned} |D\chi_E|(\Omega) &:= \sup \left\{ \int_{\Omega} \chi_E \operatorname{div} g \, dx \mid g \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^d), \|g\|_{\infty} \leq 1 \right\} = \\ &= \sup \left\{ \int_{\Omega \cap \partial E} \langle g, \nu \rangle \, d\mathcal{H}^{d-1} \mid g \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^d), \|g\|_{\infty} \leq 1 \right\} = |\nu \mathcal{H}^{d-1} \llcorner \partial E|(\Omega). \end{aligned}$$

Similmente si dimostra anche che le funzioni di classe C^1 in Ω , sommabili e con gradiente sommabile, hanno variazione limitata in Ω . Infatti utilizzando l'integrazione per parti si ottiene

$$\int_{\Omega} u \operatorname{div} g \, dx = - \int_{\Omega} \langle g, \nabla u \rangle \, dx \quad \forall g \in C_c^1(\Omega), \quad \|g\|_{\infty} \leq 1$$

e quindi $|Du|(\Omega) = \|\nabla u\|_{L^1(\Omega)} < \infty$.

Proposizione 4.3. *Il funzionale che ad ogni elemento $u \in L_{loc}^1(\Omega)$ associa $|Du|(\Omega)$ è semicontinuo inferiormente nella convergenza in norma $\|\cdot\|_{L_{loc}^1}$.*

Dimostrazione. Sia

$$f_g : u \rightarrow \int_{\Omega} u \operatorname{div} g \, dx \quad \forall g \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^d) \quad \forall u \in L_{loc}^1(\Omega)$$

un funzionale continuo nella norma $\|\cdot\|_{L_{loc}^1}$. Poniamo

$$\mathcal{F} = \left\{ g \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^d) : \|g\|_{\infty} \leq 1 \right\},$$

allora il funzionale

$$u \rightarrow |Du|(\Omega) = \sup_{g \in \mathcal{F}} f_g(u),$$

per la Proposizione 3.7, è semicontinuo inferiormente. \square

Vedremo che la misura Du , nominata nella definizione di funzione a variazione limitata coincide con la derivata distribuzionale di u , pertanto valgono i seguenti risultati:

Proposizione 4.4. *Sia $u \in BV(\Omega)$. Per ogni funzione ϕ Lipschitziana allora $u\phi \in BV(\Omega)$ e*

$$D(u\phi_h) = \phi_h Du + u \nabla \phi_h \mathcal{L}^d.$$

Inoltre in $\Omega_{\epsilon} = \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \epsilon\}$ si ha

$$\nabla(u * \rho_{\epsilon}) = Du * \rho_{\epsilon}.$$

Dimostrazione. Prima parte. Sia $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ tale che $\|\varphi\|_{\infty} \leq 1$, allora

$$\begin{aligned} \langle D(u\phi), \varphi \rangle &= \int_{\Omega} u \operatorname{div}(\phi\varphi) \, dx - \int_{\Omega} u \nabla \phi \varphi \, dx = - \int_{\Omega} \phi \varphi \, dDu + \\ &\quad - \int_{\Omega} u \nabla \phi \varphi \, dx \leq \|\phi\|_{\infty} |Du|(\Omega) + \|u\|_{L^1(\Omega)} \|\nabla \phi\|_{\infty} \end{aligned}$$

dunque $u\phi \in BV(\Omega)$ e dall'integrazione per parti segue

$$D(u\phi_h) = \phi_h Du + u \nabla \phi_h \mathcal{L}^d.$$

Seconda parte. Segue dal Teorema B.6. \square

Teorema 4.5. Sia $u \in L^1(\Omega)$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) $u \in BV(\Omega)$;

(ii) esiste $\mu_u \in \mathcal{M}_f(\Omega, \mathbb{R}^d)$ tale che

$$\int_{\Omega} u \operatorname{div} g \, dx = - \int_{\Omega} \langle g, d\mu_u \rangle \quad \forall g \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^d); \quad (4.1)$$

(iii) esiste una successione $(u_j)_j \subset C^\infty(\Omega)$ tale che $\|u_j - u\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0$ e

$$\sup_j \int_{\Omega} |\nabla u_j(x)| \, dx \leq C < \infty.$$

Inoltre si verifica che

$$|Du|(\Omega) = |\mu_u|(\Omega) = \inf \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u_j(x)| \, dx.$$

Dimostrazione. (i) \Rightarrow (ii) Sia $u \in BV(\Omega)$ e sia

$$L_u(g) := \int_{\Omega} u \operatorname{div} g \, dx \quad \forall g \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$$

un funzionale, che vedremo essere lineare e continuo. Infatti

$$|L_u(g)| = \left| L_u\left(\frac{g}{\|g\|_{\infty}}\|g\|_{\infty}\right) \right| \leq \|g\|_{\infty} |Du|(\Omega).$$

Utilizzando un corollario del teorema di Hahn-Banach, possiamo estendere l'operatore L_u allo spazio $C_0(\Omega, \mathbb{R}^d)$ e otteniamo così un funzionale lineare, L , di norma minore o uguale a $|Du|(\Omega)$ e tale che $L(g) = L_u(g)$ per ogni $g \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$. Per il Teorema di Riesz, esiste quindi $\mu \in \mathcal{M}_f(\Omega, \mathbb{R}^d)$ tale che $L(g) = - \int_{\Omega} \langle g, d\mu \rangle$ per ogni $g \in C_0(\Omega, \mathbb{R}^d)$ e $|\mu|(\Omega) \leq |Du|(\Omega)$. Unendo le due cose si ottiene

$$- \int_{\Omega} \langle g, d\mu \rangle = \int_{\Omega} u \operatorname{div} g \, dx \quad \forall g \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$$

come volevasi dimostrare.

(ii) \Rightarrow (i) Sia $u \in L^1(\Omega)$ e $\mu \in \mathcal{M}_f(\Omega, \mathbb{R}^d)$ tale che valga (4.1), allora

$$\begin{aligned} |Du|(\Omega) &= \sup \left\{ \int_{\Omega} u \operatorname{div} g \, dx : g \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^d), \|g\|_{\infty} \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_{\Omega} \langle g, d\mu \rangle : g \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^d), \|g\|_{\infty} \leq 1 \right\} \\ &\leq |\mu|(\Omega) < \infty. \end{aligned}$$

In realtà utilizzando il Corollario 3.3 e osservando che C_c^1 è denso in C_0 si ottiene: $|Du|(\Omega) = |\mu|(\Omega)$.

(iii) \Rightarrow (ii) Data una successione di funzioni $(u_h)_h \in C^\infty(\Omega)$, allora per ogni h vale

$$\int_{\Omega} u_h \nabla \phi \, dx = - \int_{\Omega} \langle \phi, \nabla u_h \rangle \, d\mathcal{L}^d(x) \quad \forall \phi \in C_c^1(\Omega) \quad (4.2)$$

e quindi $u_h \in BV(\Omega)$ e $|Du_h|(\Omega) = \|\nabla u_h\|_{L^1(\Omega)} < \infty$. Consideriamo le misure a variazione equilimitata $\mu_h = \nabla u_h \mathcal{L}^d$ e chiamiamo μ il limite debole in Ω della successione $(\mu_h)_h$. Allora mandando $h \rightarrow \infty$ nella formula (4.2) si ottiene quanto richiesto.

(ii) \Rightarrow (iii) Definiamo i seguenti sottoinsiemi di Ω

$$A_1 := \left\{ x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{2} \right\}$$

$$A_h := \left\{ x \in \Omega : \frac{1}{h+1} < \text{dist}(x, \partial\Omega) < \frac{1}{h-1} \right\}$$

per $h > 1$ intero. Mediante una partizione dell'unità relativa agli A_h , possiamo trovare delle funzione $\phi_h : \Omega \rightarrow [0, 1]$ tali che $\phi_h \in C_c^\infty(A_h)$ e $\sum_{h=1}^\infty \phi_h \equiv 1$. Per ogni $j \in \mathbb{N}$ scegliamo $\epsilon_h > 0$ tali che $\text{supp}((u\phi_h) * \rho_{\epsilon_h}) \subset A_h$ e

$$\int_{\Omega} (|(u\phi_h) * \rho_{\epsilon_h} - u\phi_h| + |(u\nabla\phi_h) * \rho_{\epsilon_h} - u\nabla\phi_h|) \, dx < 2^{-j-h}. \quad (4.3)$$

Allora la funzione

$$u_j = \sum_{h=1}^{\infty} (u\phi_h) * \rho_{\epsilon_h} \quad (4.4)$$

è di classe $C^\infty(\Omega)$, infatti per come abbiamo definito gli A_h , ogni punto di Ω è contenuto in al massimo due sottoinsiemi A_h , perciò la funzione (4.4) è localmente somma di al più due funzioni C^∞ . Inoltre vale che:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u_j - u| \, dx &= \int_{\Omega} \left| \sum_{h=1}^{\infty} (u\phi_h) * \rho_{\epsilon_h} - u \sum_{h=1}^{\infty} \phi_h \right| \, dx \\ &\leq \sum_{h=1}^{\infty} \int |(u\phi_h) * \rho_{\epsilon_h} - u\phi_h| \, dx < \sum_{h=1}^{\infty} 2^{-j-h} - \sum_{h=1}^{\infty} \int |(u\nabla\phi_h) * \rho_{\epsilon_h} - u\nabla\phi_h| \, dx < 2^{-j} \end{aligned}$$

da cui segue la prima parte. Utilizzando ora la Proposizione 4.4 si ottiene

$$\nabla u_j = \sum_{h=1}^{\infty} \nabla((u\phi_h) * \rho_{\epsilon_h}) = \sum_{h=1}^{\infty} (D(u\phi_h)) * \rho_{\epsilon_h}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{h=1}^{\infty} (\phi_h Du) * \rho_{\epsilon_h} + \sum_{h=1}^{\infty} (u \nabla \phi_h) * \rho_{\epsilon_h} \\
&= \sum_{h=1}^{\infty} (\phi_h Du) * \rho_{\epsilon_h} + \sum_{h=1}^{\infty} ((u \nabla \phi_h) * \rho_{\epsilon_h} - u \nabla \phi_h).
\end{aligned}$$

dove abbiamo considerato che, poiché $\sum_h \phi \equiv 1$, $\nabla \sum_h \phi = 0$. Dato che $u_j \in C^\infty$, come già osservato in precedenza, $|Du_j|(\Omega) = \|\nabla u_j\|_{L^1(\Omega)}$ e quindi, utilizzando la condizione (4.3) e il Teorema B.6

$$|Du_j|(\Omega) = \int_{\Omega} |\nabla u_j| dx \leq 2^{-j} + \sum_{h=1}^{\infty} \int_{\Omega} \phi_h d|Du| = 2^{-j} + |Du|(\Omega).$$

Pertanto $\limsup_{j \rightarrow +\infty} |Du_j|(\Omega) \leq |Du|(\Omega) = |\mu|(\Omega) < \infty$. \square

La misura $\mu_u = Du$ nominata nel punto (ii), per definizione, coincide con la derivata distribuzionale di u . In particolare se $u = \chi_E$ con ∂E regolare allora la misura μ_u nominata nel punto (ii) è

$$\mu_u = \nu_E \mathcal{H}^{d-1} \llcorner \partial E, \quad (4.5)$$

dove ν_E è il versore normale interna a ∂E ; similmente se $u \in C^1(\Omega)$, $u \in L^1(\Omega)$ e $\nabla u \in L^1(\Omega)$, allora

$$\mu_u = \nabla u \mathcal{L}^d. \quad (4.6)$$

Teorema 4.6. *$BV(\Omega)$ è uno spazio di Banach con la norma*

$$\|u\|_{BV} = \|u\|_{L^1(\Omega)} + |Du|(\Omega).$$

Osserviamo che questa norma è troppo forte, in quanto $\overline{C^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{BV}} \neq BV(\Omega)$; se per esempio consideriamo $u = \chi_E \in BV(\Omega)$, si dimostra che non esiste una successione $(u_h)_h \subset C^\infty$ tale che $\|u_h - u\|_{BV} \rightarrow 0$ per $h \rightarrow \infty$ infatti

$$\|u - u_h\|_{BV} = \|u - u_h\|_{L^1(\Omega)} + |\mu_u - \mu_{u_h}|(\Omega)$$

utilizzando adesso le due equazioni (4.5), (4.6) e la Proposizione 3.4, si prosegue

$$= \|\chi_E - u_h\|_{L^1(\Omega)} + \mathcal{H}^{d-1}(\partial E \cap \Omega) + |\mu_{u_h}|(\Omega) \geq \mathcal{H}^{d-1}(\partial E \cap \Omega),$$

quindi per $h \rightarrow \infty$, $\|u - u_h\|_{BV}$ non converge a zero. Però data una funzione $u \in BV(\Omega)$ sappiamo, per il Teorema 4.5, che esiste una successione $(u_j)_j \in C^\infty(\Omega)$ tale che

$$\|u - u_j\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \|\nabla u_j\|_{L^1} = |Du_j|(\Omega) \rightarrow |Du|(\Omega),$$

quindi, utilizzando la convergenza debole di misure, possiamo dire che per ogni $u \in BV(\Omega)$ esiste una successione $(u_j)_j \subset C^\infty$ tale che

$$\|u - u_j\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \nabla u_j \mathcal{L}^d \rightharpoonup \mu_u.$$

In seguito ci interesseremo soprattutto di funzioni $u = \chi_E$ per lo studio degli insiemi di perimetro finito che ora andremo a definire:

Definizione 4.7. *Sia $E \subset \mathbb{R}^d$ un insieme misurabile tale che $\mathcal{L}^d(E) < \infty$. Diremo che E è un insieme di perimetro finito in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ se*

$$P(E, \Omega) := \sup \left\{ \int_{E \cap \Omega} \operatorname{div} g \, dx \mid g \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^d), \|g\|_\infty \leq 1 \right\} < +\infty$$

Osserviamo che ciò equivale a richiedere che $\chi_E \in BV(\Omega)$, con $P(E, \Omega) = |D\chi_E|(\Omega)$.

In certi casi può essere utile la definizione di insieme con perimetro localmente finito in Ω , ovvero un insieme E tale che

$$P(E, A) < \infty \quad \forall A \subset\subset \Omega, A \text{ aperto}$$

dove con $A \subset\subset \Omega$ intendiamo che la chiusura di A è un compatto contenuto in Ω .

Esempio 4.8. Gli insiemi E con $\Omega \cap \partial E$ di classe C^1 e $\mathcal{H}^{d-1}(\partial E \cap \Omega) < \infty$ hanno perimetro finito.

Dimostrazione. Segue dall'Esempio 4.2. □

Osserviamo che per ogni insieme E di perimetro finito in Ω , la derivata distribuzionale $D\chi_E$ è una misura di Radon in Ω , inoltre $D\chi_E \ll |D\chi_E|$ e quindi per il Corollario 2.9 esiste $\nu_E \in L^1(\Omega, |D\chi_E|, \mathbb{R}^d)$ tale che $|\nu_E| = 1$ $|D\chi_E|$ -quasi ovunque e $D\chi_E = \nu_E |D\chi_E|$. Dal Teorema di derivazione di Besicovitch segue inoltre che per $|D\chi_E|$ -quasi ogni $x \in \Omega$

$$\nu_E(x) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{D\chi_E(B_\rho(x))}{|D\chi_E|(B_\rho(x))}.$$

Diamo allora la seguente definizione:

Definizione 4.9. *Sia $E \subset \mathbb{R}^d$ un insieme di perimetro finito. Definiamo frontiera ridotta di E l'insieme*

$$\mathcal{F}E = \left\{ x \in \operatorname{supp} |D\chi_E| \mid \text{esiste } \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{D\chi_E(B_\rho(x))}{|D\chi_E|(B_\rho(x))} = \nu_E(x) \text{ e } |\nu_E(x)| = 1 \right\}.$$

Osserviamo quindi, per i discorsi fatti in precedenza, che $|D\chi_E|$ è concentrata in $\mathcal{F}E$ cioè

$$|D\chi_E|(\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{F}E) = 0.$$

Inoltre dal fatto che

$$\frac{1}{2|D\chi_E|(B_\rho(x))} \int_{B_\rho(x)} |\nu_E(y) - \nu_E(x)|^2 d|D\chi_E|(y) = 1 - \langle \nu_E(x), \frac{D\chi_E(B_\rho(x))}{|D\chi_E|(B_\rho(x))} \rangle$$

segue che ogni elemento di $\mathcal{F}E$ è punto di Lebesgue di ν_E rispetto a $|D\chi_E|$.

Riprendendo ora la Definizione 3.14, ricordiamo che, dato $E \subset \mathbb{R}^d$ un insieme di Borel, per il Teorema di derivazione di Besicovitch, $\mathcal{L}^d(\mathbb{R}^d \setminus E^0 \cup E^1) = 0$. Questo insieme di misura di Lebesgue nulla viene così definito:

Definizione 4.10. *Sia $E \subset \mathbb{R}^d$ misurabile. Definiamo frontiera essenziale di E l'insieme $\mathbb{R}^d \setminus E^0 \cup E^1$ e lo indicheremo ∂^*E .*

In seguito vedremo che la frontiera ridotta $\mathcal{F}E$ è un insieme \mathcal{H}^{d-1} -rettificabile e $|D\chi_E| = \mathcal{H}^{d-1} \llcorner \mathcal{F}E$. Inoltre dimostreremo che

$$\mathcal{F}E \subset E^{\frac{1}{2}} \subset \partial^*E$$

e che $\mathcal{H}^{d-1}(\partial^*E \setminus \mathcal{F}E) = 0$.

Prima di proseguire con le proprietà degli insiemi di perimetro finito, facciamo alcune precisazioni. Con la scrittura $E\Delta F$ definiamo la differenza simmetrica, ovvero

$$E\Delta F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E) = (E \cup F) \setminus (E \cap F).$$

Diciamo che una successione di insiemi $(E_h)_h$ converge in misura in Ω a E se

$$|\Omega \cap (E_h \Delta E)| \rightarrow 0 \quad \text{per } h \rightarrow \infty.$$

Quando invece si parla di convergenza locale in misura in Ω si intende per ogni aperto $A \subset\subset \Omega$. Queste convergenze corrispondono alle convergenze delle rispettive funzioni caratteristiche nella norma $\|\cdot\|_{L^1(\Omega)}$ e $\|\cdot\|_{L^1_{loc}(\Omega)}$.

Teorema 4.11. (Proprietà della funzione perimetro)

- (i) $E \rightarrow P(E, \Omega)$ è un funzionale semicontinuo inferiormente nella convergenza locale in misura in Ω ;
- (ii) $E \rightarrow P(E, \Omega)$ è locale, cioè $P(E, \Omega) = P(F, \Omega)$ se $|\Omega \cap (E\Delta F)| = 0$;

Dimostrazione. (i) Segue direttamente dalla Proposizione 4.3.

(ii) Siano E e F due sottoinsiemi di \mathbb{R}^d misurabili, con misura finita e tali che $|\Omega \cap E \Delta F| = 0$. Allora $E = F$ \mathcal{L}^d -quasi ovunque in Ω e quindi $\int_{E \cap \Omega} \operatorname{div} g \, dx = \int_{F \cap \Omega} \operatorname{div} g \, dx$ cioè $P(E, \Omega) = P(F, \Omega)$. \square

Definizione 4.12. *Definiamo traslata di una funzione f , la funzione*

$$(\tau_h f)(x) := f(x + h) \quad \text{con} \quad x, h \in \mathbb{R}^d.$$

Enunciamo un importante risultato, che permette di stabilire quando un insieme di funzioni di $L^p(\Omega)$ ha chiusura compatta in $L^p(\Omega)$. Si tratta quindi dell'analogo in $L^p(\Omega)$, del teorema di Ascoli-Arzelà che prende in questione invece funzioni continue.

Teorema 4.13. (Frechet-Kolmogorov) *Sia $\mathcal{F} \subset L^p(\mathbb{R}^d)$ con $1 \leq p < \infty$. Se \mathcal{F} è equilimitata ed esiste $c > 0$ tale che*

$$\|\tau_h f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq c|h| \quad \forall f \in \mathcal{F} \quad (4.7)$$

allora $\mathcal{F}|_\Omega$ ha chiusura compatta in $L^p(\Omega)$ per ogni $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ di misura finita, dove con $\mathcal{F}|_\Omega$ si intende la restrizione a Ω delle funzioni di \mathcal{F} .

Se invece di \mathbb{R}^d si ha un suo sottoinsieme Ω , allora la funzione traslata $\tau_h u$ la si considera definita in

$$\omega_h = \left\{ x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^d \setminus \Omega) > h \right\}$$

e (4.7) diventa

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega_h)} \leq c|h| \quad \forall f \in \mathcal{F} \subset L^p(\Omega).$$

Lemma 4.14. *Sia E un insieme di perimetro finito in Ω . Allora*

$$\|\tau_h \chi_E - \chi_E\|_{L^1(\omega_h)} \leq |h|P(E, \omega_h). \quad (4.8)$$

Dimostrazione. Sia $u_\epsilon(x)$ una successione di funzioni approssimanti di χ_E , ottenuta mediante l'utilizzo dei mollificatori ρ_ϵ ,

$$u_\epsilon(x) = \chi_E * \rho_\epsilon(x) = \int_E \rho_\epsilon(y - x) \, dy = \epsilon^{-d} \int_E \rho_\epsilon\left(\frac{y - x}{\epsilon}\right) \, dy.$$

Pertanto u_ϵ è una funzione C^∞ e poiché $\chi_E \in L^1(\Omega)$, allora

$$u_\epsilon \xrightarrow{\|\cdot\|_{L^1}} \chi_E \quad \text{per } \epsilon \rightarrow \infty.$$

Perciò le misure $Du_\epsilon = \nabla u_\epsilon \mathcal{L}^d$ convergono debolmente a $D\chi_E$ e quindi

$$|Du_\epsilon|(\Omega) = \int_{\Omega} |\nabla u_\epsilon(x)| dx \rightarrow |D\chi_E|(\Omega) = P(E, \Omega).$$

Osserviamo che

$$u_\epsilon(x+h) - u_\epsilon(x) = \int_0^1 \nabla u_\epsilon(x+th)h dt$$

di conseguenza

$$\int_{\omega_h} |u_\epsilon(x+h) - u_\epsilon(x)| dx \leq \int_{\omega_h} \int_0^1 |\nabla u_\epsilon(x+th)||h| dt dx$$

cioè

$$\|\tau_h u_\epsilon(x) - u_\epsilon(x)\|_{L^1(\omega_h)} \leq \int_0^1 |h| \int_{\omega_h} |\nabla u_\epsilon(x+th)| dx dt \leq |h| \|\nabla u_\epsilon\|_{L^1(\Omega)}.$$

Mandando $\epsilon \rightarrow 0$ si ottiene (4.8). \square

Osservazione 1. Sia Ω un aperto di misura di Lebesgue finita. Consideriamo l'insieme

$$\mathcal{F} = \{\chi_E : P(E, \Omega) < \infty\} \subset L^1(\Omega).$$

Allora \mathcal{F} è equilimitata infatti

$$\|\chi_E\|_{L^1(\Omega)} = |E \cap \Omega| \leq |\Omega| < \infty$$

inoltre vale (4.8) allora per il Teorema 4.13 \mathcal{F} è relativamente compatta.

Teorema 4.15. *Sia $(E_h)_h$ una successione di insiemi misurabili tale che*

$$\sup \{P(E_h, A) : h \in \mathbb{N}\} < \infty \quad \forall A \subset \subset \Omega \text{ aperto},$$

allora ammette una sottosuccessione $(E_{h_k})_k$ localmente convergente in misura in Ω . Se $|\Omega| < \infty$ allora la sottosuccessione converge in misura in Ω .

Dimostrazione. Segue dal Teorema 4.13 e dall'Osservazione 1. \square

Il seguente teorema, che ci limiteremo ad enunciare, è noto con il nome di disuguaglianza isoperimetrica locale, e viene utilizzato per la dimostrazione della disuguaglianza isoperimetrica globale.

Teorema 4.16. *Sia Q un cubo di \mathbb{R}^d di lato L . Per ogni $u \in BV(Q)$ si ha*

$$\int_Q |u - u_Q| dx \leq dL|Du|(Q)$$

dove

$$u_Q := L^{-d} \int_Q u dx.$$

Inoltre per ogni insieme di Borel E si ha

$$2 \frac{|Q \cap E|}{L^d} \cdot \frac{|Q \setminus E|}{L^d} \leq d \frac{P(E, Q)}{L^{d-1}}. \quad (4.9)$$

Teorema 4.17. (Disuguaglianza isoperimetrica) *Per ogni $d > 1$ esiste una costante γ_d tale che per ogni insieme di Borel E si ha*

$$\min \{ |E|, |\mathbb{R}^d \setminus E| \} \leq \gamma_d [P(E, \mathbb{R}^d)]^{\frac{d}{d-1}}.$$

Dimostrazione. Sia Q un cubo di \mathbb{R}^d di lato L tale che

$$|Q|^{\frac{d-1}{d}} > 2dP(E, \mathbb{R}^d). \quad (4.10)$$

Poiché $|Q| = L^d$, la disuguaglianza (4.10) equivale a

$$\frac{1}{4} > \frac{dP(E, \mathbb{R}^d)}{2L^{d-1}}$$

e quindi utilizzando (4.9) si ottiene

$$\frac{|Q \cap E|}{|Q|} \cdot \frac{|Q \setminus E|}{|Q|} \leq \frac{dP(E, \mathbb{R}^d)}{2L^{d-1}} < \frac{1}{4}.$$

Osserviamo che $\alpha(Q) := \frac{|Q \cap E|}{|Q|}$ è un valore compreso tra 0 e 1, in particolare però non può assumere il valore $\frac{1}{2}$, perché in tal caso $\frac{|Q \setminus E|}{|Q|} = \frac{1}{2}$ quindi

$$\frac{|Q \cap E|}{|Q|} \cdot \frac{|Q \setminus E|}{|Q|} = \frac{1}{4}$$

e ciò non è possibile. Allora

$$\alpha(Q) := \frac{|Q \cap E|}{|Q|} \in [0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1].$$

Per continuità di α , si ha che per ogni cubo Q soddisfacente (4.10), o $\alpha(Q) \in (\frac{1}{2}, 1]$, o $\alpha(Q) \in [0, \frac{1}{2})$. Supponiamo che

$$\alpha(Q) \in [0, \frac{1}{2}). \quad (4.11)$$

Tasselliamo \mathbb{R}^d con cubi che verificano (4.10), cioè aventi lato $L > (2dP(E, \mathbb{R}^d))^{\frac{1}{d-1}}$. Poiché $\frac{|Q \cap E|}{|Q|} \in [0, \frac{1}{2})$ allora $\frac{|Q \setminus E|}{|Q|} \in (\frac{1}{2}, 1]$ e quindi

$$2|Q \setminus E| > 1 \quad (4.12)$$

Dalla disuguaglianza (4.9) e da (4.12) segue

$$|E \cap Q| \leq |E \cap Q|2|Q \setminus E| \leq dLP(E, Q)$$

pertanto

$$|E| \leq dLP(E, \mathbb{R}^d).$$

Facendo tendere $L \rightarrow (2dP(E, \mathbb{R}^d))^{\frac{1}{d-1}}$, si ottiene la disuguaglianza desiderata, dove $\gamma_d = (2d^d)^{\frac{1}{d-1}}$. \square

Proposizione 4.18. *Sia E un insieme di perimetro finito in Ω , $x_0 \in \Omega$ e $\delta = d(x_0, \partial\Omega)$. Posto $m(\rho) = |E \cap B_\rho(x_0)|$ e m'_+ la sua derivata destra, allora*

$$P(E \cap B_\rho(x_0), \mathbb{R}^d) \leq P(E, \bar{B}_\rho(x_0)) + m'_+(\rho) \quad \forall \rho \in (0, \delta) \quad (4.13)$$

Dimostrazione. Non è restrittivo supporre $x_0 = 0$. Sia $u \in BV(\Omega)$ e $u_\rho = u\chi_{B_\rho}$ per ogni $\rho \in (0, \delta)$. Preso $\sigma \in (0, \delta - \rho)$ consideriamo la funzione $u_\sigma(x) = u(x)\gamma_\sigma(|x|)$ dove

$$\gamma_\sigma(t) = \begin{cases} 1 & t \leq \rho \\ 1 + \frac{\rho-t}{\sigma} & \rho \leq t \leq \rho + \sigma \\ 0 & t \geq \rho + \sigma. \end{cases}$$

Allora u_σ coincide con u in B_ρ , $\text{supp}(u_\sigma) \subset \bar{B}_{\rho+\sigma}$ e $u_\sigma \in BV(\mathbb{R}^d)$. Inoltre utilizzando la Proposizione 4.4 si ottiene

$$Du_\sigma = \gamma_\sigma(|x|)Du + u(x)\gamma'_\sigma(x)\frac{x}{|x|}\mathcal{L}^d.$$

Da ciò segue

$$\begin{aligned} |Du_\sigma|(\mathbb{R}^d) &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |\gamma_\sigma(|x|)| d|Du|(x) + \int_{\mathbb{R}^d} |u(x)\gamma'_\sigma(x)| dx \\ &\leq \int_{B_{\sigma+\rho}} d|Du|(x) + \int_{B_{\rho+\sigma} \setminus B_\rho} |u(x)\gamma'_\sigma(x)| dx \\ &\leq |Du|(B_{\sigma+\rho}) + \sigma^{-1} \int_{B_{\rho+\sigma} \setminus B_\rho} |u(x)| dx. \end{aligned}$$

Inoltre si dimostra che u_σ converge a u_ρ in $L^1(\mathbb{R}^d)$ quando $\sigma \rightarrow 0$, infatti

$$\|u_\sigma - u_\rho\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} |u(x)\gamma_\sigma(|x|) - u(x)\chi_{B_\rho}(x)| dx$$

$$= \int_{B_{\rho+\sigma}} |u(x)| |\gamma_\sigma(|x|) - \chi_{B_\rho}(x)| dx \rightarrow \int_{B_\rho} |u(x)| |\gamma_\sigma(|x|) - \chi_{B_\rho}(x)| dx = 0$$

e quindi Du_σ converge debolmente a Du_ρ . Utilizzando i risultati precedentemente dimostrati si ottiene

$$\liminf_{\sigma \rightarrow 0} |Du_\sigma|(\mathbb{R}^d) \leq \liminf_{\sigma \rightarrow 0} |Du|(B_{\sigma+\rho}) + \liminf_{\sigma \rightarrow 0} \sigma^{-1} \int_{B_{\rho+\sigma} \setminus B_\rho} |u(x)| dx$$

e dal fatto che $Du \rightarrow |Du|(\Omega)$ è semicontinua inferiormente segue

$$|Du_\rho|(\mathbb{R}^d) \leq |Du|(\overline{B}_\rho) + \left(\int_{B_\rho} |u(x)| \right)'_+$$

Se si considera $u = \chi_E$, allora

$$|D\chi_{E \cap B_\rho}|(\mathbb{R}^d) \leq |D\chi_E|(\overline{B}_\rho) + m'_+(\rho)$$

e quindi si ottiene la disuguaglianza cercata. \square

Osserviamo che se $P(E, \partial B_\rho(x_0)) = 0$, allora sottraendo da ambo i membri di (4.13) $P(E, B_\rho(x_0))$, si ottiene

$$P(E \cap B_\rho(x_0), \partial B_\rho(x_0)) \leq m'(\rho) \quad \forall \rho \in (0, \delta). \quad (4.14)$$

Infatti per la località del perimetro, dato che $(E \cap B_\rho(x_0) \Delta E) \cap B_\rho(x_0) = \emptyset$, si ha

$$\begin{aligned} P(E \cap B_\rho(x_0), \mathbb{R}^d) &= P(E \cap B_\rho(x_0), B_\rho(x_0)) + P(E \cap B_\rho(x_0), \partial B_\rho(x_0)) + \\ &+ P(E \cap B_\rho(x_0), \mathbb{R}^d \setminus \overline{B}_\rho(x_0)) = P(E, B_\rho(x_0)) + P(E \cap B_\rho(x_0), \partial B_\rho(x_0)). \end{aligned}$$

Lemma 4.19. *Sia E un insieme di perimetro finito in Ω e sia $x_0 \in \mathcal{F}E \cap \Omega$. Allora esistono $\varrho_0 \in (0, \text{dist}(x_0, \partial\Omega))$ e due costanti, dipendenti solo dalla dimensione, $\alpha, \beta > 0$ tali che*

$$P(E, B_\varrho(x_0)) \leq \alpha \varrho^{d-1} \quad \forall \varrho \in (0, \varrho_0) \quad (4.15)$$

$$\min \{|E \cap B_\varrho(x_0)|, |B_\varrho(x_0) \setminus E|\} \geq \beta \varrho^d \quad \forall \varrho \in (0, \varrho_0). \quad (4.16)$$

Dimostrazione. Il caso in cui $d = 1$ è ovvio. Supponiamo quindi $d > 1$. Scegliamo $\rho_0 \in (0, \frac{\text{dist}(x_0, \partial\Omega)}{2})$ tale che

$$|D\chi_E(B_\rho(x_0))| \geq \frac{1}{2} |D\chi_E|(B_\rho(x_0)) = \frac{1}{2} P(E, B_\rho(x_0)) \quad \forall \rho \in (0, 2\rho_0). \quad (4.17)$$

Sia $\rho \in (0, 2\rho_0)$, denotiamo con E_ρ gli insiemi $E \cap B_\rho(x_0)$ tali che $P(E, \partial B_\rho(x_0)) = 0$. Osserviamo che $D\chi_{E_\rho}(\mathbb{R}^d) = 0$. Infatti utilizzando il fatto che $\text{supp}(D\chi_{E_\rho}) \subset \overline{B}_\rho(x_0)$, e scelto $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$ tale che $\phi \equiv 1$ in $B_\rho(x_0)$, abbiamo

$$\begin{aligned} D\chi_{E_\rho}(\mathbb{R}^d) &= \int_{\mathbb{R}^d} 1 \, dD\chi_{E_\rho}(y) = \int_{\overline{B}_\rho(x_0)} 1 \, dD\chi_{E_\rho}(y) \\ &= \int_{\overline{B}_\rho(x_0)} \phi(y) \, dD\chi_{E_\rho}(y) = - \int_{E_\rho} \text{div } \phi \, dy = 0. \end{aligned}$$

Da ciò segue che $D\chi_{E_\rho}(\overline{B}_\rho) = 0$, e quindi $D\chi_{E_\rho}(B_\rho) + D\chi_{E_\rho}(\partial B_\rho) = 0$. Di conseguenza, utilizzando anche (4.14), si ottiene

$$\begin{aligned} |D\chi_E(B_\rho(x_0))| &= |D\chi_{E_\rho}(B_\rho(x_0))| = |D\chi_{E_\rho}(\partial B_\rho(x_0))| \\ &\leq |D\chi_{E_\rho}|(\partial B_\rho(x_0)) = P(E_\rho, B_\rho(x_0)) \leq m'_+(\rho). \end{aligned}$$

Osserviamo che la cardinalità dell'insieme $A = \{\rho : P(E, \partial B_\rho(x_0)) > 0\}$ è al più numerabile: se chiamiamo per semplicità $c_\rho = P(E, \partial B_\rho(x_0))$ poiché $\sum_\rho c_\rho < +\infty$ e poiché la cardinalità di $\{\rho \mid c_\rho \geq \frac{1}{h}\}$ è finita, allora la cardinalità di $\{\rho \mid c_\rho > 0\} \leq \sum \#\{\rho \mid c \geq \frac{1}{h}\}$ è al più numerabile. Di conseguenza $\mathcal{L}^1(A) = 0$, ovvero per \mathcal{L}^1 -quasi ogni $\rho \in (0, 2\rho_0)$ si ha $P(E, \partial B_\rho(x_0)) = 0$. Osserviamo inoltre che dalla Formula di Coarea (A.6) applicata a $u(x) = |x - x_0|$, dato che

$$|\nabla u(x)| = 1 \quad \text{e} \quad u^{-1}(t) = \{x : |x - x_0| = t\} = \partial B_t(x_0),$$

segue

$$\begin{aligned} |E \cap B_\rho(x_0)| &= \int_{E \cap B_\rho(x_0)} |\nabla u(x)| \, dx = \int_0^{+\infty} \mathcal{H}^{d-1}(u^{-1}(t) \cap E \cap B_\rho(x_0)) \, dt \\ &= \int_0^{+\infty} \mathcal{H}^{d-1}(\partial B_t(x_0) \cap E \cap B_\rho(x_0)) \, dt = \int_0^\rho \mathcal{H}^{d-1}(E \cap \partial B_t(x_0)) \, dt. \end{aligned}$$

Pertanto, poiché

$$m'_+(\rho) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{m(\rho + h) - m(\rho)}{h}$$

abbiamo che

$$m(\rho)'_+ = \mathcal{H}^{d-1}(E \cap \partial B_\rho(x_0)).$$

Perciò, dal fatto che la funzione $t \rightarrow \mathcal{H}^{d-1}(E \cap \partial B_t(x_0))$ è continua nei punti t in cui $P(E, \partial B_t(x_0)) = 0$, segue che $m' = m'_+$ nei punti in cui $P(E, \partial B_\rho(x_0)) = 0$, e quindi per \mathcal{L}^1 -quasi ogni $\rho \in (0, 2\rho_0)$. Pertanto, da (4.17), segue

$$P(E, B_\rho(x_0)) \leq 2m'(\rho) \quad \text{per } \mathcal{L}^1\text{-quasi ogni } \rho \in (0, 2\rho_0). \quad (4.18)$$

Per $t \in (\rho, 2\rho)$, con $\rho < \rho_0$, vale che $P(E, B_\rho(x)) \leq P(E, B_t(x_0))$, e quindi integrando da ρ a 2ρ si ottiene

$$\begin{aligned} P(E, B_\rho(x)) &\leq \rho^{-1} \int_\rho^{2\rho} P(E, B_t(x_0)) dt \leq \rho^{-1} \int_\rho^{2\rho} 2m'(t) dt \leq \frac{2m(2\rho)}{\rho} \\ &= \frac{2|E \cap B_{2\rho}(x_0)|}{\rho} \leq \frac{2}{\rho} |B_{2\rho}(x_0)| \leq \frac{2}{\rho} 2^d \rho^d \omega_d = 2^{d+1} \rho^{d-1} \omega_d \end{aligned}$$

perció la prima disuguaglianza è dimostrata con $\alpha = 2^{d+1} \omega_d$.

Dimostriamo ora la seconda disuguaglianza. Da (4.13), (4.18), e ricordando che $P(E, \partial B_\rho(x_0)) = 0$ per \mathcal{L}^1 – quasi ogni $\rho \in (0, 2\rho_0)$, segue

$$P(E_\rho, \mathbb{R}^d) \leq P(E, B_\rho(x_0)) + P(E, \partial B_\rho(x_0)) + m'(\rho) \leq 3m'(\rho)$$

per \mathcal{L}^1 – quasi ogni $\rho \in (0, 2\rho_0)$. Utilizzando la disuguaglianza isoperimetrica e quanto appena dimostrato si ottiene

$$\begin{aligned} (m^{\frac{1}{d}})'(\rho) &= \frac{1}{d} m^{\frac{1}{d}-1}(\rho) m'(\rho) \geq \frac{1}{d} m^{\frac{1-d}{d}}(\rho) \frac{1}{3} P(E_\rho, \mathbb{R}^d) \\ &\geq \frac{1}{3d} m^{\frac{1-d}{d}}(\rho) \left(\frac{1}{\gamma_d} \min \{ |E_\rho|, |\mathbb{R}^d \setminus E_\rho| \} \right)^{\frac{d-1}{d}} = \frac{\gamma_d^{\frac{1-d}{d}}}{3d} = \gamma \end{aligned}$$

per \mathcal{L}^1 – quasi ogni $\rho \in (0, 2\rho_0)$. Utilizziamo adesso una proprietà delle funzioni monotone: sia $u : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione monotona, allora u è differenziabile in \mathcal{L}^1 -quasi ogni $t \in (a, b)$ e

$$|u(b_-) - u(a_+)| \geq \int_a^b |u'(t)| dt + \sum_{t \in \Gamma_u} |u(t_+) - u(t_-)|$$

dove Γ_u è l'insieme dei punti di discontinuità di u . Sia $u(\rho) = m^{\frac{1}{d}}(\rho)$, allora u è monotona crescente e positiva, perciò è derivabile quasi ovunque e

$$u(\rho) - u(0) \geq \int_0^\rho |u'(t)| dt \quad \forall \rho \in (0, \rho_0).$$

Poiché $m(0) = |E \cap B_0(x_0)| = 0$, allora

$$m^{\frac{1}{d}}(\rho) = m^{\frac{1}{d}}(\rho) - m^{\frac{1}{d}}(0) \geq \int_0^\rho (m^{\frac{1}{d}})'(t) dt \geq \gamma \rho$$

e quindi

$$|E \cap B_\rho(x_0)| = m(\rho) \geq \gamma^d \rho^d.$$

Ripetendo gli stessi ragionamenti per $\mathbb{R}^d \setminus E$ al posto di E , si ottiene la seconda disuguaglianza cercata. \square

Siamo finalmente arrivati a uno dei più importanti risultati ottenuti da De Giorgi che, come già preannunciato, mostra la \mathcal{H}^{d-1} -rettificabilità della frontiera ridotta e identifica $|D\chi_E|$ con la misura $\mathcal{H}^{d-1} \llcorner \mathcal{F}E$.

Teorema 4.20. *Sia $E \subset \mathbb{R}^d$ di perimetro finito. Allora $\mathcal{F}E$ è σ -($d-1$)-rettificabile e $|D\chi_E| = \mathcal{H}^{d-1} \llcorner \mathcal{F}E$. Inoltre, per ogni $x_0 \in \mathcal{F}E$ valgono le seguenti proprietà:*

(i) *gli insiemi $E_\rho = \frac{(E-x_0)}{\rho}$ per $\rho \rightarrow 0$ convergono localmente in misura al semispazio*

$$H := \{y \in \mathbb{R}^d : \langle y, \nu_E(x_0) \rangle \geq 0\}$$

ortogonale a $\nu_E(x_0)$ e contenente $\nu_E(x_0)$;

(ii) *$\text{Tan}^{d-1}(\mathcal{H}^{d-1} \llcorner \mathcal{F}E, x_0) = \mathcal{H}^{d-1} \llcorner \nu_E^\perp(x_0)$ e in particolare*

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^{d-1}(\mathcal{F}E \cap B_\rho(x_0))}{\omega_{d-1} \rho^{d-1}} = 1.$$

Dimostrazione. Sia $x_0 \in \mathcal{F}E$, e ρ_0 come nel Lemma 4.19.

Primo passo. Osserviamo che per ogni $\rho \in (0, \rho_0)$ vale

$$P(E_\rho, B_R) = \int_{\partial E_\rho \cap B_R} d\mathcal{H}^{d-1} = \frac{1}{\rho^{d-1}} \int_{E \cap B_{\rho R}(x_0)} d\mathcal{H}^{d-1} \leq \alpha R^{d-1}$$

dove l'ultima disuguaglianza segue da (4.15). Allora per il Teorema 4.15 esiste una sottosuccessione $(E_{\rho_h})_h$ localmente convergente in misura e quindi la famiglia E_ρ è relativamente compatta nella topologia $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Pertanto per dimostrare che (E_ρ) converge ad H , basta dimostrare che il limite F di una qualsiasi sottosuccessione (E_{ρ_h}) , coincide con H . Supponiamo pertanto che la sottosuccessione (E_{ρ_h}) converge localmente in misura a F ; allora $\chi_{E_{\rho_h}}$ converge in L^1_{loc} a χ_F , e quindi $D\chi_{E_{\rho_h}}$ converge debolmente localmente a $D\chi_F$, infatti per ogni $\phi \in C_c(\mathbb{R}^d)$ si ha

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \phi dD\chi_{E_{\rho_h}} = - \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{E_{\rho_h}} \text{div } \phi dx = - \int_F \text{div } \phi dx = \int_{\mathbb{R}^d} \phi dD\chi_F.$$

Poiché $x_0 \in \mathcal{F}E$ allora x_0 è punto di Lebesgue di ν_E relativo a $|D\chi_E|$ pertanto utilizzando il Teorema 3.31 si può affermare che $|D\chi_{E_{\rho_h}}|$ converge debolmente localmente a $|D\chi_F|$ e

$$D\chi_F = \bar{\nu} |D\chi_F| \quad (4.19)$$

dove $\bar{\nu} = \nu_E(x_0)$. Quindi $D\chi_F$ non ha componenti nelle direzioni ortogonali a $\bar{\nu}$ ed inoltre $\langle D\chi_F, \bar{\nu} \rangle = \langle |D\chi_F| \bar{\nu}, \bar{\nu} \rangle \geq 0$. Lavoriamo ora con funzioni

approssimanti per convoluzione $f_\epsilon = \chi_F * \rho_\epsilon$, e utilizzando una proprietà delle convoluzioni otteniamo

$$\nabla f_\epsilon = (D\chi_F) * \rho_\epsilon = (|D\chi_F| * \rho_\epsilon)\bar{\nu}.$$

Quindi, dal fatto che le f_ϵ hanno derivata nulla nelle direzioni ortogonali a $\bar{\nu}$, cioè variano solo nella direzione di $\bar{\nu}$ e $|D\chi_F| * \rho_\epsilon > 0$, segue che le approssimanti $\chi_F * \rho_\epsilon$ possono essere rappresentate come funzioni $\gamma_\epsilon(\langle x, \bar{\nu} \rangle)$, dove γ_ϵ sono funzioni crescenti definite in \mathbb{R} a valori in $[0, 1]$. Mandano $\epsilon \rightarrow 0$ otteniamo

$$\chi_F = \gamma(\langle x, \bar{\nu} \rangle) \quad \text{per } \mathcal{L}^d - \text{quasi ogni } x \in \mathbb{R}^d$$

per una qualche funzione $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ crescente. Pertanto, assumendo solo i valori 0 e 1 ed essendo crescente, γ può essere solo della forma $\gamma = \chi_L$ con $L \subset \mathbb{R}$ e in particolare $\chi_L = \chi_{[c, +\infty)}$; quindi

$$F = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, \bar{\nu} \rangle \geq c\}.$$

Supponiamo ora che $c > 0$. Dal fatto che

$$|E \cap B_{c\rho_h}(x_0)| = \int_{E \cap B_{c\rho_h}(x_0)} dx = \rho_h^d \int_{E_{\rho_h} \cap B_c} dy = \rho_h^d |E_{\rho_h} \cap B_c|$$

ottenuto mediante il cambio di variabile $x = y\rho_h + x_0$, segue

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{|E \cap B_{c\rho_h}(x_0)|}{\rho_h^d} = \lim_{h \rightarrow \infty} |E_{\rho_h} \cap B_c| = |F \cap B_c| = 0.$$

L'ultima uguaglianza si può dedurre osservando che se $x \in B_c$ allora $\|x\| < c$, mentre gli elementi $x \in F$ sono tali che $\|x\| \geq \langle x, \bar{\nu} \rangle \geq c$. Questo però è assurdo, in quanto $x_0 \in \mathcal{F}E$ e quindi in x_0 , E non può avere densità nulla grazie al Teorema 4.17. Similmente si dimostra che c non può essere strettamente negativa, allora $c = 0$ e $F = H = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, \bar{\nu} \rangle \geq 0\}$.

Secondo passo. Poiché (E_ρ) converge localmente in misura ad H , allora $D\chi_{E_\rho}$ converge debolmente localmente a $D\chi_H = \bar{\nu}\mathcal{H}^{d-1} \llcorner \partial H$ e quindi per definizione di piano tangente approssimato si ha $\text{Tan}^{d-1}(D\chi_{E_\rho}, x_0) = \bar{\nu}\mathcal{H}^{d-1} \llcorner \partial H$. Inoltre dal Teorema 3.34 segue che $\text{Tan}^{d-1}(|D\chi_{E_\rho}|, x_0) = \mathcal{H}^{d-1} \llcorner \partial H$. Pertanto la misura $|D\chi_{E_\rho}|$ che, come abbiamo osservato in precedenza, è concentrata in $\mathcal{F}E$, ammette uno spazio tangente approssimato con molteplicità 1 per ogni $x \in \mathcal{F}E$, allora dal punto (b) del Criterio di rettificabilità per misure, segue che $\mathcal{F}E$ è σ -($d-1$)-rettificabile e $|D\chi_E| = \mathcal{H}^{d-1} \llcorner \mathcal{F}E$.

Terzo passo. Dall'implicazione (3.7) segue

$$1 = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{|D\chi_E|(B_\rho(x_0))}{\omega_{d-1}\rho^{d-1}} =$$

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{|\mathcal{H}^{d-1} \llcorner \mathcal{F}E|(B_\varrho(x_0))}{\omega_{d-1} \varrho^{d-1}} = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^{d-1}(\mathcal{F}E \cap B_\varrho(x_0))}{\omega_{d-1} \varrho^{d-1}}$$

e il teorema è dimostrato. \square

Ricapitolando, abbiamo appena dimostrato che $|D\chi_E| = \mathcal{H}^{d-1} \llcorner \mathcal{F}E$, inoltre sappiamo che se E è un insieme di perimetro finito allora $|D\chi_E|(\mathbb{R}^d) < +\infty$, ma non è detto che la misura di Hausdorff della frontiera topologica ∂E sia finita. Questo implica che non necessariamente $\mathcal{H}^{d-1}(\partial E \setminus \mathcal{F}E) = 0$, e con il prossimo teorema dimostreremo che invece vale

$$\mathcal{H}^{d-1}(\partial^* E \setminus \mathcal{F}E) = 0.$$

Teorema 4.21. (Federer) *Sia E un insieme di perimetro finito in Ω . Allora*

$$\mathcal{F}E \cap \Omega \subset E^{\frac{1}{2}} \subset \partial^* E \quad e \quad \mathcal{H}^{d-1}(\Omega \setminus (E^0 \cup \mathcal{F}E \cup E^1)) = 0.$$

Dimostrazione. L'inclusione $\mathcal{F}E \cap \Omega \subset E^{\frac{1}{2}}$ segue dal fatto che E_ϱ converge al semispazio H , grazie al Teorema 4.20. Dimostriamo ora che

$$P(E, B_\varrho(x)) = o(\varrho^{d-1}) \quad \Rightarrow \quad x \in E^0 \cap E^1. \quad (4.20)$$

Dalla disuguaglianza isoperimetrica locale segue

$$\min \{|E \cap B_\varrho(x)|, |B_\varrho \setminus E|\} \leq cP(E, B_\varrho(x)) = o(\varrho^{d-1})$$

pertanto se il minimo è assunto da $|E \cap B_\varrho(x)|$ allora

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{|E \cap B_\rho(x)|}{|B_\rho(x)|} = 0$$

altrimenti

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{|E \cap B_\rho(x)|}{|B_\rho(x)|} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{|B_\rho(x)| - |B_\rho(x) \setminus E|}{|B_\rho(x)|} = 1$$

e quindi $x \in E^0 \cup E^1$. Dal Teorema 4.20 segue che

$$P(E, B_\varrho(x)) = |D\chi_E|(B_\varrho(x)) = \mathcal{H}^{d-1} \llcorner \mathcal{F}E(B_\varrho(x)) = \mathcal{H}^{d-1}(\mathcal{F}E \cap B_\varrho(x))$$

osserviamo quindi che, per (4.20), se $x \in \partial^* E \cap \Omega$ allora

$$\limsup_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^{d-1}(\mathcal{F}E \cap B_\varrho(x))}{\omega_{d-1} \varrho^{d-1}} > 0.$$

Ma dal Teorema 4.20 sappiamo che ciò è vero per \mathcal{H}^{d-1} -quasi ogni punto di $\mathcal{F}E$ pertanto

$$\mathcal{H}^{d-1}(\Omega \setminus (E^0 \cup \mathcal{F}E \cup E^1)) = 0$$

come volevasi dimostrare. \square

Capitolo 5

Superfici minime

In questo capitolo, mediante la nozione di perimetro, studieremo le superfici minime, intendendo le superfici di area minima tra quelle aventi bordo fissato. Quindi parleremo di superficie $(d - 1)$ -dimensionale o ipersuperficie di \mathbb{R}^d , intendendo i bordi di un insieme $E \subset \mathbb{R}^d$ misurabile di perimetro finito; di conseguenza l'area di tale ipersuperficie viene definita come la variazione totale della misura $D\chi_E$, ovvero come la misura del perimetro di E , $P(E)$. In altre parole quello che andremo a studiare è il seguente problema di minimo

$$\min_{E \Delta F \subset \subset \Omega} P(E, \Omega) \quad (5.1)$$

dove Ω è un insieme aperto di \mathbb{R}^d e F un insieme di perimetro localmente finito fissato. In particolare, dopo averne dimostrato l'esistenza, studieremo alcune proprietà e discuteremo la regolarità di tali superfici.

Dimostriamo subito che il minimo esiste.

Teorema 5.1. *Sia Ω un aperto di misura finita, allora il problema di minimo*

$$\min_{E \Delta F \subset \subset \Omega} P(E, \Omega)$$

ammette soluzione.

Dimostrazione. Poniamo

$$\alpha = \inf_{E \Delta F \subset \subset \Omega} P(E, \Omega)$$

e consideriamo una successione minimizzante $(E_h)_h$ cioè tale che

$$P(E_h, \Omega) \leq \alpha + \frac{1}{h} \leq \alpha + 1.$$

Allora, per l'Osservazione 1, $\mathcal{F} = \{\chi_{E_h}\}$ è relativamente compatta in $L^1(\Omega)$ e in particolare per il Teorema 4.15, a meno di sottosuccessioni, esiste un insieme E tale che

$$\chi_{E_h} \rightarrow \chi_E \quad \text{in } L^1(\Omega)$$

con $E \Delta F \subset \subset \Omega$. Infine per la semicontinuità inferiore del perimetro si ha

$$\alpha \leq P(E, \Omega) \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} P(E_h, \Omega) \leq \alpha$$

cioè esiste il minimo. □

Il seguente teorema è un importante risultato dimostrato da De Giorgi che permetterà in seguito di identificare la frontiera topologica con la frontiera ridotta a meno di insiemi di misura nulla.

Teorema 5.2. (di regolarità di De Giorgi) *Sia $E \subset \mathbb{R}^d$ localmente minimo allora*

$$\overline{\mathcal{F}E} = \partial E \quad \text{e} \quad \mathcal{H}^{d-1}(\partial E \setminus \mathcal{F}E) = 0.$$

Inoltre $\mathcal{F}E \subset \partial E$ è relativamente aperto, cioè

$$\forall x \in \mathcal{F}E \exists \rho(x) > 0 \quad \text{tale che} \quad \mathcal{F}E \cap B_{\rho(x)}(x) \subset \mathcal{F}E$$

e $\mathcal{F}E \cap B_{\rho(x)}(x)$ è grafico di una funzione analitica.

Supponiamo ora che $E \subset \mathbb{R}^d$ abbia perimetro minimo, cioè

$$P(E, \Omega) = \min_{E' \Delta E \subset \subset \Omega} P(E', \Omega), \quad (5.2)$$

allora dimostreremo che $H_{\mathcal{F}E} = 0$. Questo risultato vedremo che deriva dalla condizione " $\delta P(E, \Omega) = 0$ " (variazione prima del perimetro).

Consideriamo delle deformazioni di E , ottenute mediante una famiglia di diffeomorfismi $\Phi_t : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$; ciò equivale a considerare una funzione $\Phi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ tale che:

1. per ogni $t \in \mathbb{R}$, l'applicazione che ad $x \in \mathbb{R}^d$ associa $\Phi_t(x) := \Phi(x, t)$ è un diffeomorfismo;
2. per ogni $x \in \mathbb{R}^d$, l'applicazione che a $t \in \mathbb{R}$ associa $\Phi_t(x)$ è derivabile;
3. $\Phi_0(x) = x$;
4. per ogni $t > 0$, si ha $\{\phi_t(x) \neq x\} \subset \subset \Omega$.

L'ultima condizione mi assicura che $F \Delta E \subset \subset \Omega$. Chiamiamo $F_t = \Phi_t(E)$, allora per la condizione (5.2) vale

$$P(E, \Omega) \leq P(F_t, \Omega)$$

e quindi la funzione che a t associa $P(F_t, \Omega)$ ha un minimo per $t = 0$. Questo si traduce nel fatto che la variazione prima dell'area è nulla e la variazione seconda è positiva, ovvero

$$\frac{d}{dt}P(\Phi_t(E), \Omega)|_{t=0} = 0 \quad \frac{d^2}{dt^2}P(\Phi_t(E), \Omega)|_{t=0} \geq 0.$$

Lemma 5.3. *Sia $f \in BV_{loc}(\Omega)$, e $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ un diffeomorfismo. Sia $A \subset\subset \Omega$, $f^* = f \circ \Phi^{-1}$, $\Omega^* = \Phi(\Omega)$ e $A^* = \Phi(A)$, allora*

$$\int_{A^*} |Df^*| = \int_A |HDf|$$

dove $H = |\det D\Phi| D\Phi^{-1}$

Dimostrazione. Supponiamo prima che $f \in C^1(\Omega)$ e $g \in C_0^1(A, \mathbb{R}^d)$. Allora

$$\int_{A^*} \langle g^*, Df^* \rangle dx = \int_{A^*} \langle g \circ \Phi^{-1}, D\Phi^{-1} D(f \circ \Phi^{-1}) \rangle dx$$

applichiamo la sostituzione $x = \Phi(y)$

$$\int_A \langle g, (D\Phi^{-1} \circ \Phi) Df \rangle |\det D\Phi| dy = \int_A \langle g, HDf \rangle dy.$$

Supponiamo ora che $f \in BV_{loc}(\Omega)$ allora per il Teorema 4.5 esiste una successione di funzioni $(f_j)_j \subset C^\infty(\Omega)$ tale che $\|f_j - f\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0$ e quindi f_j^* convergono in $L^1(A^*)$ a f . Pertanto dalla prima parte segue che

$$\int_{A^*} \langle g^*, Df_j^* \rangle dx = \int_A \langle g, HDf \rangle dy$$

e mandando $j \rightarrow \infty$ si ottiene

$$\int_{A^*} \langle g^*, Df^* \rangle = \int_A \langle g, HDf \rangle = \int_A \langle g, Hv \rangle |Df|$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato la decomposizione di Radon-Nikodym $Df = \nu |Df|$. Supponiamo adesso che $\|g\| \leq 1$, quindi $\|g^*\| \leq 1$, ed essendo $g \in C_0(A, \mathbb{R}^d)$, $\text{supp } g^* \subset A^*$. Allora

$$\int_A \langle g, Hv \rangle |Df| = \int_{A^*} \langle g^*, Df^* \rangle \leq \int_{A^*} |Df^*|$$

inoltre passando al sup

$$\sup_g \int_A \langle g, Hv \rangle |Df| = \int_A |Hv| |Df| \leq \int_{A^*} |Df^*|. \quad (5.3)$$

Consideriamo adesso $\gamma \in C_0^1(A^*, \mathbb{R}^d)$ con $\|\gamma\| \leq 1$ e tale che $g = \gamma \circ \Phi$; allora $\gamma = g^*$ e

$$\int_{A^*} \langle \gamma, Df^* \rangle = \int_A \langle g, Hv \rangle |Df| \leq \sup_g \int_A \langle g, Hv \rangle |Df| = \int_A |Hv| |Df|$$

pertanto

$$\sup_{\gamma} \int_{A^*} \langle \gamma, Df^* \rangle = \int_{A^*} |Df^*| \leq \int_A |Hv| |Df| = \int_A |HDf|.$$

Da quest'ultima disuguaglianza e da (5.3) segue l'enunciato. \square

Teorema 5.4. *Sia E un insieme di perimetro finito e $\Phi_t(x) = x + tg(x)$ un diffeomorfismo con $t \in \mathbb{R}$ e $g \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$. Allora*

$$\frac{d}{dt} P(\Phi_t(E), \Omega) = \int_{\mathcal{F}E \cap \Omega} \operatorname{div}_{\mathcal{F}E} g \, d\mathcal{H}^{d-1}.$$

Dimostrazione. Dal Lemma 5.3, posto $f = \chi_E$ e quindi $f^* = \chi_{\Phi(E)}$, segue che

$$P(\Phi_t(E), \Omega) = \int_{\mathcal{F}\Phi_t(E) \cap \Omega} d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\mathcal{F}E \cap \Omega} |H_t \nu_E(x)| \, d\mathcal{H}^{n-1}(x)$$

con $H_t = |\det D\Phi_t| D\phi_t^{-1}$. Dalla definizione di $\Phi_t(x)$ segue che

$$\Phi_t^{-1} = x - tg(x) + o(t) \quad \text{e quindi} \quad D\Phi_t^{-1} = I - tDg + o(t).$$

Lo jacobiano di ϕ_t invece coincide con $D\phi_t = I + tDg \in \mathcal{R}^{d \times d}$, pertanto dopo aver scelto la base canonica di \mathbb{R}^d , $\{e_1, \dots, e_d\}$, e indicando con δ_{ij} il simbolo di Kronecker, si ottiene

$$\det D\Phi_t = \det[\delta_{ij} + t\partial_i g_j] = 1 + t\operatorname{Tr}(Dg) + o(t) \in \mathbb{R}.$$

Calcoliamo dunque $H_t \nu_E$

$$\begin{aligned} (\det D\Phi_t) D\phi_t^{-1} \nu_E &= (1 + t\operatorname{Tr}(Dg) + o(t))(I - tDg + o(t)) \nu_E = \\ &= (1 + t\operatorname{Tr}(Dg) + o(t))(\nu_E - tDg \nu_E + o(t)) = \nu_E + t\operatorname{Tr}(Dg) \nu_E(x) - tDg \nu_E + o(t) \end{aligned}$$

e deriviamo rispetto a t

$$\frac{d}{dt} (H_t \nu_E)_{|t=0} = \operatorname{Tr}(Dg) \nu_E - Dg \nu_E.$$

Da quanto abbiamo appena detto e dal fatto che H_0 è l'identità e $|\nu_E| = 1$ segue che

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\mathcal{F}E \cap \Omega} |H_t \nu_E(x)| \, d\mathcal{H}^{d-1}(x) \right)_{|t=0} = \left(\int_{\mathcal{F}E \cap \Omega} \left\langle \frac{H_t \nu_E(x)}{|H_t \nu_E(x)|}, \frac{d}{dt} H_t \nu_E \right\rangle \, d\mathcal{H}^{d-1}(x) \right)_{|t=0}$$

$$= \int_{\mathcal{F}E \cap \Omega} \langle \nu_E, \text{Tr}(Dg)\nu_E(x) - Dg\nu_E \rangle d\mathcal{H}^{d-1} = \int_{\mathcal{F}E \cap \Omega} \text{Tr}(Dg) - \langle \nu_E, Dg\nu_E \rangle d\mathcal{H}^{d-1}.$$

Osserviamo che

$$\text{Tr}(Dg) = \sum_{i=1}^d \partial_i g_i \quad \text{e} \quad \langle \nu_E, Dg\nu_E \rangle = \sum_{i,j=1}^d \partial_j g_i \nu_j \nu_i;$$

ricordando la definizione di derivata tangenziale si ottiene

$$\text{div}_{\mathcal{F}E} g = \sum_{i=1}^d \partial_i g_i = \sum_{i=1}^d \left(\partial_i g_i - \sum_{j=1}^d \nu_j \partial_j g_i \nu_i \right)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P(\Phi_t(E), \Omega) &= \int_{\mathcal{F}E \cap \Omega} \sum_{i=1}^d \partial_i g_i - \sum_{i,j=1}^d \partial_j g_i \nu_j \nu_i d\mathcal{H}^{d-1} \\ &= \int_{\mathcal{F}E \cap \Omega} \sum_{i=1}^d \left(\partial_i g_i - \sum_{j=1}^d \nu_j \partial_j g_i \nu_i \right) d\mathcal{H}^{d-1} = \int_{\mathcal{F}E \cap \Omega} \text{div}_{\mathcal{F}E} g d\mathcal{H}^{d-1} \end{aligned}$$

come volevasi dimostrare. \square

Teorema 5.5. *Sia E un insieme di perimetro finito e $g \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$, allora*

$$\int_{\mathcal{F}E \cap \Omega} \text{div}_{\mathcal{F}E} g d\mathcal{H}^{d-1} = - \int_{\mathcal{F}E \cap \Omega} \langle g, \nu_E \rangle H_{\mathcal{F}E} d\mathcal{H}^{d-1}$$

Dimostrazione. Supponiamo che $\mathcal{F}E$ sia grafico localmente di una funzione analitica $u : A \subset \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ con $\text{supp } g \subset\subset A \times \mathbb{R}$ e

$$E = \{(y, t) : t \in [0, u(y)]\}.$$

Allora mediante sostituzione si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{F}E \cap \Omega} \text{div}_{\mathcal{F}E} g d\mathcal{H}^{d-1} &= \int_A \text{div}_{\mathcal{F}E} g(y, u(y)) \sqrt{1 + |\nabla u(y)|^2} dy = \\ &= \sum_{i=1}^d \int_A \delta_i g_i(y, u(y)) \sqrt{1 + |\nabla u(y)|^2} dy. \end{aligned}$$

Studiamo prima il caso in cui $F = g_i$ e $1 \leq i \leq d-1$:

$$\int_{\mathcal{F}E \cap \Omega} \delta_i F d\mathcal{H}^{d-1} = \int_A \left[\frac{\partial F}{\partial x_i}(y, u(y)) - \sum_{j=1}^d \frac{\partial F}{\partial x_j}(y, u(y)) \nu_j \nu_i \right] \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dy$$

poiché $\frac{\partial}{\partial y_i} F(y, u(y)) = \frac{\partial F}{\partial x_i}(y, u(y)) + \frac{\partial F}{\partial x_n}(y, u(y)) \frac{\partial u}{\partial y_i}$, si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{F}E \cap \Omega} \delta_i F d\mathcal{H}^{d-1} &= \int_A \left[\frac{\partial}{\partial y_i} F(y, u(y)) - \frac{\partial F}{\partial x_d}(y, u(y)) \frac{\partial u}{\partial y_i} \right] \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dy + \\ &\quad + \sum_{j=1}^d \int_A \frac{\partial F}{\partial x_j}(y, u(y)) \nu_j(u) \frac{\partial u(y)}{\partial y_i}(y) dy \end{aligned}$$

dove abbiamo sostituito $\nu_i = -\frac{\partial u}{\partial y_i} \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u(y)|^2}}$ per $i \neq d$. Applichiamo ora l'integrazione per parti e il fatto che $\nu_d = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}$

$$\begin{aligned} &= - \int_A F(y, u(y)) \frac{\partial}{\partial y_i} \sqrt{1 + |\nabla u(y)|^2} dy - \int_A \frac{\partial F}{\partial x_d}(y, u(y)) \frac{\partial u}{\partial y_i}(y) \sqrt{1 + |\nabla u(y)|^2} dy + \\ &\quad - \sum_{j=1}^{d-1} \int_A \frac{\partial F}{\partial x_j}(y, u(y)) \frac{\partial u}{\partial y_j}(y) \frac{\partial u}{\partial y_i}(y) \frac{dy}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} + \int_A \frac{\partial F}{\partial x_d}(y, u(y)) \frac{\partial u}{\partial y_i}(y) \frac{dy}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \\ &= - \int_A F(y, u(y)) \frac{\partial}{\partial y_i} \sqrt{1 + |\nabla u(y)|^2} dy - \int_A \frac{\partial F}{\partial x_d}(y, u(y)) \frac{\partial u}{\partial y_i}(y) \frac{|\nabla u(y)|^2}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \\ &\quad - \sum_{j=1}^{d-1} \int_A \frac{\partial F}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial y_j} \frac{\partial u}{\partial y_i}(y) \frac{dy}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} + \sum_{j=1}^{d-1} \int_A \frac{\partial F}{\partial x_d} \left(\frac{\partial u}{\partial y_j} \right)^2 \frac{\partial u}{\partial y_i} \frac{dy}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \\ &= - \int_A F \frac{\partial}{\partial y_i} \sqrt{1 + |\nabla u(y)|^2} dy + \sum_{j=1}^{d-1} \int_A F \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\frac{\frac{\partial u(y)}{\partial y_j} \partial u}{\sqrt{1 + |\nabla u(y)|^2} \partial y_i} \right) dy \\ &= - \int_A F \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u(y)|^2}} \sum_{j=1}^{d-1} \frac{\partial u}{\partial y_j}(y) \frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_j} dy + \int_A F \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u(y)}{\sqrt{1 + |\nabla u(y)|^2}} \right) \frac{\partial u}{\partial y_i} dy \\ &\quad + \int_A F \sum_{j=1}^{d-1} \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u(y)|^2}} \frac{\partial u}{\partial y_j}(y) \frac{\partial^2 u}{\partial y_j \partial y_i}(y) dy = - \int_{\mathcal{F}E \cap \Omega} F H_{\mathcal{F}E} \nu_i d\mathcal{H}^{d-1}. \end{aligned}$$

Supponiamo ora che $i = d$, allora

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{F}E \cap \Omega} \delta_n F d\mathcal{H}^{d-1} &= \int_A \left(\frac{\partial F}{\partial x_d}(y, u(y)) - \sum_{j=1}^d \frac{\partial F}{\partial x_j}(y) \nu_j \nu_n \right) \sqrt{1 + |\nabla u(y)|^2} dy \\ &= \int_A \left(\frac{\partial F}{\partial x_d}(y, u(y)) - \frac{\partial F}{\partial x_d}(y, u(y)) \nu_n \nu_n - \sum_{j=1}^{d-1} \frac{\partial F}{\partial x_j}(y, u(y)) \nu_j \nu_n \right) \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_A \left(\frac{\partial F}{\partial x_d} - \frac{1}{1 + |\nabla u(y)|^2} \left[\frac{\partial F}{\partial x_d} - \sum_{j=1}^{d-1} \frac{\partial F}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial y_j}(y) \right] \right) \sqrt{1 + |\nabla u|^2} \\
&= \int_A \left(\frac{|\nabla u|^2}{1 + |\nabla u|^2} \right) \frac{\partial F}{\partial x_d} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dy + \int_A \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \sum_{j=1}^{d-1} \frac{\partial F}{\partial y_j} \frac{\partial u}{\partial y_j} dy + \\
&\quad - \int_A \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \sum_{j=1}^{d-1} \frac{\partial F}{\partial x_n}(y, u(y)) \left(\frac{\partial u}{\partial y_j}(y) \right)^2 dy \\
&= \int_A \left(\frac{|\nabla u|^2}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \frac{\partial F}{\partial x_n} - \frac{\partial F}{\partial x_d} \frac{|\nabla u|^2}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \sum_{j=1}^{d-1} \frac{\partial F}{\partial y_j} \frac{\partial u}{\partial y_j} \right) \\
&\quad = \sum_{j=1}^{d-1} \left(- \int_A F(y, u(y)) \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\frac{\frac{\partial u}{\partial y_j}}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) dy \right) \\
&= - \int_A F(y, u(y)) \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) dy = - \int_{\mathcal{F}E \cap \Omega} F H_{\mathcal{F}E} \nu_n d\mathcal{H}^{d-1}.
\end{aligned}$$

Sommando gli integrali per i che va da 1 a d si ottiene il risultato. \square

Ricapitolando, dato un insieme di perimetro finito E , per ogni $g \in C_c^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$ e per ogni diffeomorfismo $\Phi_t(x) = x + tg(x)$ si ha che

$$0 = \frac{d}{dt} P(\Phi_t(E), \Omega)|_{t=0} = \int_{\mathcal{F}E \cap \Omega} \operatorname{div}_{\mathcal{F}E} g \mathcal{H}^{d-1} = - \int_{\mathcal{F}E \cap \Omega} g H_{\mathcal{F}E} \nu_E d\mathcal{H}^{d-1}$$

e quindi per arbitrarietà di g , deve valere $H_{\mathcal{F}E}(x) = 0$ per ogni $x \in \mathcal{F}E$.

Esiste anche una variante del problema di minimo (5.1), ovvero

$$\min_{E \Delta F \subset \subset \Omega} P(E, \Omega) + \int_{E \cap \Omega} f dx \quad (5.4)$$

dove $f \in L^1(\Omega)$. Si dimostra anche in questo caso che il minimo esiste, e che la curvatura media coincide con f .

Teorema 5.6. *Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^d con misura finita, e $f \in L^1(\Omega)$. Allora esiste il minimo di*

$$\min_{E \Delta F \subset \subset \Omega} P(E, \Omega) + \int_{E \cap \Omega} f dx.$$

Dimostrazione. Sia

$$\alpha = \inf_{E \Delta F \subset \subset \Omega} P(E, \Omega) + \int_{E \cap \Omega} f \, dx.$$

Consideriamo una successione minimizzante $(E_h)_h$ cioè tale che

$$P(E_h, \Omega) + \int_{E_h \cap \Omega} f \, dx \leq \alpha + \frac{1}{h}.$$

Dall'Osservazione 1 segue che $\mathcal{F} = \{\chi_{E_h}\} \subset L^1(\Omega)$ soddisfa il teorema di Frechet-Kolmogorov e in particolare per il Teorema 4.15, a meno di sottosuccessioni, esiste E tale che

$$\chi_{E_h} \rightarrow \chi_E \text{ in } L^1(\Omega). \quad (5.5)$$

Verifichiamo che il funzionale

$$F : \chi_E \rightarrow \int_{E \cap \Omega} f \, dx$$

è continuo. Siano χ_E e $\chi_{E'}$ due funzioni caratteristiche allora

$$\begin{aligned} |F(\chi_E) - F(\chi_{E'})| &= \left| \int_{E \cap \Omega} f \, dx - \int_{E' \cap \Omega} f \, dx \right| = \\ &= \left| \int_{(E \Delta E') \cap \Omega} f \, dx \right| \leq \left| \int_{(E \Delta E') \cap \Omega} |f| \, dx \right| = \int_{\Omega} \chi_{E \Delta E'} |f| \, dx. \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |f|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} (\chi_{E \Delta E'})^{p'} \, dx \right)^{\frac{1}{p'}} = \|f\|_{L^p} \|\chi_E - \chi_{E'}\|_{L^1}^{\frac{1}{p'}} \end{aligned}$$

dove nell'ultima disuguaglianza abbiamo applicato la disuguaglianza di Hölder. Dunque da (5.5), dalla semicontinuità inferiore del perimetro e dalla continuità di F segue che

$$P(E, \Omega) \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} P(E_h, \Omega) \text{ e } \int_{E \cap \Omega} f \, dx = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{E_h \cap \Omega} f \, dx$$

e quindi

$$\begin{aligned} \alpha &\leq P(E, \Omega) + \int_{E \cap \Omega} f \, dx \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} P(E_h, \Omega) + \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{E_h \cap \Omega} f \, dx \\ &= \liminf_{h \rightarrow \infty} \left(P(E_h, \Omega) + \int_{E_h \cap \Omega} f \, dx \right) \leq \alpha. \end{aligned}$$

Pertanto il minimo esiste. □

Abbiamo dimostrato quindi che il problema (5.4) ammette minimo quando $f \in L^1(\Omega)$ o anche semplicemente $f \in L^1_{loc}(\Omega)$; è inoltre possibile estendere il Teorema di regolarità di De Giorgi anche a questo problema:

Teorema 5.7. *Sia $f \in L^p(\Omega)$, con $p > d$, e $E \subset \mathbb{R}^d$ soluzione del problema (5.4), allora $\mathcal{F}E$ è relativamente aperto e*

$$\overline{\mathcal{F}E} = \partial E \quad e \quad \mathcal{H}^{d-1}(\partial E \setminus \mathcal{F}E) = 0.$$

Inoltre per ogni $x \in \mathcal{F}E$ e ρ sufficientemente piccolo, $\mathcal{F}E \cap B_\rho(x)$ è grafico di una funzione holderiana ($C^{(2,\alpha)}$); mentre è grafico di una funzione analitica se f è analitica.

Teorema 5.8. *Sia f una funzione continua e E insieme di perimetro finito, minimo per il problema (5.4). Allora*

$$H_{\mathcal{F}E}(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathcal{F}E.$$

Dimostrazione. Supponiamo che $\mathcal{F}E$ sia grafico localmente della funzione $u : A \subset \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}^+$, con $A \times \mathbb{R} = \Omega$ e $E = \{(y, t) : y \in A, t \in [0, u(y)]\}$. Denotiamo con

$$\mathcal{F}(u) = P(E, \Omega) + \int_{E \cap \Omega} f \, dx = \int_A \sqrt{1 + |\nabla u|^2} \, dy + \int_A dy \int_0^{u(y)} f(y, t) \, dt$$

Poiché \mathcal{F} in u è minimo segue che

$$\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(v) \quad \forall v : A \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ tale che } v = u \text{ in } \partial A.$$

Consideriamo $v = u + \epsilon g$ con $g \in C_c^\infty(A)$ allora

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\epsilon} \mathcal{F}(u + \epsilon g)|_{\epsilon=0} = \frac{d}{d\epsilon} \left(\int_A \sqrt{1 + |\nabla(u + \epsilon g)|^2} \, dy + \int_A dy \int_0^{u + \epsilon g} f(y, t) \, dt \right) \Big|_{\epsilon=0} \\ &= \int_A \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \langle \nabla u, \nabla g \rangle \, dy + \int_A f(y, u(y)) g(y) \, dy \\ &= \int_A g(y) \left(-\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) + f(y, u(y)) \right) \, dy. \end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di g segue che

$$(d-1)H_{\mathcal{F}E} = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = f(y, u(y)).$$

□

Capitolo 6

Esempi di superfici minime

In questa ultima parte, dove considereremo $d = 3$, andremo ad osservare esempi di superfici minime, spostando quindi la teoria vista fino ad ora nello spazio tridimensionale; verificheremo inoltre che la superficie in questione ha curvatura media nulla, condizione necessaria e sufficiente affinché la superficie sia minima, ma non sufficiente a stabilire che sia soluzione del problema di Plateau.

Riprendiamo alcuni concetti di geometria differenziale legati alle curve e superfici in \mathbb{R}^3 . Sia Σ una superficie parametrizzata da

$$S : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{tale che } S(u, v) \in \Sigma.$$

Sia $p \in \Sigma$ tale che $p = S(u_0, v_0)$. Lo spazio tangente a Σ in p , $T_p\Sigma$ sappiamo essere uno spazio vettoriale di dimensione due generato dai vettori $\{S_u(u_0, v_0), S_v(u_0, v_0)\}$ mentre il versore normale alla superficie in p è il vettore

$$\hat{n}_\Sigma(p) = \frac{S_u(u_0, v_0) \wedge S_v(u_0, v_0)}{\|S_u(u_0, v_0) \wedge S_v(u_0, v_0)\|}$$

ortogonale a $T_p\Sigma$.

Pertanto la Prima Forma Fondamentale, $I_p : T_p\Sigma \times T_p\Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, diventa

$$I_p(x, y) = \langle x_1 S_u + x_2 S_v, y_1 S_u + y_2 S_v \rangle = x_1 y_1 S_u \cdot S_u + x_2 y_2 S_v \cdot S_v$$

$$+ (x_1 y_2 + x_2 y_1) S_u \cdot S_v = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

per ogni $x, y \in T_p\Sigma$ e dove

$$E = S_u \cdot S_u = \|S_u\|^2, \quad G = S_v \cdot S_v = \|S_v\|^2, \quad F = S_u \cdot S_v.$$

Perciò la norma di un vettore $x \in T_p\Sigma$ è data dalla forma quadratica definita positiva

$$I_p(x) = \|x\|^2 = Ex_1^2 + Gx_2^2 + 2Fx_1x_2. \quad (6.1)$$

Consideriamo ora una curva r avente in Σ il suo sostegno

$$r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{tale che } r(t) = S(u(t), v(t)) \in \Sigma$$

e tale che $r(t_0) = S(u_0, v_0) = p$. La curvatura di r in t_0 coincide con la curvatura normale di Σ in p nella direzione $v = r'(t_0)$ e si ottiene mediante

$$k_r = \frac{r''(t_0) \cdot \hat{n}_\Sigma(p)}{\|r'(t_0)\|^2}.$$

Poiché

$$r'(t_0) = u'(t_0)S_u(u_0, v_0) + v'(t_0)S_v(u_0, v_0) \quad \text{e}$$

$$r''(t_0) = S_{uu}(u'(t_0))^2 + S_{vv}(v'(t_0))^2 + 2S_{uv}u'(t_0)v'(t_0) + S_u u''(t_0) + S_v v''(t_0),$$

usando (6.1) si ottiene

$$k_r = \frac{e(u')^2 + g(v')^2 + 2fu'v'}{E(u')^2 + G(v')^2 + 2Fu'v'}$$

dove

$$e = S_{uu}(u_0, v_0) \cdot \hat{n}_\Sigma(p), \quad g = S_{vv}(u_0, v_0) \cdot \hat{n}_\Sigma(p), \quad f = S_{uv}(u_0, v_0) \cdot \hat{n}_\Sigma(p).$$

La matrice

$$\begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix}$$

rappresenta la Seconda Forma Fondamentale di Σ relativa al punto p . In un punto p , al variare di u' , v' la curvatura k_r assume un massimo e un minimo; si tratta delle curvature principali k_1 , k_2 , le cui rispettive tangenti in p sono perpendicolari tra di loro. Pertanto la curvatura media H si ottiene

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{gE - 2fF + eG}{2(EG - F^2)}.$$

Fra le prime superfici minime scoperte, troviamo il Catenoide, studiata da Eulero nel 1744. Si tratta della superficie di area minima tra tutte quelle aventi come bordo 2 circonferenze poste su piani paralleli. Può essere vista come superficie di rotazione ottenuta mediante la rotazione di un arco di catenaria di equazione $y = a \cosh(\frac{z}{a})$. La parametrizzazione del catenoide è

$$S(u, v) = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, av) \quad \text{con } 0 < u < 2\pi \quad -\infty < v < +\infty.$$

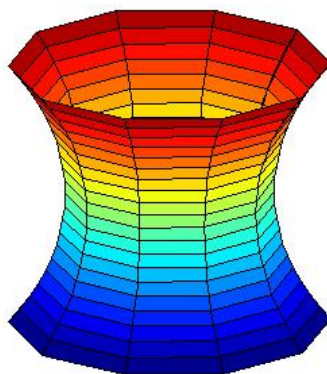


Figura 6.1: Catenoide.

Osserviamo che la curvatura media è uguale a zero. Supponendo $a = 1$, calcoliamo le derivate

$$S_u = (\cosh v \sin u, \cosh v \cos u, 0) \quad S_v = (\cos u \sinh v, \sin u \sinh v, 1)$$

$$S_{uu} = (-\cosh v \cos u, -\cosh v \sin u, 0) \quad S_{vv} = (\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, 0)$$

$$S_{uv} = (-\sinh v \sin u, \sinh v \cos u, 0)$$

da cui otteniamo

$$E = \cosh^2(v), \quad G = 1 + \sinh^2(v) = \cosh^2 v, \quad F = 0.$$

Inoltre

$$S_u \times S_v = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\cosh v \sin u & \cosh v \cos u & 0 \\ \sinh v \cos u & \sinh v \sin u & 1 \end{bmatrix} = \cosh v (\cos u, \sin u, -\sinh v)$$

e quindi

$$\|S_u \times S_v\| = \cosh^2 v \quad \text{e} \quad \hat{n}_\Sigma(p) = \frac{1}{\cosh v} (\cos u, \sin u, -\sinh v).$$

Una volta calcolati e, f, g

$$e = -1, \quad g = 1, \quad f = 0 \quad \text{si ottiene} \quad H = 0$$

come volevasi dimostrare.

Dopo catenoide e piano, superficie minima banale, fu scoperta l'Elicoide, bolla ottenuta immergendo un'elica in una soluzione di sapone e acqua. Una sua parametrizzazione è

$$S(u, v) = (v \cos u, v \sin u, bu) \quad \text{con } 0 < u < 2\pi \text{ e } -\infty < v < +\infty.$$

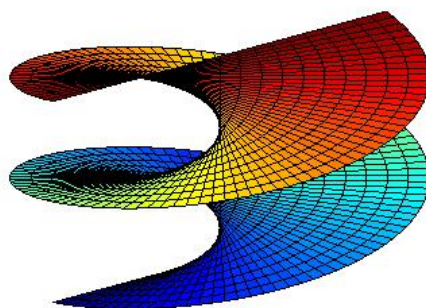


Figura 6.2: Elicoide.

Anche in questo caso si dimostra che la curvatura media è nulla infatti $e = f = g = 0$.

Per tutto il settecento, le uniche superfici minime conosciute rimasero l'elicoide, il catenoide e il piano. Fu Scherk nel 1835 a scoprire la successiva superficie minima, parametrizzata da

$$S(u, v) = (u, v, f(u, v)) \quad \text{con } f(u, v) = \log \left(\frac{\cos u}{\cos v} \right).$$

Osserviamo che f è ben definita solo quando $\frac{\cos u}{\cos v} > 0$ quindi il piano uv sarà diviso in quadrati in cui la superficie è definita e quadrati in cui non lo è. Per esempio negli intervalli

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

otteniamo un pezzo di questa superficie, rappresentato nella Figura 6.3.

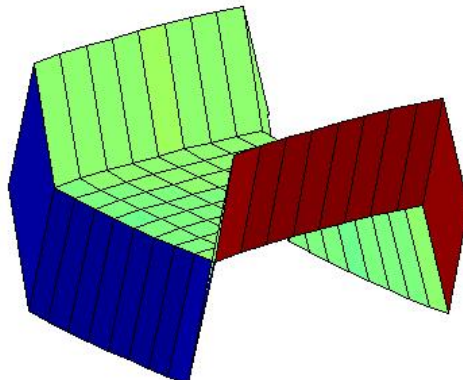


Figura 6.3: Superficie di Scherk.

Dimostriamo che la curvatura media è nulla:

$$\begin{aligned}
 S_u &= (1, 0, f_u) = \left(1, 0, -\frac{\sin x}{\cos x}\right), & S_v &= (0, 1, f_v) = \left(0, 1, \frac{\sin y}{\cos y}\right), \\
 S_{uu} &= (0, 0, f_{uu}) = \left(0, 0, -\frac{1}{\cos^2 u}\right), & S_{vv} &= (0, 0, f_{vv}) = \left(0, 0, \frac{1}{\cos^2 v}\right), \\
 S_{uv} &= (0, 0, f_{uv}) = (0, 0, 0).
 \end{aligned}$$

Dalle formule

$$E = 1 + f_u^2, \quad G = 1 + f_v^2, \quad F = f_u f_v, \quad \hat{n}_\Sigma(p) = \frac{(-f_u, -f_v, 1)}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}$$

$$e = \frac{f_{uu}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}, \quad g = \frac{f_{vv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}, \quad f = \frac{f_{uv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}},$$

segue che

$$H = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f_{uu}(1 + f_v^2) - 2f_u f_v f_{uv} + f_{vv}(1 + f_u^2) = 0$$

ma

$$f_{uu}(1 + f_v^2) - 2f_u f_v f_{uv} + f_{vv}(1 + f_u^2) = -\frac{1}{\cos^2 u} \left(\frac{1}{\cos^2 v}\right) + \frac{1}{\cos^2 v} \left(\frac{1}{\cos^2 u}\right) = 0$$

come volevasi dimostrare.

Spostiamoci ora nella seconda metà dell'ottocento, quando Alfred Enneper scopre la superficie minima di equazioni parametriche

$$S(u, v) = \left(u - \frac{1}{3}u^3 + uv, v + u^2v - \frac{1}{3}v^3, u^2 - v^2 \right) \quad \text{con } u, v \in \mathbb{R},$$

che per v ed u tali che $u^2 + v^2 < 3$ non ha autointersezioni.

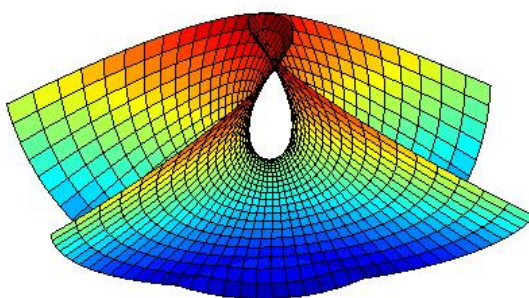


Figura 6.4: Superficie di Enneper.

Dimostriamo che la curvatura media è nulla. Calcoliamo le derivate

$$\begin{aligned} S_u &= (1 - u^2 + v^2, 2uv, 2u), & S_v &= (2uv, 1 + u^2 - v^2, -2v), \\ S_{uu} &= (-2u, 2v, 2), & S_{vv} &= (2u, -2v, -2), & S_{uv} &= (2v, 2u, 0). \end{aligned}$$

Pertanto

$$E = G = (1 + u^2 + v^2)^2 \quad F = 0;$$

$$\begin{aligned} S_u \times S_v &= \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 - u^2 + v^2 & 2uv & 2u \\ 2uv & 1 + u^2 - v^2 & -2v \end{bmatrix} \\ &= (-2u(v^2 + u^2 + 1), 2v(1 + v^2 + u^2), 1 - (u^2 + v^2)^2). \end{aligned}$$

Poiché

$$\|S_u \times S_v\| = (1 + v^2 + u^2)^2$$

allora

$$\hat{n}_\Sigma(p) = \frac{1}{(1 + v^2 + u^2)}(-2u, 2v, 1 - v^2 - u^2), \quad e = 2, \quad g = -2, \quad f = 0$$

e quindi $H = 0$.

Sul finire dell'ottocento, i matematici iniziarono a cimentarsi in una variante del problema di Plateau, ovvero determinare quella bolla di sapone, cioè superficie di area minima dato un bordo, il cui contorno però non è completamente assegnato, ma in parte libero di assumere la posizione ottimale su una superficie di supporto. In altre parole, data una superficie Γ a cui è attaccata nei punti P_1, P_2 una curva C , si cerca quella bolla che poggia sulla curva C ma avente parte del bordo su Γ . Partendo da questi studi Henneberg scopre la superficie minima non orientabile di parametrizzazione

$$x(u, v) = 2 \sinh u \cos v - \frac{2}{3} \sinh(3u) \cos(3v)$$

$$y(u, v) = 2 \sinh u \sin v + \frac{2}{3} \sinh(3u) \sin(3v) \quad z(u, v) = 2 \cosh(2u) \cos(2v).$$

Si dimostra infatti che tale superficie ha curvatura media nulla calcolando i coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale

$$G = E = 8 \cosh^2 u (\cos(4u) - \cos(4v)), \quad F = 0, \quad e = -4 \cos(2v) \sinh(2u),$$

$$f = 4 \cosh(2u) \sin(2v), \quad g = 4 \sinh(2u) \cos(2v).$$

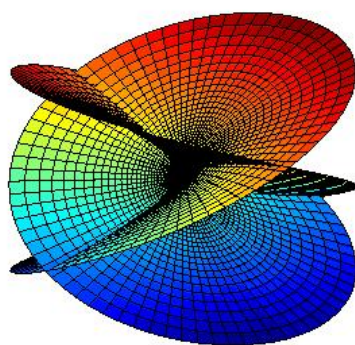


Figura 6.5: Superficie di Henneberg.

Appendice A

Formula dell'area

Occupiamoci ora di funzioni Lipschitziane $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^N$ nel caso $k \leq N$ che abbiamo visto essere differenziabili \mathcal{L}^k -quasi ovunque. Per introdurre la prossima definizione osserviamo che data una applicazione lineare $L \in \text{Hom}(\mathbb{R}^k; \mathbb{R}^N)$ alla quale è associata la matrice A , e L^* l'applicazione trasposta di L cioè alla quale è associata la matrice A^T , si ha che $L^* \circ L$ è simmetrico e semidefinito positivo. Possiamo dunque dare la seguente definizione generale:

Definizione A.1. *Dati V, W sottospazi di due spazi euclidei con $\dim(V) = k \leq N = \dim(W)$ e $L \in \text{Hom}(V, W)$. Si definisce Jacobiano k -dimensionale di L*

$$\mathcal{J}_k L := \sqrt{\det(L^* \circ L)}$$

dove $L^* : W \rightarrow V$ è l'applicazione trasposta di L .

In verità L^* altro non è che l'operatore aggiunto di L , ovvero definito dalla condizione

$$(L^*x) \cdot y = x \cdot (Ly) \quad \forall x \in W \text{ e } \forall y \in V.$$

Osserviamo che se A è la matrice associata all'operatore L , nelle basi ortonormali di V e W , allora $\mathcal{J}_k L = \sqrt{\det(A^T A)}$. In particolare $\mathcal{J}_k L = 0$ se e solo se il rango di A è minore di k , cioè $\mathcal{J}_k L > 0$ se e solo se L è iniettivo.

Per il calcolo effettivo dello Jacobiano possiamo usare la formula di Cauchy-Binet che fa uso dei determinanti delle sottomatrici $k \times k$ di A .

Proposizione A.2. (Cauchy-Binet) *Dati V, W sottospazi di due spazi euclidei con $\dim(V) = k \leq N = \dim(W)$ e $L \in \text{Hom}(V, W)$. Allora*

$$\mathcal{J}_k L = \sqrt{\sum_B \det^2(B)}$$

dove B sono le sottomatrici $k \times k$ della matrice di rappresentazione di L nelle basi ortonormali di V e W .

Data $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^N$ una funzione Lipschitziana, per il teorema di Rademacher, f è differenziabile \mathcal{L}^k -quasi ovunque, e quindi esiste una mappa lineare $df_x : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^N$ per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^k$. Pertanto avremo che per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^k$ è definito

$$\mathcal{J}_k df_x = \sqrt{\det(df_x^* \circ df_x)}.$$

Introduciamo ora due lemmi che ci serviranno per la dimostrazione della Formula dell'area.

Lemma A.3. *Sia $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^N$ una funzione Lipschitziana e $E \subset \mathbb{R}^k$ un insieme \mathcal{L}^k -misurabile tale che $\mathcal{J}_k df_x = 0$ per \mathcal{L}^k -quasi ogni $x \in E$. Allora $\mathcal{H}^k(f(E)) = 0$.*

Dimostrazione. Senza perdere di generalità possiamo supporre che E sia limitato e che f è differenziabile e $\mathcal{J}_k df = 0$ in ogni $x \in E$. Grazie all'ipotesi di differenziabilità segue che, dato $x \in E$ e $y \in B_\rho(x)$, cioè $\|y - x\| < \rho$, esiste $\epsilon > 0$ tale che

$$|f(x) - f(y) - df_x(y - x)| \leq \epsilon \|y - x\| \leq \epsilon \rho$$

e quindi

$$f(E \cap B_\rho(x)) \subset f(x) + I_{\epsilon\rho}(df_x(B_\rho)) \quad (\text{A.1})$$

dove $I_r(F)$ è l'intorno aperto di raggio r di un insieme F . Siccome $df_x(B_\rho)$ è contenuto in un $(k - 1)$ -piano, possiamo usare come ricoprimenti, cubi di lato $\epsilon\rho$ aventi facce parallele e ortogonali al $(k - 1)$ -piano e quindi esiste una costante M dipendente solo k e da $Lip(f)$ tale che

$$\mathcal{H}_\infty^k(I_{\epsilon\rho}(df_x(B_\rho))) \leq M\epsilon\rho^k \quad \forall x \in E.$$

Per il Teorema 2.5 esiste un ricoprimento disgiunto di \mathcal{L}^k -quasi tutto E costituito dalle palle $B_{\rho_i}(x_i)$ contenute in $I_1(E)$ e tale che soddisfano (A.1). Dal fatto che l'unione delle immagini $f(B_{\rho_i}(x_i))$ ricopre \mathcal{H}^k -quasi tutto $f(E)$ si ottiene

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\infty^k(f(E)) &\leq \sum_i \mathcal{H}_\infty^k(f(B_{\rho_i}(x_i))) \leq \sum_i \mathcal{H}_\infty^k(I_{\epsilon\rho_i}(df_{x_i}(B_{\rho_i}))) \\ &\leq M\epsilon \sum_i \rho_i^k = \frac{M\epsilon}{\omega_k} \mathcal{L}^k(I_1(E)). \end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di ϵ e dal punto (f) del Teorema 3.11 si ottiene che $\mathcal{H}^k(f(E)) = 0$. \square

Lemma A.4. *Sia $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^N$ una funzione Lipschitziana e $E \subset \mathbb{R}^k$ un insieme \mathcal{L}^k -misurabile tale che $\mathcal{J}_k df_x > 0$ per \mathcal{L}^k -quasi ogni $x \in E$. Allora per ogni $t > 1$ esiste una partizione che ricopre quasi tutto E in insiemi compatti E_i con $i \geq 1$ tale che*

(i) *le funzioni $f|_{E_i}$ sono biunivoche, f è differenziabile in ogni punto di E_i e $\mathcal{J}_k df_x > 0$ per ogni $x \in E_i$;*

(ii) *esistono applicazioni lineari $L_i : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^N$ tali che $\mathcal{J}_k L_i > 0$ e*

$$\text{Lip}(f|_{E_i} \circ L_i^{-1}) \leq t, \quad \text{Lip}(L_i \circ (f|_{E_i})^{-1}) \leq t.$$

Dimostrazione. Possiamo assumere senza perdere di generalità che E sia un insieme di Borel e che f sia differenziabile e $\mathcal{J}_k df_x > 0$ per ogni $x \in E$. Dimostriamo prima che E è contenuto in un'unione numerabile di insiemi di Borel F_i che soddisfano le condizioni (i) e (ii). Fissiamo $\epsilon > 0$ tale che $\frac{1}{t} + \epsilon < 1 < t - \epsilon$, $C \subset E$ un insieme denso e numerabile, e \mathcal{S} un sottoinsieme denso e numerabile dell'insieme

$$\left\{ L : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^N : \text{lineare}, \mathcal{J}_k L > 0 \right\}.$$

Per $x \in C$, $L \in \mathcal{S}$ e $j \leq 1$ intero denotiamo con $F(x, L, j)$ l'insieme degli $y \in B_{\frac{1}{j}}(x)$ tali che

$$\left(\epsilon + \frac{1}{t} \right) |Lv| \leq |df_y(v)| \leq (t - \epsilon) |Lv| \quad \forall v \in \mathbb{R}^k \quad (\text{A.2})$$

$$|f(z) - f(y) - df_y(z - y)| \leq \epsilon |L(z - y)| \quad \forall z \in B_{\frac{2}{j}}(y). \quad (\text{A.3})$$

Se consideriamo $v = z - y$ dalla precedenti equazioni deduciamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} |L(z - y)| &\leq |df_y(z - y)| - \epsilon |L(z - y)| \leq |f(z) - f(y) - df_y(z - y)| + \\ &+ |f(z) - f(y)| - \epsilon |L(z - y)| \leq |f(z) - f(y)| \leq |f(z) - f(y) - df_y(z - y)| + |df_y(z - y)| \\ &\leq \epsilon |L(z - y)| + (t - \epsilon) |L(z - y)| = t |L(z - y)|, \end{aligned}$$

e quindi riassumendo:

$$\frac{1}{t} |L(z - y)| \leq |f(z) - f(y)| \leq t |L(z - y)| \quad (\text{A.4})$$

per ogni $y \in F(x, L, j)$ e per ogni $z \in B_{\frac{2}{j}}(y) \cap E$.

Verifichiamo ora che gli insiemi $F(x, L, j)$ soddisfano la tesi. Per ogni $y \in E$ possiamo trovare $L \in \mathcal{S}$ tale che

$$\text{Lip}(L \circ df_y^{-1}) \leq \left(\epsilon + \frac{1}{t} \right)^{-1} \quad \text{e} \quad \text{Lip}(df_y \circ L^{-1}) \leq t - \epsilon$$

e possiamo scegliere j e x in modo che $x \in B_{\frac{1}{j}}(y)$ e

$$|f(z) - f(y) - df_y(z - y)| \leq \frac{\epsilon}{\text{Lip}(L^{-1})} |z - y| \leq \epsilon |L(z - y)| \quad \forall z \in B_{\frac{2}{j}}(y).$$

Pertanto $y \in F(x, L, j)$ e quindi gli insiemi $F(x, L, j)$ ricoprono E . Inoltre siccome $F(x, L, j) \subset B_{\frac{1}{j}}(x) \subset B_{\frac{2}{j}}(y)$, per ogni $y, z \in F(x, L, j)$ da (A.4) segue che f è biunivoca in $F(x, L, j)$. Sempre da (A.4) segue (ii). Infatti da $|f(z) - f(y)| \leq t|L(z - y)|$ segue

$$\left| f_{|F(x, L, j)}(L^{-1}(p)) - f_{|F(x, L, j)}(L^{-1}(q)) \right| \leq t|L(L^{-1}(p) - L^{-1}(q))| = t|p - q|;$$

mentre da $\frac{1}{t}|L(z - y)| \leq |f(z) - f(y)|$ segue

$$\begin{aligned} & \left| L(f_{|F(x, L, j)}^{-1}(p)) - L(f_{|F(x, L, j)}^{-1}(q)) \right| \leq \\ & \leq t|f(f_{|F(x, L, j)}^{-1}(p)) - f(f_{|F(x, L, j)}^{-1}(q))| = t|p - q|. \end{aligned}$$

Dalla Proposizione 1.18, gli insiemi di Borel F_i che, come abbiamo appena dimostrato ricoprono E e verificano le condizioni (i) e (ii), possono essere ricoperti \mathcal{L}^k -quasi ovunque da un'unione numerabile di insiemi compatti e quindi possiamo considerare gli F_i come insiemi compatti. \square

Ricordiamo che una applicazione lineare $O : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ si dice ortogonale se

$$Ox \cdot Oy = x \cdot y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

ed in tal caso $O^* \circ O = Id$. Di conseguenza se $O : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è ortogonale allora la sua matrice di rappresentazione è una matrice ortogonale. Mentre una applicazione lineare $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice simmetrica se

$$x \cdot Sy = Sx \cdot y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Di conseguenza la sua matrice di rappresentazione è simmetrica.

Proposizione A.5. (Decomposizione polare) *Sia $L : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^N$ una applicazione lineare e $k \leq N$, allora esistono una mappa simmetrica $S : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ e una mappa ortogonale $O : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^N$ tale che*

$$L = O \circ S.$$

Da ciò segue che $L^* \circ L = S \circ O^* \circ O \circ S = S^2$ e quindi $J_k L = |\det(S)|$. Inoltre, utilizzando la decomposizione polare, dal Lemma A.4 e in particolare dalle disuguaglianze (A.2) segue

$$t^{-k} \mathcal{J}_k L_i \leq \mathcal{J}_k df_x \leq t^k \mathcal{J}_k L_i \quad \forall x \in E_i. \quad (\text{A.5})$$

Infatti se scriviamo $df_x = O \circ S$ e $L = L_i = O' \circ S'$ otteniamo

$$\frac{1}{t}|O' \circ S'v| \leq |O \circ Sv| \leq t|O' \circ S'v| \quad \forall v \in \mathbb{R}^k$$

e quindi per ogni $w = S'v \in \mathbb{R}^k$, poiché O e O' sono trasformazioni ortogonali, vale che

$$\frac{|w|}{t} \leq |S \circ (S')^{-1}w| \leq t|w|.$$

Dato che $B_{\frac{1}{t}} \subset (S \circ (S')^{-1})(B_1) \subset B_t$, dalla formula classica di cambiamento di variabile segue

$$\frac{1}{t^k} \leq |\det(S \circ (S')^{-1})| \leq t^k.$$

Infine, poiché $\mathcal{J}_k df_x = |\det S|$ e $\mathcal{J}_k L = |\det S'|$, vale la disuguaglianza cercata.

Teorema A.6. (Formula dell'area) Sia $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^N$ una funzione Lipschitziana con $N \geq k$; allora, per ogni insieme \mathcal{L}^k -misurabile $E \subset \mathbb{R}^k$, la funzione $\mathcal{H}^0(E \cap f^{-1}(y))$ è \mathcal{H}^k -misurabile in \mathbb{R}^N e

$$\int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{H}^0(E \cap f^{-1}(y)) \, d\mathcal{H}^k(y) = \int_E \mathcal{J}_k df_x \, dx.$$

Dimostrazione. Dividiamo la dimostrazione in 3 parti.

Prima parte: Supponiamo che f sia lineare, ovvero $f(x) = Lx$ allora per la Proposizione A.5 possiamo scrivere: $L = O \circ S$. Vogliamo dimostrare che $\mathcal{H}^k(L(E)) = \det(S)\mathcal{L}^k(E)$. Osserviamo che se $\det(S) = 0$ allora $\dim(S(\mathbb{R}^k)) < k$ quindi $\mathcal{H}^k(L(\mathbb{R}^k)) = 0$ e l'enunciato è ovvio. Perciò supponiamo $\det(S) \neq 0$. Dal punto (d) del Teorema 3.11 e dalla formula classica di cambiamento di variabile segue

$$\frac{\mathcal{H}^k(L(B_\rho(x)))}{\mathcal{L}^k(B_\rho(x))} = \frac{\mathcal{L}^k(S(B_\rho(x)))}{\mathcal{L}^k(B_\rho(x))} = \det(S) \quad \forall x \in \mathbb{R}^k, \rho > 0$$

dove nella prima uguaglianza abbiamo usato anche l'ipotesi che O sia un' applicazione ortogonale. Se chiamiamo $\nu(E) = \mathcal{H}^k(L(E))$ per ogni $E \subset \mathbb{R}^k$, allora ν è una misura di Radon e in particolare $\nu \ll \mathcal{L}^k$. Allora per il Teorema di Radon-Nikodym esiste $g(x) \in L^1$ tale che $\nu = g\mathcal{L}^k$ e per il Teorema 2.12 vale

$$g(x) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\nu(B_\rho(x))}{\mathcal{L}^k(B_\rho(x))} = \det(S)$$

e quindi la prima parte è dimostrata.

Seconda parte: Sia $E' = \{x \in E : \text{esiste } df_x, \mathcal{J}_k df_x = 0\}$ allora per il Lemma A.3 $\mathcal{H}^k(f(E')) = 0$ e quindi

$$\mathcal{H}^0(E' \cap f^{-1}(y)) = 0 \quad \text{per } \mathcal{H}^k - \text{quasi ogni } y \in \mathbb{R}^N.$$

Consideriamo ora $\bar{E} = E \setminus E'$. Applichiamo il Lemma A.4 a \bar{E} , quindi per ogni $t > 1$ esiste una famiglia disgiunta numerabile di insiemi compatti E_i che coprono \mathcal{L}^k -quasi tutto \bar{E} . Quindi avremo

$$\mathcal{H}^0(\bar{E} \cap f^{-1}(y)) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{H}^0(E_i \cap f^{-1}(y)) \quad \mathcal{H}^k - \text{quasi ogni } y \in \mathbb{R}^N.$$

Poiché, per ogni i , $\mathcal{H}^0(E_i \cap f^{-1}(y)) = \chi_{f(E_i)}(y)$, e quest'ultime sono funzioni \mathcal{H}^k -misurabili, essendo gli E_i compatti e f continua, la seconda parte è dimostrata.

Terza parte: Dal punto (ii) del Lemma A.4 e dalla Proposizione 3.19 segue

$$\mathcal{H}^k(f(E_i)) = \mathcal{H}^k(f|_{E_i} \circ L_i^{-1} \circ L_i(E_i)) \leq t^k \mathcal{H}^k(L_i(E_i))$$

$$\mathcal{H}^k(L_i(E_i)) = \mathcal{H}^k(L_i \circ (f|_{E_i})^{-1} \circ (f|_{E_i})(E_i)) \leq t^k \mathcal{H}^k(f(E_i)).$$

Utilizzando quello che abbiamo appena osservato, quello che abbiamo dedotto nella prima parte e le disuguaglianze A.5 otteniamo

$$\begin{aligned} t^{-2k} \mathcal{H}^k(f(E_i)) &\leq t^{-k} \mathcal{H}^k(L_i(E_i)) = t^{-k} \mathcal{L}^k(E_i) \mathcal{J}_k L_i \leq \int_{E_i} \mathcal{J}_k df_x \, dx \\ &\leq t^k \mathcal{L}^k(E_i) \mathcal{J}_k L_i = t^k \mathcal{H}^k(L_i(E_i)) \leq t^{2k} \mathcal{H}^k(f(E_i)). \end{aligned}$$

Sommando rispetto a i , tenendo conto di quanto dimostrato nella seconda parte, otteniamo

$$\begin{aligned} t^{-2k} \sum_{i=0}^{\infty} \int_{f(E_i)} d\mathcal{H}^k(y) &= t^{-2k} \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{H}^0(E \cap f^{-1}(y)) \, d\mathcal{H}^k(y) \\ &\leq \int_E \mathcal{J}_k df_x \, dx \leq t^{2k} \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{H}^0(E \cap f^{-1}(y)) \, d\mathcal{H}^k(y) \end{aligned}$$

e facendo tendere t a 1 la dimostrazione è conclusa. \square

Un'importante conseguenza di questo teorema riguarda il caso in cui f è iniettiva in E , e segue dal fatto che $f(E)$ è il supporto della funzione $\mathcal{H}^0(E \cap f^{-1}(y))$, infatti in tal caso vale:

$$\mathcal{H}^k(f(E)) = \int_{f(E)} 1 \, d\mathcal{H}^k = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{H}^0(E \cap f^{-1}(y)) \, d\mathcal{H}^k(y) = \int_E \mathcal{J}_k df_x \, dx.$$

Dalla Formula dell'area segue anche il seguente risultato:

Teorema A.7. (Cambio di variabili) Sia $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^N$ una funzione Lipschitziana con $k \leq N$ e $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione \mathcal{L}^k sommabile allora

$$\int_{\mathbb{R}^k} g(x) \mathcal{J}_k df_x \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\sum_{x \in f^{-1}(y)} g(x) \right) d\mathcal{H}^k(y).$$

Enunciamo anche la formula di Coarea, ottenuta mediante un procedimento analogo a quello visto per la Formula dell'area.

Teorema A.8. *Sia $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione Lipschitziana e B un sottoinsieme σ - \mathcal{H}^d -rettificabile di \mathcal{R}^d . Allora vale*

$$\int_B |\nabla f(x)| \, dx = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}^{d-1}(f^{-1}(t) \cap B) \, dt. \quad (\text{A.6})$$

Più in generale, per ogni funzione Boreliana $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, vale

$$\int_B g(x) |\nabla f(x)| \, dx = \int_{\mathbb{R}} \int_{u^{-1}(t) \cap B} g(x) \, d\mathcal{H}^{n-1}(x) \, dt.$$

Appendice B

Convoluzione

Richiamiamo la definizione e alcune proprietà della convoluzione di funzioni, al fine di introdurre la convoluzione di misure, frequentemente utilizzata in questa tesi.

Definizione B.1. Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ con $p \in [1, \infty]$, allora si definisce convoluzione di f e g la funzione

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y) dy.$$

definita in per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^d$. Inoltre $f * g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ e

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$

La convoluzione è un'operazione commutativa e associativa, e il suo supporto, $\text{supp } f * g$, è contenuto nella somma dei supporti di f e g .

Nel caso particolare in cui $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ e $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$ allora $f * g$ è ben definita per ogni $x \in \mathbb{R}^d$ e $f * g \in C(\mathbb{R}^d)$, o ancor meglio se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ e $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ allora $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Supponiamo ora che $f \in C^k(\Omega)$, e che $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ sia un multiindice di lunghezza $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d \leq k$, allora si pone

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^{\alpha_d}}{\partial x_d^{\alpha_d}} f.$$

Proposizione B.2. Sia $f \in C_c^k(\mathbb{R}^d)$ e $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ allora $f * g \in C^k(\mathbb{R}^d)$ e

$$D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g \quad \text{con } |\alpha| \leq k.$$

Definizione B.3. Una successione di funzioni $(\rho_\epsilon)_\epsilon$, si dice famiglia di mollificatori se $\rho_\epsilon(x) = \epsilon^{-d} \rho(\frac{x}{\epsilon})$ dove

$$\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^d), \quad \rho(x) \geq 0, \quad \text{supp } \rho \subset B_1, \quad \int_{\mathbb{R}^d} \rho(x) dx = 1, \quad \rho(x) = \rho(-x).$$

I mollificatori permettono di costruire una famiglia di approssimazioni regolari di f , in particolare se $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^d)$, con $1 \leq p < \infty$, allora $f * \rho_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ e

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|f * \rho_\epsilon - f\|_{L^p(A)} = 0 \quad \forall A \subset \subset \mathbb{R}^d.$$

mentre se f è continua $f * \rho_\epsilon$ converge uniformemente a f sui compatti di \mathbb{R}^d .

Questi risultati possono essere estesi alle misure, definendo la convoluzione tra una misura di Radon e una funzione.

Definizione B.4. Sia μ una misura vettoriale di Radon definita nei Boreliani dell'aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ e f una funzione continua definita in un sottoinsieme di \mathbb{R}^d allora si definisce convoluzione tra f e μ la funzione

$$\mu * f(x) = \int_{\Omega} f(x - y) d\mu(y).$$

Proposizione B.5. Sia $(\mu_h)_h$ una successione di misure di Radon convergenti localmente debolmente a μ in \mathbb{R}^d e $f \in C_c(\mathbb{R})$ allora $\mu_h * f$ converge uniformemente a $\mu * f$ sui compatti di \mathbb{R}^d

Consideriamo ora una famiglia di mollificatori ρ_ϵ , allora la funzione

$$\mu * \rho_\epsilon(x) = \int_{\Omega} \rho_\epsilon(x - y) d\mu(y) = \epsilon^{-d} \int_{\Omega} \rho\left(\frac{x - y}{\epsilon}\right) d\mu(y)$$

è definita in $\Omega_\epsilon = \{x \mid \text{dist}(x, \partial\Omega) > \epsilon\}$.

Teorema B.6. Sia $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_p)$ una misura vettoriale di Radon definita in Ω aperto di \mathbb{R}^d e $(\rho_\epsilon)_\epsilon$ una famiglia di mollificatori. Allora le funzioni $\mu * \rho_\epsilon$ appartengono a $C^\infty(\Omega_\epsilon)$ e

$$D^\alpha(\mu * \rho_\epsilon) = \mu * D^\alpha \rho_\epsilon \tag{B.1}$$

per ogni multiindice α . Inoltre le misure $\mu_\epsilon = \mu * \rho_\epsilon \mathcal{L}^d$ convergono debolmente localmente in Ω a μ per $\epsilon \rightarrow 0$ e per ogni insieme di Borel $E \subset \Omega_\epsilon$ vale

$$\int_E |\mu * \rho_\epsilon|(x) dx \leq |\mu|(E_\epsilon) \quad \text{con} \quad E_\epsilon = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) \leq \epsilon\}.$$

Dimostrazione. Prima parte. Supponiamo $|\alpha| = 1$. Sia $v \in \mathbb{R}^d$ allora

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} \mu * \rho_\epsilon &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\mu * \rho_\epsilon)(x + tv) - (\mu * \rho_\epsilon)(x)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\rho_\epsilon(x + tv - y) - \rho_\epsilon(x - y)}{t} d\mu(y). \end{aligned}$$

Poiché $\rho_\epsilon \in C^\infty$, si può applicare la convergenza dominata, ottenendo

$$\frac{\partial}{\partial v} \mu * \rho_\epsilon = \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\rho_\epsilon(x + tv - y) - \rho_\epsilon(x - y)}{t} d\mu(y) = \mu * \frac{\partial}{\partial v} \rho_\epsilon.$$

Per induzione sulla lunghezza di α , $|\alpha|$, si ottiene (B.1).

Seconda parte. Per ogni $\phi \in C_c(\Omega, \mathbb{R}^p)$, dal Teorema di Fubini e dalla simmetria di ρ segue

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\mu * \rho_\epsilon)(x) \phi(x) dx &= \int_{\Omega} \phi(x) \left(\int_{\Omega} \rho_\epsilon(x - y) d\mu(y) \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \phi(x) \rho_\epsilon(x - y) dx \right) d\mu(y) = \int_{\Omega} (\phi * \rho_\epsilon)(y) d\mu(y) \end{aligned}$$

pertanto,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \phi d\mu_\epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} (\phi * \rho_\epsilon) d\mu = \int_{\Omega} \phi d\mu.$$

Sia E un Boreliano di Ω contenuto in Ω_ϵ . Allora, portando i moduli dentro l'integrale ed usando il Teorema di Fubini, si ottiene

$$\begin{aligned} \int_E |\mu * \rho_\epsilon|(x) dx &= \int_E \left| \int_{\Omega} \rho_\epsilon(x - y) d\mu(y) \right| dx \\ &\leq \epsilon^{-d} \int_E \left(\int_{\Omega} \rho \left(\frac{x - y}{\epsilon} \right) d|\mu|(y) \right) dx = \epsilon^{-d} \int_{E_\epsilon} \left(\int_E \rho \left(\frac{x - y}{\epsilon} \right) dx \right) d|\mu|(y) \\ &\leq \int_{E_\epsilon} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \rho \left(\frac{x - y}{\epsilon} \right) dx \right) d|\mu|(y) = |\mu|(E_\epsilon). \end{aligned}$$

□

Appendice C

Curve e ipersuperfici in \mathbb{R}^d

In questa sezione vengono ripresi alcuni concetti di geometria differenziale necessari per la comprensione e lo studio delle superfici minime.

Partiamo dall'analisi di curve parametrizzate secondo la lunghezza d'arco.

Definizione C.1. Una curva k -regolare parametrizzata secondo la lunghezza d'arco è una funzione

$$r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$$

di classe almeno C^k e tale che $a = 0$ e $b = l = \text{lunghezza della curva}$.

Si definisce versore tangente alla curva in $r(s)$, il vettore

$$\hat{\tau}_r(s) := r'(s).$$

Il versore normale invece lo si trova mediante la derivata seconda

$$r''(s) = \frac{d}{ds} \hat{\tau}_r(s) = k_r(s) \hat{n}_r(s)$$

dove $k_r(s)$ è la curvatura legata alla variazione del versore tangente o del versore normale, $\hat{n}_r(s)$, nel senso che $\frac{d\hat{n}_r}{ds} \cdot \hat{\tau}_r = k_r$. Si definisce curvatura orientata il valore

$$k = \frac{r' \times r''}{\|r' \times r''\|^3}$$

che si distingue dalla curvatura positiva, calcolata semplicemente $k_r(s) = \|r''(s)\|$.

Quanto abbiamo appena detto sulle curve ci servirà per comprendere la nozione di piano tangente e versore normale ad una ipersuperficie.

Definizione C.2. Sia $\Sigma \subset \mathbb{R}^d$ un'ipersuperficie. Si definisce vettore tangente a Σ in p il vettore della forma $r'(0)$, dove $r : (-\epsilon, +\epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^d$ è una curva di classe C^∞ tale che $r(0) = p$ e $r(-\epsilon, +\epsilon) \subset \Sigma$.

L'insieme di tutti i vettori tangenti a Σ in p è uno spazio vettoriale di dimensione $d - 1$ detto spazio tangente a Σ in p ed è denotato con $T_p\Sigma$.

Osserviamo che se $\varphi : U \subset \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \Sigma$ è una parametrizzazione locale di Σ centrata in p , e supponiamo $\{e_1, \dots, e_{d-1}\}$ la base canonica di \mathbb{R}^d , allora $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_{d-1}}\right)$ è una base di $T_p\Sigma$.

Definizione C.3. *Due parametrizzazioni locali di una superficie Σ*

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \Sigma \quad e \quad \varphi_\beta : U_\beta \subset \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \Sigma$$

sono equiorientate se

$$\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta) = \emptyset \quad o \quad \det \mathcal{J}(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha) > 0.$$

Diremo quindi che una superficie Σ è orientabile se esiste un atlante di Σ composto da parametrizzazioni locali a due a due equiorientate.

In altre parole possiamo dire che una superficie è orientabile se riusciamo a distinguere due facce, una interna e una esterna; per esempio il Nastro di Moebius non è orientabile.

Definizione C.4. *Il campo dei versori normali a Σ è un'applicazione*

$$\hat{n}_\Sigma : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^d$$

di classe C^∞ , tale che, per ogni $p \in \Sigma$, $\hat{n}_\Sigma(p)$ è ortogonale a $T_p\Sigma$, e $\|\hat{n}_\Sigma(p)\| = 1$.

Osserviamo che un campo di versori normali su Σ esiste se e solo se la superficie è orientabile.

Lo spazio euclideo \mathbb{R}^d è fornito di un prodotto scalare ed essendo $T_p\Sigma$ un suo sottospazio, possiamo considerare su esso il prodotto scalare definito positivo, $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$, indotto dal prodotto scalare canonico.

Definizione C.5. *Si definisce Prima Forma Fondamentale, la forma quadratica definita positiva*

$$I_p : T_p\Sigma \rightarrow \mathbb{R} \text{ tale che } I_p(v) = \langle v, v \rangle_p = \|v\|^2 \geq 0 \quad \forall v \in T_p\Sigma$$

Vediamo ora come definire le curvatures di una superficie.

Sia Σ un'ipersuperficie, $p \in \Sigma$, $T_p\Sigma$ lo spazio tangente e $\hat{n}_\Sigma(p) \in \mathbb{R}^d$ il versore normale ortogonale a $T_p\Sigma$. Sia $v \in T_p\Sigma$ di lunghezza unitaria e sia H_v il piano generato da $\{v, \hat{n}_\Sigma(p)\}$ passante per p . Allora possiamo definire la curva r regolare parametrizzata rispetto la lunghezza d'arco con $r(0) = p$

avente come sostegno l'intersezione $H_v \cap \Sigma$, nell'intorno di p . Orientando r in modo opportuno, $\hat{\tau}_r(0) = v$ e si definisce curvatura normale di Σ in p lungo v , la curvatura orientata in p della curva r . Questo discorso mostra che ci sono infinite curvature in un punto $p \in \Sigma$, una per ogni sezione che si considera.

Vediamo ora in che modo possiamo calcolare le curvature di una ipersuperficie.

Un primo modo consiste nel considerare la seconda forma fondamentale, una forma quadratica simmetrica

$$\text{II}_p : T_p\Sigma \times T_p\Sigma \rightarrow N_p(\Sigma);$$

Infatti $\text{II}(v, v) \cdot \hat{n}_\Sigma$ è il valore della curvatura della curva che si ottiene intersecando Σ con il piano generato da $\{\hat{n}_\Sigma, v\}$. La seconda forma fondamentale viene anche rappresentata come

$$\text{II}(v, w) = A(v, w) \cdot \hat{n}_\Sigma \text{ con } A : T_p\Sigma \times T_p\Sigma \rightarrow \mathbb{R};$$

pertanto fissato una base ortonormale (v_1, \dots, v_{d-1}) di $T_p\Sigma$, la forma quadratica A è rappresentata da una matrice $(d-1) \times (d-1)$ simmetrica diagonalizzabile e i cui autovalori coincidono con le curvature principali

$$k_1 \leq \dots \leq k_{d-1}.$$

Si definisce curvatura media di Σ

$$H_\Sigma = \frac{1}{d-1} \text{Tr}(A) = \frac{1}{d-1} (k_1 + \dots + k_{d-1})$$

anche se in certi casi si parla di curvatura media intendendo semplicemente la traccia di A .

Un altro modo per determinare le curvature di una ipersuperficie consiste nell'introdurre le derivate tangenziali.

Sia Σ un ipersuperficie di \mathbb{R}^d e $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$. Si definisce gradiente su Σ di f , il gradiente di f privato della componente normale:

$$\nabla_\Sigma f := \nabla f - (\nabla f \cdot \hat{n}_\Sigma) \hat{n}_\Sigma$$

dove $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_d} \right)$. In altre parole, si definiscono le derivate parziali su Σ , $\partial_1^\Sigma, \dots, \partial_d^\Sigma$

$$\delta_i = \partial_i^\Sigma = \partial_i - \sum_{j=1}^d (\hat{n}_{\Sigma,j} \partial_j) \hat{n}_{\Sigma,i}.$$

e si introduce

$$\text{div}_\Sigma f := \sum_{i=1}^d \delta_i f.$$

Allora si dimostra che

$$\operatorname{div}_\Sigma \hat{n}_\Sigma = (d-1)H_\Sigma = k_1 + \dots + k_{d-1} \quad (\text{C.1})$$

dove k_i si ottiene intersecando Σ con il piano generato da $\{\hat{n}_\Sigma, v_i\}$, ed in particolare coincide con la derivata di \hat{n}_Σ in direzione v_i .

Consideriamo ora una ipersuperficie Σ , non parametrica, grafico della funzione $u : A \subset \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ quindi

$$\Sigma = \{(y, u(y)) : y \in A\}.$$

Sia (e_1, \dots, e_{d-1}) una base di \mathbb{R}^{d-1} , la curva sull'ipersuperficie passante per $x_0 = (y_0, u(y_0))$ nella direzione di e_i coincide con la funzione

$$r_i(t) = (y_0 + te_i, u(y_0 + te_i))$$

le cui derivate sono

$$r'_i(t) = (e_i, \frac{\partial u}{\partial y_i}(y_0 + te_i)), \quad r''_i(t) = (0, \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}(y_0 + te_i)).$$

Poiché

$$r'' = a\hat{\tau} + v^2 k \hat{n}_\Sigma \quad \text{e} \quad \hat{n}_\Sigma = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}(-\nabla u, 1)$$

dove k è la curvatura positiva e \hat{n} la normale principale alla superficie, si ricava

$$k(y_0) = \frac{1}{v^2} \langle r''_i, \hat{n}_\Sigma \rangle = \frac{1}{v^2} (0, \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}(y_0)) \cdot \frac{(-\nabla u(y_0), 1)}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}(y_0) \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}.$$

Inoltre utilizzando (C.1) si ottiene

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = (d-1)H_\Sigma.$$