



Università degli Studi di Ferrara

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E INFORMATICA
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

TESI DI LAUREA IN MATEMATICA

**Metodi numerici per la valutazione
di opzioni finanziarie**

Laureando
Alberto Caretta
Matricola 089349

Relatore
Dott. Michele Miranda
Correlatore
Ill.mo Prof. Andrea Pascucci

Anno Accademico 2013-2014

A mio nonno Giorgio

Indice

Prefazione	vii
Notazioni generali	ix
1 Fondamenti di calcolo stocastico	1
1.1 Spazi di probabilità	1
1.2 Processi Stocastici e Moti Browniani	7
1.3 Processi di Itô	11
2 Metodo della trasformata di Fourier	21
2.1 Funzione caratteristica	22
2.1.1 Modello di Heston	28
2.2 Formule integrali	29
2.2.1 Damping method	31
2.2.2 Formule di pricing	32
2.3 Risultati numerici	34
3 Metodo di valutazione delle opzioni su realized variance	39
3.1 Modelli a volatilità stocastica	40
3.2 Prezzo delle opzioni con sottostante realized variance	43
3.3 Algoritmo d'inversione numerica di Laplace	54
4 Il metodo Monte Carlo	61
4.1 Principi base	61
4.2 Simulazione	65
4.2.1 Calcolo delle greche	68
4.2.2 Analisi dell'errore	70
4.3 Risultati numerici	71
Appendice A La trasformata di Fourier e Laplace	77
Appendice B Quadratura Gaussiana	81
Appendice C Convergenza e intervalli di confidenza	85
Ringraziamenti	89

Indice

Bibliografia

91

Prefazione

I prodotti derivati, strumenti finanziari il cui valore dipende da altri titoli o beni, detti sottostanti, negli ultimi anni hanno ottenuto un importante successo e diffusione presso gli investitori. La rapida estensione del mercato dei derivati è andata in parallelo con un crescente interesse da parte di studiosi e ricercatori nello sviluppo di una teoria matematica.

L'opzione è il più semplice esempio di strumento derivato. Un'opzione è un contratto tra un compratore e un venditore che dà al possessore il diritto (ma non l'obbligo) di acquistare o vendere una certa quantità di un titolo sottostante, ad una data futura e ad un prezzo fissati. Ma quanto costa stipulare questo accordo?

Il presente lavoro è finalizzato ad approfondire alcuni metodi numerici per la valutazione dei prezzi d'opzione. La tesi si compone di quattro capitoli, a conclusione dei quali sono raccolti i codici *Mathematica*[®] con cui abbiamo implementato le tecniche descritte nel corso della nostra analisi.

La tesi è strutturata come segue:

Capitolo 1 : in questo capitolo si introducono gli strumenti matematici necessari a sviluppare i modelli stocastici oggetto del nostro studio. Dopo aver definito le basi fondamentali del calcolo delle probabilità, vengono introdotti i concetti di moto Browniano n -dimensionale correlato e di processo di Itô, elementi indispensabili per la comprensione di modelli stocastici complessi. Si definisce poi la formula di Itô, strumento essenziale per la nostra analisi, sia in forma semplice sia generalizzata al caso multidimensionale. Si conclude definendo la nozione di misura martingala equivalente (o misura di probabilità neutrale al rischio), proprietà matematica legata al principio economico di assenza d'arbitraggio.

Capitolo 2 : in questo capitolo si è studiato in dettaglio il metodo della trasformata di Fourier. Tramite questo metodo si è in grado di calcolare il prezzo di uno strumento derivato note la funzione caratteristica del processo stocastico X_t e la trasformata di Fourier della funzione payoff. Nel primo paragrafo si è determinata la funzione caratteristica del processo (X_t, v_t) , dove X_t è il log-prezzo e v_t è la sua varianza, nel caso di un modello comprendente un moto Browniano bidimensionale e un processo a salti di Lévy. Si è quindi derivata la sua formulazione nel

celebre modello di Heston a volatilità stocastica. Nel secondo paragrafo si è calcolata la formula integrale di Fourier per la valutazione di un'opzione call europea e del suo delta. Il capitolo si conclude con l'applicazione dei risultati trovati nel modello di Heston.

Capitolo 3 : in questo capitolo si è studiato il prezzo delle opzioni con sottostante realized variance V_T nei due seguenti modelli a volatilità stocastica: il modello di Heston ed il modello 3/2. Nello specifico, utilizzando un control variates, si è studiato un solido metodo per esprimere la trasformata di Laplace della funzione variance call in termini di trasformata di Laplace della distribuzione di V_T . Questo metodo è applicabile ad un qualsiasi modello stocastico in cui la trasformata di Laplace della distribuzione di V_T è nota in forma esplicita. Nella seconda parte del capitolo si è studiato un algoritmo d'inversione numerica di Laplace, recentemente proposto da Iseger (2006), attraverso cui si calcolano i valori che assume la funzione f in alcuni punti data la sua trasformata di Laplace.

Capitolo 4 : questo capitolo tratta il metodo Monte Carlo, uno dei metodi numerici più popolari, che permette di calcolare approssimativamente il prezzo di un contratto attraverso un numero consistente di simulazioni e facendone la media. Attraverso uno schema di tipo Eulero, si sono simulate le corrispondenti realizzazioni del sottostante supponendo il caso di un moto Browniano geometrico. Per un'opzione call si è calcolato il prezzo stimato con il metodo Monte Carlo, l'intervallo di confidenza con attendibilità del 99% e l'errore commesso al variare delle simulazioni e della data di scadenza.

Abbiamo riportato in appendice, per non appesantire il discorso nei capitoli centrali, alcuni risultati teorici e dimostrazioni che ci sono stati utili per lo sviluppo della tesi. L'appendice A è dedicato alle definizioni e proprietà delle trasformate di Fourier e Laplace. L'appendice B contiene le dimostrazioni della Poisson summation formula e della formula d'inversione della serie di Fourier. L'appendice C tratta la convergenza di variabili casuali e l'applicazione del teorema del limite centrale nella costruzione di intervalli di confidenza.

Notazioni generali

Simboli

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$	insieme dei numeri naturali
$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$	insieme dei numeri interi non-negativi
$\underline{n} := \{1, \dots, n\}$	insieme dei numeri naturali compresi tra 1 ed n
\mathbb{Q}	insieme dei numeri razionali
\mathbb{R}	insieme dei numeri reali
\mathbb{R}_+	insieme dei numeri reali positivi
$\mathbb{R}^{n \times m}$	algebra delle matrici reali $n \times m$
$\mathbb{R}^n := \mathbb{R}_1^n$	algebra dei vettori colonna n -dimensionali
$\mathbb{R}_m := \mathbb{R}_m^1$	algebra dei vettori riga m -dimensionali
$\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$	σ -algebra dei Borelliani di \mathbb{R}^N
$F^C := \Omega \setminus F$	complementare di F (riferito agli eventi)
$\mathcal{P}(I)$	insieme delle partizioni dell'intervallo I
$\mathcal{P}(I, \epsilon)$	insieme delle partizioni equispaziate dell'intervallo I di passo $\epsilon > 0$
$\langle X, Y \rangle_t$	covarianza quadratica dei processi di Itô X ed Y
$\langle X \rangle_t$	variazione quadratica del processo di Itô X
$\mathcal{F}(f)$	trasformata di Fourier della funzione f
$L(f)$	trasformata di Laplace della funzione f
$\mathbb{1}_H$	funzione indicatrice dell'insieme H
$\mathbf{1}$	funzione costantemente uguale a 1
$a_+ = \max\{a, 0\}$	per $a \in \mathbb{R}$

Abbreviazioni

$A := B$	significa “per definizione, A è uguale a B ”
i.e.	id est (“vale a dire”)
v.c.	variabile casuale
q.s.	quasi sicuramente
q.o.	quasi ovunque
i.i.d.	indipendenti e identicamente distribuite (riferito ad una famiglia di variabili casuali)

p.s.	processo stocastico
EMM	Equivalent Martingale Measures
SDE	Stochastic Differential Equation
RV	Realized Variance
PSF	Poisson Summation Formula
FFT	Fast Fourier Transform

Spazi di funzioni

C^k	spazio delle funzioni derivabili con derivate continue fino all'ordine $k \in \mathbb{N}_0$
$C^{k,h}$	spazio delle funzioni $u = u(t, x)$ derivabili con derivate continue fino all'ordine $k \in \mathbb{N}_0$ nella variabile t e $h \in \mathbb{N}_0$ nella variabile x
L^p	spazio delle funzioni sommabili di ordine p .

Spazi di processi

$\mathbb{L}^p(I, \Omega)$	spazio dei processi progressivamente misurabili in $L^p(I \times \Omega)$
$\mathbb{L}_{\text{loc}}^p(I, \Omega)$	spazio dei processi X progressivamente misurabili con $X(\omega) \in L^p(I)$ per q.o. $\omega \in \Omega$.

Norme e prodotti scalari

Il punto $x \in \mathbb{R}^n$ è identificato col vettore colonna $n \times 1$.

$ \cdot $	norma Euclidea in \mathbb{R}^n
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	prodotto scalare Euclideo in \mathbb{R}^n
$\ \cdot\ _p = \ \cdot\ _{L^p}$	norma nello spazio L^p , $1 \leq p \leq \infty$

Sia $A = (a_{ij})_{j=1, \dots, d}^{i=1, \dots, N}$ una matrice di dimensione $N \times d$, talvolta verrà indicata con la notazione $A = (a^{ij})_{j=1, \dots, d}^{i=1, \dots, N}$. Allora:

A^T trasposta di A

$$|A| = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^d a_{ij}^2}$$

Capitolo 1

Fondamenti di calcolo stocastico

Nel presente capitolo sono raccolti i principali strumenti che saranno utilizzati in seguito per studiare i modelli stocastici. Lo scopo è quello di introdurre i principi base di teoria della probabilità, moto Browniano e processi di Itô.

1.1 Spazi di probabilità

Indichiamo con Ω un insieme non vuoto, $\Omega \neq \emptyset$.

Definizione 1.1. Una σ -algebra \mathcal{F} è una famiglia di sottoinsiemi di Ω tale che:

- i) $\emptyset \in \mathcal{F}$;
- ii) se $F \in \mathcal{F}$ allora $F^C \in \mathcal{F}$;
- iii) per ogni successione $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di elementi di \mathcal{F} ,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{F}.$$

Nel seguito, specialmente per le applicazioni finanziarie, è utile pensare ad una σ -algebra come ad un insieme di informazioni. Un elemento di una σ -algebra \mathcal{F} è chiamato *evento*, quindi la σ -algebra \mathcal{F} è una collezione di eventi.

Esempio 1. La σ -algebra dei Borelliani $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ è la σ -algebra generata dalla topologia Euclidea di \mathbb{R}^N , ossia

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) = \sigma(\{A \mid A \text{ aperto di } \mathbb{R}^N\}).$$

Definizione 1.2. Una misura sulla σ -algebra \mathcal{F} di Ω è un'applicazione

$$P : \mathcal{F} \longrightarrow [0, +\infty]$$

tale che:

- i) $P(\emptyset) = 0$;
- ii) per ogni successione $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di elementi di \mathcal{F} , a due a due disgiunti, vale

$$P \left(\bigcup_{n \geq 1} F_n \right) = \sum_{n \geq 1} P(F_n).$$

Se $P(\Omega) < \infty$, diciamo che P è una misura finita. Inoltre, se vale

- iii) $P(\Omega) = 1$, allora diciamo che P è una misura di probabilità.

Sia ora F un sottoinsieme di Ω che appartiene ad \mathcal{F} , utilizziamo la seguente interpretazione:

$$P(F) = \text{“la probabilità che si verifichi l'evento } F\text{”}.$$

In particolare, se $P(F) = 1$ diremo che “ F si verifica con probabilità 1” o “quasi sicuramente”, se $P(F) = 0$ diremo che l'evento F è impossibile.

Definizione 1.3. Uno spazio di probabilità è una terna (Ω, \mathcal{F}, P) dove:

1. Ω è un insieme non vuoto;
2. \mathcal{F} è una σ -algebra su Ω ;
3. P è una misura di probabilità su \mathcal{F} .

Osservazione 1. Dal punto di vista finanziario gli elementi di uno spazio di probabilità possono essere interpretati come:

Ω rappresenta tutti i possibili scenari che si possono verificare nel mercato, ogni scenario $\omega \in \Omega$ può essere descritto come evoluzione del prezzo in funzione del tempo;

\mathcal{F}_t è la collezione degli eventi che rispecchia le informazioni note fino al tempo t ;

P è una misura di probabilità che assegna una determinata probabilità agli eventi di una σ -algebra \mathcal{F} .

Variabili casuali

Definizione 1.4. Una *variabile casuale* (abbreviato v.c.) sullo spazio di probabilità (Ω, \mathcal{F}, P) , è una funzione misurabile X da Ω a valori in \mathbb{R}^N , ossia una funzione

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N \quad \text{t.c.} \quad X^{-1}(H) \in \mathcal{F}, \quad H \in \mathcal{B}.$$

Nel caso $N = 1$, X è detta v.c. reale.

Definizione 1.5. Data una v.c. X , definiamo l'applicazione

$$P^X : \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$$

ponendo

$$P^X(H) = P(X^{-1}(H)), \quad H \in \mathcal{B}.$$

È facile verificare che P^X è una distribuzione detta *distribuzione* (o *legge*) di X e scriviamo

$$X \sim P^X.$$

Definizione 1.6. Sia X una v.c. su (Ω, \mathcal{F}, P) a valori in \mathbb{R}^N . La *funzione di distribuzione* (o *funzione di ripartizione*) di X è la funzione

$$\Phi^X : \mathbb{R}^N \rightarrow [0, 1]$$

definita da

$$\Phi^X(y) = P(X \leq y), \quad y \in \mathbb{R}^N,$$

dove $X \leq y$ significa $X_i \leq y_i$ per ogni $i = 1, \dots, N$.

In particolare, nel caso $N = 1$, se P^X ha densità f rispetto alla misura di Lebesgue allora

$$\Phi^X(y) = \int_{-\infty}^y f(x) dx$$

e quindi se f è continua nel punto x_0 allora Φ^X è derivabile in x_0 e vale

$$\frac{d}{dy} \Phi^X(x_0) = f(x_0).$$

Enunciamo ora un teorema fondamentale per calcolare media, varianza e funzione di distribuzione di una v.c. avente una certa distribuzione P^X . Si noti che tutto quello che possiamo “vedere” sono i valori che assume X nello spazio Euclideo \mathbb{R}^N , lo spazio di probabilità (Ω, \mathcal{F}, P) è “invisibile”. Infatti, tutte le quantità utili in teoria delle probabilità possono essere calcolate in termini di densità.

Teorema 1.1. *Siano $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ una v.c. sullo spazio di probabilità (Ω, \mathcal{F}, P) e $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione misurabile. Allora*

$$f \circ X \in L^1(\Omega, P) \iff f \in L^1(\mathbb{R}^N, P^X)$$

e in tal caso vale

$$\int_{\Omega} f(X) dP = \int_{\mathbb{R}^N} f dP^X. \quad (1.1)$$

Distribuzioni

Un ruolo importante hanno le misure di probabilità definite sullo spazio Euclideo.

Definizione 1.7. Una misura di probabilità definita su $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B})$ è detta *distribuzione*.

Il prossimo risultato è diretta conseguenza di alcune ben note proprietà dell'integrale di Lebesgue: esso mostra come sia relativamente facile costruire una distribuzione a partire dalla misura di Lebesgue.

Proposizione 1.2. Sia $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione \mathcal{B} -misurabile (ossia tale che $f^{-1}(H) \in \mathcal{B}$ per ogni $H \in \mathcal{B}$), non negativa e tale che

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1.$$

Allora P definita da

$$P(H) = \int_H f(x) dx, \quad H \in \mathcal{B}, \quad (1.2)$$

è una distribuzione. Diciamo che f è la densità di P rispetto alla misura di Lebesgue. Diventa quindi naturale definire una distribuzione a partire da una densità.

Vediamo alcuni esempi di distribuzioni.

Esempio 2 (Distribuzione Uniforme). Una v.c. reale $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ha distribuzione uniforme su $[a, b]$ se la sua densità vale

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$ e $\mathbb{1}_{[a,b]}$ è la funzione indicatrice dell'insieme $[a, b]$. Se X ha distribuzione uniforme su $[a, b]$ scriveremo $X \sim \text{Unif}[a, b]$.

Esempio 3 (Delta di Dirac). Non tutte le distribuzioni sono del tipo (1.2), ossia non tutte le distribuzioni hanno densità rispetto alla misura di Lebesgue. Per esempio, dato $x_0 \in \mathbb{R}^N$, consideriamo la distribuzione Delta di Dirac concentrata in x_0 definita da

$$\delta_{x_0}(H) = \begin{cases} 1, & x_0 \in H, \\ 0, & x_0 \notin H, \end{cases}$$

per $H \in \mathcal{B}$. Intuitivamente con tale distribuzione rappresentiamo la certezza di “trovare la particella” nella posizione x_0 .

Esempio 4 (Distribuzione di Poisson). Una v.c. reale $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}_0$ ha distribuzione di Poisson di parametro λ se la sua densità discreta vale

$$p(n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Se X ha distribuzione di Poisson scriveremo $X \sim \text{Poi}(\lambda)$.

Esempio 5 (Distribuzione Gaussiana). Una v.c. reale $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ha distribuzione normale o Gaussiana se la sua densità vale

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

dove i parametri $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma^2 > 0$ sono rispettivamente il valor medio e la varianza di X . Se X ha distribuzione Gaussiana di parametri μ e σ^2 scriveremo $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Esempio 6 (Distribuzione Gamma). Una v.c. $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ è distribuita con legge Gamma di parametri λ e $\alpha > 0$ se ha densità di probabilità

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} x^{\alpha-1}, \quad x \geq 0,$$

dove $\Gamma(\alpha)$ è la funzione speciale così definita

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt.$$

Se X ha distribuzione Gamma di parametri λ e $\alpha > 0$ scriveremo $X \sim \Gamma(\lambda, \alpha)$.

Funzione caratteristica

Definizione 1.8. La *funzione caratteristica* della v.c. X in \mathbb{R}^N è la funzione

$$\varphi_X : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$$

definita da

$$\varphi_X(\xi) = E \left[e^{i\langle \xi, X \rangle} \right], \quad \xi \in \mathbb{R}^N.$$

In altri termini poichè

$$\varphi_X(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\langle \xi, y \rangle} P^X(dy), \quad \xi \in \mathbb{R}^N,$$

semplicemente φ_X è la trasformata di Fourier della distribuzione P^X di X . In particolare, se P^X ha densità f , allora $\varphi_X = \mathcal{F}(f)$.

Esempio 7. Calcoliamo la funzione caratteristica della v.c. X avente distribuzione Gaussiana, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

$$\varphi_X(\xi) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi y} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy =$$

(cambio di variabile $x = \frac{y-\mu}{\sigma\sqrt{2}}$, $dy = \sigma\sqrt{2}dx$)

$$= \frac{e^{i\xi\mu}}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x\sigma\sqrt{2}-x^2} dx$$

(completamento al quadrato)

$$= \frac{e^{i\xi\mu}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\sigma^2\xi^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}i\xi\sigma\right)^2} dx$$

(cambio di variabile $z = x - \frac{\sqrt{2}}{2}i\xi\sigma$, $dx = dz$)

$$= e^{i\xi\mu - \frac{\xi^2\sigma^2}{2}}.$$

Attesa condizionata

Nelle applicazioni finanziarie il prezzo di un titolo è generalmente descritto da un v.c. X e l'insieme di informazioni disponibili è descritto da una σ -algebra \mathcal{G} : di conseguenza risulta naturale introdurre la nozione di *valore atteso di X condizionato a \mathcal{G}* , usualmente indicato con

$$E[X|\mathcal{G}].$$

Data una v.c. reale sommabile X sullo spazio (Ω, \mathcal{F}, P) e un evento $B \in \mathcal{F}$ con $P(B) > 0$, definiamo *l'attesa di X condizionata all'evento B* come

$$E[X|B] = \frac{1}{P(B)} \int_B X dP.$$

Indichiamo con \mathcal{G} la σ -algebra generata da B :

$$\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega, B, B^C\}.$$

L'attesa di X condizionata a \mathcal{G} , $E[X|\mathcal{G}]$, è definita da

$$E[X|\mathcal{G}](\omega) = \begin{cases} E[X|B], & \omega \in B, \\ E[X|B^C], & \omega \in B^C. \end{cases}$$

Notiamo che $E[X|\mathcal{G}]$ è una variabile aleatoria. Possiamo generalizzare la definizione precedente al caso di una generica σ -algebra nel modo seguente.

Definizione 1.9. Sia X una v.c. reale sommabile sullo spazio di probabilità (Ω, \mathcal{F}, P) e sia \mathcal{G} una σ -algebra contenuta in \mathcal{F} . Esiste un'unica v.c. Y tale che

- i) Y è sommabile e \mathcal{G} -misurabile;
- ii) $\int_A X dP = \int_A Y dP$ per ogni $A \in \mathcal{G}$.

Allora diciamo che Y è l'attesa di X condizionata a \mathcal{G} e scriviamo $Y = E[X|\mathcal{G}]$. Inoltre Y è unica quasi sicuramente.

Il seguente teorema contiene alcune proprietà dell'attesa condizionata, conseguenze immediate della sua definizione e costruzione.

Teorema 1.3. Per ogni $X, Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ e $a, b \in \mathbb{R}$ si ha:

- (1) $E[X|\mathcal{G}]$ è \mathcal{G} -misurabile;
- (2) $\int_G X dP = \int_G E[X|\mathcal{G}] dP$ per ogni $G \in \mathcal{G}$;
- (3) se X è \mathcal{G} -misurabile allora $X = E[X|\mathcal{G}]$;
- (4) se X e \mathcal{G} sono indipendenti (ossia se lo sono $\sigma(X)$ e \mathcal{G}) allora $E[X] = E[X|\mathcal{G}]$;
- (5) $E[X] = E[E[X|\mathcal{G}]]$;
- (6) se $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ allora $E[E[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = E[X|\mathcal{H}]$;
- (7) linearità: $E[aX + bY|\mathcal{G}] = aE[X|\mathcal{G}] + bE[Y|\mathcal{G}]$;
- (8) monotonia: se $X \leq Y$ q.s. allora $E[X|\mathcal{G}] \leq E[Y|\mathcal{G}]$.

1.2 Processi Stocastici e Moti Browniani

Nel seguito (Ω, \mathcal{F}, P) indica uno spazio di probabilità e I un intervallo reale del tipo $[0, T]$ oppure $[0, +\infty[$.

Definizione 1.10. Un *processo stocastico* è una famiglia di variabili casuali

$$X = \{X_t\}_{t \in I}$$

definite su (Ω, \mathcal{F}, P) a valori in \mathbb{R}^N (o \mathbb{R}).

Definizione 1.11. Definiamo *traiettoria* del processo stocastico relativa allo stato ω fissato in Ω la funzione del tempo

$$t \longrightarrow X_t(\omega), \quad t \in I.$$

Allora un processo stocastico è una famiglia $\{X_t\}_{t \in I}$ di variabili casuali indicizzate dal tempo. Per aiutare l'intuizione, è utile pensare a un processo stocastico come ad un fenomeno aleatorio che si evolve nel tempo: per esempio possiamo interpretare la variabile casuale X_t in \mathbb{R}_+ come il prezzo di un titolo rischioso al tempo t , oppure come la posizione di una particella nello spazio al tempo t . Dunque t rappresenta il “tempo” e ω individua il “titolo rischioso” o la “particella”.

Per poter fare delle previsioni future in un dato istante t su un processo stocastico, si deve disporre di un certo insieme di informazioni \mathcal{F}_t al tempo t . Dal punto di vista matematico, le strutture informative \mathcal{F}_t sono sotto- σ -algebre di \mathcal{F} . In generale, quando si studiano i processi stocastici, si suppone di avere a disposizione una struttura informativa che varia al trascorrere del tempo: $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$, ossia una famiglia di strutture informative dipendente dal parametro t .

Definizione 1.12. Una *filtrazione* $\underline{\mathcal{F}} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$ in (Ω, \mathcal{F}, P) è una famiglia crescente di sotto- σ -algebre di \mathcal{F} tale che $\forall t \geq s \geq 0$ si ha $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$. Uno spazio di probabilità (Ω, \mathcal{F}, P) munito di una filtrazione è detto *spazio di probabilità filtrato* e lo indichiamo con $(\Omega, \mathcal{F}, \underline{\mathcal{F}}, P)$.

Dato un generico processo stocastico $\{X_t\}_{t \in I}$, un esempio importante si ottiene considerando la famiglia definita da $\mathcal{F}_t^X := \sigma(\{X_s\}_{0 \leq s \leq t})$, per ogni $t \in I$, detta *filtrazione naturale* associata ad X . Questa contiene, per ogni $t \in I$, la storia del processo stocastico X fino all'istante t , gli eventi esprimibili come funzione delle variabili X_s , con $s \leq t$.

Spesso è utile introdurre alcune ipotesi sullo spazio di probabilità filtrato, che enunciamo. Data $\underline{\mathcal{F}}$ una filtrazione su Ω , indichiamo con $\underline{\mathcal{F}}_+$ la famiglia definita da $\mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$ per ogni $t \in [0, T)$ e $\mathcal{F}_{T+} := \mathcal{F}_T$ se $T < \infty$, contenente le σ -algebre degli eventi immediatamente conoscibili dopo l'istante t , al variare di t in I . Si dice che $\underline{\mathcal{F}}$ è continua è *continua a destra* se, per ogni $t \in I$, si ha $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$. Indicato con $\mathcal{N} := \{A \in \mathcal{F} \mid P(A) = 0\}$ l'insieme degli eventi *trascurabili* di Ω , definiamo:

Definizione 1.13. Una filtrazione $\underline{\mathcal{F}}$ di Ω si dice *filtrazione standard* se

- i) $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{F}_0$,
- ii) $\underline{\mathcal{F}}$ è continua a destra.

In questo caso $(\Omega, \mathcal{F}, \underline{\mathcal{F}}, P)$ è detto *spazio di probabilità filtrato standard*.

Un processo è *adattato* ad una filtrazione se le informazioni che fornisce in ogni istante sono già contenute in quelle codificate dalla filtrazione.

Definizione 1.14. Data una filtrazione $\underline{\mathcal{F}}$ su Ω , il processo stocastico reale $X = \{X_t\}_{t \in I}$ si dice *adattato* a $\underline{\mathcal{F}}$ se X_t è \mathcal{F}_t -misurabile per ogni $t \in I$, ovvero l'applicazione $X_t : (\Omega, \mathcal{F}_t) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ è misurabile per ogni $t \in I$. Ciò equivale a chiedere che $\mathcal{F}_t^X \subseteq \mathcal{F}_t$ per ogni $t \in I$.

La definizione di processo stocastico reale $X : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ implica non solo che $X_t = X(t, \cdot)$ sia una v.c. per ogni $t \in I$, ma la condizione più forte di misurabilità nella coppia di variabili (t, ω) . Analogamente introduciamo una proprietà più forte dell'adattabilità.

Definizione 1.15. Data $\underline{\mathcal{F}}$ una filtrazione su Ω , il processo stocastico reale $X = \{X_t\}_{t \in I}$ si dice *progressivamente misurabile* rispetto a $\underline{\mathcal{F}}$ se $X_{|[0,t] \times \Omega}$ è $(\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t)$ -misurabile per ogni $t \in I$, i.e. l'applicazione

$$X : ([0,t] \times \Omega, \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$$

è misurabile per ogni $t \in I$.

Una martingala su uno spazio di probabilità filtrato è un processo stocastico reale adattato alla filtrazione il cui valore, in ogni istante t , coincide con il suo valore atteso in un istante futuro in base all'informazione disponibile in t . Intuitivamente, una martingala è un processo le cui traiettorie non mostrano, in media, un particolare "trend" (cioè andamento).

Definizione 1.16. Dato uno spazio di probabilità filtrato, diciamo che un processo stocastico $X = \{X_t\}_{t \in I}$ è una *P-martingala* o una *martingala* su $(\Omega, \mathcal{F}, \underline{\mathcal{F}}, P)$ se:

- M1 X è adattato ad $\underline{\mathcal{F}}$;
- M2 $X_t \in L^1(\Omega) \quad \forall t \in I$;
- M3 $E^P[X_T | \mathcal{F}_t] = X_t \quad \text{q.s.} \quad \forall t, T \quad \text{con} \quad 0 \leq t < T$.

Moti Browniani

Un moto Browniano è nato come un modello probabilistico del moto di una particella in un fluido e consiste in un processo stocastico definito in $[0, \infty)$ inizialmente nullo, con incrementi indipendenti stazionari Gaussiani centrati e traiettorie continue.

Definizione 1.17. Sia (Ω, \mathcal{F}, P) uno spazio di probabilità. Il processo stocastico reale $W = \{W_t\}_{t \geq 0}$ è detto *moto Browniano* su (Ω, \mathcal{F}, P) se

- B1 $W_0 = 0 \quad \text{q.s.}$;
- B2 l'applicazione $t \mapsto W_t$ è continua q.s., i.e. esiste $A \in \mathcal{F}$ tale che $P(A) = 1$ e $A \subseteq \{\omega \in \Omega \mid t \mapsto W_t(\omega) \text{ è continua}\}$;
- B3 gli incrementi di W_t sono indipendenti, ossia per ogni $n \geq 1$ e $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$, le variabili casuali $\{W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\}_{i=1, \dots, n}$ sono indipendenti;

B4 per ogni $0 \leq t < s$ gli incrementi $W_s - W_t$ hanno distribuzione gaussiana con media 0 e varianza $s - t$, ossia $W_s - W_t \sim N(0, s - t)$.

Se lavoriamo in uno spazio di probabilità filtrato, è utile rafforzare il concetto di moto Browniano richiedendo che le informazioni fornite dal processo siano coerenti con quelle della filtrazione.

Definizione 1.18. Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \underline{\mathcal{F}}, P)$ uno spazio di probabilità filtrato. Il processo stocastico reale $W = \{W_t\}_{t \geq 0}$ è detto *$\underline{\mathcal{F}}$ -moto Browniano* su (Ω, \mathcal{F}, P) se

B1* $W_0 = 0$ q.s.;

B2* W è adattato a $\underline{\mathcal{F}}$;

B3* per ogni $0 \leq t < s$, la variabile casuale $W_s - W_t$ è indipendente da \mathcal{F}_t e $W_s - W_t \sim N(0, s - t)$;

B4* l'applicazione $t \mapsto W_t$ è continua q.s.

La richiesta B2* è equivalente a chiedere che la filtrazione naturale di W sia contenuta nella filtrazione dello spazio. Nel caso in cui si verifichi l'uguaglianza $\mathcal{F}_t^W = \mathcal{F}_t$ per ogni $t \geq 0$, si ritrova la Definizione 1.17, per cui ogni moto Browniano W è anche un $\underline{\mathcal{F}}^W$ -moto Browniano.

Vediamo ora di introdurre filtrazioni standard nel caso particolare di un moto Browniano. Consideriamo allora un moto Browniano W definito su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}^W, P)$, con \mathcal{F}^W filtrazione naturale. Per rendere standard la filtrazione \mathcal{F}^W è sufficiente completarla con gli eventi trascurabili, dunque

$$\tilde{\mathcal{F}}_t^W := \sigma(\mathcal{F}_t^W \cup \mathcal{N})$$

e chiamiamo $\tilde{\mathcal{F}}^W = \{\tilde{\mathcal{F}}_t^W\}_{t \in I}$ *filtrazione Browniana*.

Definizione 1.19. La filtrazione $\tilde{\mathcal{F}}^W$ verifica le ipotesi *i)* e *ii)* della Definizione 1.13 e coincide con la filtrazione standard per W . Inoltre un moto Browniano W nello spazio $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{F}}^W, P)$ è detto *moto Browniano standard*.

Generalizziamo ulteriormente il concetto di moto Browniano considerando il processo che rappresenta il moto in uno spazio d -dimensionale.

Definizione 1.20. Sia (Ω, \mathcal{F}, P) uno spazio di probabilità. Il processo stocastico $W = (W^1 = \{W_t^1\}_{t \geq 0}, \dots, W^d = \{W_t^d\}_{t \geq 0})^T$ a valori in \mathbb{R}^d è detto *moto Browniano d -dimensionale* su (Ω, \mathcal{F}, P) se le sue componenti W^1, \dots, W^d sono moti Browniani reali indipendenti.

Il nostro intento consisterà nell'utilizzare moti Browniani per rappresentare i fattori di rischio che descrivono il comportamento dei prezzi delle opzioni.

Poichè tali sorgenti di incertezza, in generale, non sono tra loro indipendenti, estendiamo la nozione di moto browniano d -dimensionale al caso in cui le componenti abbiamo coefficienti di correlazioni non nulli. Ci limiteremo a considerare coefficienti costanti.

Definizione 1.21. Dato (Ω, \mathcal{F}, P) uno spazio di probabilità, diciamo che il processo stocastico $W = (W^1, \dots, W^d)^T$ a valori in \mathbb{R}^d è un *vettore d -dimensionale di moti Browniani correlati* o *moto Browniano d -dimensionale correlato* su (Ω, \mathcal{F}, P) se esistono $\bar{W} = (\bar{W}^1, \dots, \bar{W}^d)^T$ moto Browniano d -dimensionale e Γ matrice reale invertibile $d \times d$ tali che:

$$C1 \quad \forall i \in \underline{d} : |\Gamma^i| = 1;$$

$$C2 \quad W = \Gamma \bar{W}, \text{ i.e. } \forall i \in \underline{d} : W^i = \sum_{j=1}^d \Gamma^{ij} \bar{W}^j,$$

dove Γ^i indica la i -esima riga di Γ , $|\cdot|$ è la norma euclidea su \mathbb{R}^d e $\underline{d} = \{1, \dots, d\}$. Diciamo infine che il processo stocastico $W = (W^{hi})_{i=1, \dots, n}^{h=1, \dots, m}$ a valori nelle matrici $\mathbb{R}^{m \times n}$ è un *moto Browniano $(m \times n)$ -dimensionale correlato* su (Ω, \mathcal{F}, P) se il vettore colonna che si ottiene linearizzando per righe W è un moto Browniano mn -dimensionale correlato su (Ω, \mathcal{F}, P) .

Notiamo come si ricavi facilmente l'invertibilità della matrice Γ . Per la proprietà C2 infatti $W^h = \Gamma_1^h \bar{W}^1 + \Gamma_2^h \bar{W}^2 + \dots + \Gamma_d^h \bar{W}^d$ per ogni $h \in \underline{d}$. La matrice Γ è invertibile quando i d vettori dei coefficienti di queste combinazioni lineari sono linearmente indipendenti ovvero non esistono sorgenti di rischio \bar{W}^h per qualche $h = 1, \dots, d$ linearmente dipendenti.

Se W è un vettore d -dimensionale di moti Browniani correlati, indicheremo con $\rho = \text{Cor}(W) := (\text{Cor}(W^i, W^j))_{i,j=1, \dots, d}$ la *matrice di correlazione* di W . Si dimostra che $\rho = \Gamma \Gamma^T$ è una matrice simmetrica semidefinita positiva. Se $\rho = \Lambda \Lambda^T$ per una qualche matrice Λ , siamo in grado di trovare un vettore $\bar{W} = (\bar{W}^1, \dots, \bar{W}^d)^T$ di moti Browniani reali indipendenti tali che $W = \Lambda \bar{W}$. Ricordando la decomposizione di Cholesky, possiamo sempre ricondurci a considerare Λ una matrice triangolare inferiore, quando necessario.

1.3 Processi di Itô

Prima di definire un processo di Itô è indispensabile introdurre una classe di processi per i quali sia possibile considerare il concetto di integrale stocastico. Al fine di semplificare la notazione indichiamo lo spazio di probabilità filtrato solamente con $\Omega := (\Omega, \mathcal{F}, \underline{\mathcal{F}} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$, quando non vi è rischio di ambiguità. Consideriamo poi I un intervallo reale compatto della forma $[0, T]$.

Definizione 1.22. Sia Ω uno spazio di probabilità filtrato. Diremo che un processo stocastico reale $u = \{u_t\}_{t \in I}$ appartiene alla classe $\mathbb{L}^2(I, \Omega)$ se

L1 u è progressivamente misurabile rispetto ad \mathcal{F} ;

L2 $u \in L^2(I \times \Omega)$, i.e. esiste finito l'integrale $\int_I E[u_t^2]dt = \|u\|_{L^2(I \times \Omega)}^2$

Osserviamo che $\mathbb{L}^2(I, \Omega)$ è un sottospazio chiuso di $L^2(I \times \Omega)$. Il seguente teorema contiene alcune proprietà dell'integrale di Itô per i processi in $\mathbb{L}^2(I, \Omega)$. Per le funzioni $u \in L^2(I, \Omega)$ è ben definito l'integrale di Itô $\int_0^t u_s dW_s$.

Teorema 1.4. *Per ogni $u, v \in \mathbb{L}^2(I, \Omega)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $0 \leq a < b < T$, valgono le seguenti proprietà:*

(1) *linearità:*

$$\int_0^a (\alpha u_s + \beta v_s) dW_s = \alpha \int_0^a u_s dW_s + \beta \int_0^a v_s dW_s; \quad (1.3)$$

(2) *additività:*

$$\int_a^c u_t dW_t = \int_a^b u_t dW_t + \int_b^c u_t dW_t; \quad (1.4)$$

(3) *attesa nulla:*

$$E \left[\int_a^b u_s dW_s \mid \mathcal{F}_a \right] = 0, \quad (1.5)$$

in particolare

$$E \left[\int_0^T u_s dW_s \right] = 0; \quad (1.6)$$

(4) *Isometria di Itô:*

$$E \left[\int_a^b u_t dW_t \int_a^b v_t dW_t \mid \mathcal{F}_a \right] = E \left[\int_a^b u_t v_t dt \mid \mathcal{F}_a \right]. \quad (1.7)$$

Per l'Isometria di Itô e la proprietà (5) del Teorema 1.3 segue che:

$$E \left[\left(\int_a^b u_t dW_t \right)^2 \right] = E \left[\int_a^b u_t^2 dt \right]. \quad (1.8)$$

Introduciamo ora la classe $\mathbb{L}_{\text{loc}}^p(I, \Omega)$.

Definizione 1.23. Siano Ω uno spazio di probabilità filtrato e $p \geq 1$. Diremo che un processo stocastico reale $u = \{u_t\}_{t \in I}$ appartiene alla classe $\mathbb{L}_{\text{loc}}^p(I, \Omega)$ se

L1* u è progressivamente misurabile rispetto a \mathcal{F} ;

L2* $\int_I |u_t|^p dt < \infty$ q.s.

Per la disuguaglianza di Hölder si dimostra che, se $1 \leq p \leq q$, allora $\mathbb{L}_{\text{loc}}^q(I, \Omega) \subseteq \mathbb{L}_{\text{loc}}^p(I, \Omega)$. In particolare $\mathbb{L}^2(I, \Omega) \subseteq \mathbb{L}_{\text{loc}}^2(I, \Omega) \subseteq \mathbb{L}_{\text{loc}}^1(I, \Omega)$. Abbiamo ora tutti gli strumenti per definire un processo di Itô.

Definizione 1.24. Dati Ω uno spazio di probabilità filtrato e W un \mathcal{F} -moto Browniano su Ω , diciamo che un processo stocastico $X = \{X_t\}_{t \in I}$ è un *processo di Itô* su Ω definito in I rispetto a W se per ogni $t \in I$

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s \quad (1.9)$$

dove X_0 è una v.c. \mathcal{F}_0 -misurabile, $\mu \in \mathbb{L}_{\text{loc}}^1(I, \Omega)$ e $\sigma \in \mathbb{L}_{\text{loc}}^2(I, \Omega)$. Un'abbreviazione della precedente espressione usata comunemente è la forma differenziale

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t \quad \text{in } I. \quad (1.10)$$

Questa notazione consente di definire il processo X in modo univoco, una volta assegnato il valore iniziale X_0 . Il processo μ è detto *coefficiente di drift* (o semplicemente *drift*). Il processo σ è detto *coefficiente di diffusione*.

Intuitivamente il drift imprime la direzione al processo X , mentre il coefficiente di diffusione fornisce un contributo stocastico alla sua evoluzione. Si può dimostrare che la rappresentazione differenziale di un processo di Itô è unica, nel senso che μ e σ sono univocamente determinati a meno di processi uguali quasi ovunque su $I \times \Omega$. Per i nostri scopi è importante osservare che, se un processo di Itô è una martingala, allora il drift deve essere nullo.

Uno strumento importante nella nostra analisi è il processo variazione quadratica di X . Indichiamo l'insieme delle *partizioni* dell'intervallo $I = [0, T]$ con

$$\mathcal{P}(I) := \{\pi = (t_0, \dots, t_N) \in \mathbb{R}_{N+1} \mid N \geq 1, 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T\}$$

e con $|\pi| := \max_{l \in \underline{N}} (t_l - t_{l-1})$ l'*ampiezza* o *passo* della partizione π . Rappresentiamo l'insieme delle partizioni *equispaziate* di passo $\epsilon > 0$ con

$$\mathcal{P}(I, \epsilon) := \{\pi = (t_0, \dots, t_N) \in \mathcal{P}(I) \mid \forall l \in \underline{N} : t_l - t_{l-1} = \epsilon\}.$$

Abbiamo tutto il necessario per definire il processo di co-variazione quadratica di X ed Y ed il processo di variazione quadratica di X , quando X ed Y sono due processi di Itô.

Definizione 1.25. Dati Ω uno spazio di probabilità filtrato, W un \mathcal{F} -moto Browniano su Ω ed X, Y due processi di Itô, chiamiamo *co-variazione quadratica* di X ed Y rispetto ad Ω il processo definito ponendo, per ogni $t \in I$

$$\langle X, Y \rangle_t := \lim_{|\pi| \rightarrow 0, \pi \in \mathcal{P}([0, t])} \sum_{l=1}^N (X_{t_l} - X_{t_{l-1}})(Y_{t_l} - Y_{t_{l-1}}) \quad \text{q.s.} \quad (1.11)$$

Definiamo inoltre *variazione quadratica* di X rispetto a Ω il processo che otteniamo ponendo, per ogni $t \in I$

$$\langle X \rangle_t := \langle X, X \rangle_t = \lim_{\substack{|\pi| \rightarrow 0, \\ \pi \in \mathcal{P}([0, t])}} \sum_{l=1}^N (X_{t_l} - X_{t_{l-1}})^2 \quad \text{q.s.} \quad (1.12)$$

Variazione e co-variazione quadratica di processi di Itô si possono esprimere in forma integrale

Proposizione 1.5 (Proprietà caratteristica della co-variazione quadratica). *Se Ω è uno spazio di probabilità filtrato, W è un \mathcal{F} -moto Browniano su Ω ed X, Y sono due processi di Itô aventi decomposizioni $dX_t = \mu_t^X dt + \sigma_t^X dW_t$ e $dY_t = \mu_t^Y dt + \sigma_t^Y dW_t$, allora per ogni $t \in I$*

$$\langle X, Y \rangle_t = \int_0^t \sigma_s^X \sigma_s^Y ds, \quad (1.13)$$

$$\langle X \rangle_t = \int_0^t (\sigma_s^X)^2 ds, \quad (1.14)$$

o, in termini differenziali, $d\langle X, Y \rangle_t = \sigma_t^X \sigma_t^Y dt$ e $d\langle X \rangle_t = (\sigma_t^X)^2 dt$.

In particolare, per il moto Browniano considerato W la sua variazione quadratica risulta, in forma differenziale, $d\langle W \rangle_t = dt$.

Ci occupiamo ora di definire il processo di Itô a valori vettoriali.

Definizione 1.26. Dati Ω uno spazio di probabilità filtrato e W un moto Browniano d -dimensionale su Ω , diciamo che un processo $X = (X^1 = \{X_t^1\}_{t \in I}, \dots, X^n = \{X_t^n\}_{t \in I})^T$ a valori nei vettori colonna n -dimensionali reali è un *processo di Itô a valori in \mathbb{R}^n* su Ω definito in I rispetto a W se per ogni $t \in I$

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t \mu_s^i ds + \int_0^t \sigma_s^i dW_s \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad (1.15)$$

ovvero in forma vettoriale

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s, \quad (1.16)$$

dove $X_0 = (X_0^1, \dots, X_0^n)^T$ è una v.c. \mathcal{F}_0 -misurabile, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T \in \mathbb{L}_{\text{loc}}^1(I, \Omega; \mathbb{R}^n)$, $\sigma \in \mathbb{L}_{\text{loc}}^2(I, \Omega; \mathbb{R}^{n \times d})$ ed indichiamo con $\sigma^1, \dots, \sigma^n$ le righe di σ . Abbreviamo l'equazione (1.16) in forma differenziale scrivendo

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t \quad \text{in } I, \quad (1.17)$$

o, più esplicitamente

$$dX_t^i = \mu_t^i dt + \sum_{j=1}^d \sigma_t^{ij} dW_t^j, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.18)$$

Questa notazione consente di definire il processo X in modo univoco, una volta assegnato il valore iniziale X_0 . I processi μ e σ sono detti rispettivamente *coefficiente di drift* (o semplicemente *drift*) e *coefficiente di diffusione* di X .

Possiamo estendere la definizione di co-variazione quadratica al caso di processi di Itô scalari (in \mathbb{R}) guidati da moti Browniani correlati tramite la seguente proposizione.

Proposizione 1.6 (Proprietà caratteristica della co-variazione quadratica). *Se Ω è uno spazio di probabilità filtrato, W è un moto Browniano d -dimensionale correlato su Ω ed X, Y sono due processi di Itô con decomposizioni $dX_t = \mu_t^X dt + \sigma_t^X dW_t$ e $dY_t = \mu_t^Y dt + \sigma_t^Y dW_t$, allora per ogni $t \in I$*

$$\langle X, Y \rangle_t = \int_0^t \Lambda_s^{XY} ds, \quad (1.19)$$

$$\langle X \rangle_t = \int_0^t (\Sigma_s^X)^2 ds, \quad (1.20)$$

dove $R := \text{Cor}(W)$, $\Sigma^{XY} := \sqrt{\sigma^X R (\sigma^Y)^T}$, $\Sigma^X := \Sigma^{XX}$, $\Sigma^Y := \Sigma^{YY}$ e $\Lambda^{XY} := \frac{1}{2}[(\Sigma^{XY})^2 - (\Sigma^X)^2 - (\Sigma^Y)^2]$. Possiamo esprimere il risultato in forma differenziale come $d\langle X, Y \rangle_t = \Lambda_t^{XY} dt$ e $d\langle X \rangle_t = (\Sigma_t^X)^2 dt$.

Infine osserviamo che se X ed Y sono due processi di Itô a valori vettoriali $X = (X^1, \dots, X^n)$ ed $Y = (Y^1, \dots, Y^m)$ allora valgono le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} \langle X, Y \rangle_t &= (\langle X^i, Y^j \rangle_t)_{\substack{i=1, \dots, n, \\ j=1, \dots, m}}, \\ \langle X \rangle_t &= (\langle X^i, X^j \rangle_t)_{i,j=1, \dots, n}. \end{aligned}$$

Formula di Itô

Un altro strumento essenziale per la nostra analisi è la formula di Itô, attraverso cui è possibile derivare la dinamica del processo che si ottiene componendo un processo di Itô X_t ed una funzione $f(t, x)$ di classe $C^{1,2}$.

Teorema 1.7 (Formula di Itô). *Siano Ω uno spazio di probabilità filtrato, W un $\underline{\mathcal{F}}$ -moto Browniano su Ω , $f \in C^{1,2}(I \times \mathbb{R})$ ed X un processo di Itô della forma (1.10). Allora*

$$Y_t = f(t, X_t), \quad t \in I,$$

è ancora un processo di Itô e soddisfa l'equazione

$$df(t, X_t) = \partial_t f(t, X_t) dt + \partial_x f(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} \partial_{xx} f(t, X_t) d\langle X \rangle_t. \quad (1.21)$$

In seguito indicheremo la funzione $f(t, X_t) \in C^{1,2}$ solamente con f , ove non vi è rischio di ambiguità.

Osservazione 2. Per la Proposizione 1.5 si ha

$$d\langle X \rangle_t = \sigma_t^2 dt,$$

dunque possiamo riscrivere la formula (1.21) come segue

$$df = \left(\partial_t f + \mu_t \partial_x f + \frac{1}{2} \sigma_t^2 \partial_{xx} f \right) dt + \sigma_t \partial_x f dW_t. \quad (1.22)$$

Consideriamo un processo di Itô a valori vettoriali $X = (X^1, \dots, X^n)^T$ le cui componenti hanno differenziali stocastici della forma

$$dX_t^i = \mu_t^i dt + \sum_{j=1}^d \sigma_t^{ij} dW_t^j, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.23)$$

e W^1, \dots, W^d sono d moti Browniani *indipendenti*. Il vettore drift μ , il moto Browniano d -dimensionale W e la matrice $(n \times d)$ -dimensionale σ hanno la seguente rappresentazione matriciale:

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu^1 \\ \vdots \\ \mu^n \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} W^1 \\ \vdots \\ W^d \end{bmatrix}, \quad \sigma = \begin{bmatrix} \sigma^{11} & \sigma^{12} & \dots & \sigma^{1d} \\ \sigma^{21} & \sigma^{22} & \dots & \sigma^{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma^{n1} & \sigma^{n2} & \dots & \sigma^{nd} \end{bmatrix}.$$

Lemma 1.8. *Sia X un processo di Itô della forma (1.23) e sia*

$$C = \sigma \sigma^T.$$

Allora si ha

$$\langle X^i, X^j \rangle_t = \int_0^t C_s^{ij} ds, \quad t \in I,$$

o, in termini differenziali,

$$d\langle X \rangle_t = C_t dt.$$

Teorema 1.9 (Formula di Itô multidimensionale). *Siano Ω uno spazio di probabilità filtrato, W un moto Browniano d -dimensionale su Ω , $f \in C^{1,2}(I \times \mathbb{R}^n)$ ed X un processo di Itô a valori vettoriali della forma (1.23). Allora*

$$Y_t = f(t, X_t) \quad t \in I$$

è ancora un processo di Itô e soddisfa l'equazione

$$df = \partial_t f dt + \nabla f \cdot dX_t + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i x_j} f d\langle X^i, X^j \rangle_t, \quad (1.24)$$

dove $\nabla f = (\partial_{x_1} f, \dots, \partial_{x_n} f)$.

Possiamo riscrivere la formula di Itô multidimensionale in forma compatta grazie al Lemma 1.8 ottenendo

$$df = \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n C_t^{ij} \partial_{x_i x_j} f + \sum_{i=1}^n \mu_t^i \partial_{x_i} f + \partial_t f \right) dt + \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^d \partial_{x_i} f \sigma_t^{ih} dW_t^h. \quad (1.25)$$

In alternativa, si arriva alla forma differenziale (1.25) riscrivendo il termine $d\langle X^i, X^j \rangle_t$ come

$$d\langle X^i, X^j \rangle_t = dX_t^i dX_t^j,$$

in cui il prodotto a destra dell'uguaglianza segue le seguenti regole formali:

$$dt dt = dt dW^i = dW^i dt = 0, \quad dW^i dW^j = \epsilon_{ij} dt$$

e ϵ_{ij} è il delta di Kronecker

$$\epsilon_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Consideriamo infine il caso di moto Browniani correlati. Sia $W = (W^1, \dots, W^n)^T = \delta \bar{W}$ un moto Browniano correlato con matrice di correlazione $\rho = \delta \delta^T$. La matrice δ e i moti Browniani W, \bar{W} hanno la seguente rappresentazione matriciale:

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta^{11} & \delta^{12} & \dots & \delta^{1d} \\ \delta^{21} & \delta^{22} & \dots & \delta^{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta^{n1} & \delta^{n2} & \dots & \delta^{nd} \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} W^1 \\ \vdots \\ W^n \end{bmatrix}, \quad \bar{W} = \begin{bmatrix} \bar{W}^1 \\ \vdots \\ \bar{W}^d \end{bmatrix}.$$

Teorema 1.10 (Formula di Itô multidimensionale con moti Browniani correlati). *Siano Ω uno spazio di probabilità filtrato, $W = (W^1, \dots, W^n)^T = \delta \bar{W}$ un moto Browniano correlato su Ω con matrice di correlazione $\rho = \delta \delta^T$, $f \in C^{1,2}(I \times \mathbb{R}^n)$ ed X un processo di Itô a valori vettoriali della forma (1.23). Allora*

$$Y_t = f(t, X_t), \quad t \in I,$$

è ancora un processo di Itô e soddisfa l'equazione

$$df = \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \rho^{ij} \sigma_t^i \sigma_t^j \partial_{x_i x_j} f + \sum_{i=1}^n \mu_t^i \partial_{x_i} f + \partial_t f \right) dt + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} f \sigma_t^i dW_t^i. \quad (1.26)$$

Misura Martingala Equivalente

Consideriamo un mercato in cui sono presenti N titoli rischiosi e d fattori di rischio rappresentati da un moto Browniano d -dimensionale standard sullo spazio $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{F}}^W, P)$. Per semplicità assumiamo $N < d$.

Indichiamo con S_t^i il prezzo al tempo $t \in [0, T]$ dell' i -esimo titolo rischioso e supponiamo che

$$S_t^i = e^{X_t^i} \quad i = 1, \dots, N,$$

dove $X = (X^1, \dots, X^N)$ è un processo di Itô della forma

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dW_t.$$

I coefficienti b e σ del processo hanno valori rispettivamente in \mathbb{R}^N e nello spazio delle matrici di dimensione $N \times d$. Inoltre $b, \sigma \in \mathbb{L}^\infty(I, \Omega)$, ossia sono processi progressivamente misurabili e limitati: esiste una costante C tale che

$$|b_t| + |\sigma_t| \leq C, \quad t \in [0, T], \text{ q.s.}$$

Allora per la formula di Itô vale

$$dS_t^i = \mu_t^i S_t^i dt + \sum_{j=1}^d S_t^i \sigma_t^{ij} dW_t^j,$$

per $i = 1, \dots, N$.

Indichiamo con B il prezzo del titolo non rischioso e supponiamo che soddisfi l'equazione

$$dB_t = r_t B_t dt,$$

con $r \in \mathbb{L}^\infty(I, \Omega)$, in altri termini

$$B_t = e^{\int_0^t r_s ds}, \quad t \in [0, T].$$

Date queste premesse, enunciamo la definizione di misura martingala equivalente (abbreviato EMM).

Definizione 1.27. Una *misura martingala equivalente* Q o semplicemente *misura martingala* è una misura di probabilità su (Ω, \mathcal{F}) tale che

i) Q è equivalente a P , i.e.

$$Q(A) = 0 \iff P(A) = 0, \quad A \in \mathcal{F}.$$

ii) Il processo dei prezzi scontati

$$\tilde{S}_t := e^{-\int_0^t r_s ds} S_t, \quad t \in [0, T],$$

è una Q -martingala. In particolare vale la formula di valutazione neutrale al rischio:

$$S_t = E^Q \left[e^{-\int_t^T r_s ds} S_T \mid \tilde{\mathcal{F}}_t^W \right], \quad t \in [0, T]. \quad (1.27)$$

Di conseguenza per la proprietà martingala vale

$$E^Q \left[e^{-\int_0^T r_s ds} S_T \right] = E^Q \left[E^Q \left[e^{-\int_0^T r_s ds} S_T \mid \tilde{\mathcal{F}}_0^W \right] \right] = S_0. \quad (1.28)$$

La formula (1.28) ha un'importante interpretazione economica: essa esprime il fatto che il valore atteso dei prezzi futuri scontati è uguale al prezzo attuale. Dunque la (1.28) costituisce una *formula di valutazione neutrale al rischio*: il valore atteso del prezzo S_T scontato nella misura Q corrisponde al valore attribuito da un investitore che pensa che il prezzo attuale di mercato del titolo sia corretto (dunque non è propenso nè avverso ad acquistare il titolo).

Capitolo 2

Metodo della trasformata di Fourier

Il primo modello per la valutazione delle opzioni fu opera di Black&Scholes (1973) e Merton (1973). Essi utilizzarono il moto geometrico Browniano per descrivere la dinamica del prezzo azionario. Tuttavia, è ben noto tra gli operatori del mercato che l'ipotesi dei rendimenti log-normali del prezzo azionario soffre di gravi carenze che danno luogo ad incongruenze, come mostrato dagli smiles nella curva di volatilità implicita. Il primo rimedio per risolvere tale difetto è stato l'introduzione della dipendenza temporale nella volatilità della dinamica del prezzo azionario. In altre parole, alcuni ricercatori considerarono la volatilità dei rendimenti azionari come un processo stocastico. Esempi di questi lavori pionieristici sui modelli a volatilità stocastica sono segnalati da Stein&Stein (1991), Heston (1993) e Naik (2000). Partendo da un articolo a cura di Merton (1976), vengono poi introdotti i salti nei modelli stocastici. Più recentemente, gli studiosi si sono interessati di modelli per la valutazione delle opzioni i cui processi sono processi di Lévy.

I metodi della trasformata di Fourier si sono dimostrati essere un approccio efficace per la valutazione delle opzioni la cui dinamica del prezzo azionario segue un processo stocastico. In sostituzione del calcolo diretto dell'attesa condizionata scontata che coinvolge il prodotto della funzione payoff e della funzione densità di un processo stocastico, può essere più facile calcolare l'integrale della loro trasformata di Fourier, in quanto la funzione caratteristica (i.e. la trasformata di Fourier della funzione densità) di un processo stocastico è più trattabile rispetto alla funzione densità stessa.

In questo capitolo, dimostriamo l'utilizzo efficace del metodo della trasformata di Fourier come strumento per determinare il prezzo delle opzioni. Assieme con un algoritmo d'inversione di Fourier, come ad esempio la Fast Fourier Transform (abbreviato FFT), siamo in grado di calcolare in tempo reale il prezzo delle opzioni.

2.1 Funzione caratteristica

In questo paragrafo introduciamo le notazioni e calcoliamo la funzione caratteristica $\hat{\Gamma}(t, \xi, \omega)$, (i.e. la trasformata di Fourier-Laplace della densità di transizione Γ), del processo 2-dimensionale (X_t, v_t) quando la funzione di volatilità σ è costante. Indichiamo con X_t il log-prezzo di un'attività sottostante $X_t = \log S_t$ e con v_t la varianza di X_t .

Assumiamo che il processo X_t segua la seguente dinamica risk-neutral

$$\begin{cases} dX_t = \left(\bar{r} - \mu_1 - \frac{\sigma^2(t, X_{t-})v_t}{2} \right) dt + \sigma(t, X_{t-})\sqrt{v_t}dW_t^1 + dZ_t \\ dv_t = k(\theta - v_t)dt + \eta\sqrt{v_t} \left(\rho dW_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2}dW_t^2 \right) \end{cases} \quad (2.1)$$

dove $W = (W^1, W^2)^T$ è un moto Browniano standard bidimensionale su uno spazio di probabilità filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{F}}^W, P)$ con le usuali assunzioni sulla filtrazione, \bar{r} verrà definito nella Proposizione 2.1 e Z è un processo di Lévy a salti, indipendente da W , avente tripla $(\mu_1, 0, \nu)$.

Ricordiamo che processo di Lévy a salti avente tripla $(\mu_1, 0, \nu)$ significa che

$$Z_t = \mu_1 t + \int_0^t \int_{|y| \geq 1} y J(ds, dy) + \int_0^t \int_{|y| < 1} y \tilde{J}(ds, dy), \quad (2.2)$$

dove J e \tilde{J} sono rispettivamente la misura salto e la misura salto compensata del processo Z . Non approfondiamo ulteriormente la teoria sui processi di Lévy in quanto, al fine della nostra trattazione, non è vincolante nei calcoli a seguire. Per lo studio dei processi di Lévy si può vedere Pascucci [17].

Le quantità rilevanti nel sistema (2.1) sono:

- la funzione di volatilità locale σ ;
- i parametri di varianza: la varianza iniziale v_0 , la velocità di ritorno alla media k , la varianza a lungo termine θ , la vol-of-vol η e la correlazione ρ ;
- la misura di Lévy ν .

Prendiamo in considerazione questo modello poichè è abbastanza generale da includere molti altri modelli classici. Alcuni di questi sono:

- ◊ *nel caso diffusivo* ($\nu \equiv 0$): il modello di Heston (con σ costante), il modello LSV “quadratico”, il modello CEV-Heston.
- ◊ *nel caso di modelli con salti*: il modello di Merton e Bates (con σ costante e misura di Lévy ν Gaussiana) e il modello di Lévy locale (con $k = \eta = 0$, funzione di volatilità generica locale σ e misura di Lévy ν).

Indichiamo con $\Gamma = \Gamma(x, v; t, y, w)$ la densità di transizione del processo $(X_t, v_t)_{t \geq 0}$ in (2.1) che parte dal punto $(x, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ all'istante $t = 0$.

Poichè il punto iniziale (x, v) è fissato una volta per tutte, possiamo utilizzare la notazione abbreviata $\Gamma(t, y, w)$ al posto di $\Gamma(x, v; t, y, w)$.

Indichiamo con r e q rispettivamente i coefficienti tasso d'interesse e rendimento dei dividendi. Il coefficiente \bar{r} in (2.1) è determinato nella proposizione seguente.

Proposizione 2.1. *Supponiamo che il prezzo azionario scontato $\tilde{S}_t := e^{-(r-q)t+X_t}$ sia una martingala. Allora \bar{r} assume la forma*

$$\bar{r} = r - q - \int_{\mathbb{R}} (e^y - 1 - y \mathbb{1}_{\{|y| < 1\}}) \nu(dy). \quad (2.3)$$

Dimostrazione. Consideriamo il seguente modello del log-prezzo X_t e della sua varianza v_t

$$\begin{cases} dX_t = \mu(t, X_{t-}, v_t)dt + \sigma(t, X_{t-})\sqrt{v_t}dW_t^1 + dZ_t \\ dv_t = k(\theta - v_t)dt + \eta\sqrt{v_t}(\rho dW_t^1 + \sqrt{1-\rho^2}dW_t^2). \end{cases} \quad (2.4)$$

Ricordando la rappresentazione del processo Z data dall'equazione (2.2) otteniamo

$$dX_t = \tilde{\mu}(t, X_{t-}, v_t)dt + \sigma(t, X_{t-})\sqrt{v_t}dW_t^1 + \int_{\mathbb{R}} y\tilde{J}(dt, dy), \quad (2.5)$$

dove

$$\tilde{\mu}(t, X_{t-}, v_t) = \mu(t, X_{t-}, v_t) + \mu_1 + \int_{|y| \geq 1} y\nu(dy). \quad (2.6)$$

Per la formula di Itô nel caso di equazioni differenziali stocastiche con salti (si veda, per esempio, la formula (14.63) in [17]), si ha

$$\begin{aligned} de^{X_{t-}} &= e^{X_{t-}} \left(\tilde{\mu}(t, X_{t-}, v_t) + \frac{\sigma^2(t, X_{t-})v_t}{2} + \int_{\mathbb{R}} (e^y - 1 - y)\nu(dy) \right) dt + \\ &+ \sigma(t, X_{t-})\sqrt{v_t}e^{X_{t-}}dW_t^1 + e^{X_{t-}} \int_{\mathbb{R}} (e^y - 1)\tilde{J}(dt, dy). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Ora applichiamo la formula di Itô al processo $\tilde{S}_t = f(t, S_t) = e^{-(r-q)t}S_t$ e per ipotesi uguagliamo a 0 il coefficiente di drift. Si deduce

$$\begin{aligned} r - q &= \tilde{\mu}(t, X_{t-}, v_t) + \frac{\sigma^2(t, X_{t-})v_t}{2} + \int_{\mathbb{R}} (e^y - 1 - y)\nu(dy) \\ &= \mu(t, X_{t-}, v_t) + \mu_1 + \frac{\sigma^2(t, X_{t-})v_t}{2} + \int_{\mathbb{R}} (e^y - 1 - y \mathbb{1}_{\{|y| < 1\}})\nu(dy) \end{aligned} \quad (2.8)$$

e, dal cambio della misura, la prima equazione del sistema (2.4) diventa

$$dX_t = \left(\bar{r} - \mu_1 - \frac{\sigma^2(t, X_{t-})v_t}{2} \right) dt + \sigma(t, X_{t-})\sqrt{v_t}dW_t^1 + dZ_t \quad (2.9)$$

con \bar{r} come nell'equazione (2.3). \square

Nel seguito supporremo uguale ad 1 il parametro vol-of-vol nel sistema (2.1), cioè

$$\eta = 1.$$

Questa ipotesi non comporta alcuna restrizione dato che, considerando eventualmente le funzioni

$$v_t = \eta^2 \tilde{v}_t, \quad \sigma(x) = \frac{\tilde{\sigma}(x)}{\eta}, \quad \theta = \eta^2 \tilde{\theta}, \quad (2.10)$$

il sistema (2.1) si trasforma in

$$\begin{cases} dX_t = \left(\bar{r} - \mu_1 - \frac{\tilde{\sigma}^2(X_{t-}) \tilde{v}_t}{2} \right) dt + \tilde{\sigma}(X_{t-}) \sqrt{\tilde{v}_t} dW_t^1 + dZ_t \\ d\tilde{v}_t = k(\tilde{\theta} - \tilde{v}_t) dt + \sqrt{\tilde{v}_t} \left(\rho dW_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} dW_t^2 \right) \end{cases} \quad (2.11)$$

dove per semplicità abbiamo supposto σ indipendente dal tempo.

La funzione caratteristica del processo (X_t, v_t) è definita come la trasformata di Fourier-Laplace di Γ :

$$\hat{\Gamma}(t, \xi, \omega) = E \left[e^{i\xi X_t - \omega v_t} \right] := \int_{\mathbb{R}} \int_0^{\infty} e^{i\xi y - \omega w} \Gamma(t, y, w) dy dw, \quad (2.12)$$

per $(\xi, \omega) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

Teorema 2.2. *Assumiamo in (2.1) $\nu = 0$ e il coefficiente di volatilità σ costante*

$$\sigma \equiv \bar{\sigma}_0. \quad (2.13)$$

Allora la funzione caratteristica $\hat{\Gamma}_0$ risolve il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} -Y \hat{\Gamma}_0(t, \xi, \omega) + A(\xi, \omega) \hat{\Gamma}_0(t, \xi, \omega) = 0, & (t, \xi, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ \hat{\Gamma}_0(0, \xi, \omega) = e^{ix\xi - v\omega}, & (\xi, \omega) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \end{cases} \quad (2.14)$$

dove

$$A(\xi, \omega) = -k\theta\omega + i\bar{r}\xi \quad (2.15)$$

e Y è l'operatore differenziale del prim'ordine

$$Y = \partial_t + B(\xi, \omega) \partial_\omega \quad (2.16)$$

con

$$B(\xi, \omega) = \alpha(\xi) - \beta(\xi)\omega + \frac{\omega^2}{2}, \quad (2.17)$$

$$\alpha(\xi) = -\frac{\sigma^2}{2} \xi(\xi + i), \quad \beta(\xi) = i\xi\rho\sigma - k. \quad (2.18)$$

Dimostrazione. Poniamo $U_t = f(X_t, v_t) = e^{i\xi X_t - \omega v_t}$. Ora applichiamo la formula di Itô N -dimensionale nel caso di un moto Browniano d -dimensionale per $N = d = 2$. Essa ha forma generale data dall'equazione (1.24). Poichè il processo U_t è indipendente dal tempo otteniamo

$$dU_t = i\xi U_t dX_t - \omega U_t dv_t - \frac{1}{2} \xi^2 U_t \sigma^2 v_t - \omega i \xi U_t (\rho \sigma v_t) + \frac{1}{2} \omega^2 U_t v_t dt, \quad (2.19)$$

da cui

$$\begin{aligned} dU_t = U_t & \left\{ i\xi \left(\bar{r} - \mu_1 - \frac{\sigma^2 v_t}{2} \right) dt + i\xi \left(\sigma \sqrt{v_t} dW_t^1 \right) + i\xi \mu_1 dt - \right. \\ & - \omega k(\theta - v_t) dt - \omega \sqrt{v_t} (\rho dW_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} dW_t^2) - \frac{1}{2} \xi^2 \sigma^2 v_t dt - \\ & \left. - \omega i \xi \rho \sigma v_t dt + \frac{1}{2} \omega^2 v_t dt \right\}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Semplificando risulta

$$dU_t = (B(\xi, \omega) v_t + A(\xi, \omega)) U_t dt + dM_t, \quad (2.21)$$

dove

$$M_t = \int_0^t U_{s-} \sqrt{v_s} \left((i\xi \sigma - \omega \rho) dW_s^1 - \omega \sqrt{1 - \rho^2} dW_s^2 \right)$$

è una martingala locale. Per di più, M è anche una martingala esatta poichè grazie ad una proprietà dell'isometria di Itô¹

$$\begin{aligned} E [M_t^2] &= E \left[\int_0^t |U_{s-}|^2 v_s ds \right] = E \left[\int_0^t e^{-2\omega v_s} v_s ds \right] \leq E \left[\int_0^t \frac{1}{2e\omega} ds \right] = \\ &= \frac{t}{2e\omega} < \infty \end{aligned} \quad (2.22)$$

per ogni $\xi \in \mathbb{R}$. Quindi, se si considera l'aspettativa condizionata di (2.21), ricordando che $E[M_t] = 0$, otteniamo

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_0(t, \xi, \omega) &= E [U_t] = e^{i\xi \bar{r} - \omega v} + E \left[\int_0^t U_{s-} v_s B(\xi, \omega) ds \right] + E \left[\int_0^t U_{s-} A(\xi, \omega) ds \right] \\ &= e^{i\xi \bar{r} - \omega v} - \int_0^t B(\xi, \omega) \partial_\omega \hat{\Gamma}_0(s, \xi, \omega) ds + \int_0^t A(\xi, \omega) \hat{\Gamma}_0(s, \xi, \omega) ds. \end{aligned}$$

Nell'equazione sopra abbiamo cambiato l'ordine d'integrazione e ricordato che per quasi ogni $s \in [0, t]$ vale $U_{s-} v_s = U_s v_s = -\partial_\omega U_s$.

Differenziamo rispetto a t e concludiamo che

$$\partial_t \hat{\Gamma}_0(t, \xi, \omega) = -B(\xi, \omega) \partial_\omega \hat{\Gamma}_0(t, \xi, \omega) + A(\xi, \omega) \hat{\Gamma}_0(t, \xi, \omega),$$

da cui la tesi

$$Y \hat{\Gamma}_0(t, \xi, \omega) - A(\xi, \omega) \hat{\Gamma}_0(t, \xi, \omega) = 0.$$

□

¹Equazione (1.7)

Vogliamo ora determinare le soluzioni del problema di Cauchy (2.14). Possiamo risolvere il sistema con il classico metodo delle caratteristiche: precisamente cerchiamo una curva

$$\begin{aligned} \gamma^{t,\omega,\xi} : [0, T] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\mapsto (t, \omega) \end{aligned}$$

e una funzione $\Psi_0^\xi(t, \omega)$ tale che posto

$$\hat{\Gamma}_0^\xi(t, \omega) = e^{\Psi_0^\xi(t, \omega)}, \quad (2.23)$$

valgano determinate proprietà. Per brevità omettiamo la dipendenza di γ da t, ω, ξ e scriviamo $\gamma(s) = \gamma^{t,\omega,\xi}(s)$. Derivando rispetto ad s otteniamo

$$\frac{d}{ds} \hat{\Gamma}_0^\xi(\gamma(s)) = \hat{\Gamma}_0^\xi(\gamma(s)) \frac{d}{ds} \hat{\Psi}_0^\xi(\gamma(s)). \quad (2.24)$$

Possiamo riscrivere il termine a sinistra dell'uguaglianza precedente come

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \hat{\Gamma}_0^\xi(\gamma(s)) &= \frac{d}{ds} \hat{\Gamma}_0^\xi(\gamma_1(s), \gamma_2(s)) \\ &= \partial_t \hat{\Gamma}_0^\xi(\gamma_1(s), \gamma_2(s)) \gamma_1'(s) + \partial_\omega \hat{\Gamma}_0^\xi(\gamma_1(s), \gamma_2(s)) \gamma_2'(s) \\ &= -B^\xi(\gamma_2(s)) \partial_\omega \hat{\Gamma}_0^\xi(\gamma(s)) \gamma_1'(s) + A^\xi(\gamma_2(s)) \hat{\Gamma}_0^\xi(\gamma(s)) \gamma_1'(s) \\ &\quad + \partial_\omega \hat{\Gamma}_0^\xi(\gamma(s)) \gamma_2'(s). \end{aligned}$$

Raccogliendo il termine $\partial_\omega \hat{\Gamma}_0^\xi(\gamma(s))$ l'uguaglianza (2.24) diventa

$$\partial_\omega \hat{\Gamma}_0^\xi(\gamma(s)) [\gamma_2'(s) - B^\xi \gamma_1'(s)] = \hat{\Gamma}_0^\xi(\gamma(s)) \left[\frac{d}{ds} \Psi_0^\xi(\gamma(s)) - A^\xi \gamma_1'(s) \right]. \quad (2.25)$$

Dunque possiamo prendere

$$\begin{cases} \gamma_1'(s) = 1 \\ \gamma_2'(s) = B^\xi(\gamma_2(s)) \\ \frac{d}{ds} \Psi_0^\xi(\gamma(s)) = A^\xi(\gamma_2(s)), \end{cases}$$

o equivalentemente

$$\begin{cases} \gamma_1(t) = t \\ \gamma_2(t) = \gamma_2(0) + \int_0^t B^\xi(\gamma_2(s)) ds \\ \Psi_0^\xi(\gamma(t)) = \Psi_0^\xi(\gamma(0)) + \int_0^t A^\xi(\gamma_2(s)) ds. \end{cases} \quad (2.26)$$

Nella proposizione seguente troviamo la forma esplicita della curva $\gamma^{t,\omega,\xi}$ e della funzione $\Psi_0^\xi(t, \omega)$.

Proposizione 2.3. *Si ha*

$$\gamma^{t,\omega,\xi}(s) = \left(s, \frac{b(\xi)g(\xi,\omega)e^{-D(\xi)(t-s)} - a(\xi)}{g(\xi,\omega)e^{-D(\xi)(t-s)} - 1} \right), \quad (2.27)$$

dove

$$g(\xi,\omega) = \frac{a(\xi) - \omega}{b(\xi) - \omega} \quad (2.28)$$

e

$$a(\xi) = \beta(\xi) + D(\xi), \quad b(\xi) = \beta(\xi) - D(\xi), \quad D(\xi) = \sqrt{\beta(\xi)^2 - 2\alpha(\xi)}. \quad (2.29)$$

Inoltre l'espressione esplicita di Ψ_0 in (2.23) è data da

$$\begin{aligned} \Psi_0^\xi(t,\omega) &= ix\xi - v\gamma_2^{t,\omega,\xi}(0) + ti\xi\bar{r} - \\ &\quad - k\theta(a(\xi)t - 2 \log I_1(t,\xi,\omega)), \end{aligned} \quad (2.30)$$

con

$$I_1(t,\xi,\omega) = \frac{g(\xi,\omega) - 1}{g(\xi,\omega)e^{-D(\xi)t} - 1}. \quad (2.31)$$

Dimostrazione. Riscriviamo il termine $B(\xi,\omega)$ in (2.17) come

$$B(\xi,\omega) = \frac{1}{2}(\omega - a(\xi))(\omega - b(\xi)). \quad (2.32)$$

Allora dall'equazione del prim'ordine

$$\gamma_2'(x) = \frac{1}{2}(\gamma_2(x) - a(\xi))(\gamma_2(x) - b(\xi)), \quad (2.33)$$

separiamo le variabili

$$\frac{2}{a(\xi) - b(\xi)} \left(\frac{1}{\gamma_2(x) - a(\xi)} - \frac{1}{\gamma_2(x) - b(\xi)} \right) \gamma_2'(x) = 1,$$

ed integriamo

$$\frac{2}{a(\xi) - b(\xi)} \int_{\gamma_2(t)=\omega}^{\gamma_2(s)} \left(\frac{1}{\gamma_2(x) - a(\xi)} - \frac{1}{\gamma_2(x) - b(\xi)} \right) d\gamma_2 = \int_t^s dx,$$

ottenendo

$$\frac{\gamma_2(s) - a(\xi)}{\gamma_2(s) - b(\xi)} = g(\omega,\xi)e^{-D(\xi)(t-s)}.$$

Si arriva alla tesi isolando il termine $\gamma_2(s)$

$$\gamma_2(s) = \frac{a(\xi) - b(\xi)g(\omega,\xi)e^{-D(\xi)(t-s)}}{1 - g(\omega,\xi)e^{-D(\xi)(t-s)}}. \quad (2.34)$$

Ci manca da trovare l'espressione di Ψ_0 . Da (2.26) ricaviamo

$$\begin{aligned}\Psi_0^\xi(t, \omega) &= ix\xi - v\gamma_2(0) + \int_0^t A^\xi(\gamma_2(s))ds \\ &= ix\xi - v\gamma_2(0) + i\bar{r}\xi t - k\theta \int_0^t \gamma_2(s)ds.\end{aligned}\tag{2.35}$$

Risolviamo l'integrale $\int_0^t \gamma_2(s)ds$. Facciamo un cambio di variabili:

$$\tau = e^{-D(\xi)(t-s)}, \quad d\tau = D(\xi)\tau ds,$$

da cui si ha

$$\begin{aligned}\int_0^t \gamma_2(s)ds &= \frac{1}{D(\xi)} \int_{e^{-D(\xi)t}}^1 \frac{a(\xi) - b(\xi)g(\omega, \xi)\tau}{\tau(1 - g(\omega, \xi)\tau)} d\tau \\ &= \frac{1}{D(\xi)} \left[\int_{e^{-D(\xi)t}}^1 \frac{a(\xi)}{\tau} d\tau + \int_{e^{-D(\xi)t}}^1 \frac{a(\xi)g(\omega, \xi) - b(\xi)g(\omega, \xi)}{1 - g(\omega, \xi)\tau} d\tau \right] \\ &= \frac{1}{D(\xi)} \left[D(\xi)ta(\xi) - 2D(\xi) \log \frac{1 - g(\omega, \xi)}{1 - g(\omega, \xi)e^{-D(\xi)t}} \right] \\ &= a(\xi)t - 2 \log \frac{g(\omega, \xi) - 1}{g(\omega, \xi)e^{-D(\xi)t} - 1}\end{aligned}$$

come in (2.30). □

Grazie al metodo delle caratteristiche siamo arrivati a trovare in forma esplicita l'espressione di $\hat{\Gamma}_0^\xi(t, \omega)$. Questa ha la seguente forma:

$$\hat{\Gamma}_0^\xi(t, \omega) = \exp \left(ix\xi - v\gamma_2^{t, \omega, \xi}(0) + ti\xi\bar{r} - k\theta(a(\xi)t - 2 \log I_1(t, \xi, \omega)) \right).\tag{2.36}$$

2.1.1 Modello di Heston

Nel modello di Heston a volatilità stocastica il prezzo dell'attività S e la sua varianza v soddisfano il seguente sistema di equazioni differenziali stocastiche

$$\begin{cases} dS_t = rS_t dt + \sqrt{v_t}S_t d\bar{W}_t^1 \\ dv_t = k(v_\infty - v_t)dt + \eta\sqrt{v_t}d\bar{W}_t^2, \end{cases}\tag{2.37}$$

dove r, k, η, v_∞ sono parametri costanti e $\bar{W} = (\bar{W}^1, \bar{W}^2)^T$ è un moto Browniano correlato di dimensione 2. Infatti se poniamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \bar{\rho} & \sqrt{1 - \bar{\rho}^2} \end{pmatrix},$$

matrice 2×2 non singolare con $\bar{\rho} \in]1, 1[$ allora $\bar{W}_t = AW_t$. Ossia si ha

$$\bar{W}_t^1 = W_t^1, \quad \bar{W}_t^2 = \bar{\rho}W_t^1 + \sqrt{1 - \bar{\rho}^2}W_t^2\tag{2.38}$$

dove $W = (W^1, W^2)^T$ è un moto Browniano bidimensionale e $\bar{\rho}$ è il parametro di correlazione.

Il modello di Heston è dedotto dal caso generale (2.1) semplicemente richiedendo $\bar{r} = r$, $\mu_1 = 0$, $\nu = 0$ e $\sigma(t, X_{t-}) = \sigma_0 = 1$; basta infatti in tal caso applicare la formula di Itô al processo $S_t = e^{X_t}$ per ottenere

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t \left(r - \frac{1}{2} \bar{\sigma}_0^2 v_t \right) dt + S_t \bar{\sigma}_0 \sqrt{v_t} d\bar{W}_t^1 + \frac{1}{2} S_t \bar{\sigma}_0^2 v_t dt \\ &= r S_t dt + S_t \sqrt{v_t} d\bar{W}_t^1. \end{aligned}$$

Ora possiamo ricavare in forma esplicita la funzione caratteristica nel modello di Heston ponendo nell'equazione generale (2.36) $x = \omega = 0$, $t = T$ e

$$v = \frac{v_0}{\eta^2}, \quad \sigma(x) = \sigma_0 \eta = \eta, \quad \theta = \frac{v_\infty}{\eta^2},$$

analogamente al cambio di variabili (2.10). Questa ha la seguente forma:

$$\begin{aligned} E \left[e^{i\xi X_T} \right] &= \exp \left(i\xi r T + \frac{v_0}{\eta^2} \left(\frac{1 - e^{-D(\xi)T}}{1 - g(\xi)e^{-D(\xi)T}} \right) (k - i\bar{\rho}\eta\xi - D(\xi)) \right) \\ &\cdot \exp \left(\frac{kv_\infty}{\eta^2} \left(T(k - i\bar{\rho}\eta\xi + D(\xi)) - 2 \log \left(\frac{1 - \frac{e^{D(\xi)T}}{g(\xi)}}{1 - \frac{1}{g(\xi)}} \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (2.39)$$

dove v_0 è la varianza iniziale, $\bar{\rho}$ è il parametro di correlazione dei moti Browniani, $D(\xi)$ e $g(\xi)$ come in (2.29), (2.28). Questa espressione verrà utilizzata in seguito per calcolare il prezzo delle opzioni call e put nel modello di Heston.

2.2 Formule integrali

Nel presente paragrafo consideriamo il caso in cui il tasso d'interesse r è costante nel tempo e il titolo rischioso S_T assume la forma

$$S_T = S_0 e^{X_T}, \quad (2.40)$$

dove $S_0 > 0$ e X_T variabile casuale; per convenienza scriveremo $S_T = e^{X_T + x_0}$ con $x_0 = \log S_0$. La funzione caratteristica del processo X_T , per una fissata misura martingala equivalente Q , è definita come

$$\varphi_{X_T}(\xi) = E^Q \left[e^{i\xi X_T} \right] = \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} Q^{X_T}(dx), \quad (2.41)$$

dove Q^{X_T} è la distribuzione di X_T sotto Q .

Sia f la funzione payoff di un derivato e

$$H(S_0, T) = e^{-rT} E^Q [f(X_T + \log S_0)] \quad (2.42)$$

il corrispondente prezzo risk-neutral sotto Q per le ipotesi (2.40)-(2.41) su S . Se per esempio consideriamo il payoff di un'opzione call con strike K

$$f^{Call}(x) = (e^x - K)_+ \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.43)$$

allora il prezzo della call con scadenza T è dato da

$$H^{Call}(S_0, K, T) = e^{-rT} E^Q \left[f^{Call}(X_T + \log S_0) \right]. \quad (2.44)$$

Analogamente per le opzioni put vale

$$f^{Put}(x) = (K - e^x)_+ \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.45)$$

L'idea alla base del metodo di Fourier è piuttosto semplice: consideriamo per semplicità nulli il tasso d'interesse r e il $\log S_0$, allora la formula che restituisce il prezzo dell'opzione diventa

$$H(1, K, T) = E^Q [f(X_T)] = \int_{\mathbb{R}} f(x) Q^{X_T}(dx) =$$

(per l'antitrasformata di Fourier²)

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left\{ e^{-ix\xi} \hat{f}(\xi) \right\} d\xi \right) Q^{X_T}(dx)$$

(cambiando l'ordine d'integrazione)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^\infty \hat{f}(\xi) \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} Q^{X_T}(dx) d\xi \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left\{ \hat{f}(\xi) \varphi_{X_T}(-\xi) \right\} d\xi. \end{aligned}$$

Quindi conoscendo esplicitamente la forma di \hat{f} e φ_{X_T} siamo in grado di calcolare il prezzo di uno strumento derivato tramite un'applicazione della trasformata veloce di Fourier (FFT) o attraverso metodi diretti per il calcolo integrale.

Il ragionamento seguito in precedenza richiede ipotesi di integrabilità per le funzioni f e \hat{f} . Infatti la trasformata di Fourier \hat{f} è definita tipicamente per le funzioni $f \in L^1(\mathbb{R})$ e questa ipotesi risulta falsa nel caso semplice del payoff di una call o put. Inoltre per l'antitrasformata di Fourier è necessario che $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, da cui la condizione di continuità sulla funzione payoff f . Nel prossimo sottoparagrafo analizzeremo e daremo risposta a questi problemi.

²Corollario A.4

2.2.1 Damping method

Un metodo classico nell'analisi di Fourier per invertire le funzioni non integrabili è il damping method: per un fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, definiamo la funzione penalized (o damped)

$$f_\alpha(x) = e^{-\alpha x} f(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.46)$$

Il seguente esempio mostra gli effetti del damping method sul payoff delle opzioni vanilla.

Esempio 8. Abbiamo

$$f_\alpha^{Call}(x) = e^{-\alpha x} (e^x - K)_+.$$

Allora, se $\alpha > 1$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |e^{-\alpha x} (e^x - K)_+| dx &= \int_{\log K}^{\infty} (e^{x(1-\alpha)} - K e^{-\alpha x}) dx \\ &= -\frac{1}{1-\alpha} (K e^{-\alpha \log(K)}) - \frac{K}{\alpha} e^{-\alpha \log(K)} \\ &= \frac{K^{1-\alpha}}{\alpha(\alpha-1)} < \infty. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Quindi $f_\alpha^{Call} \in L^1(\mathbb{R})$ per ogni $\alpha > 1$. Analogamente per le opzioni put vale $f_\alpha^{Put} \in L^1(\mathbb{R})$ per ogni $\alpha < 0$.

Il lemma seguente fornisce un criterio semplice e abbastanza generale di integrabilità per la trasformata di Fourier di una funzione damped.

Lemma 2.4. *Se $g \in W^{1,2}(\mathbb{R})$, cioè $g \in L^2(\mathbb{R})$ con derivata debole $Dg \in L^2(\mathbb{R})$, allora $\hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$.*

Dimostrazione. Dall'ipotesi $g \in W^{1,2}(\mathbb{R})$ segue che $g, \hat{g} \in L^2(\mathbb{R})$ e

$$\widehat{Dg}(\xi) = -i\xi \hat{g}(\xi).$$

Allora si ha

$$\int_{\mathbb{R}} (|\hat{g}(\xi)|^2 + |\widehat{Dg}(\xi)|^2) d\xi = \int_{\mathbb{R}} |\hat{g}(\xi)|^2 + |\xi|^2 |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} |\hat{g}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2) d\xi,$$

e per la disuguaglianza di Hölder otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\hat{g}(\xi)| d\xi &= \int_{\mathbb{R}} |\hat{g}(\xi)| (1 + |\xi|) \frac{1}{1 + |\xi|} d\xi \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |\hat{g}(\xi)|^2 (1 + |\xi|)^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1 + |\xi|)^2} \right)^{\frac{1}{2}} < \infty, \end{aligned}$$

ossia $\hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$. □

Esempio 9. Per il Lemma 2.4, $f_\alpha^{Call}, \widehat{f_\alpha^{Call}} \in L^1(\mathbb{R})$ per ogni $\alpha > 1$. Infatti $f_\alpha^{Call} \in W^{1,2}(\mathbb{R})$ poichè $f_\alpha^{Call} \in L^2$ e

$$Df_\alpha^{Call}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < \log K, \\ (1-\alpha)e^{(1-\alpha)x} + \alpha Ke^{-\alpha x} & \text{se } x > \log K, \end{cases}$$

è una funzione in $L^2(\mathbb{R})$ per $\alpha > 1$. Analogamente, $f_\alpha^{Put}, \widehat{f_\alpha^{Put}} \in L^1(\mathbb{R})$ per ogni $\alpha < 0$.

2.2.2 Formule di pricing

In questo sottoparagrafo troviamo la formula integrale di Fourier per calcolare il prezzo delle opzioni call/put e le loro greche.

Consideriamo un'attività rischiosa $S_t = e^{X_t}$ dove X_t è un processo stocastico con differenziale stocastico dato da (2.1). Indichiamo con $H(S_0, T)$ il prezzo iniziale di un'opzione di tipo Europeo avente sottostante S , scadenza T e payoff $f = f(x)$ funzione del log-prezzo

$$\log S_T = \log S_0 + X_T \iff S_T = S_0 e^{X_T}. \quad (2.48)$$

Proposizione 2.5. *Siano*

$$f_\alpha(x) \stackrel{\circ}{=} e^{-\alpha x} f(x), \quad \hat{f}_\alpha(\xi) \stackrel{\triangleright}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} f_\alpha(x) dx \quad x, \xi \in \mathbb{R}$$

e supponiamo esista un $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che:

- (i) $f_\alpha, \hat{f}_\alpha \in L^1(\mathbb{R})$;
- (ii) $E^Q[S_T^\alpha] \stackrel{\nabla}{=} \int_{\mathbb{R}} S_0^\alpha e^{\alpha x} Q^{X_T}(dx)$ è finito.

Allora vale la seguente formula:

$$H(S_0, T) = \frac{e^{-rT} S_0^\alpha}{\pi} \int_0^\infty \text{Re} \left\{ e^{-i\xi \log S_0} \varphi_{X_T}(-(\xi + i\alpha)) \hat{f}(\xi + i\alpha) \right\} d\xi. \quad (2.49)$$

Dimostrazione. Dimostriamo prima di tutto che l'integrale (2.49) è ben definito. Infatti, grazie a (i) la funzione $\xi \mapsto \hat{f}(\xi + i\alpha)$ è integrabile

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi + i\alpha) &= \int_{\mathbb{R}} e^{i(\xi+i\alpha)x} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} e^{-\alpha x} f(x) dx \\ &\stackrel{\circ}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} f_\alpha(x) dx \stackrel{\triangleright}{=} \hat{f}_\alpha(\xi) \in L^1(\mathbb{R}). \end{aligned} \quad (2.50)$$

D'altra parte, grazie a (ii), la funzione $\xi \mapsto S_0^{-i(\xi+i\alpha)} \varphi_{X_T}(-(\xi + i\alpha))$ è limitata

$$\begin{aligned} |S_0^{-i(\xi+i\alpha)} \varphi_{X_T}(-(\xi + i\alpha))| &\leq |S_0^{-i\xi+\alpha}| \int_{\mathbb{R}} |e^{-i(\xi+i\alpha)x}| Q^{X_T}(dx) \\ &= S_0^\alpha \int_{\mathbb{R}} e^{\alpha x} Q^{X_T}(dx) \stackrel{\nabla}{=} E^Q[S_T^\alpha] < \infty. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Per semplicità, poniamo $x_0 = \log S_0$: allora da (2.42) vale

$$\begin{aligned} H(S_0, T) &= e^{-rT} E^Q [f(X_t + \log S_0)] \\ &= e^{-rT} \int_{\mathbb{R}} e^{\alpha(x+x_0)} f_{\alpha}(x+x_0) Q^{X_T}(dx) = \end{aligned}$$

(per l'antitrasformata di Fourier)

$$= e^{-rT} S_0^{\alpha} \int_{\mathbb{R}} e^{\alpha x} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\xi(x+x_0)} \hat{f}_{\alpha}(\xi) \right\} d\xi \right) Q^{X_T}(dx)$$

(invertendo l'ordine d'integrazione per il teorema di Fubini³)

$$= \frac{e^{-rT} S_0^{\alpha}}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-i\xi x_0} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-i(\xi+i\alpha)x} Q^{X_T}(dx) \right) \hat{f}_{\alpha}(\xi) d\xi \right\}$$

(per l'equazione (2.50))

$$= \frac{e^{-rT} S_0^{\alpha}}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\xi x_0} \varphi_{X_T}(-(\xi+i\alpha)) \hat{f}_{\alpha}(\xi+i\alpha) \right\} d\xi.$$

□

Come corollario della proposizione possiamo enunciare il seguente risultato utile per calcolare il delta di uno strumento derivato.

Corollario 2.6. *Nelle ipotesi della Proposizione 2.5, se inoltre una delle due funzioni $\xi \mapsto (1 + |\xi|)\varphi_{X_T}(-(\xi + i\alpha))$ o \widehat{Df}_{α} è integrabile in $[0, +\infty)$, allora si ha*

$$\begin{aligned} \Delta(S_0, T) &:= \partial_{S_0} H(S_0, T) \\ &= \frac{e^{-rT} S_0^{\alpha-1}}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\xi \log S_0} (\alpha - i\xi) \varphi_{X_T}(-(\xi + i\alpha)) \hat{f}_{\alpha}(\xi + i\alpha) \right\} d\xi. \end{aligned} \tag{2.52}$$

Dimostrazione. È sufficiente derivare rispetto a S_0 la formula (2.49), dato che nelle nostre ipotesi possiamo derivare sotto il segno d'integrale per il teorema della convergenza dominata. □

Ricordiamo che la funzione payoff $f = f(x)$ come funzione del log-prezzo nel caso di un'opzione call con strike K è data da

$$f^{Call}(x) = (e^x - K)_+,$$

mentre la sua damped si scrive come

$$f_{\alpha}^{Call}(x) = e^{-\alpha x} (e^x - K)_+ \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

³Per i punti (i) e (ii) abbiamo

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\alpha x} \int_0^{\infty} |e^{-i\xi(x+x_0)} \hat{f}_{\alpha}(\xi)| d\xi Q^{X_T}(dx) = \|\hat{f}_{\alpha}\|_{L^1} E^Q [e^{\alpha X_T}] < \infty.$$

Teorema 2.7. Per ogni $\alpha > 1$ tale che $E^Q[S_T^\alpha]$ sia finito, la formula per calcolare il prezzo di un'opzione call con strike K e scadenza T assume la seguente forma:

$$Call(S_0, K, T) = \frac{e^{-rT} S_0^\alpha K^{1-\alpha}}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\xi \log \frac{S_0}{K}} \frac{\varphi_{X_T}(-(\xi + i\alpha))}{(i\xi - \alpha)(i\xi - \alpha + 1)} \right\} d\xi. \quad (2.53)$$

La stessa formula per $\alpha < 0$ restituisce il prezzo di un'opzione put. Per le ipotesi del Corollario (2.6) il delta di un'opzione call è dato da

$$\Delta^{Call}(S_0, K, T) = -\frac{e^{-rT} S_0^{\alpha-1} K^{1-\alpha}}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\xi \log \frac{S_0}{K}} \frac{\varphi_{X_T}(-(\xi + i\alpha))}{i\xi - \alpha + 1} \right\} d\xi. \quad (2.54)$$

Dimostrazione. Grazie all'esempio 9 a pagina 32 so che $f_\alpha^{Call}, \widehat{f}_\alpha^{Call} \in L^1(\mathbb{R})$. Dunque possiamo applicare la Proposizione 2.5 al caso particolare

$$f_\alpha = f_\alpha^{Call}, \quad \widehat{f}_\alpha = \widehat{f}_\alpha^{Call}.$$

Per concludere la dimostrazione ci rimane da calcolare il termine $\widehat{f}_\alpha^{Call}(\xi + i\alpha)$.

$$\begin{aligned} \widehat{f}_\alpha^{Call}(\xi + i\alpha) &= \widehat{f}_\alpha^{Call}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} f_\alpha^{Call}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} e^{-\alpha x} f^{Call}(x) dx = \\ &= \int_{\log(K)}^\infty e^{x(i\xi - \alpha + 1)} dx - K \int_{\log(K)}^\infty e^{x(i\xi - \alpha)} dx \\ &= \frac{1}{(i\xi - \alpha + 1)} e^{x(i\xi - \alpha + 1)} \Big|_{\log(K)}^\infty - K \frac{1}{(i\xi - \alpha)} e^{x(i\xi - \alpha)} \Big|_{\log(K)}^\infty \\ &= \frac{K(i\xi - \alpha + 1)e^{\log(K)(i\xi - \alpha)} - K(i\xi - \alpha)e^{\log(K)(i\xi - \alpha)}}{(i\xi - \alpha + 1)(i\xi - \alpha)} \\ &= \frac{K e^{\log(K)(i\xi - \alpha)}}{(i\xi - \alpha + 1)(i\xi - \alpha)} = \frac{K^{1-\alpha} e^{i\xi \log(K)}}{(i\xi - \alpha + 1)(i\xi - \alpha)}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Inserendo la formula (2.55) in (2.49) e in (2.52) segue la tesi. \square

2.3 Risultati numerici

Abbiamo implementato i risultati del Teorema 2.7 tramite il software *Mathematica*[®]. Come funzione caratteristica φ_{X_T} si è presa la forma particolare del modello di Heston ottenuta nell'equazione (2.39) mentre l'integrale che compare è stato calcolato per mezzo della funzione “NIntegrate” integrata in *Mathematica*[®]. Tuttavia ricordiamo che si possono utilizzare altri metodi d'inversione di Fourier per il calcolo integrale come l'algoritmo FFT che qui non approfondiremo. Le Figure 2.1 e 2.2 mostrano rispettivamente il prezzo

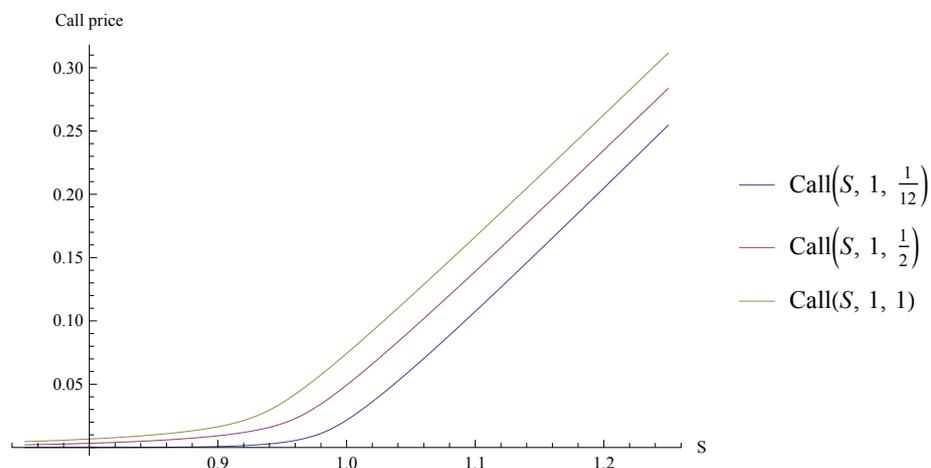


Figura 2.1: Prezzo di un'opzione call nel modello di Heston a differenti scadenze: $T = \frac{1}{12}$ (un mese), $T = \frac{1}{2}$ (sei mesi), $T = 1$ (un anno), con strike K fissato a 1. In legenda il prezzo è indicato con la notazione $\text{Call}(S, K, T)$.

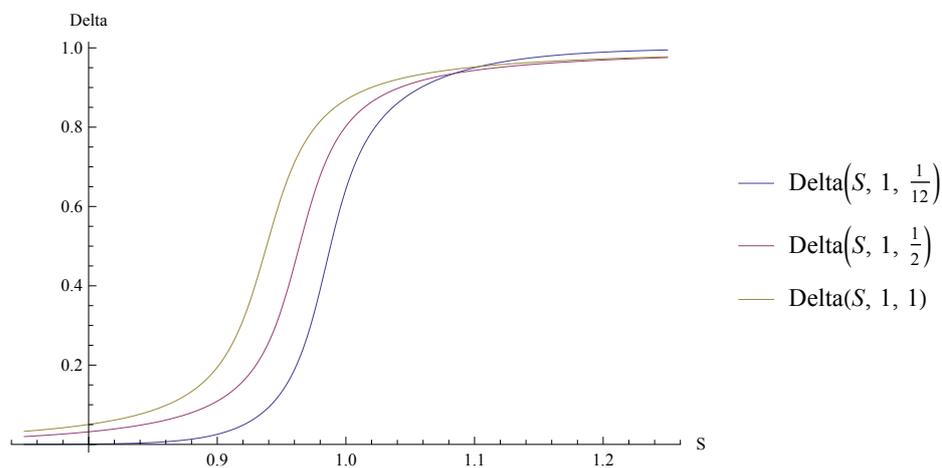


Figura 2.2: Delta di un'opzione call nel modello di Heston a differenti scadenze: $T = \frac{1}{12}$ (un mese), $T = \frac{1}{2}$ (sei mesi), $T = 1$ (un anno), con strike K fissato a 1. In legenda il delta è indicato con la notazione $\text{Delta}(S, K, T)$.

di una call nel modello di Heston e il suo Delta al variare del sottostante S e della scadenza T con strike K fissato a 1.

Ricordiamo che il modello di Heston è del tipo (2.37), dove $\bar{W} = (\bar{W}^1, \bar{W}^2)^T$ è un moto Browniano bidimensionale correlato con matrice di correlazione

$$\rho = \Gamma \Gamma^T, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \bar{\rho} & \sqrt{1 - \bar{\rho}^2} \end{pmatrix}$$

e $\bar{\rho} \in] -1, 1[$ parametro di correlazione. Per creare i grafici abbiamo considerato i seguenti valori costanti dei parametri:

$$r = 5\%, \quad k = 0.5, \quad v_0 = 0.04, \quad v_\infty = 0.02, \quad \eta = 1.5, \quad \bar{\rho} = -0.4, \quad \alpha = 1.1.$$

I grafici, come si vede facilmente, riproducono i valori previsti di mercato. Infatti, in Figura 2.1, le call “In The Money” ($S_T > K$) hanno un prezzo maggiore rispetto alle call “Out Of The Money” ($S_T < K$). In Figura 2.2, il delta tende a 1 per $S \rightarrow +\infty$, tende a 0 per $S \rightarrow 0^+$. Per concludere, abbiamo inserito il codice *Mathematica*[®] per calcolare il prezzo di una call nel modello di Heston grazie al metodo della trasformata di Fourier.

Codice Mathematica Heston price call

Modello di Heston

$$dS = rSdt + \sqrt{v} S dW^1$$

$$dv = k(v_\infty - v)dt + \eta\sqrt{v}dW^2$$

Correlazione

$$d\langle W^1, W^2 \rangle_t = \bar{\rho} dt$$

ClearAll["Global*"]

$$r = 0.05; k = 0.5; v_0 = 0.04; v_{\text{inf}} = 0.02; \eta = 1.5; \rho = -0.4; \alpha = 1.1;$$

$$F[s_]:= \sqrt{(k - I\rho\eta s)^2 + (s + I)s\eta^2};$$

$$G[s_]:= \frac{k - I\rho\eta s - F[s]}{k - I\rho\eta s + F[s]};$$

$$\text{Phi}[s_ , T_]:= \text{Exp} \left[I s r T + \frac{v_0}{\eta^2} \left(\frac{1 - \text{Exp}[-F[s]T]}{1 - G[s]\text{Exp}[-F[s]T]} \right) (k - I\rho\eta s - F[s]) \right] \quad *$$

$$\text{Exp} \left[\frac{k v_{\text{inf}}}{\eta^2} \left(T(k - I\rho\eta s - F[s]) - 2 \text{Log} \left[\frac{1 - G[s]\text{Exp}[-F[s]T]}{1 - G[s]} \right] \right) \right];$$

$$\text{Call}[S_0_ , K_ , T_]:= \frac{\text{Exp}[-rT] S_0^{\alpha} K^{\{1-\alpha\}}}{\text{Pi}} \quad *$$

$$\text{NIntegrate} \left[\text{Re} \left[\text{Exp} \left[-I\xi \text{Log} \left[\frac{S_0}{K} \right] \right] * \frac{\text{Phi}[-(\xi + I\alpha), T]}{(I\xi - \alpha)(I\xi - \alpha + 1)} \right], \{\xi, 0, \infty\} \right];$$

$$\text{Delta}[S_0_ , K_ , T_]:= \frac{-\text{Exp}[-rT] S_0^{\{\alpha-1\}} K^{\{1-\alpha\}}}{\text{Pi}} \quad *$$

$$\text{NIntegrate} \left[\text{Re} \left[\text{Exp} \left[-I\xi \text{Log} \left[\frac{S_0}{K} \right] \right] * \frac{\text{Phi}[-(\xi + I\alpha), T]}{(I\xi - \alpha + 1)} \right], \{\xi, 0, \infty\} \right];$$

Capitolo 3

Metodo di valutazione delle opzioni su realized variance

La negoziazione e la gestione del rischio dei derivati di varianza e volatilità necessitano di modelli adeguati, sia per descrivere il comportamento stocastico della volatilità, sia per un'accurata implementazione numerica. Questo è importante specialmente nei mercati di varianza, in cui il sottostante in questione, la varianza, mostra molta più volatilità rispetto alla corrispondente azione o indice.

Derivati semplici di volatilità, come i variance swaps, i corridor variance swaps, i gamma swaps ed altre simili variazioni, possono essere valutati attraverso modelli classici come quello di Black&Scholes senza il bisogno di considerare modelli più complessi.

Derivati di volatilità più complicati come, in particolare, le opzioni su realized variance e volatility, necessitano una modellazione dinamica della volatilità. I primi modelli a volatilità stocastica studiati in letteratura includono Scott (1987), Hull, White (1987) e Chesney, Scott (1989). Heston (1993) propose l'utilizzo di un processo di diffusione a radice quadrata per plasmare la dinamica della varianza istantanea. Il modello diventò presto molto popolare per la sua trattabilità e per l'esistenza di un'espressione esplicita della funzione caratteristica dei log rendimenti. L'importante risultato di Carr, Madan (1999) riguarda la tecnica d'inversione della trasformata di Fourier per la valutazione di opzioni europee quando è nota in forma chiusa la funzione caratteristica.

Il problema della valutazione di opzioni su realized variance ebbe un crescente interesse in letteratura. Broadie, Jain (2008) e Sepp (2008) svilupparono metodi per la prezzatura e copertura di opzioni su realized variance nel modello di Heston. Gatheral (2006) e Carr, Lee (2007) dimostrarono come utilizzare i prezzi dei variance swap e volatility swap per adattare una distribuzione log-normale alla realized variance, arrivando così alla formula di Black&Scholes (1973) per il prezzo e la copertura di opzioni su varianza.

Molti altri autori per determinare il prezzo dei derivati di volatilità considerarono modelli a salti come ad esempio Carr, Geman, Madan, Yor (2005), Albanese, Lo, Mijatovic (2009) e Sepp (2008).

3.1 Modelli a volatilità stocastica

In questo paragrafo definiamo due modelli a volatilità stocastica che utilizzeremo in seguito: il modello di Heston e il modello 3/2. Sia $\bar{W} = (\bar{W}^1, \bar{W}^2)^T$ un moto Browniano bidimensionale standard, con parametro di correlazione $\bar{\rho}$, definito sullo spazio di probabilità filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{F}}^W, P)$.

Nel modello di Heston, già visto nel paragrafo 2.1.1, il prezzo azionario S_t e la sua varianza istantanea v_t soddisfano il seguente sistema di SDEs nella misura martingala P

$$\begin{cases} dS_t = (r - \delta)S_t dt + \sqrt{v_t}S_t d\bar{W}_t^1 \\ dv_t = k(\theta - v_t)dt + \epsilon\sqrt{v_t}d\bar{W}_t^2, \end{cases} \quad (3.1)$$

dove r è il tasso d'interesse privo di rischio e δ è il rendimento dei dividendi. I parametri che compaiono nella varianza istantanea hanno il seguente significato: k è la velocità di ritorno alla media, θ è il livello di ritorno alla media e ϵ è la volatilità di volatilità. Nei risultati teorici di questo capitolo abbiamo considerato il livello di ritorno alla media una funzione deterministica del tempo, $\theta = \theta(t)$. Allora la varianza istantanea soddisfa la seguente SDE

$$dv_t = k(\theta(t) - v_t)dt + \epsilon\sqrt{v_t}d\bar{W}_t^2. \quad (3.2)$$

Introduciamo un altro modello a volatilità stocastica, noto in letteratura come il modello 3/2. Esso descrive la seguente dinamica nella misura martingala P

$$\begin{cases} dS_t = (r - \delta)S_t dt + \sqrt{v_t}S_t d\bar{W}_t^1 \\ dv_t = kv_t(\theta(t) - v_t)dt + \epsilon v_t^{\frac{3}{2}} d\bar{W}_t^2, \end{cases} \quad (3.3)$$

dove, come nel caso del modello di Heston esteso, $\theta(t)$ è il livello di ritorno alla media dipendente dal tempo. Tuttavia, è importante osservare che i parametri k e ϵ non hanno la stessa interpretazione e lo stesso rapporto del modello di Heston. La velocità di ritorno alla media è, nel modello 3/2, data dal prodotto $k \cdot v_t$ che è una quantità stocastica; in particolare, si vede che la varianza v_t tornerà alla media più velocemente quanto più è grande. Inoltre, dobbiamo aspettarci che il parametro k del modello 3/2 sia in scala $1/v_t$ relativamente al parametro k del modello di Heston; la stessa scala si applica al parametro ϵ .

Prendiamo in esame due condizioni necessarie per avere un modello 3/2 ben definito. Applicando il lemma di Itô al processo $1/v_t$ quando v_t segue la

dinamica (3.3) otteniamo:

$$d\left(\frac{1}{v_t}\right) = k\theta(t) \left(\frac{k + \epsilon^2}{k\theta(t)} - \frac{1}{v_t}\right) dt - \frac{\epsilon}{\sqrt{v_t}} d\bar{W}_t^2,$$

ovvero il reciproco della varianza v_t nel modello 3/2 è, di fatto, un modello di Heston di parametri $(k\theta(t), \frac{k+\epsilon^2}{k\theta(t)}, -\epsilon)$. Utilizzando le condizioni al contorno di Feller, è ben noto che un processo di Heston a tempo omogeneo nella SDE (3.2), con $\theta(t) = \theta$, può raggiungere il limite 0 con probabilità non nulla, salvo che:

$$2k\theta \geq \epsilon^2.$$

Abbiamo visto che, se v_t è un processo 3/2, allora $1/v_t$ è un processo di Heston. Una probabilità non nulla di raggiungere lo zero per $1/v_t$ implica una probabilità non nulla per il processo v_t di raggiungere l'infinito. Per $\theta(t)$ costante a tratti, applicando il risultato di Schlögl&Schlögl [10] alla dinamica di $1/v_t$, otteniamo la condizione di non esplosione per il processo 3/2 come:

$$2k\theta(t) \cdot \frac{k + \epsilon^2}{k\theta(t)} \geq \epsilon^2,$$

o

$$k \geq -\frac{\epsilon^2}{2}. \quad (3.4)$$

Assumendo $k > 0$ la condizione di non esplosione è soddisfatta. Un'altra condizione necessaria per il modello 3/2 si riferisce alla proprietà martingala del processo $S_t \cdot \exp(-(r - \delta)t)$; Lewis [14] arriva a una condizione addizionale per i parametri del modello 3/2:

$$k - \epsilon\bar{\rho} \geq -\frac{\epsilon^2}{2}. \quad (3.5)$$

Se richiediamo che il parametro di correlazione $\bar{\rho}$ sia non positivo, allora la condizione è automaticamente soddisfatta. In pratica, la restrizione $\bar{\rho} \leq 0$ non comporta problemi, in quanto il comportamento del mercato dei prezzi e delle volatilità mostra in genere una correlazione negativa. Per concludere, le condizioni (3.4) e (3.5) garantiscono il buon comportamento del modello 3/2.

Enunciamo ora, senza dimostrare, due proposizioni che esplicitano la forma della trasformata di Fourier-Laplace condizionata del log-prezzo X_T e della varianza non annualizzata $\int_0^T v_t dt$ nel modello di Heston e 3/2. In particolare, utilizzando la funzione caratteristica di $X_T = \log(S_T)$ è possibile derivare il prezzo delle opzioni europee come visto nel capitolo "Metodo della trasformata di Fourier". Per le dimostrazioni rimandiamo a Carr, Sun [9].

Proposizione 3.1. *Nel modello di Heston con livello di ritorno alla media dipendente dal tempo, la trasformata di Fourier-Laplace condizionata di X_T e della realized variance non annualizzata $\int_t^T v_s ds$ è data da:*

$$E \left(e^{iuX_T - \lambda \int_t^T v_s ds} \mid X_T, v_t \right) = \exp(iuX_T + a(t, T) - b(t, T)v_t),$$

dove

$$\begin{aligned} a(t, T) &= - \int_t^T k\theta(s)b(s, T)ds, \\ b(t, T) &= \frac{(iu + u^2 + 2\lambda)(e^{\gamma(T-t)} - 1)}{(\gamma + k - i\epsilon\bar{\rho}u)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma}, \\ \gamma &= \sqrt{(k - i\epsilon\bar{\rho}u)^2 + \epsilon^2(iu + u^2 + 2\lambda)}. \end{aligned}$$

Osservazione 3. Nel capitolo “Metodo della trasformata di Fourier” abbiamo calcolato la funzione caratteristica del processo (X_t, v_t) nel caso di un modello generale della forma (2.1). In seguito abbiamo esplicitato la sua forma nel modello di Heston, equazione (2.39).

Proposizione 3.2. *Nel modello 3/2 con livello di ritorno alla media dipendente dal tempo, la trasformata di Fourier-Laplace condizionata di X_T e della realized variance non annualizzata $\int_t^T v_s ds$ è data da:*

$$E \left(e^{iuX_T - \lambda \int_t^T v_s ds} \mid X_T, v_t \right) = e^{iuX_t} \frac{\Gamma(\gamma - \alpha)}{\Gamma(\gamma)} \left(\frac{2}{\epsilon^2 y} \right)^\alpha M \left(\alpha, \gamma, \frac{-2}{\epsilon^2 y} \right),$$

dove

$$\begin{aligned} y &= y(t, v_t) = v_t \int_t^T e^{\int_t^u k\theta(s)ds} du, \\ \alpha &= - \left(\frac{1}{2} - \frac{p}{\epsilon^2} \right) + \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{p}{\epsilon^2} \right)^2 + 2\frac{q}{\epsilon^2}}, \\ \gamma &= 2 \left(\alpha + 1 - \frac{p}{\epsilon^2} \right), \\ p &= -k + i\epsilon\bar{\rho}u, \\ q &= \lambda + \frac{iu}{2} + \frac{u^2}{2}. \end{aligned}$$

$M(\alpha, \gamma, z)$ è la funzione ipergeometrica confluyente definita come:

$$M(\alpha, \gamma, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n z^n}{(\gamma)_n n!},$$

e

$$(x)_n = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1).$$

3.2 Prezzo delle opzioni con sottostante realized variance

La principale quantità d'interesse nel prezzo delle opzioni su realized variance (abbreviato RV) è la varianza integrata annualizzata, data da:

$$V_T = \frac{1}{T} \int_0^T v_t dt. \quad (3.6)$$

Studieremo il prezzo delle opzioni call su realized variance; il prezzo delle opzioni put seguirà dalla parità put-call. Il payoff di una opzione call su RV con strike K e scadenza T è definito come:

$$\left(\frac{1}{T} \int_0^T v_t dt - K \right)_+ = (V_T - K)_+. \quad (3.7)$$

Un risultato importante di Carr, Madan (1999) mostra che, a partire dalla funzione caratteristica del log-prezzo $\log(S_T)$, è possibile derivare la trasformata di Fourier del payoff di una damped call in forma esplicita come funzione dei log strike $k = \log(K)$. Una volta conosciute la funzione caratteristica e la trasformata di Fourier possiamo applicare la formula (2.53) per recuperare i prezzi delle opzioni call nella successione di strike simultaneamente. Questo metodo, studiato nel capitolo sulla trasformata di Fourier, è ampiamente utilizzato nella letteratura per ricavare i prezzi delle opzioni in modelli diversi da quello di Black&Scholes che hanno funzione caratteristica dei log-prezzi in forma esplicita. Svilupperemo un'idea simile per il prezzo delle opzioni su realized variance. Precisamente, partendo dalla trasformata di Laplace della varianza integrata, è possibile derivare in forma chiusa la trasformata di Laplace della funzione variance call. Questa idea fu suggerita da Carr, Geman, Madan, Yor (2005). A conclusione della dimostrazione, proporremo un importante aggiustamento del risultato per mezzo di un control variates.

Indichiamo con μ la distribuzione della varianza integrata annualizzata, ovvero $V_T \sim \mu$, ed enunciamo la seguente Proposizione.

Proposizione 3.3. *Sia $\mathcal{L}(\cdot)$ la trasformata di Laplace della distribuzione di V_T su $[0, T]$:*

$$\mathcal{L}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \mu(dx) = \int_\Omega e^{-\lambda V_T} dP = E \left(e^{-\lambda \frac{1}{T} \int_0^T v_t dt} \right), \quad (3.8)$$

allora la funzione variance call non attualizzata $C : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$C(K) = E \left(\frac{1}{T} \int_0^T v_t dt - K \right)_+, \quad (3.9)$$

ha trasformata di Laplace data da

$$L\{C\}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda K} C(K) dK = \frac{\mathcal{L}(\lambda) - 1}{\lambda^2} + \frac{C(0)}{\lambda}. \quad (3.10)$$

Dimostrazione. Sia $\mu(dx)$ la legge di probabilità della varianza integrale annualizzata $V_T = \frac{1}{T} \int_0^T v_t dt$. Allora si ha

$$\begin{aligned} L\{C\}(\lambda) &= \int_0^\infty e^{-\lambda K} C(K) dK = \int_0^\infty e^{-\lambda K} E((V_T - K)_+) dK \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda K} \left(\int_\Omega (V_T(\omega) - K)_+ dP(\omega) \right) dK \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda K} \left(\int_K^\infty (x - K) \mu(dx) \right) dK. \end{aligned}$$

Grazie al teorema di Fubini possiamo invertire l'ordine d'integrazione

$$L(\lambda) = \int_0^\infty \int_0^x e^{-\lambda K} (x - K) dK \mu(dx),$$

ed integrando per parti rispetto a K otteniamo

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= \int_0^\infty \left(\frac{e^{-\lambda x} - 1}{\lambda^2} + \frac{x}{\lambda} \right) \mu(dx) = \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \left[\int_0^\infty e^{-\lambda x} \mu(dx) - \int_0^\infty \mu(dx) \right] + \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty x \mu(dx) \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \left[\mathcal{L}(\lambda) - \int_\Omega dP(\omega) \right] + \frac{1}{\lambda} \int_\Omega V_T(\omega) dP(\omega) \\ &= \frac{\mathcal{L}(\lambda) - 1}{\lambda^2} + \frac{C(0)}{\lambda}, \end{aligned}$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo utilizzato il fatto che

$$C(0) = E \left(\frac{1}{T} \int_0^T v_t dt \right).$$

□

L'equazione (3.10) della Proposizione 3.3 ci fornisce in forma chiusa la trasformata di Laplace $L(\lambda)$ della funzione variance call $C(K)$ in termini di trasformata di Laplace $\mathcal{L}(\lambda)$ della distribuzione di V_T . L'espressione di $\mathcal{L}(\lambda)$ in forma chiusa si ottiene dalle Proposizioni 3.1 e 3.2 ponendo $t = 0$, $u = 0$ e $\lambda = \frac{\lambda}{T}$.

Tuttavia, scomponendo il polinomio precedente notiamo che appaiono i due seguenti termini:

$$-\frac{1}{\lambda^2} + \frac{C(0)}{\lambda}. \quad (3.11)$$

Questi tendono a 0 lentamente per $|\lambda| \rightarrow \infty$ danneggiando l'accuratezza dell'algoritmo d'inversione numerica. Il termine $\frac{C(0)}{\lambda}$ appare poichè la funzione $C(K)$ ha una discontinuità di grandezza $C(0)$ nello 0, mentre il termine $-\frac{1}{\lambda^2}$ appare poichè la derivata prima ha una discontinuità di grandezza -1 nello 0 (Lemma 3.4). Infatti vogliamo ricostruire la funzione variance call $C(K)$ mediante l'antitrasformata di Laplace

$$C(K) = L^{-1}(L(\lambda))(K). \quad (3.12)$$

Si ottiene

$$\begin{aligned} C(K) &= L^{-1} \left(\frac{\mathcal{L}(\lambda)}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} + \frac{C(0)}{\lambda} \right) (K) = \\ &= \left(L^{-1} \left(\frac{1}{\lambda^2} \right) * L^{-1}(\mathcal{L}(\lambda)) \right) (K) + L^{-1} \left(-\frac{1}{\lambda^2} \right) (K) + \\ &\quad + C(0)L^{-1} \left(\frac{1}{\lambda} \right) (K) = \end{aligned}$$

$$\left(\text{ponendo } g(K) = L^{-1} \left(\frac{1}{\lambda^2} \right) (K) = K \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(K) \right)$$

$$\begin{aligned} &= (g * \mu)(K) - g(K) + C(0) \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(K) \\ &= \left(I \mathbb{1}_{[0,\infty)} * \mu \right) (K) - K \mathbb{1}_{[0,\infty)}(K) + C(0) \mathbb{1}_{[0,\infty)}(K), \end{aligned} \quad (3.13)$$

in cui il primo termine è una funzione C^1 mentre gli ultimi due termini presentano le discontinuità in 0. Intendiamo eliminare i due termini infinitesimi per $|\lambda| \rightarrow 0$ grazie all'idea del control variates. Sceglieremo un'opportuna distribuzione per la realized variance V_T che ci permette di calcolare la funzione variance call in forma esplicita. Denotiamo questa funzione control variate con $\tilde{C}(\cdot)$. Se inoltre scegliamo una distribuzione in modo tale che la funzione V_T abbia la stessa media della distribuzione originaria di V_T allora si ha $C(0) = \tilde{C}(0)$. Quindi, per la linearità della trasformata di Laplace otteniamo:

$$L\{C - \tilde{C}\}(\lambda) = L\{C\}(\lambda) - L\{\tilde{C}\}(\lambda) = \frac{\mathcal{L}(\lambda) - \tilde{\mathcal{L}}(\lambda)}{\lambda^2}. \quad (3.14)$$

Entrambi i termini dell'espressione (3.11) sono stati eliminati dal momento che la differenza $C(\cdot) - \tilde{C}(\cdot)$ è ora una funzione sia continua che derivabile nello zero. La derivabilità si ricava dal fatto che entrambe le funzioni hanno derivata destra nello 0 uguale a -1. Questo si vede nel seguente lemma.

Lemma 3.4. *Sia V una variabile casuale tale che $V > 0$ q.s. e $E(V) < \infty$. Allora la funzione $C : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definita come:*

$$C(K) = E(V - K)_+,$$

soddisfa

$$\lim_{K \rightarrow 0^+} \frac{C(K) - C(0)}{K} = -1.$$

Dimostrazione. Riscriviamo il limite come

$$\lim_{K \rightarrow 0^+} \frac{C(K) - C(0)}{K} = \lim_{K \rightarrow 0^+} E \left(\frac{(V - K)_+ - V}{K} \right).$$

Poichè per ipotesi $V > 0$ q.s. si ha

$$\lim_{K \rightarrow 0^+} \frac{(V - K)_+ - V}{K} = \lim_{K \rightarrow 0^+} \frac{V - K - V}{K} = -1 \quad \text{q.s.}$$

Utilizzando la maggiorazione

$$\left| \frac{(V - K)_+ - V}{K} \right| \leq 1 \quad \text{q.s.}$$

possiamo applicare il teorema della convergenza dominata per cambiare l'ordine di limite ed integrale

$$\lim_{K \rightarrow 0^+} E \left(\frac{(V - K)_+ - V}{K} \right) = E \left(\lim_{K \rightarrow 0^+} \frac{(V - K)_+ - V}{K} \right) = E(-1) = -1.$$

□

In sintesi, grazie al control variate possiamo raggiungere un incollamento nello zero. Nella scelta di un'opportuna distribuzione per la realized variance una possibile scelta da prendere in considerazione è la distribuzione log-normale. Questa ci restituirebbe la formula di tipo Black&Scholes per la funzione control variate $\tilde{C}(\cdot)$. Tuttavia, dobbiamo escludere questa soluzione poichè la trasformata di Laplace di una distribuzione log-normale non è disponibile in forma esplicita. Possiamo scegliere come distribuzione delega la distribuzione Gamma. La trasformata di Laplace $\tilde{\mathcal{L}}$ della legge Gamma di \tilde{V}_T è nota in forma esplicita ed il seguente lemma mostra come calcolare la funzione control variate $\tilde{C}(\cdot)$.

Lemma 3.5. *Supponiamo che la realized variance V_T su $[0, T]$ segua una distribuzione Gamma di parametri (α, β) . Nello specifico, la densità della RV è della forma*

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, \quad x > 0. \quad (3.15)$$

Allora la funzione control variate $\tilde{C}(\cdot)$ è data da

$$\tilde{C}(K) = \alpha\beta(1 - F(K; \alpha + 1, \beta)) - K(1 - F(K; \alpha, \beta)) \quad (3.16)$$

dove $F(x; \alpha, \beta)$ è la Gamma funzione di distribuzione cumulativa di parametri (α, β) .

Dimostrazione. Per $V_T \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ abbiamo

$$\tilde{C}(K) = E(V_T - K)_+ = \int_K^\infty (x - K) \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx.$$

Calcolando separatamente i due termini all'interno dell'integrale otteniamo

$$\begin{aligned} \int_K^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^\alpha e^{-\frac{x}{\beta}} dx &= \int_K^\infty \frac{\alpha\beta}{\Gamma(\alpha+1)\beta^{\alpha+1}} x^\alpha e^{-\frac{x}{\beta}} dx = \\ (F(K, \alpha+1, \beta) &= \int_0^K f(x; \alpha+1, \beta) dx = \int_0^K \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\beta^{\alpha+1}} x^\alpha e^{-\frac{x}{\beta}} dx) \\ &= \alpha\beta (1 - F(K; \alpha+1, \beta)) \end{aligned}$$

e

$$\int_K^\infty \frac{K}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx = K(1 - F(K; \alpha, \beta))$$

dove $F(\cdot, \alpha, \beta)$ è la funzione di distribuzione cumulativa di $\Gamma(\alpha, \beta)$. \square

Per garantire che $\tilde{C}(0) = C(0)$ la sola condizione necessaria che dobbiamo porre su α e β è quella di uguagliare la media della distribuzione Gamma con $C(0)$:

$$\alpha\beta = C(0). \quad (3.17)$$

Possiamo ora, da un punto di vista teorico, scegliere uno dei due parametri arbitrariamente. Facoltativamente, il parametro addizionale può essere usato per aggiustare il momento secondo della distribuzione delega. Per esempio, possiamo uguagliare il momento secondo della realized variance:

$$\alpha\beta^2 + (\alpha\beta)^2 = E \left[\left(\frac{1}{T} \int_0^T v_t dt \right)^2 \right] = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda^2}(\lambda) \Big|_{\lambda=0}, \quad (3.18)$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo utilizzato il teorema di derivazione sotto il segno d'integrale:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\lambda) &= E[e^{-\lambda V_T}] \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(\lambda) &= E[-V_T e^{-\lambda V_T}] \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda^2}(\lambda) &= E[V_T^2 e^{-\lambda V_T}] \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda^2}(\lambda) \Big|_{\lambda=0} &= E[V_T^2] \end{aligned}$$

e $\mathcal{L}(\cdot)$ è la trasformata di Laplace della realized variance. Nel modello di Heston, il momento secondo della realized variance è disponibile in forma esplicita; vedi Dufresne (2001). Nel modello 3/2, tuttavia, non abbiamo una

forma chiusa per il momento secondo della realized variance; come vedremo in seguito, anche il momento di ordine 1 richiede laboriosi calcoli. Una scelta possibile del momento di ordine 2 per la distribuzione control variates è quella di uguagliarlo al momento secondo di una distribuzione log-normale della forma:

$$C(0)e^{\sigma\sqrt{T}\mathcal{N}(0,1)-\frac{\sigma^2T}{2}}, \quad (3.19)$$

dove $\mathcal{N}(0, 1)$ è una variabile casuale avente distribuzione normale standard e σ è un parametro arbitrario - una scelta sensata avrebbe un ordine di grandezza che è rappresentativo della volatilità implicita della varianza. Calcoliamo il momento di ordine 2 della RV avente la distribuzione (3.19):

$$\begin{aligned} E[V_T^2] &= E \left[C(0)^2 e^{-\sigma^2 T} e^{2X_T(\omega)\sigma\sqrt{T}} \right] = C(0)^2 e^{-\sigma^2 T} \int_{\Omega} e^{2X_T(\omega)\sigma\sqrt{T}} dP(\omega) = \\ &= C(0)^2 e^{-\sigma^2 T} \int_{\mathbb{R}} e^{2y\sigma\sqrt{T}} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy = \frac{C(0)^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{\left(-\frac{y^2}{2} + 2y\sigma\sqrt{T} - \sigma^2 T\right)} dy \\ &= \frac{C(0)^2}{\sqrt{2\pi}} e^{\sigma^2 T} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = C(0)^2 e^{\sigma^2 T}. \end{aligned}$$

La relazione (3.18) assume la forma

$$\alpha\beta^2 + (\alpha\beta)^2 = C(0)^2 e^{\sigma^2 T}, \quad (3.20)$$

quindi un'eventuale scelta per i parametri della distribuzione delega è:

$$\beta = C(0)(e^{\sigma^2 T} - 1), \quad (3.21)$$

$$\alpha = \frac{C(0)}{\beta} = \frac{1}{e^{\sigma^2 T} - 1}. \quad (3.22)$$

Per attuare i calcoli svolti precedentemente c'è bisogno di determinare

$$E \left(\int_0^T v_t dt \right) \quad (3.23)$$

in entrambi i modelli - Heston e 3/2. Mostriamo prima i calcoli nel caso del modello di Heston avente il livello di ritorno alla media $\theta(t)$ costante a tratti, $t \in [0, T]$. Se consideriamo $\theta(t) = \theta_i$ su (t_i, t_{i+1}) , $i \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$ possiamo scrivere

$$E \left(\int_0^T v_t dt \right) = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} E[v_t] dt. \quad (3.24)$$

Nel modello di Heston per $t \in [t_i, t_{i+1})$ si ha

$$E[v_t] = E[v_{t_i}] + k\theta_i(t - t_i) - k \int_{t_i}^t E[v_s] ds. \quad (3.25)$$

Ora se poniamo $g(t) = E[v_t]$, cerchiamo le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} g'(t) = k\theta_i - kg(t) \\ g(t_i) = E[v_{t_i}]. \end{cases} \quad (3.26)$$

La soluzione generale del problema (3.26) è del tipo

$$g(t) = e^{-k(t-t_i)} \left[E[v_{t_i}] + \int_{t_i}^t e^{k(s-t_i)} k\theta_i ds \right], \quad (3.27)$$

da cui

$$E[v_t] = E[v_{t_i}]e^{-k(t-t_i)} + \theta_i \left(1 - e^{-k(t-t_i)} \right). \quad (3.28)$$

Da (3.24) si ottiene

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} E[v_t] dt &= \sum_{i=0}^{N-1} E[v_{t_i}] \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-k(t-t_i)} dt + \sum_{i=0}^{N-1} \theta_i (t_{i+1} - t_i) - \\ &\quad - \sum_{i=0}^{N-1} \theta_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-k(t-t_i)} dt. \end{aligned}$$

Calcolando gli integrali otteniamo

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} E[v_t] dt &= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{E[v_{t_i}]}{k} \left(1 - e^{-k(t_{i+1}-t_i)} \right) + \sum_{i=0}^{N-1} \theta_i (t_{i+1} - t_i) + \\ &\quad + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\theta_i}{k} \left(e^{-k(t_{i+1}-t_i)} - 1 \right). \end{aligned}$$

Ricaviamo il termine $E[v_{t_i}]$ per induzione da (3.28) ottenendo

$$E[v_{t_i}] = e^{-kt_i} \left(v_0 + \sum_{j=0}^{i-1} \theta_j (e^{kt_{j+1}} - e^{kt_j}) \right), \quad i = 1, \dots, N-1. \quad (3.29)$$

Infine otteniamo

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} E[v_t] dt &= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{e^{-kt_i} - e^{-kt_{i+1}}}{k} \left(v_0 + \sum_{j=0}^{i-1} \theta_j (e^{kt_{j+1}} - e^{kt_j}) \right) + \\ &\quad + \sum_{i=0}^{N-1} \theta_i (t_{i+1} - t_i) + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\theta_i}{k} (e^{-k(t_{i+1}-t_i)} - 1). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Nel caso del modello 3/2, Carr, Sun [9] (Teorema 4) dimostrano che

$$E \left(\int_0^T v_t dt \right) = h \left(v_0 \int_0^T e^{k \int_0^t \theta(s) ds} dt \right),$$

con

$$h(y) = \int_0^y e^{-\frac{2}{\epsilon^2}z} z^{\frac{2k}{\epsilon^2}} \int_z^\infty \frac{2}{\epsilon^2} e^{-\frac{2}{\epsilon^2}u} u^{\frac{-2k}{\epsilon^2}-2} du dz. \quad (3.31)$$

L'integrale che appare nell'argomento della funzione $h(\cdot)$ è facilmente calcolabile per $\theta(t)$ costante a tratti:

$$\int_0^T e^{k \int_0^t \theta(s) ds} dt = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{k \int_0^t \theta(s) ds} dt$$

dove

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{k \int_0^t \theta(s) ds} dt = \frac{e^{k\theta_i(t_{i+1}-t_i)} - 1}{k\theta_i} \cdot \exp\left(k \sum_{j=0}^{i-1} \theta_j(t_{j+1} - t_j)\right).$$

Infatti posto $\int_0^t \theta(s) ds = H(t)$ si ha

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{kH(t)} dt &= \frac{1}{k\theta_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} k\theta_i e^{kH(t)} dt = \frac{e^{kH(t_{i+1})} - e^{kH(t_i)}}{k\theta_i} = \\ &= \frac{1}{k\theta_i} \exp\left(k \int_0^{t_i} \theta(s) ds\right) \left[\exp\left(k \int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta(s) ds\right) - 1\right] \\ &= \frac{1}{k\theta_i} \exp\left(k \sum_{j=0}^{i-1} \theta_j(t_{j+1} - t_j)\right) e^{k\theta_i(t_{i+1}-t_i)} - 1. \end{aligned}$$

Tuttavia, la rappresentazione integrale (3.31) della funzione $h(\cdot)$ è difficile da utilizzare in un'implementazione numerica veloce ed accurata. Esponiamo una rappresentazione alternativa, basata sulle serie uniformemente convergenti i cui termini sono facilmente calcolabili ed il cui l'errore totale può essere controllato a priori. Questi risultati li troviamo nella Proposizione 3.6 e nel Lemma 3.7.

Proposizione 3.6. *La funzione $h(\cdot)$ ammette la seguente rappresentazione in serie uniformemente convergente*

$$h(y) = \alpha \left(\frac{E\left(\frac{\alpha}{y}\right)}{1-\beta} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_{\frac{\alpha}{y}}(n)}{n(n-\beta+1)} \right),$$

dove

$$\begin{aligned} E(x) &= \int_x^\infty e^{-t} t^{-1} dt, \quad x > 0, \\ F_\nu(n) &= P(Z \leq n), \quad Z \sim Poi(\nu), \\ \alpha &= \frac{2}{\epsilon^2}, \\ \beta &= \frac{-2k}{\epsilon^2}. \end{aligned}$$

3.2. Prezzo delle opzioni con sottostante realized variance

Dimostrazione. In (3.31) indichiamo $\alpha = \frac{2}{\sigma^2} > 0$, $\beta = \frac{-2k}{\sigma^2} < 0$ e riscriviamo l'integrale come

$$\alpha \int_0^y e^{-\frac{\alpha}{z}} z^{-\beta} \int_z^\infty e^{\frac{\alpha}{u}} u^{\beta-2} du dz = \alpha \int_0^y e^{-\frac{\alpha}{z}} \int_z^\infty e^{\frac{\alpha}{u}} \left(\frac{z}{u}\right)^{-\beta} u^{-2} du dz.$$

Tramite un cambiamento di variabile nell'integrale interno $\frac{z}{u} = t$ otteniamo

$$\int_z^\infty e^{\frac{\alpha}{u}} \left(\frac{z}{u}\right)^{-\beta} u^{-2} du = \frac{1}{z} \int_0^1 e^{\frac{\alpha t}{z}} t^{-\beta} dt.$$

Ora espandiamo $e^{\frac{\alpha t}{z}}$ in serie ottenendo

$$\frac{1}{z} \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\alpha}{z}\right)^n t^{n-\beta} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\alpha^n}{z^{n+1}} \frac{1}{n-\beta+1},$$

dove abbiamo invertito l'ordine di sommatoria ed integrale dal momento che tutti i termini sono non negativi. Dunque

$$h(y) = \alpha \int_0^y e^{-\frac{\alpha}{z}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\alpha^n}{z^{n+1}} \frac{1}{n-\beta+1} dz = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! (n-\beta+1)} \int_0^y \frac{\alpha^n e^{-\frac{\alpha}{z}}}{z^{n+1}} dz.$$

Cambiando nuovamente la variabile d'integrazione $\frac{\alpha}{z} = t$ si ottiene

$$\int_0^y \frac{\alpha^n e^{-\frac{\alpha}{z}}}{z^{n+1}} dz = \int_{\frac{\alpha}{y}}^{\infty} e^{-t} t^{n-1} dt.$$

Per $n = 0$ riconosciamo la funzione integrale esponenziale

$$E\left(\frac{\alpha}{y}\right) = \int_{\frac{\alpha}{y}}^{\infty} e^{-t} t^{-1} dt,$$

mentre per $n \geq 1$ se integriamo per parti $n-1$ volte otteniamo la funzione gamma incompleta che soddisfa

$$\int_{\frac{\alpha}{y}}^{\infty} e^{-t} t^{n-1} dt = (n-1)! e^{-\frac{\alpha}{y}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{\alpha}{y}\right)^k}{k!} = (n-1)! F_{\frac{\alpha}{y}}(n-1),$$

dove $F_\lambda(\cdot)$ è la funzione di ripartizione di una variabile casuale di Poisson di parametro λ . Mettendo insieme i due risultati precedenti otteniamo

$$h(y) = \alpha \left(\frac{E\left(\frac{\alpha}{y}\right)}{1-\beta} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_{\frac{\alpha}{y}}(n-1)}{n(n-\beta+1)} \right).$$

L'uniforme convergenza della serie è garantita dalla limitazione

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{F_{\frac{\alpha}{y}}(n-1)}{n(n-\beta+1)} < \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n(n-\beta+1)} < \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{k}.$$

□

Nella Proposizione (3.6) notiamo la presenza della funzione speciale $E(x)$ facilmente accessibile in un qualsiasi pacchetto di analisi numerica. I termini che appaiono nella serie infinita sono molto facili da calcolare. Peraltro, come vedremo nel lemma seguente, l'errore totale derivante dall'operazione di troncamento della serie può essere dedotto a priori.

Lemma 3.7. *La serie infinita della Proposizione (3.6) ha resto di ordine k*

$$R_k = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{F_{\frac{\alpha}{y}}(n-1)}{n(n-\beta+1)} \quad (3.32)$$

positivo e soddisfa le seguenti limitazioni

$$\frac{F_{\frac{\alpha}{y}}(k-1)}{m+1} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{k+m} \right) < R_k < \frac{1}{k},$$

con $m = \lceil -\beta \rceil$. Se consideriamo \bar{R} il punto medio tra le due limitazioni, cioè

$$\bar{R} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} + \frac{F_{\frac{\alpha}{y}}(k-1)}{m+1} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{k+m} \right) \right),$$

allora si ha

$$\left| R_k - \bar{R} \right| < \frac{m + \frac{\alpha}{y}}{4k^2}. \quad (3.33)$$

Dimostrazione. Il limite superiore è già stato dimostrato nella Proposizione (3.6). Sia ora $m = \lceil -\beta \rceil$ (i.e. il più piccolo intero più grande o uguale a $-\beta$), possiamo scrivere

$$\begin{aligned} R_k &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{F_{\frac{\alpha}{y}}(n-1)}{n(n-\beta+1)} > F_{\frac{\alpha}{y}}(k-1) \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n(n-\beta+1)} \\ &\geq \frac{F_{\frac{\alpha}{y}}(k-1)}{m+1} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{m+1}{n(n+m+1)} \\ &= \frac{F_{\frac{\alpha}{y}}(k-1)}{m+1} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{k+m} \right). \end{aligned}$$

Sia \bar{R} il punto medio tra i due limiti, cioè

$$\bar{R} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} + \frac{F_{\frac{\alpha}{y}}(k-1)}{m+1} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{k+m} \right) \right),$$

e sia $p = F_{\frac{\alpha}{y}}(k-1)$. Allora $|R_k - \bar{R}|$ deve essere minore o uguale di metà della differenza dei due limiti, ossia

$$\begin{aligned} |R_k - \bar{R}| &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{p}{m+1} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{k+m} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2(m+1)} \sum_{j=0}^m \frac{j + (1-p)k}{k(k+j)} \\ &\leq \frac{1}{2k^2(m+1)} \left(\frac{m(m+1)}{2} + (1-p)k(m+1) \right) \\ &= \frac{m}{4k^2} + \frac{1-p}{2k}. \end{aligned}$$

dove la disuguaglianza \leq si dimostra per induzione. Ovvero dobbiamo provare che $\forall k \in \mathbb{N}$ e $\forall p \in [0, 1]$ vale

$$\sum_{j=0}^m \frac{j + (1-p)k}{k+j} \leq \frac{m(m+1)}{2k} + (1-p)(m+1) \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Per $m=0$ è banalmente verificata. Assumiamo che la disuguaglianza valga per $(m-1)$ e dimostriamola per m . Per ipotesi d'induzione vale

$$\sum_{j=0}^{m-1} \frac{j + (1-p)k}{k+j} + \frac{m + (1-p)k}{k+m} \leq \frac{(m-1)m}{2k} + m(1-p) + \frac{m(1-p)k}{k+m}.$$

Infine è verificata la seguente

$$\begin{aligned} \frac{(m-1)m}{2k} + m(1-p) + \frac{m(1-p)k}{k+m} &\leq \frac{m(m+1)}{2k} + (1-p)(m+1) \\ -\frac{m}{2k} + (1-p)m + \frac{m + (1-p)k}{k+m} &\leq \frac{m}{2k} + (1-p)(m+1) \\ \frac{m + (1-p)k}{k+m} &\leq \frac{m}{k} + (1-p) \\ -k(1-p) &\leq m, \end{aligned}$$

essendo $-k(1-p) \leq 0$ ed $m \geq 0$.

Osserviamo ora che

$$p = F_{\frac{\alpha}{y}}(k-1) = e^{-\frac{\alpha}{y}} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\left(\frac{\alpha}{y}\right)^n}{n!},$$

dunque

$$\begin{aligned} 1-p &= e^{-\frac{\alpha}{y}} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\left(\frac{\alpha}{y}\right)^n}{n!} = \frac{\alpha}{y} e^{-\frac{\alpha}{y}} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\left(\frac{\alpha}{y}\right)^{n-1}}{(n-1)!n} < \frac{\alpha}{y} \sum_{n=k-1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\alpha}{y}} \left(\frac{\alpha}{y}\right)^n}{n!} = \\ &= \frac{\alpha}{y} (1 - F_{\frac{\alpha}{y}}(k-2)) < \frac{\alpha}{y}, \end{aligned}$$

da cui la tesi

$$\left| R_k - \bar{R} \right| < \frac{m + \frac{\alpha}{y}}{4k^2}.$$

□

Vediamo ora un'applicazione del Lemma (3.7). Per il calcolo di $h(y)$, dato un certo y , usiamo la limitazione (3.33) per determinare il numero di termini necessari a raggiungere la precisione desiderata e poniamo

$$h(y) \approx \alpha \cdot \left(\frac{E\left(\frac{\alpha}{y}\right)}{1 - \beta} + \sum_{n=1}^{k-1} \frac{F_{\frac{\alpha}{y}}(n)}{n(n - \beta + 1)} + \bar{R} \right). \quad (3.34)$$

In altri termini quando \bar{R} è sufficientemente vicino ad R_k per un certo k allora posso sostituirlo a questo nella serie infinita.

Abbiamo concluso la trattazione della trasformata di Laplace della funzione variance call $C(K)$, vogliamo ora dedicarci al problema della scelta di un algoritmo d'inversione numerica veloce ed accurato. Nel paragrafo che segue analizzeremo l'algoritmo recentemente proposto da Isenger (2006).

3.3 Algoritmo d'inversione numerica di Laplace

Supponiamo di voler calcolare la differenza delle funzioni variance call $C - \tilde{C}$ nella sequenza di strike $k\Delta$, $k = 0, 1, \dots, M - 1$; sia $f(k) = C(k\Delta) - \tilde{C}(k\Delta)$, \tilde{f} la trasformata di Laplace di f

$$\tilde{f}(s) := \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad s \in \mathbb{C}. \quad (3.35)$$

Il punto di partenza del metodo è la Poisson summation formula che mette in relazione una somma infinita di valori della trasformata di Laplace con la damped Fourier series dei valori $f(k)$, $k \in \mathbb{N}$; nelle applicazioni si userà solo una quantità finita di indici $k = 0, 1, \dots, M - 1$.

Teorema 3.8 (PSF). *Sia $f \in L^1[0, \infty)$ a valori complessi con f a variazione limitata. Allora, per ogni $v \in [0, 1)$, vale*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(a + 2\pi i(k + v)) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-ak} e^{-i2\pi kv} f(k), \quad (3.36)$$

dove f è intesa come la regolarizzata $f(t) = \frac{(f(t^+) + f(t^-))}{2}$, $a \in \mathbb{R}$ è il damping factor e i è l'unità immaginaria $i = \sqrt{-1}$.

La dimostrazione è data in appendice B.

La PSF si può applicare alle funzioni a variazione limitata ed appartenenti a $L^1[0, \infty)$. Verifichiamo queste condizioni per la funzione $f(k) = C(k\Delta) - \tilde{C}(k\Delta)$ grazie al seguente lemma

3.3. Algoritmo d'inversione numerica di Laplace

Lemma 3.9. *Sia V una variabile casuale tale che $V > 0$ e $E(V^2) < \infty$. Allora la funzione $C : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da*

$$C(K) = E(V - K)_+ \quad (3.37)$$

appartiene a $L^1[0, \infty)$ ed è a variazione limitata.

Dimostrazione. A variazione limitata segue immediatamente osservando che $C(K) = E(V - K)_+$ è una funzione monotona decrescente di K e positiva. Infatti, se poniamo $\Omega_K = \{V \geq K\}$, allora

$$C(K) = \int_{\Omega} (V(\omega) - K)_+ dP(\omega) = \int_{\Omega_K} V(\omega) dP(\omega) - KP(\Omega_K).$$

Ora da $K_1 < K_2$ segue che $\Omega_{K_2} \subseteq \Omega_{K_1}$ e quindi

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{K_1}} V(\omega) dP(\omega) - \int_{\Omega_{K_2}} V(\omega) dP(\omega) &= \int_{\Omega_{K_1} \setminus \Omega_{K_2}} V(\omega) dP(\omega) \geq \\ &\geq K_1 P(\Omega_{K_1} \setminus \Omega_{K_2}) = K_1 P(\Omega_{K_1}) - K_2 P(\Omega_{K_2}). \end{aligned}$$

Riscrivendo l'ultima disequazione otteniamo

$$C(K_1) \geq C(K_2).$$

Ci rimane da dimostrare che $C(K) \in L^1[0, \infty)$, ossia

$$\int_0^{\infty} C(K) dK = \int_0^{\infty} E(V - K)_+ dK < \infty.$$

Poichè la funzione integranda è positiva, possiamo applicare il teorema di Fubini invertendo l'operazione di integrazione e valor atteso:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} E(V - K)_+ dK &= E \left(\int_0^{\infty} (V - K)_+ dK \right) = \\ &= E \left(\int_0^V (V - K) dK \right) \\ &= \frac{1}{2} E(V^2) < \infty. \end{aligned}$$

□

In entrambi i modelli di Heston e 3/2 la trasformata di Laplace della distribuzione di V_T esiste in un intorno dello zero, ciò implica che tutti i momenti della realized variance sono finiti. Infatti, grazie allo sviluppo in serie di McLaurin della funzione esponenziale, otteniamo

$$E(e^{-\lambda V_T}) = E \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \lambda^k V_T^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \lambda^k E(V_T^k). \quad (3.38)$$

Questo è vero anche per la distribuzione control variate Gamma. Concludiamo che le funzioni $C(\cdot)$ e $\tilde{C}(\cdot)$ verificano le condizioni del Lemma 3.9 e quindi la funzione differenza $f(k)$ appartiene allo spazio $L^1[0, \infty)$ ed è a variazione limitata.

Ricordiamo ora la definizione di regola di quadratura Gaussiana per il termine a sinistra dell'uguaglianza (3.36). Riscriviamo il termine a sinistra della PSF a meno del damping factor a

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(2\pi i(k+v)) \quad (3.39)$$

in termini di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_{Q_v}$, definito come

$$\langle f, g \rangle_{Q_v} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|2\pi(k+v)|^2} f\left(\frac{1}{2\pi i(k+v)}\right) g^*\left(\frac{1}{2\pi i(k+v)}\right), \quad (3.40)$$

dove con g^* abbiamo indicato il coniugato di g . Allora per $\mathbf{1}(s) = 1$ e $\Psi \tilde{f}(s) = s^{-1} \tilde{f}(s^{-1})$ possiamo riscrivere il termine a sinistra di (3.36) come $\langle \Psi \tilde{f}, \Psi \mathbf{1} \rangle_{Q_v}$. L'idea è approssimare questo prodotto scalare con una regola di quadratura Gaussiana. Sia $\|\cdot\|_{Q_v}$ la norma indotta dal prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_{Q_v}$ e consideriamo lo spazio di successioni $(L^2(Q_v), \|\cdot\|_{Q_v})$. Diremo che

$$f \in L^2(Q_v) \iff \text{la successione } a_k^{(f)} = \left\{ f\left(\frac{1}{2\pi i(k+v)}\right) \right\}_k \in L^2(Q_v). \quad (3.41)$$

Siano ora $\{q_n^v; n \in N_0\}$ i polinomi ortogonali della forma

$$q_n^v(s) := p_n(s) - (-1)^n e^{-i2\pi v} p_n(-s), \quad (3.42)$$

dove

$$p_n(s) = \sqrt{2n+1} \sum_{k=0}^n \frac{(k+n)! (-s)^k}{(n-k)! k!}. \quad (3.43)$$

Denotiamo con $\langle \cdot, \cdot \rangle_n$ il prodotto scalare

$$\langle f, g \rangle_n := \sum_{k=1}^n \alpha_k^v f(\mu_k^v) g^*(\mu_k^v), \quad (3.44)$$

dove $\{\mu_k^v; k = 1, \dots, n\}$ sono le radici semplici di q_n^v ed i numeri strettamente positivi $\{\alpha_k^v; k = 0, \dots, n\}$, detti numeri di Christoffel, sono dati da

$$\alpha_k^v = \frac{1}{\sum_{j=1}^n |q_j^v(\mu_k^v)|^2}. \quad (3.45)$$

Possiamo quindi enunciare il seguente Teorema; per una dimostrazione dettagliata e approfondimenti sull'argomento rimandiamo alla monografia di Szegö [20].

Teorema 3.10. *L'insieme $\{q_j^v; j = 0, 1, \dots\}$ è un insieme di polinomi ortogonali che formano una base ortonormale di $L^2(Q_v)$. Quindi ogni funzione di $L^2(Q_v)$ è approssimabile da polinomi di grado al più $2n - 1$. Inoltre il prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_n$ viene chiamato regola di quadratura Gaussiana ed è l'unica regola di quadratura che soddisfa*

$$\langle p, \mathbf{1} \rangle_{Q_v} = \langle p, \mathbf{1} \rangle_n \quad \forall p \in \pi_{2n-1}, \quad (3.46)$$

dove π_n è lo spazio dei polinomi di grado al più n e $\mathbf{1}$ è la funzione costantemente uguale a 1.

La dimostrazione dell'ortogonalità dei polinomi $\{q_j^v; j = 0, 1, \dots\}$ è data in Iseger [5]. E' ben noto che le radici di polinomi ortogonali sono tutte distinte e appartengono al supporto di questo prodotto scalare; ossia le radici $\{\mu_k^v\}$ sono distinte e appartengono al campo dei numeri complessi. Consideriamo ora le funzioni $r(s) = \frac{1}{s}$ ed $h(s) = \tilde{f}(\frac{1}{s})$. Allora possiamo riscrivere il termine (3.39) come

$$\langle \Psi \tilde{f}, \Psi \mathbf{1} \rangle_{Q_v} = \langle rh, r \rangle_{Q_v} = \langle |r|^2 h, \mathbf{1} \rangle_{Q_v}. \quad (3.47)$$

Ora notiamo che $|r|^2 h \in L^2(Q_v)$, quindi per il Teorema 3.10 possiamo approssimarlo con un polinomio p dello spazio π_{2n-1} , ossia

$$\langle |r|^2 h, \mathbf{1} \rangle_{Q_v} \approx \langle p, \mathbf{1} \rangle_{Q_v} = \langle p, \mathbf{1} \rangle_n, \quad (3.48)$$

che riscritta è uguale a

$$\langle |r|^2 h, \mathbf{1} \rangle_{Q_v} \approx \sum_{k=1}^n \alpha_k^v |r(\mu_k^v)|^2 h(\mu_k^v) = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k^v}{|\mu_k^v|^2} \tilde{f}\left(\frac{1}{\mu_k^v}\right). \quad (3.49)$$

In definitiva possiamo approssimare $\langle \Psi \tilde{f}, \Psi \mathbf{1} \rangle_{Q_v}$ tramite la regola di quadratura Gaussiana ottenendo la seguente formula di quadratura

$$\sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k^v}{|\mu_k^v|^2} \tilde{f}\left(\frac{1}{\mu_k^v}\right) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(2\pi i(k+v)) = \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-2\pi i k v) f(k), \quad (3.50)$$

dove l'ultima uguaglianza segue dalla Poisson summation formula (3.36) ponendo $a = 0$. Consideriamo solo la parte reale della formula (3.50)

$$\sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k^v}{|\mu_k^v|^2} \operatorname{Re}\left(\tilde{f}\left(\frac{1}{\mu_k^v}\right)\right) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \cos(2\pi k v) f(k), \quad (3.51)$$

con α_k^v numeri reali e utilizziamo nella formula la trasformata di Laplace $\tilde{f}(a+s)$, ovvero la trasformata di Laplace di $e^{-at} f(t)$ con a damping factor. Otteniamo così la seguente formula di quadratura

$$F_a(v) \approx \sum_{k=0}^{\infty} e^{-ak} \cos(2\pi k v) f(k), \quad (3.52)$$

dove

$$F_a(v) = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k^v}{|\mu_k^v|^2} \operatorname{Re} \left(\tilde{f} \left(a + \frac{1}{\mu_k^v} \right) \right). \quad (3.53)$$

Per concludere ci rimangono da calcolare i valori $f(k)$ per $k = 0, 1, \dots, M-1$. Arriviamo al risultato grazie alla formula d'inversione della serie di Fourier discreta dimostrata in appendice B,

$$f(k) \approx \frac{e^{ak}}{M_2} \sum_{j=0}^{M_2-1} \cos \left(\frac{2\pi \left(j + \frac{1}{2} \right) k}{M_2} \right) F_a \left(\frac{j + \frac{1}{2}}{M_2} \right), \quad (3.54)$$

com M_2 una data potenza di 2. Riusciamo a calcolare la somma (3.54) tramite l'algoritmo FFT in $M_2 \log(M_2)$ iterazioni.

Vediamo ora come è possibile approssimare la regola (3.51) con una regola di quadratura più facile. Riscriviamo la PSF come

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{f}_{\rho_v^a}(i\pi(2k+1)) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-ak} e^{-i2\pi kv} f(k), \quad (3.55)$$

con

$$\tilde{f}_{\rho_v^a}(s) = \tilde{f}(\rho_v^a + s), \quad \rho_v^a = a + 2\pi i \left(v - \frac{1}{2} \right). \quad (3.56)$$

Applicando la regola di quadratura al termine a sinistra della (3.55)

$$\langle \Psi \tilde{f}_{\rho_v^a}, \Psi \mathbf{1} \rangle_{Q_{v_1}} \approx \langle \Psi \tilde{f}_{\rho_v^a}, \Psi \mathbf{1} \rangle_{v_1}, \quad (3.57)$$

si arriva per $v_1 = 0,5$ all'approssimazione

$$\sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k^{0,5}}{|\mu_k^{0,5}|^2} \tilde{f}_{\rho_v^a} \left(\frac{1}{\mu_k^{0,5}} \right) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{f}_{\rho_v^a}(i\pi(2k+1)) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-ak} e^{-i2\pi kv} f(k). \quad (3.58)$$

Questa riscritta assume la forma

$$\sum_{k=1}^n \beta_k \tilde{f}(i\lambda_k + a + 2\pi i v) \approx \sum_{k=0}^{\infty} e^{-ak} e^{-i2\pi kv} f(k) \quad (3.59)$$

dove

$$\lambda_k = \frac{1}{i\mu_k^{0,5}} - \pi \quad \text{e} \quad \beta_k = \frac{\alpha_k^{0,5}}{|\mu_k^{0,5}|^2} \quad (3.60)$$

sono rispettivamente i nodi e pesi della quadratura.

Consideriamo solo la parte reale della formula (3.59)

$$F_a(v) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \cos(2\pi kv) e^{-ak} f(k), \quad (3.61)$$

con

$$F_a(v) = \sum_{k=1}^n \beta_k \operatorname{Re} \left(\tilde{f}(a + i\lambda_k + 2\pi i v) \right). \quad (3.62)$$

Vogliamo far diventare la funzione $F_a(v)$ periodica ponendo $F_a(0)$ e $F_a(1)$ uguali a

$$\sum_{k=1}^n \beta_k \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\tilde{f}(a + i\lambda_k) + \tilde{f}(a + i\lambda_k + 2\pi i) \right). \quad (3.63)$$

Come fatto precedentemente per calcolare i valori $f(k)$ con $k = 0, 1, \dots, M-1$ applichiamo la formula d'inversione della serie di Fourier discreta ottenendo

$$f(k) \approx \frac{e^{ak}}{M_2} \sum_{j=0}^{M_2-1} \cos \left(\frac{2\pi jk}{M_2} \right) F_a \left(\frac{j}{M_2} \right), \quad (3.64)$$

con M_2 una data potenza di 2.

Infine vediamo come semplificare la (3.64). Dal momento che il polinomio $q_k^{0,5}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ è a coefficienti reali, possiamo considerarlo a coefficienti complessi allora per il teorema fondamentale dell'algebra esistono n numeri complessi $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{C}$ tali che $q_k^{0,5} = (\lambda - \mu_1) \cdots (\lambda - \mu_n)$. Ora poichè $q_k^{0,5}$ è a coefficienti reali, se $\mu \in \mathbb{C}$ è una radice complessa anche $\mu^* \in \mathbb{C}$ è una radice complessa di $q_k^{0,5}$, ossia $\mu_k^{0,5}$ e $\mu_{n-k}^{0,5}$ sono coppie di numeri coniugati. Segue da (3.45) che i numeri di Christophel $\alpha_k^{0,5}$ e $\alpha_{n-k}^{0,5}$ sono uguali. Utilizzando questa simmetria, le formule (3.60) e la simmetria del coseno $\cos(2\pi v) = \cos(2\pi(1-v))$ otteniamo (per n pari) la seguente espressione

$$f(k) \approx \frac{e^{ak}}{M_2} \sum_{j=0}^{M_2-1} \cos \left(\frac{2\pi jk}{M_2} \right) \bar{F}_a \left(\frac{j}{M_2} \right), \quad (3.65)$$

dove

$$\bar{F}_a(v) = \begin{cases} 2 \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \beta_k \operatorname{Re} \left(\tilde{f}(a + i\lambda_k + i2\pi v) \right), & 0 < v < 1, \\ \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \beta_k \operatorname{Re} \left(\tilde{f}(a + i\lambda_k) + \tilde{f}(a + i\lambda_k + i2\pi) \right), & v = 0. \end{cases}$$

Grazie al ben noto algoritmo FFT possiamo calcolare la somma (3.65) in $M_2 \log(M_2)$ iterazioni.

Algoritmo

Input: \tilde{f} , Δ ed M con M potenza di 2

Output: $f(l\Delta)$, $l = 0, 1, \dots, M-1$

Parametri: $M_2 = 8M$, $a = \frac{44}{M_2}$, $n = 16$

Step 1. Per $k = 0, 1, \dots, M_2$ e $j = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$, calcolare i valori

$$\tilde{f}_{jk} = \operatorname{Re} \left[\tilde{f} \left(\frac{a + i\lambda_j + \frac{2\pi ik}{M_2}}{\Delta} \right) \right], \quad \tilde{f}_k = \frac{2}{\Delta} \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} \beta_j \tilde{f}_{jk},$$

e $\tilde{f}_0 = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} \beta_j (\tilde{f}_{j0} + \tilde{f}_{jM_2})$.

Step 2. Per $l = 0, 1, \dots, M_2 - 1$, calcolare i valori

$$f_l = \frac{1}{M_2} \sum_{k=0}^{M_2-1} \tilde{f}_k \cos \left(\frac{2\pi lk}{M_2} \right)$$

con l'algoritmo FFT.

Step. 3 Sia $f(l\Delta) = e^{al} f_l$ per $l = 0, 1, \dots, M - 1$.

Osservazione 4. Calcoliamo i valori della funzione $f_\Delta(k) = f(k\Delta)$ per $k = 0, 1, \dots, M - 1$ applicando la regola di quadratura alla trasformata di Laplace della funzione $f_\Delta(k)$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_\Delta(s) &= \int_0^\infty e^{-sk} f_\Delta(k) dk = \int_0^\infty e^{-sk} f(\Delta k) dk = \\ &= \frac{1}{\Delta} \int_0^\infty e^{-\frac{\alpha}{\Delta} s} f(\alpha) d\alpha = \frac{1}{\Delta} \tilde{f} \left(\frac{s}{\Delta} \right). \end{aligned}$$

Osservazione 5. Ampie prove numeriche mostrano che per $n = 16$, per tutte le funzioni regolari, si raggiunge un buon livello di precisione nei calcoli. Per essere più scrupolosi scegliamo $a = 44/M_2$ e $M_2 = 8M$. Per $n = 16$, abbiamo bisogno di calcolare 8 trasformate di Laplace $\tilde{f}_{1k}, \dots, \tilde{f}_{8k}$ per la regola di quadratura e $M_2 \cdot 8 = 8M \cdot 8 = 64M$ valori per la funzione f_l . Per calcolare un singolo valore f_l abbiamo bisogno di 64 valori di trasformate di Laplace.

Osservazione 6. Poichè la regola di quadratura Gaussiana è esatta nello spazio dei polinomi di grado al più $2n - 1$, otteniamo che

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k^v = \langle \mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle_v = \langle \mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle_{Q_v} = \frac{\langle q_0^v, q_0^v \rangle_{Q_v}}{1 - \cos(2\pi v)} = \frac{1}{1 - \cos(2\pi v)}. \quad (3.66)$$

Questa assume valore minimo per $v = 0, 5$. Ciò mostra che la regola di quadratura (3.62) utilizzata è numericamente più stabile rispetto alla regola di quadratura (3.53).

Per l'algoritmo FFT consideriamo M una potenza di 2.

Capitolo 4

Il metodo Monte Carlo

I metodi Monte Carlo sono basati sull'analogia tra la probabilità e il volume. La nozione intuitiva della probabilità viene formalizzata associando ad un evento un insieme di realizzazione e definendo la probabilità di questo evento come il volume di tale insieme o misura relativa ad un universo di possibili realizzazioni. Il metodo Monte Carlo usa questa identità al contrario, calcolando il volume e interpretandolo come probabilità. Questo significa dover campionare casualmente da un universo di possibili realizzazioni e prendere questo campione come una stima. La legge forte dei grandi numeri assicura che questa stima converge al valore corretto al crescere delle simulazioni. Il teorema centrale del limite fornisce informazioni sulla grandezza dell'errore nella stima dopo aver effettuato un numero finito di repliche.

4.1 Principi base

La teoria della finanza, come molte aree in cui la matematica gioca un ruolo importante, sta subendo una rivoluzione dovuta all'utilizzo dei computer e alla diffusione di potenti strumenti di simulazione matematici. Una conseguenza fondamentale nella *asset pricing theory* è che, in alcune circostanze, il prezzo di un contratto derivato può essere rappresentato da un valore atteso, come visto precedentemente. Il problema di valutare i derivati si riduce quindi al calcolo delle aspettative. Non sempre però abbiamo a disposizione una formula esplicita per valutare il prezzo di un derivato. In molti modelli finanziari infatti la funzione payoff è molto complicata e discontinua ed il calcolo del valore atteso scontato al giorno presente può essere parecchio oneroso. In questi casi il prezzo del contratto derivato può essere stimato solo approssimativamente e quindi una buona scelta per determinarne il prezzo è il metodo Monte Carlo.

Il metodo Monte Carlo si basa sulla Legge forte dei grandi numeri: se (X_n) è una successione di variabili casuali i.i.d. sommabili e tali che $E[X_1] = E[X]$,

allora vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k = E[X] \quad \text{q.s.}$$

Di conseguenza, se siamo in grado di generare dei valori $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n$ di X in modo indipendente, allora la media

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \bar{X}_k$$

fornisce q.s. un'approssimazione di $E[X]$.

Il metodo Monte Carlo ad esempio consente di approssimare il valore dell'integrale numericamente: si consideri ad esempio il problema di stimare l'integrale della funzione f sull'intervallo unitario. Sia $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata, allora possiamo rappresentare l'integrale

$$\alpha = \int_0^1 f(x) dx \quad (4.1)$$

come il valore atteso $E[f(Y)]$, dove $Y \sim \text{Unif}[0, 1]$ è uniformemente distribuita¹ su $[0, 1]$. Poniamo $X = f(Y)$. Considerando una successione (X_n) di n variabili casuali indipendenti uniformemente distribuite su $[0, 1]$ possiamo ripetere la valutazione di f n volte, quindi facendo una media dei risultati si ottiene la stima di Monte Carlo

$$\hat{\alpha}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(Y_i). \quad (4.2)$$

Se f è sommabile sull'intervallo $[0, 1]$, allora per la Legge forte dei grandi numeri si ha che

$$\hat{\alpha}_n \longrightarrow \alpha \quad \text{q.s.} \quad (4.3)$$

Riguardo alla complessità computazione, riusciamo a dare una stima dell'errore nel metodo Monte Carlo grazie alla disuguaglianza di Markov.

Proposizione 4.1 (Disuguaglianza di Markov). *Siano X una variabile casuale, $\lambda \in \mathbb{R}_+$ e $1 \leq p < +\infty$. Allora vale*

$$P(|X| \geq \lambda) \leq \frac{E[|X|^p]}{\lambda^p}. \quad (4.4)$$

In particolare, se X è una variabile casuale reale, vale

$$P(|X - E[X]| \geq \lambda) \leq \frac{\text{var}(X)}{\lambda^2}. \quad (4.5)$$

¹Si veda Esempio 2 a pagina 4

Dimostrazione. Proviamo la (4.4). Vale

$$E[|X|^p] \geq \int_{\{|X| \geq \lambda\}} |X|^p dP \geq \lambda^p \int_{\{|X| \geq \lambda\}} dP = \lambda^p P(|X| \geq \lambda).$$

Segue immediatamente che

$$P(X - E[X] \geq \lambda) \leq \frac{E[(X - E[X])^p]}{\lambda^p},$$

da cui l'equazione (4.5) per $p = 2$. \square

Consideriamo una successione di variabili casuali reali i.i.d. (X_n) con $\mu = E[X_1]$ e $\sigma^2 = \text{var}(X_1)$ finiti. Inoltre poniamo

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k. \quad (4.6)$$

Se applichiamo la Proposizione 4.1 per $X = M_n$, per ogni $\epsilon > 0$, si ha

$$\begin{aligned} P(|M_n - \mu| \geq \epsilon) &\leq \frac{\text{var}(M_n)}{\epsilon^2} = \\ &= \frac{\frac{1}{n^2} \text{var}(X_1 + \dots + X_n)}{\epsilon^2} \\ &= \frac{\frac{1}{n} \text{var}(X_1)}{\epsilon^2} \\ &= \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}. \end{aligned}$$

Riscriviamo la disuguaglianza nella seguente forma:

$$P(|M_n - \mu| \leq \epsilon) \geq p, \quad \text{dove } p := 1 - \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}. \quad (4.7)$$

Osservazione 7. Osserviamo che, essendo una tecnica basata sulla generazione di numeri casuali, il risultato e l'errore del metodo di Monte Carlo sono variabili casuali.

La formula (4.7) fornisce una stima dell'errore in termini di tre parametri:

- i) n , il numero di campioni, cioè quanti numeri casuali sono stati generati;
- ii) ϵ , il massimo errore di approssimazione;
- iii) p , la probabilità minima che il valore approssimato M_n appartenga all'intervallo di confidenza $[\mu - \epsilon, \mu + \epsilon]$.

Osservazione 8. Notiamo dalla (4.7) che, dato un certo ϵ , al tendere di n all'infinito la probabilità che M_n appartenga all'intervallo $[\mu - \epsilon, \mu + \epsilon]$ diventa uno. In formule:

$$M_n \longrightarrow \mu \quad \text{con probabilità 1 per } n \rightarrow \infty.$$

Inoltre per la (4.7), fissati $n \in \mathbb{N}$ e $p \in]0, 1[$, l'errore massimo di approssimazione del metodo Monte Carlo con n simulazioni è, con probabilità almeno pari a p , dell'ordine di $\frac{1}{\sqrt{n}}$ e più precisamente

$$\epsilon = \frac{\sigma}{\sqrt{n(1-p)}}. \quad (4.8)$$

Nell'esempio del calcolo integrale (4.1), abbiamo $X = f(Y)$ con Y uniformemente distribuita su $[0, 1]$ e l'errore massimo del metodo può essere stimato come

$$\sqrt{\frac{\text{var}(f(Y))}{n(1-p)}}, \quad (4.9)$$

ossia un errore dell'ordine di $\frac{1}{\sqrt{n}}$. D'altra parte, se stimiamo l'integrale (4.1) con la regola del trapezio

$$\alpha \approx \frac{f(0) + f(1)}{2n} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right), \quad (4.10)$$

si può dimostrare che, se f è derivabile due volte con derivata seconda continua, l'errore della formula di quadratura trapezoidale è dell'ordine di $\frac{1}{n^2}$. Il metodo Monte Carlo in generale non è quindi competitivo per il calcolo degli integrali uno dimensionali. L'utilità del metodo risiede nel fatto che l'ordine $\frac{1}{\sqrt{n}}$ dell'errore non è ristretto solo agli integrali sull'intervallo unitario, ma possiamo estendere il ragionamento precedente per stimare gli integrali su $[0, 1]^d$ (e quindi anche \mathbb{R}^d) per tutte le dimensioni d . In altri termini l'errore è dell'ordine $\frac{1}{\sqrt{n}}$ indipendentemente dalla dimensione d del problema. Ciò non è vero per la regola di quadratura trapezoidale dove l'errore, in un problema d -dimensionale, ha ordine $\frac{1}{\sqrt{n^2}}$; questo deterioramento nella velocità di convergenza all'aumentare della dimensione è tipico di tutti i metodi d'integrazione deterministici.

Possiamo poi osservare, dalla (4.8), che la deviazione standard σ è direttamente proporzionale all'errore approssimato: da un punto di vista computazione σ è infatti un parametro chiave che influenza significativamente l'efficienza dell'approssimazione. Tipicamente σ non è noto; tuttavia è possibile utilizzare le simulazioni generate per costruire uno stimatore di σ :

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - M_n)^2.$$

In altre parole, possiamo utilizzare le realizzazioni di X per avere un'approssimazione di α e dell'errore ϵ che commettiamo, in termini di intervalli di confidenza. Evidentemente lo stimatore σ_n è solo un'approssimazione di σ , ma in generale è sufficientemente accurato da permettere una stima soddisfacente dell'errore.

Osservazione 9. Un inconveniente del metodo Monte Carlo è l'impossibilità di generare dei valori casuali totalmente indipendenti: un computer può generare dei valori "casuali" solo attraverso algoritmi deterministici. Così, implementando Monte Carlo, abbiamo a disposizione solo numeri "pseudo-casuali", ovvero numeri che hanno le stesse proprietà statistiche dei numeri casuali effettivi, ma al crescere delle simulazioni, non sono generati in modo realmente indipendente. L'errore dovuto alla non-indipendenza dei valori casuali non può essere facilmente stimato, ma se la qualità del generatore è buona il metodo Monte Carlo restituisce ugualmente dei risultati accettabili.

4.2 Simulazione

Ora che abbiamo discusso i principi generali del metodo Monte Carlo, vediamo un semplice esempio su cui basarsi. Come applicazione del metodo Monte Carlo consideriamo il valore atteso del payoff di un'opzione call scontato fino al giorno presente

$$e^{-rT} E[F(S_T)], \quad (4.11)$$

dove $F(S_T)$ è il payoff dell'opzione con scadenza T , r è il tasso d'interesse privo di rischio supposto costante e l'operatore $E[\cdot]$ è misurato rispetto ad una fissata misura martingala equivalente.

Sia S_t il prezzo di un'azione al tempo t . Un'opzione call attribuisce al possessore il diritto di acquistare l'azione ad un prezzo fissato K in un tempo futuro fissato T ; il tempo corrente è $t = 0$. Se al tempo T il prezzo dell'azione S_T supera il prezzo strike K , il possessore esercita l'opzione per trarre un profitto di $S_T - K$; se, in altre parole, $S_T \leq K$, l'opzione scade senza valore. (Questa è un'opzione *Europea*, significa che può essere esercitata solo alla data di scadenza T ; un'opzione *Americana* consente al possessore il diritto di scegliere il tempo in cui esercitarla). Il payoff di un'opzione al tempo T è dato da

$$F(S_T) = (S_T - K)_+ = \max\{0, S_T - K\}. \quad (4.12)$$

Per ottenere il valore presente di questo payoff moltiplichiamo $F(S_T)$ per un fattore di sconto e^{-rT} , così la stima del valore atteso presente (4.11) assume la forma

$$e^{-rT} E[(S_T - K)_+]. \quad (4.13)$$

Abbiamo bisogno di specificare la distribuzione della variabile casuale S_T , il prezzo azionario a scadenza. Piuttosto che specificare la distribuzione ad un istante di tempo, introduciamo un modello per descrivere la dinamica del prezzo azionario. Il modello di Black&Scholes descrive l'evoluzione del prezzo azionario mediante l'equazione differenziale stocastica (SDE)

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma dW_t, \quad (4.14)$$

dove W_t è un moto Browniano standard. Possiamo interpretare questa equazione come il cambiamento percentuale $\frac{dS}{S}$ del rendimento per ogni incremento del moto Browniano. Il parametro σ è la volatilità del prezzo azionario e il coefficiente di dt è il tasso di rendimento atteso. Nel considerare il tasso di rendimento uguale al tasso d'interesse r , stiamo implicitamente descrivendo una dinamica *risk-neutral* del prezzo azionario.

La soluzione dell'equazione differenziale stocastica (4.14) è data da

$$S_T = S_0 \exp \left(\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma W_T \right), \quad (4.15)$$

con S_0 prezzo azionario corrente che supponiamo noto. La variabile casuale W_T ha distribuzione normale con media 0 e varianza T ; questa è anche la distribuzione di $\sqrt{T}Z$ se Z è una variabile casuale normale standard (media 0, varianza 1). Possiamo quindi riscrivere la (4.15) come

$$S_T = S_0 \exp \left(\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma \sqrt{T} Z \right), \quad (4.16)$$

dove il logaritmo del prezzo azionario ha distribuzione normale mentre il prezzo azionario stesso ha distribuzione log-normale.

Il valore atteso $E \left[e^{-rT} (S_T - K)_+ \right]$ è un integrale rispetto alla densità log-normale di S_T . D'altra parte questo integrale può essere valutato in termini di funzione di distribuzione normale standard Φ come

$$\text{BS}(S_0, \sigma, T, r, K) = S_0 \Phi(d_1) - K e^{-rT} \Phi(d_2) \quad (4.17)$$

con

$$d_1 = \frac{\log \left(\frac{S_0}{K} \right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T}. \quad (4.18)$$

L'equazione (4.17) è la formula di Black&Scholes per un'opzione call.

Alla luce della disponibilità di questa formula, non è necessario utilizzare Monte Carlo per calcolare $E \left[e^{-rT} (S_T - K)_+ \right]$. A maggior ragione, abbiamo visto precedentemente che Monte Carlo non è un metodo competitivo per calcolare gli integrali uno dimensionali. Tuttavia, utilizziamo questo esempio per illustrare i passi chiavi in Monte Carlo. Da (4.16) notiamo che per estrarre campioni dal prezzo finale S_T è sufficiente avere a disposizione un meccanismo per generare realizzazioni dalla distribuzione normale standard. Il software *Mathematica*[®], come vedremo in seguito, include la funzione *RandomVariate* per generare delle variabili pseudo-casuali da una certa distribuzione.

Stimiamo quindi la quantità $E \left[e^{-rT} (S_T - K)_+ \right]$ grazie alla seguente procedura:

- (A.1) generiamo n campioni indipendenti Z_i , $i = 1, \dots, n$ dalla distribuzione normale standard;

(A.2) consideriamo la corrispondente realizzazione del valore finale del sottostante

$$S_T^{(i)} = S_0 \exp \left(\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma \sqrt{T} Z_i \right); \quad (4.19)$$

(A.3) calcoliamo l'approssimazione del prezzo della call

$$\hat{C}_n = \frac{e^{-rT}}{n} \sum_{i=1}^n F \left(S_T^{(i)} \right) \approx e^{-rT} E [F(S_T)]. \quad (4.20)$$

Proprio per la sua facilità di applicazione ad un'ampia varietà di problemi, il Monte Carlo è uno dei metodi numerici più popolari. Vediamo ora come può essere applicato in combinazione con lo schema di Eulero. Consideriamo la dinamica del moto geometrico Browniano data da

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

Per ottenere delle realizzazioni di S_T utilizziamo uno schema di tipo Eulero: in questo modo però all'errore del metodo Monte Carlo si aggiunge l'errore di discretizzazione della SDE. La procedura è la seguente:

(B.1) generiamo nm campioni indipendenti $Z_{i,k}$ dalla distribuzione normale standard per $i = 1, \dots, n$ e $k = 1, \dots, m$;

(B.2) utilizzando la formula iterativa

$$S_{t_k}^{(i)} = S_{t_{k-1}}^{(i)} \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (t_k - t_{k-1}) + \sigma \sqrt{t_k - t_{k-1}} Z_{i,k} \right). \quad (4.21)$$

determiniamo le corrispondenti realizzazioni del valore finale del sottostante $S_T^{(1)}, \dots, S_T^{(n)}$;

(B.3) calcoliamo l'approssimazione \hat{C}_n del prezzo della call come in (A.3).

Per $n \geq 1$, lo stimatore \hat{C}_n è *imparziale*, nel senso che il suo valore atteso coincide con il prezzo C :

$$E [\hat{C}_n] = C \equiv E [e^{-rT} (S_T - K)_+].$$

Lo stimatore è anche *fortemente consistente*, significa che per $n \rightarrow \infty$,

$$\hat{C}_n \rightarrow C \quad \text{con probabilità 1.}$$

Per un valore di n finito ma abbastanza grande, possiamo completare la stima puntuale \hat{C}_n con un intervallo di confidenza. Un intervallo di confidenza è un range di valori plausibili all'interno del quale ci si aspetta di trovare il parametro incognito con un certo grado di confidenza. Indichiamo con δ il

livello di confidenza dell'intervallo di confidenza e con $p = 1 - \delta$ il grado di attendibilità del nostro intervallo. Sia

$$s_C = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (C_i - \hat{C}_n)^2}, \quad C_i = e^{-rT} (S_T^{(i)} - K)_+ \quad (4.22)$$

la deviazione standard di C_1, \dots, C_n e sia z_δ il quantile $1 - \delta$ della distribuzione normale standard (i.e. $\Phi(z_\delta) = 1 - \delta$). Allora

$$\left[\hat{C}_n - z_{\frac{\delta}{2}} \frac{s_C}{\sqrt{n}}, \hat{C}_n + z_{\frac{\delta}{2}} \frac{s_C}{\sqrt{n}} \right] \quad (4.23)$$

è un asintoticamente valido $1 - \delta$ intervallo di confidenza per C . In altre parole, è approssimativamente uguale a $1 - \delta$ la probabilità che i due estremi dell'intervallo

$$\hat{C}_n \pm z_{\frac{\delta}{2}} \frac{s_C}{\sqrt{n}}$$

contengano il valore “vero” C del prezzo dell'opzione call. Nella tabella seguente elenchiamo i valori di z_δ corrispondenti ai più frequenti livelli di confidenza:

δ	Intervallo di confidenza	$z_{\delta/2}$
0.01	99%	2.58
0.02	98%	2.33
0.05	95%	1.96
0.10	90%	1.65

Tabella 4.1: Livelli di confidenza

Per un intervallo di confidenza del 95% si ha $\delta = 0,05$ e $z_{\delta/2} \approx 1,96$. In alternativa, possiamo sostituire $z_{\delta/2}$ con il corrispondente quantile della distribuzione t di Student avente $n - 1$ gradi di libertà, che si traduce in un intervallo leggermente più ampio. In ogni caso, la probabilità che l'intervallo comprenda C tende a $1 - \delta$ per $n \rightarrow \infty$ (quest'idea è ben spiegata in appendice C).

4.2.1 Calcolo delle greche

Il metodo Monte Carlo può essere impiegato per il calcolo delle sensitività. Consideriamo in particolare il problema del calcolo del delta di un'opzione: indichiamo con $S_t(x)$ il prezzo del sottostante con valore iniziale x e con F il payoff del titolo derivato. Nel seguito il valor atteso è calcolato rispetto ad una misura martingala (EMM).

L'approccio più semplice per il calcolo del delta

$$\Delta = e^{-rT} \partial_x E [F(S_T(x))]$$

consiste nell'approssimare la derivata con un rapporto incrementale:

$$\Delta \approx e^{-rT} E \left[\frac{F(S_T(x+h)) - F(S_T(x))}{h} \right]. \quad (4.24)$$

Il valore atteso nella (4.24) si approssima con il metodo Monte Carlo avendo cura di scegliere h opportunamente e utilizzare le stesse realizzazioni delle variabili casuali normali standard per simulare $S_T(x+h)$ e $S_T(x)$. Spesso è preferibile utilizzare un rapporto incrementale centrato o di ordine superiore per ottenere un risultato più soddisfacente. Tuttavia è importante notare che questo approccio è efficiente solo nel caso in cui la F sia sufficientemente regolare: in generale deve essere usato con cautela.

Un altro metodo per il calcolo del delta di un'opzione sfrutta il fatto che nel modello Black&Scholes è disponibile l'espressione esplicita della densità del sottostante come funzione del prezzo iniziale x :

$$S_T(x) = e^Y, \quad Y \sim N_{\log x + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma^2 T}.$$

Il prezzo dell'opzione è dato da

$$H(x) := e^{-rT} E [F(S_T(x))] = e^{-rT} \int_{\mathbb{R}} F(e^y) \Gamma(x, y) dy,$$

dove

$$\Gamma(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \exp \left(-\frac{\left(y - \log x - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right)^2}{2\sigma^2 T} \right).$$

Allora, sotto opportune ipotesi che giustificano lo scambio tra la derivata e l'integrale, si ha

$$\begin{aligned} \Delta = \partial_x H(x) &= e^{-rT} \int_{\mathbb{R}} F(e^y) \partial_x \Gamma(x, y) dy = \\ &= e^{-rT} \int_{\mathbb{R}} F(e^y) \Gamma(x, y) \frac{y - \log x - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma^2 T x} dy \\ &= \frac{e^{-rT}}{\sigma^2 T x} E \left[F(S_T(x)) \left(\log S_T(x) - \log(x) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T \right) \right] \\ &= \frac{e^{-rT}}{\sigma T x} E [F(S_T) W_T]. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Osserviamo che la (4.25) esprime il delta in termini di prezzo di una nuova opzione. La particolarità della formula (4.25) è che in essa non compare la derivata di F : infatti la derivata parziale ∂_x è applicata direttamente alla densità dell'attività sottostante. Il vantaggio dal punto di vista numerico può essere considerevole soprattutto nel caso in cui F sia poco regolare: il

caso tipico è quello dell'opzione digitale, in cui la derivata della funzione payoff $F = \mathbb{1}_{[K, +\infty[}$ è (in senso distribuzionale) una delta di Dirac. Con la stessa tecnica è possibile ottenere espressioni simili per le altre greche nel modello di Black&Scholes.

4.2.2 Analisi dell'errore

Consideriamo una successione (X_n) di variabili casuali i.i.d. ognuna con media e varianza finite:

$$\mu = E[X_i], \quad \sigma^2 = \text{var}(X_i), \quad i = 1, 2, \dots$$

Per la Legge forte dei grandi numeri la successione

$$M_n := \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

converge q.s. a μ . Vediamo ora che il Teorema del limite centrale fornisce la velocità di convergenza e la distribuzione dell'errore. Ricordiamo infatti che il risultato M_n dell'approssimazione con il metodo Monte Carlo è una variabile casuale: quindi, avendo appurato con la (4.8) che la velocità di convergenza è dell'ordine di $\frac{1}{\sqrt{n}}$, l'analisi dell'errore consiste nella stima della probabilità che M_n appartenga ad un determinato intervallo di confidenza. Il problema si può esprimere equivalentemente in altre parole: fissata² una probabilità p , determiniamo l'intervallo di confidenza a cui M_n appartiene con probabilità p .

Per il Teorema del limite centrale (si veda appendice C), per ogni $x > 0$, vale

$$\frac{M_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \Rightarrow N(0, 1),$$

e quindi asintoticamente per $n \rightarrow \infty$, per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$P\left(\frac{M_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq x\right) \approx \Phi(x), \quad (4.26)$$

dove Φ indica la funzione di distribuzione cumulativa (o funzione di ripartizione) normale standard. Di conseguenza, per ogni $x > 0$, vale

$$P\left(M_n \in \left[\mu - \frac{\sigma x}{\sqrt{n}}, \mu + \frac{\sigma x}{\sqrt{n}}\right]\right) \approx p, \quad \text{dove } p = 2\Phi(x) - 1. \quad (4.27)$$

Dunque, fissato $p \in]0, 1[$, la distanza fra il valore esatto e quello approssimato con n simulazioni è, con probabilità p , (asintoticamente) minore di

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Phi^{-1}\left(\frac{p+1}{2}\right). \quad (4.28)$$

²Si quantifica a priori il rischio accettabile (che il risultato non appartenga all'intervallo di confidenza), per esempio 5%, e si determina il corrispondente intervallo di confidenza.

Per esempio, per $p = 95\%$ si ottiene $\Phi^{-1}\left(\frac{p+1}{2}\right) \approx 1,96$.

Dal punto di vista teorico, è chiaro che le stime precedenti sono inconsistenti perchè valgono asintoticamente, per $n \rightarrow \infty$, e non possiamo controllare la velocità di convergenza. Tuttavia in pratica forniscono una stima generalmente più precisa della (4.7). Questo fatto è giustificato rigorosamente dal teorema di Berry-Esseen di cui riportiamo in seguito l'enunciato. Questo risultato fornisce la velocità di convergenza del Teorema del limite centrale e quindi permette di ottenere delle stime rigorose per gli intervalli di confidenza. Assumiamo per semplicità $E[X] = 0$: ci si può sempre ricondurre in questa ipotesi sostituendo X con $X - E[X]$.

Teorema 4.2 (Berry-Esseen). *Sia (X_n) una successione di variabili casuali i.i.d. tali che $E[X_1] = 0$, $\sigma^2 = \text{var}(X_1)$, $\rho = E[|X_1|^3]$ sono finiti. Se Φ_n indica la funzione di distribuzione cumulativa di $\frac{\sqrt{n}M_n}{\sigma}$, allora vale*

$$|\Phi_n(x) - \Phi(x)| \leq \frac{\rho}{\sigma^3 \sqrt{n}}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$.

4.3 Risultati numerici

Vogliamo calcolare numericamente il prezzo approssimato della call con il metodo Monte Carlo, ovvero la quantità

$$\hat{C}_n = \frac{e^{-rT}}{n} \sum_{i=1}^n F(S_T^{(i)}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n C_i,$$

dove $F(S_T^{(i)})$ è il payoff dell'opzione call a scadenza e $S_T^{(i)}$ è la realizzazione del valore finale del sottostante. Questi sono dati rispettivamente dalle espressioni (4.12) e (4.19). Ricordiamo che n rappresenta il numero di simulazioni e T è la data di scadenza dell'opzione. Calcoliamo poi l'intervallo di confidenza, dato dalla formula (4.23), con un grado di attendibilità p del 99%. L'intervallo di confidenza assume quindi la forma

$$\left[\hat{C}_n - 2.58 \frac{s_C}{\sqrt{n}}, \hat{C}_n + 2.58 \frac{s_C}{\sqrt{n}} \right],$$

dove s_C è la deviazione standard di C_1, \dots, C_n calcolata attraverso la funzione "StandardDeviation" di *Mathematica*[®]. Infine inseriamo l'errore massimo di approssimazione del metodo Monte Carlo dato da (4.8).

Le tabelle (4.2), (4.3) e (4.4) mostrano i risultati ottenuti per differenti scadenze T e supponendo costanti i seguenti parametri:

$$\begin{aligned} S_0 &= 50; & K &= 60; \\ r &= 0,05; & \sigma &= 0,2. \end{aligned}$$

Simulazioni	99% Intervallo di Confidenza	Prezzo MC	Errore
1000	[1.26262, 1.9235]	1.59306	1.28076
10000	[1.49223, 1.71277]	1.6025	0.427407
100000	[1.61168, 1.68332]	1.6475	0.13883
1000000	[1.61216, 1.63449]	1.62333	0.0432852

Tabella 4.2: Prezzo della call, intervallo di confidenza con attendibilità del 99% ed errore calcolati con Monte Carlo per $T = 1$. Il valore ottenuto con la formula di Black&Scholes è uguale a 1,6237.

Simulazioni	99% Intervallo di Confidenza	Prezzo MC	Errore
1000	[3.48261, 4.93867]	4.21064	2.82183
10000	[3.74551, 4.1831]	3.96431	0.848044
100000	[3.87095, 4.00776]	3.93936	0.265136
1000000	[3.95325, 3.99682]	3.97503	0.0844316

Tabella 4.3: Prezzo della call, intervallo di confidenza con attendibilità del 99% ed errore calcolati con Monte Carlo per $T = 2$. Il valore ottenuto con la formula di Black&Scholes è uguale a 3,9641.

Simulazioni	99% Intervallo di Confidenza	Prezzo MC	Errore
1000	[8.89414, 12.048]	10.4711	6.11207
10000	[9.74732, 10.6846]	10.216	1.81642
100000	[10.1725, 10.4685]	10.3205	0.573694
1000000	[10.2277, 10.3212]	10.2745	0.181302

Tabella 4.4: Prezzo della call, intervallo di confidenza con attendibilità del 99% ed errore calcolati con Monte Carlo per $T = 5$. Il valore ottenuto con la formula di Black&Scholes è uguale a 10,2895.

A seconda del tipo di opzione, se Americana o Europea, abbiamo bisogno di generare l'intero percorso campione o solamente il suo valore finale. I calcoli precedenti sono stati fatti per un'opzione call di tipo Europeo, in cui si richiede il campionamento del payoff $\max\{0, S_T - K\}$, dove S_T è il prezzo del sottostante a scadenza e K è il prezzo strike. Il valore di un'opzione di

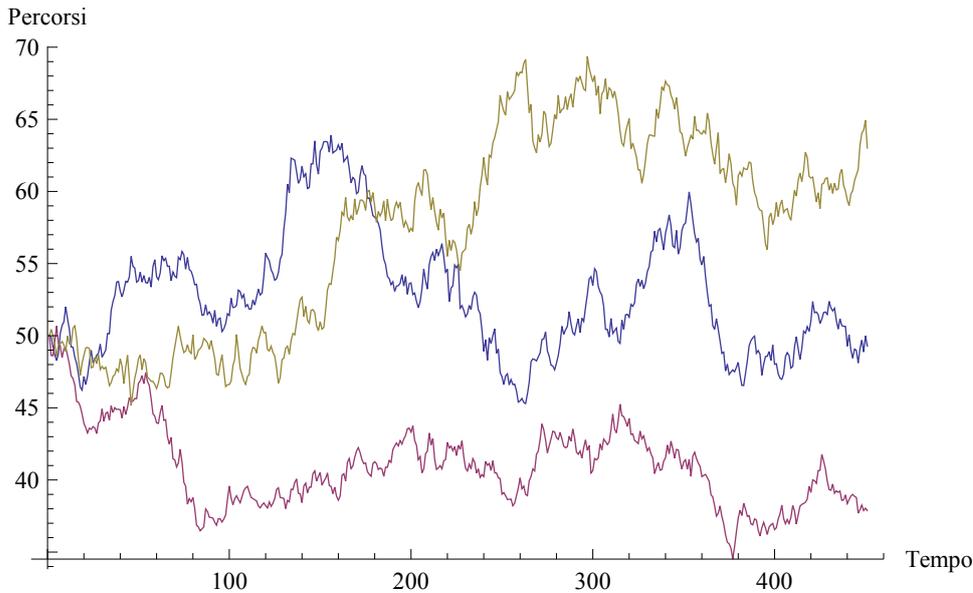


Figura 4.1: Percorsi campione generati con la simulazione Monte Carlo.

tipo Americano dipende invece dall'intero percorso seguito dal sottostante e non solamente dal suo valore finale. Si ha quindi la necessità di generare tutto il percorso, o almeno, una sequenza di valori in certi istanti di tempo. Come abbiamo visto in precedenza utilizziamo uno schema di tipo Eulero per simulare la realizzazione del sottostante S . La formula iterativa

$$S_{t_k}^{(i)} = S_{t_{k-1}}^{(i)} \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (t_k - t_{k-1}) + \sigma \sqrt{t_k - t_{k-1}} Z_{i,k} \right) \quad (4.29)$$

per $i = 1, \dots, n$ e $k = 1, \dots, m$ fornisce il valore del sottostante ad ogni step t_k . L'indice i della formula rappresenta il numero di percorsi campione mentre l'indice k è il numero di step della discretizzazione. In figura (4.1) abbiamo generato 3 percorsi casuali ($n = 3$) con 450 punti di discretizzazione ($m = 450$). Abbiamo unito i punti trovati grazie all'opzione "Joined" della funzione "ListPlot". Nelle pagine seguenti troviamo i codici *Mathematica*[®] utilizzati per calcolare il prezzo di un'opzione call e generare percorsi casuali con il metodo Monte Carlo.

Codice Mathematica Monte Carlo price call

Parametri arbitrari

$r=0,05$; $T=1$; $S0=50$; $K=60$; $\sigma=0,2$;

ClearAll["Global*"]

Nrep = 1000; zdelta = 2,58; $p = 0,99$;

$\mu[r_,\sigma_]:= (r - 0.5 * \sigma^2)$;

$si[\sigma_ , T_] := \sigma * \text{Sqrt}[T]$;

randomgen = RandomVariate[NormalDistribution[0, 1], {Nrep}];

massimo = Table[Max[0, randomgen[[k]]], {k, 1, Nrep}];

massimotot[S0_, K_, r_, sigma_, T_] := Table[Max[0, S0 * Exp[$\mu[r, \sigma]$ * T + si[sigma, T] * randomgen[[k]] - K], {k, 1, Nrep}];

Payoff[S0_, K_, r_, sigma_, T_] := Exp[- $r * T$] * massimotot[S0, K, r, sigma, T];

Prezzo[S0_, K_, r_, sigma_, T_] := Mean[Payoff[S0, K, r, sigma, T]];

Sc[S0_, K_, r_, sigma_, T_] := StandardDeviation[Payoff[S0, K, r, sigma, T]];

Diffic[S0_, K_, r_, sigma_, T_] := zdelta * (Sc[S0, K, r, sigma, T] / Sqrt[Nrep]);

Ic[S0_, K_, r_, sigma_, T_] := {Prezzo[S0, K, r, sigma, T] - Diffic[S0, K, r, sigma, T], Prezzo[S0, K, r, sigma, T] + Diffic[S0, K, r, sigma, T]};

Error[S0_, K_, r_, sigma_, T_] := Sc[S0, K, r, sigma, T] / Sqrt[Nrep * (1 - p)];

Codice Mathematica percorsi campione con Monte Carlo

```
ClearAll["Global*"]

S0 = 50; mu = 0.05; sigma = 0.2; T = 1; NSteps = 450; Nrep1 = 3

randomgen = RandomVariate[NormalDistribution[0, 1], {Nrep1, NSteps}];

dt = N[T/NSteps];

SPaths0 = Table[0, {Nrep1}, {1 + NSteps}];

SPaths0[[All, 1]] = S0;

nudt = (mu - 0.5 * sigma^2) * dt;

sidt = sigma * Sqrt[dt];

SPaths1 = Table[SPaths0[[i, j + 1]] = SPaths0[[i, j]] * Exp[nudt + sidt *
randomgen[[i, j]]], {i, Nrep1}, {j, NSteps}];

SPaths3 = PadLeft[SPaths1, {Nrep1, 1 + NSteps}, S0];

PercorsiCasuali = ListPlot[{SPaths3[[1]], SPaths3[[2]], SPaths3[[3]]}, Joined →
True, AxesLabel → {"Tempo", "Percorsi"}]
```


Appendice A

La trasformata di Fourier e Laplace

Trasformata di Fourier

La trasformata di Fourier di una funzione $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ è definita nel modo seguente:

$$\hat{f} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}, \quad \hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\langle \xi, x \rangle} f(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^N. \quad (\text{A.1})$$

Talvolta useremo la notazione $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$. Analogamente, data una misura finita μ su \mathbb{R}^N , si definisce la trasformata di Fourier di μ nel modo seguente:

$$\hat{\mu} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}, \quad \hat{\mu}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\langle \xi, x \rangle} \mu(dx), \quad \xi \in \mathbb{R}^N. \quad (\text{A.2})$$

Segue direttamente dalle definizioni che \hat{f} è una funzione limitata, continua e tendente a 0 all'infinito. Vale infatti la seguente Proposizione.

Proposizione A.1. *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e μ è una misura finita allora*

- i) $|\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$ e $|\hat{\mu}(\xi)| \leq \mu(\mathbb{R}^N)$;
- ii) $\hat{f}, \hat{\mu} \in C(\mathbb{R}^N)$;
- iii) $\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \hat{f}(\xi) = \lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \hat{\mu}(\xi) = 0$.

Ricordiamo che l'operazione di convoluzione di due funzioni $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ è definita da

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x - y)g(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (\text{A.3})$$

e vale $f * g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Infatti

$$\|f * g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)g(y)| dy dx =$$

(scambiando l'ordine di integrazione)

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)g(y)| dx dy = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}.$$

Il seguente Teorema contiene alcune proprietà della trasformata di Fourier.

Teorema A.2. *Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Allora si ha:*

i) $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$;

ii) *se esiste $\partial_{x_k} f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, allora*

$$\mathcal{F}(\partial_{x_k} f)(\xi) = -i\xi_k \mathcal{F}(f)(\xi); \quad (\text{A.4})$$

iii) *se $x_k f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ allora esiste $\partial_{\xi_k} \hat{f}$ e vale*

$$\partial_{\xi_k} \hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(ix_k f)(\xi). \quad (\text{A.5})$$

Riportiamo infine, senza dimostrazione, un risultato sull'inversione della trasformata di Fourier.

Teorema A.3. *Siano $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e μ una misura finita. Se $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ allora*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\langle x, \xi \rangle} \hat{f}(\xi) d\xi. \quad (\text{A.6})$$

Analogamente se $\hat{\mu} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ allora μ ha densità $g \in C(\mathbb{R}^N)$ e vale

$$g(x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\langle x, \xi \rangle} \hat{\mu}(\xi) d\xi. \quad (\text{A.7})$$

Corollario A.4. *Se $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ ed f è una funzione reale, allora $\hat{f}(-\xi) = \overline{\hat{f}(\xi)}$ e di conseguenza si ottiene*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \hat{f}(\xi) d\xi = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \text{Re} \left\{ e^{-ix\xi} \hat{f}(\xi) \right\} d\xi. \quad (\text{A.8})$$

Trasformata di Laplace

Sia $f(t)$ una funzione definita per $t > 0$. La trasformata di Laplace di $f(t)$ è definita nel modo seguente:

$$L[f(t)] = \tilde{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt, \quad s \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.9})$$

Talvolta useremo la notazione $L\{f\} = \tilde{f}$. Diremo che la trasformata di Laplace \tilde{f} esiste se l'integrale (A.9) esiste per qualche valore di s . Altrimenti diremo che la trasformata non esiste.

Definizione A.1. Una funzione $f(t)$ è detta *generalmente continua* nell'intervallo $[a, b]$ se questo può essere diviso in un numero finito di intervalli in ciascuno dei quali la funzione è continua ed ammette limite destro e sinistro finiti.

Definizione A.2. Se esistono due numeri reali γ, M , con $M > 0$, e $t_0 \in \mathbb{R}$ tali che

$$|e^{-\gamma t} f(t)| < M \quad (|f(t)| < M e^{\gamma t}), \quad \forall t \geq t_0, \quad (\text{A.10})$$

allora diremo che $f(t)$ è una *funzione di ordine esponenziale γ* per t che tende a $+\infty$.

Esempio 10. La funzione $f(t) = t^2$ è di ordine esponenziale 2. Infatti

$$e^{2t} = 1 + 2t + \frac{4t^2}{2!} + \dots > 2t^2 \quad \forall t > 0.$$

Dunque

$$t^2 < \frac{1}{2} e^{2t} \quad \forall t > 0.$$

Vediamo ora le condizioni sufficienti per l'esistenza della trasformata di Laplace.

Teorema A.5. *Se la funzione $f(t)$ è generalmente continua in ogni intervallo limitato $0 \leq t \leq t_0$ ed è di ordine esponenziale γ per $t > t_0$ allora la trasformata di Laplace*

$$\tilde{f}(s) = L\{f\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

esiste per ogni $s > \gamma$.

Assumiamo che per una assegnata funzione $f(t)$ valgano le ipotesi del Teorema (A.5), allora per la trasformata di Laplace sono valide le seguenti proprietà.

(1) *Proprietà di linearità:*

$$L[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 L[f_1(t)] + c_2 L[f_2(t)], \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad s > \gamma.$$

(2) *1ª Proprietà di traslazione:* posto

$$L[f(t)] = \tilde{f}(s),$$

si ha

$$L[e^{at} f(t)] = \tilde{f}(s - a), \quad \forall a \in \mathbb{R}, \quad s > \gamma + a.$$

(3) 2^a *Proprietà di traslazione*: posto

$$L[f(t)] = \tilde{f}(s)$$

e

$$g(t) = \begin{cases} f(t-a) & t > a, \\ 0 & t < a, \end{cases}$$

risulta

$$L[g(t)] = e^{-as} \tilde{f}(s), \quad s > \gamma.$$

(4) *Proprietà del cambio di scala*: posto

$$L[f(t)] = \tilde{f}(s),$$

si ha

$$L[f(at)] = \frac{1}{a} \tilde{f}\left(\frac{s}{a}\right), \quad a > 0, \quad s > \gamma a.$$

(5) *Prodotto di convoluzione*: posto

$$L[f_1(t)] = \tilde{f}_1(s), \quad L[f_2(t)] = \tilde{f}_2(s),$$

si ha

$$L[f_1(t) * f_2(t)] = \tilde{f}_1(s) \tilde{f}_2(s).$$

Infine inseriamo una tabella delle principali trasformate di Laplace.

$f(t)$	$L[f(t)]$
$\delta(t)$, delta di Dirac	1
$\mathbb{1}(t)$, funzione gradino unitario	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$

Tabella A.1: Alcune trasformate di Laplace

Appendice B

Quadratura Gaussiana

Poisson summation formula

Teorema B.1 (PSF). *Sia $f \in L^1[0, \infty)$ una funzione a valori complessi con f a variazione limitata. Allora, per ogni $v \in [0, 1)$, vale*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(a + 2\pi i(k + v)) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-ak} e^{-i2\pi kv} f(k), \quad (\text{B.1})$$

dove f è intesa come la regolarizzata $f(t) = \frac{(f(t^+) + f(t^-))}{2}$, il damping factor $a \in \mathbb{R}$ e i è l'unità immaginaria $i = \sqrt{-1}$.

Dimostrazione. Sia data una funzione g qualunque

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad h > 0. \quad (\text{B.2})$$

Possiamo definire una funzione $\frac{2\pi}{h}$ -periodica ponendo

$$g_p(t) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} g\left(t + \frac{2\pi}{h}k\right), \quad (\text{B.3})$$

infatti

$$\begin{aligned} g_p\left(t + \frac{2\pi}{h}\right) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} g\left(t + \frac{2\pi}{h} + \frac{2\pi}{h}k\right) = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} g\left(t + \frac{2\pi}{h}(k + 1)\right) \\ &= \sum_{k' \in \mathbb{Z}} g\left(t + \frac{2\pi}{h}k'\right) = g_p(t). \end{aligned}$$

Poniamo

$$T = \frac{2\pi}{h}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = h. \quad (\text{B.4})$$

Grazie al teorema fondamentale sulle serie di Fourier la serie delle somme parziali S_N converge puntualmente alla funzione regolarizzata $g_p^*(t)$, ovvero possiamo scrivere

$$g_p^*(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(hkt) + b_k \sin(hkt)). \quad (\text{B.5})$$

In forma complessa la serie di Fourier assume la forma

$$g_p^*(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ihkt}, \quad (\text{B.6})$$

con coefficienti dati da

$$c_k = \frac{h}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} g_p(\tau) e^{-ihk\tau} d\tau. \quad (\text{B.7})$$

Riscriviamo ora i termini c_k come

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{h}{2\pi} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} g\left(\tau + \frac{2\pi}{h}j\right) e^{-ihk\tau} d\tau = \\ &= \frac{h}{2\pi} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{\frac{\pi}{h}(2j-1)}^{\frac{\pi}{h}(2j+1)} g(s) \exp(-ihks + ik2\pi j) ds \\ &= \frac{h}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} g(s) e^{-iksh} ds, \end{aligned}$$

da cui

$$g_p^*(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{h}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(s) e^{-iksh} e^{ihkt} ds. \quad (\text{B.8})$$

Ora vale l'uguaglianza

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} g\left(t + \frac{2\pi}{h}k\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{h}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} g(s) e^{-iksh} e^{ihkt} ds, \quad (\text{B.9})$$

che per $h = 2\pi$ e $t = 0$ vale

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} g(k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} g(s) e^{-iks2\pi} ds. \quad (\text{B.10})$$

Per concludere la dimostrazione bisogna scegliere opportunamente la funzione g . Consideriamo una funzione $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ e definiamo $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ tale che

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t), & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

quindi poniamo

$$g(t) = \tilde{f}(t) e^{-at} e^{-2\pi tvi}, \quad (\text{B.12})$$

con $a \in \mathbb{R}$ e $v \in [0, 1)$. Riscrivendo l'uguaglianza (B.10) si ricava la tesi

$$\begin{aligned}\sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-ak} e^{-2\pi kvi} \tilde{f}(k) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} e^{-as} e^{-iks2\pi} e^{-2\pi svi} \tilde{f}(s) ds \\ \sum_{k \in \mathbb{N}} e^{-ak} e^{-2\pi kvi} f(k) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^\infty \exp(-s(a + 2\pi i(k + v))) f(s) ds \\ \sum_{k \in \mathbb{N}} e^{-ak} e^{-2\pi kvi} f(k) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(a + 2\pi i(k + v)).\end{aligned}$$

□

Formula d'inversione della serie di Fourier

Teorema B.2. *Sia*

$$F(v) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} f_h \exp(-2\pi ihv). \quad (\text{B.13})$$

Vale la seguente formula d'inversione:

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F\left(\frac{k}{N}\right) \exp\left(2\pi ia \frac{k}{N}\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_{mN+a}, \quad (\text{B.14})$$

per $j = 0, 1, \dots, N-1$.

Dimostrazione. Vale

$$\begin{aligned}F\left(\frac{k}{N}\right) &= \sum_{h=-\infty}^{\infty} f_h \exp(-2\pi ih \frac{k}{N}) = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_{mN+j} \exp\left(-\frac{2\pi ik}{N}(mN+j)\right) = \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_{mN+j} \exp(-2\pi ikm) \exp\left(-\frac{2\pi ikj}{N}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \exp\left(-\frac{2\pi ikj}{N}\right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_{mN+j} \exp(-2\pi ikm) \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \exp\left(-\frac{2\pi ikj}{N}\right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_{mN+j}.\end{aligned}$$

Ora

$$\begin{aligned}\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F\left(\frac{k}{N}\right) \exp\left(2\pi ia \frac{k}{N}\right) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_{mN+j} \exp\left(2\pi i \frac{k}{N}(a-j)\right) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_{mN+a},\end{aligned}$$

questo poichè

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(2\pi i \frac{k}{N} (a-j)\right) = \begin{cases} 1, & \text{se } j = a, \\ 0, & \text{se } j \neq a. \end{cases}$$

□

Appendice C

Convergenza e intervalli di confidenza

Questo appendice sintetizza i concetti base di convergenza e l'applicazione del teorema centrale del limite nella costruzione di intervalli di confidenza. Le definizioni e risultati proposti in questo appendice li troviamo con maggiori dettagli in molti libri di testo di probabilità e statistica.

Significato di convergenza

Le variabili casuali $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ nello spazio di probabilità (Ω, \mathcal{F}, P) convergono quasi sicuramente (i.e. con probabilità 1) alla variabile casuale X se

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X\right) = 1, \quad (\text{C.1})$$

in altre parole l'insieme

$$\left\{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}$$

ha probabilità P uguale a 1. Diremo poi che X_n converge a X in probabilità se, per ogni $\epsilon > 0$,

$$P(|X_n - X| > \epsilon) \rightarrow 0 \quad (\text{C.2})$$

per $n \rightarrow \infty$. Si ha convergenza in norma p , per $0 < p < \infty$, se per ogni n , X_n ed X hanno momento di ordine p finito e vale

$$E[|X_n - X|^p] \rightarrow 0. \quad (\text{C.3})$$

La convergenza q.s. (C.1) implica la convergenza in probabilità (C.2). La convergenza in probabilità implica l'esistenza di una sottosuccessione $\{n_k, k = 1, 2, \dots\}$ per cui vale $X_{n_k} \rightarrow X$ quasi sicuramente. La convergenza in norma p (C.3) implica la convergenza in probabilità.

Per vettori casuali, le convergenze (C.1), (C.2) e (C.3) corrispondono alla convergenza di ogni componente del vettore.

Una successione di stimatori $\{\hat{\theta}_n, n \geq 1\}$ è consistente per un parametro θ se $\hat{\theta}_n$ converge a θ in probabilità. La successione è fortemente consistente se $\hat{\theta}_n$ converge quasi sicuramente al valore del parametro (i.e. con probabilità 1).

Convergenza in distribuzione

Le variabili casuali $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ aventi funzione di distribuzione F_n convergono *in distribuzione* alla variabile casuale X avente distribuzione F se

$$F_n(x) \rightarrow F(x) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R} \text{ dove } F \text{ è continua.} \quad (\text{C.4})$$

Non è necessario che le variabili casuali X_1, X_2, \dots siano definite sullo stesso spazio di probabilità. Indichiamo la convergenza in distribuzione con il simbolo “ \Rightarrow ”, ad esempio

$$X_n \Rightarrow X,$$

ed è chiamata convergenza *debole*. Questa è equivalente alla convergenza di $E[f(X_n)]$ a $E[f(X)]$ per tutte le funzioni continue limitate $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Quest’ultima caratterizzazione estende la definizione di convergenza debole ad elementi di spazi più generali; ad esempio la convergenza in distribuzione per vettori casuali.

La convergenza in distribuzione per le variabili casuali X_n ad X è anche equivalente alla convergenza puntuale delle loro funzioni caratteristiche:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[e^{itX_n}] = E[e^{itX}]$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$, con $i = \sqrt{-1}$. Più precisamente, $X_n \Rightarrow X$ implica la convergenza delle funzioni caratteristiche e se le funzioni caratteristiche degli X_n convergono puntualmente ad una funzione continua in zero, allora questo limite è la funzione caratteristica di una variabile casuale alla quale gli X_n convergono in distribuzione.

La convergenza in probabilità implica la convergenza in distribuzione, quindi anche la convergenza q.s. e la convergenza in norma implicano quest’ultima. Se $X_n \Rightarrow c$ dove c è una costante, allora X_n converge a c in probabilità; questo segue da (C.4) ponendo $F(x) = \mathbb{1}_{\{x \geq c\}}$.

Supponiamo che le variabili casuali $\{X_n, n \geq 1\}$ e $\{Y_n, n \geq 1\}$ siano tutte definite sullo stesso spazio di probabilità e che $X_n \Rightarrow X$ e $Y_n \Rightarrow c$, con c una costante. Allora

$$X_n + Y_n \Rightarrow X + c \quad \text{e} \quad X_n Y_n \Rightarrow Xc.$$

L’ipotesi che il limite degli Y_n sia costante è importante. Se $X_n \Rightarrow X$ e $Y_n \Rightarrow Y$ non è detto in generale che $X_n + Y_n \Rightarrow X + Y$ o $X_n Y_n \Rightarrow XY$.

Questi limiti sono veri sotto l'ipotesi più forte che $(X_n, Y_n) \Rightarrow (X, Y)$. Infatti ogni funzione continua limitata di $x + y$ o xy può essere riscritta come una funzione continua limitata di (x, y) .

Convergenza dei Momenti

Poichè la funzione $x \mapsto x^r$, $r > 0$, non è limitata, la convergenza in distribuzione non implica la convergenza dei momenti. Supponiamo $X_n \Rightarrow X$. Allora una condizione necessaria e sufficiente perchè $E[|X_n|^r]$ converga a $E[|X|^r]$ è l'uniforme integrabilità:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sup_{n \geq 1} E \left[|X_n|^r \mathbb{1}_{\{|X_n|^r > M\}} \right] = 0. \quad (\text{C.5})$$

Per il teorema della convergenza dominata, una semplice condizione sufficiente è l'esistenza di una variabile casuale integrabile Y tale che $|X_n|^r < Y$ per ogni n . Un'altra condizione sufficiente è

$$\sup_{n \geq 1} E \left[|X_n|^{r+\epsilon} \right] < \infty,$$

per un certo $\epsilon > 0$.

Teorema centrale del limite e intervalli di confidenza

Il teorema centrale del limite afferma quanto segue: se (X_n) è una successione di variabili casuali indipendenti e identicamente distribuite, ognuna con media μ e varianza σ^2 , $0 < \sigma < \infty$, allora la media campionaria

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

soddisfa

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \Rightarrow N(0, 1), \quad (\text{C.6})$$

dove $N(0, 1)$ è la variabile casuale normale standardizzata. Per definizione di convergenza in distribuzione, la (C.6) significa che, per ogni $a \in \mathbb{R}$,

$$P \left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq a \right) \rightarrow \Phi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-x^2/2} dx \quad (\text{C.7})$$

con Φ funzione di distribuzione cumulativa (o funzione di ripartizione) normale standard. Segue che la probabilità che μ appartenga ad un intervallo della forma

$$\left(\bar{X}_n - a \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + b \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right), \quad 0 \leq a, b < \infty$$

tende a $\Phi(b) - \Phi(-a)$ per $n \rightarrow \infty$. Possiamo scegliere a e b in modo tale che il limite di probabilità è $1 - \delta$, per un certo $\delta > 0$. Tra tutte le scelte di a e b per cui vale $\Phi(b) - \Phi(-a) = 1 - \delta$, i valori che minimizzano la lunghezza dell'intervallo $(-a, b)$ sono dati da $a = b = z_{\delta/2}$, dove $1 - \Phi(z_{\delta/2}) = \delta/2$.

La media μ appartiene all'intervallo

$$\bar{X}_n \pm z_{\delta/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (\text{C.8})$$

con probabilità tendente a $1 - \delta$ per $n \rightarrow \infty$ e in questo senso è asintoticamente un intervallo di confidenza accettabile per μ .

Ora se s_n è uno stimatore consistente per σ , ossia se $s_n \Rightarrow \sigma$, allora si ha

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{s_n/\sqrt{n}} \Rightarrow N(0, 1)$$

e quindi

$$\bar{X}_n \pm z_{\delta/2} \frac{s_n}{\sqrt{n}} \quad (\text{C.9})$$

è asintoticamente un intervallo di confidenza con probabilità $1 - \delta$. Poichè σ non è tipicamente noto, questo intervallo è più pratico rispetto al (C.8); spesso,

$$s_n = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}$$

è la deviazione standard campionaria di X_1, \dots, X_n .

Se gli X_i sono distribuiti normalmente, allora il rapporto (C.6) ha distribuzione normale standard per ogni $n \geq 1$. Segue che μ appartiene all'intervallo (C.8) con probabilità $1 - \delta$ per ogni $n \geq 1$. Con s_n deviazione standard campionaria, si ha

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{s_n/\sqrt{n}} \sim t_{n-1} \quad (\text{C.10})$$

per ogni $n \geq 2$; i.e. il rapporto (C.10) ha distribuzione t di Student con $n - 1$ gradi di libertà. Per cui, se al posto di $z_{\delta/2}$ consideriamo $t_{n-1, \delta/2}$, il quantile $1 - \delta/2$ della distribuzione t_{n-1} , allora μ appartiene all'intervallo

$$\bar{X}_n \pm t_{n-1, \delta/2} \frac{s_n}{\sqrt{n}}$$

con probabilità $1 - \delta$.

Ringraziamenti

Desidero ringraziare innanzitutto i miei genitori, Umberto e Luisa, che mi hanno dato la possibilità di dedicarmi agli studi, che mi hanno sostenuto e sopportato in questi anni e che hanno sempre creduto in me.

Ringrazio il professor Michele Miranda, in qualità di mio relatore, per avermi seguito lungo questo percorso con infinita disponibilità e competenza, guidandomi con pazienza e precisione. Un ringraziamento al professor Andrea Pascucci, per la sua collaborazione e la sua pronta disponibilità. Un grazie anche alla professoressa Alessandra Borrelli, poichè il suo corso introduttivo alla Finanza matematica ha aperto in me un orizzonte nuovo anche per il mio futuro lavorativo.

Dedico infine questa mia tesi a mio nonno Giorgio, persona di grande integrità d'animo per me esempio di vita.

*Ferrara,
13 settembre 2014*

Alberto Caretta

Bibliografia

- [1] Giulio Cesare Barozzi. *La trasformata di Laplace*. Pitagora, 1990.
- [2] Tomas Björk. *Arbitrage Theory in Continuous Time*. Oxford University Press, 2004.
- [3] Alessandra Borrelli. *Calcolo Stocastico e Mercati Finanziari*. Appunti del corso. Dipartimento di Matematica, 2012/2013.
- [4] Paolo Brandimarte. *Numerical Methods in Finance and Economics: A MATLAB-Based Introduction*. Canada: John Wiley & Sons, 2006. ISBN: 0-471-74503-0.
- [5] Peter den Iseger. «Numerical transform inversion using Gaussian quadrature». In: *Probab. Engrg. Inform. Sci.* 20.1 (2006), pp. 1–44.
- [6] Gabriel G. Drimus. «Options on realized variance by transform methods: a non-affine stochastic volatility model». In: *Quant. Finance* 12.11 (2012), pp. 1679–1694. ISSN: 1469-7688.
- [7] Gabriel G. Drimus. «Volatility-of-Volatility Perspectives: Variance Derivatives and Other Equity Exotics». Quantitative Finance. University of Copenhagen, 2011.
- [8] Stefano Pagliarani e Andrea Pascucci. «Approximation formulas for local stochastic volatility with jumps». In: *Social Science Research Network* (2012).
- [9] Peter Carr e Jian Sun. «A new approach for option pricing under stochastic volatility». In: *Review of Derivatives Research* (2008).
- [10] Erick Schlögl e Lutz Schlögl. «A Square-Root Interest Rate Model Fitting Discrete Initial Term Structure Data». In: *Applied Mathematical Finance* (2000).
- [11] Enrico Giusti. *Analisi matematica 2*. Torino: Bollati Boringhieri, 2003.
- [12] Paul Glasserman. *Monte Carlo methods in financial engineering*. Vol. 53. Applications of Mathematics (New York). Stochastic Modelling and Applied Probability. Springer-Verlag, New York, 2004, pp. xiv+596. ISBN: 0-387-00451-3.

- [13] Damien Lamberton e Bernard Lapeyre. *Introduction to stochastic calculus applied to finance*. Second. Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2008, p. 253. ISBN: 978-1-58488-626-6.
- [14] Alan Lewis. *Option Valuation Under Stochastic Volatility*. Finance Press, 2000, p. 350.
- [15] Bernt Øksendal. *Stochastic differential equations*. Sixth. Universitext. An introduction with applications. Springer-Verlag, Berlin, 2003, p. 360.
- [16] Andrea Pascucci. *Calcolo Stocastico per la finanza*. Milano: Springer, 2008.
- [17] Andrea Pascucci. *PDE and martingale methods in option pricing*. Vol. 2. Bocconi & Springer Series. Springer, Milan; Bocconi University Press, Milan, 2011, pp. xviii+719.
- [18] Francesca Agnese Prinari. *Analisi funzionale*. Appunti del corso. Dipartimento di Matematica, 2012/2013.
- [19] Robert S. Strichartz. *A guide to distribution theory and Fourier transforms*. Reprint of the 1994 original [CRC, Boca Raton; MR1276724 (95f:42001)]. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2003, pp. x+226. ISBN: 981-238-430-8.
- [20] Gábor Szegő. *Orthogonal polynomials*. Fourth. American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol. XXIII. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1975, pp. xiii+432.
- [21] Wolfram. *Mathematica 9*. 2012. URL: <http://reference.wolfram.com/mathematica/guide/Mathematica.html>.