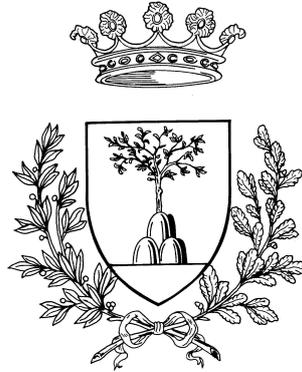


UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FERRARA

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA



Calibrazione di modelli stocastici per mercati energetici a termine

LAUREANDO:
Carlo Montanari

RELATORE:
Chiar.mo Prof. *Michele Miranda* (Università di Ferrara)

CORRELATORI:
Chiar.mo Prof. *Tiziano Vargiolu* (Università di Padova)
Ph.D. *Enrico Edoli* (ALEPH di Stefano Fiorenzani)

Anno Accademico 2012-2013

Indice

Introduzione	3
Ringraziamenti	7
1 Mercati energetici	9
1.1 Mercati di commodity	9
1.2 Mercati elettrici	18
1.3 Mercati del gas naturale	25
1.4 Mercati energetici	30
2 Preliminari di analisi stocastica	35
2.1 Moti browniani	35
2.2 Integrale stocastico	37
2.3 Processi di Itô	40
2.4 Processi stocastici cointegrati	51
3 Mercati energetici a termine	55
3.1 Alternative per un modello dei futures energetici	55
3.2 Un modello multi-commodity a due fattori	61
3.3 Mercati energetici a termine di tipo 1	72
3.3.1 Proprietà elementari	74
3.3.2 Calibrazione	81
3.3.3 Test numerici di calibrazione	88
3.4 Mercati energetici a termine di tipo 2	92
3.4.1 Proprietà elementari	94
3.4.2 Test numerici di calibrazione	102
3.5 Interpolazione dei dati con un algoritmo di smoothing	106
3.6 Esempi di calibrazione di mercati energetici a termine	112
4 Mercati energetici a termine cointegrati	123
4.1 Mercati energetici a termine cointegrati di tipo A	124
4.1.1 Calibrazione	127
4.1.2 Test di calibrazione	133
4.2 Mercati energetici a termine cointegrati di tipo B	135
4.2.1 Calibrazione	137
4.2.2 Test di calibrazione	142

5 Implementazione	145
5.1 Analisi di mercati energetici a termine empirici	145
5.2 Calibrazione di mercati energetici a termine	149
5.2.1 Proprietà elementari	149
5.2.2 Calibrazione	154
5.3 Calibrazione di mercati energetici a termine cointegrati	161
5.3.1 Traiettorie	161
5.3.2 Calibrazione	164
Bibliografia	169
Lista dei simboli e delle abbreviazioni	173

Introduzione

It is very difficult to make predictions, especially about the future.

— NIELS BOHR da un proverbio danese
“*Bulletin of the Atomic Scientists*”, 1971

Una commodity è un bene economico standardizzato in relazione ad alcune caratteristiche fondamentali così che, in uno scambio, ogni sua istanza possa essere sostituita da un'altra senza modificarlo. Nel nostro lavoro ci siamo occupati di studiare contratti che definiscono transazioni differite nel tempo su importanti commodity energetiche, quali l'energia elettrica ed il gas naturale, detti *futures*. Questi sono accordi tra due parti, venditore e compratore, attraverso cui la prima si impegna a consegnare all'altra una fissata quantità del bene ad una data o intervallo di tempo futuri in cambio del versamento, in quella stessa data o periodo, di un importo pattuito alla stipula, detto prezzo del futures.

Il tipo di scambio comporta, per entrambi i contraenti, l'assunzione del rischio che la differenza tra il valore iniziale del bene e quello alla consegna sia causa di una perdita. Un primo problema classico consiste dunque nel misurare tale rischio e mettere in atto strategie che consentano di gestirlo. Esistono inoltre contratti derivati il cui valore dipende da quello dei futures, come le opzioni, per cui un secondo importante problema è determinare modelli attraverso cui valutare razionalmente tali derivati. La nostra tesi, fornendo metodi per la stima della volatilità dei prezzi dei futures e la previsione del loro comportamento sul lungo periodo, individua possibili strumenti per la soluzione di entrambi.

Nella maggior parte dei settori industriali il mercato è organizzato sulla base di contratti bilaterali fisici in cui le controparti stabiliscono le quantità da scambiare, il prezzo unitario, il luogo e la data di consegna. Nel caso delle commodity, tuttavia, per la loro natura indifferenziata gli scambi tendono a definirsi attraverso borse merci nelle quali un operatore si incarica di raccogliere ed abbinare le offerte di acquisto o vendita ed i contratti sono standardizzati in termini di quantità, qualità e date di consegna. I mercati in cui si trattano futures sono detti *mercati a termine* ed i primi a nascere furono il New York Cotton Exchange nel 1842 ed il Chicago Board of Trade nel 1848. Da allora questo tipo di scambi si è molto diffuso e nel 2012 si sono contati più di 20 miliardi di contratti. Nel caso in cui i beni negoziati siano

commodity energetiche, tali mercati sono detti *mercati energetici a termine* ed un importante esempio in Europa è fornito dallo European Energy Exchange tedesco.

I principali modelli adottati per rappresentare futures su commodity si basano su soluzioni proposte per i mercati obbligazionari nel corso degli anni '90. Seguendo uno degli approcci fondamentali, quello di Brace, Gatarek e Musiela [BGM97], nel lavoro di Edoli, Tasinato e Vargiolu [ETV13] si considera un modello che assume come data la dinamica dei prezzi dei futures scambiati nel mercato a termine oggetto di studio. Se $m \geq 2$ è il numero delle commodity ed $n \geq 2$ quello dei periodi di consegna, per ogni $h \in \{1, \dots, n\}$ ed $i \in \{1, \dots, m\}$ il prezzo $F_i^h(t)$ osservato in t del futures sulla commodity h -esima con consegna in $[\tau_i, \theta_i]$ deve soddisfare l'equazione

$$\frac{dF_i^h(t)}{F_i^h(t)} = \mu_i^h(t) dt + \sigma_{i1}^h(t) d\overline{W}_1^h(t) + \sigma_{i2}^h(t) d\overline{W}_2^h(t) \quad \text{in } [T_0, T_1] \quad (1)$$

dove le funzioni $\mu_i^h, \sigma_{i1}^h, \sigma_{i2}^h$ sono opportunamente regolari e $\{\overline{W}_1^h, \overline{W}_2^h\}_{h=1, \dots, n}$ sono moti browniani rispetto alla misura di probabilità del mondo reale correlati tra loro. In particolare Edoli, Tasinato e Vargiolu [ETV13] fissano una scelta per i coefficienti di diffusione dell'equazione considerando le funzioni

$$\sigma_{i1}^h(t) = \alpha_1^h e^{-\lambda^h(\tau_i^h - t)}, \quad \sigma_{i2}^h(t) = \alpha_2^h \quad \text{in } [T_0, T_1] \quad (2)$$

per ogni $h \in \{1, \dots, n\}$, $i \in \{1, \dots, m\}$ e propongono una tecnica con cui stimare i parametri $\{\alpha_1^h, \alpha_2^h, \lambda^h\}_{h=1, \dots, n}$ ed i coefficienti di correlazione tra i moti browniani sulla base dei prezzi osservati nelle date $T_0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T_1$ di una partizione dell'intervallo di tempo $[T_0, T_1]$. Queste forme funzionali rendono ragione di un importante fatto sperimentale relativo ai futures energetici, detto *effetto Samuelson*: la volatilità del prezzo è tanto maggiore quanto più è vicina la consegna del bene e questa crescita è esponenziale; quando ci si allontana dalla consegna, la volatilità tende ad un valore costante e strettamente positivo.

In questa tesi abbiamo adottato l'approccio del lavoro di Edoli, Tasinato e Vargiolu [ETV13], assumendo che i prezzi dei futures del mercato energetico a termine siano rappresentati da moti browniani geometrici descritti dall'equazione (1). Dopo una parte introduttiva, costituita dai primi due capitoli e dedicata a presentare le nozioni preliminari economiche e matematiche necessarie alla nostra analisi, nel terzo capitolo abbiamo considerato alcune possibili estensioni del modello definito dalle equazioni (2), studiando due forme funzionali alternative per i coefficienti $\sigma_{i1}^h, \sigma_{i2}^h$ corrispondenti ad altrettante caratterizzazioni della volatilità dei prezzi. Nel quarto capitolo abbiamo trattato due diverse scelte per i coefficienti μ_i^h , attraverso cui si possono rappresentare mercati che sul lungo periodo manifestano un comportamento regolare, detti *cointegrati*. Per ciascuno dei quattro tipi di modello è stato individuato un metodo di calibrazione basato sulle serie storiche dei prezzi, testandolo sui dati osservati di alcuni importanti mercati nazionali ed internazionali. Il capitolo conclusivo, infine, raccoglie il codice MATLAB con cui abbiamo implementato le tecniche descritte nel corso dello studio.

Più in dettaglio, il primo capitolo è dedicato a presentare il concetto di commodity, a descrivere i principali tipi di contratto relativi a questi beni economici ed i mercati su cui sono scambiati. Vengono approfondite in particolare l'energia elettrica ed il gas naturale, i sottostanti dei futures di cui ci siamo occupati in seguito, mettendo

in evidenza le loro peculiarità ed analizzando le proprietà dei mercati energetici a termine.

Nel secondo capitolo si introducono gli strumenti matematici necessari a sviluppare i modelli stocastici di mercato oggetto del nostro studio. Dopo aver definito il concetto di vettore di moti browniani correlati, si ricordano alcuni risultati fondamentali del calcolo integrale stocastico e la nozione di processo di Itô. Al termine del terzo paragrafo viene enunciato il Teorema di Girsanov e dimostrato un suo corollario con cui abbiamo ottenuto una stima di massima verosimiglianza dei parametri di uno dei modelli del quarto capitolo. Si conclude infine definendo la nozione di processo stocastico cointegrato.

Il terzo capitolo si apre con una contestualizzazione della scelta del modello definito dall'equazione (1) e l'analisi delle componenti principali dei prezzi di alcuni importanti futures energetici con cui è giustificato il numero dei fattori di rischio adottati. Nel secondo paragrafo si dimostrano le proprietà elementari del modello, mentre nel terzo e quarto si considerano due possibili alternative per i coefficienti $\sigma_{i1}^h, \sigma_{i2}^h$ che generalizzano quella studiata da Edoli, Tasinato e Vargiolu [ETV13], descrivendo una tecnica per calibrare i parametri sulle serie storiche dei prezzi. Il quinto paragrafo propone un metodo di interpolazione dei prezzi per superare alcune difficoltà che si possono incontrare applicando la tecnica di calibrazione. Si conclude testando i metodi sviluppati sui dati osservati di futures del mercato NYMEX, EEX ed OTC italiano.

Nel quarto capitolo sono considerati due ulteriori modelli, basati sui lavori di Benmenzer, Gobet, Jérusalem [BGJ07] ed Aïd, Campi, Langrené, Pham [ACLP12], ottenuti fissando due diverse scelte per i coefficienti μ_i^h . Nel primo caso si ipotizza che i moti browniani che guidano la dinamica neutrale al rischio siano cointegrati rispetto alla misura del mondo reale, mentre nel secondo che lo siano i prezzi dei futures sulla stessa commodity, ma con periodi di consegna differente. Viene fornita per ciascun modello una stima di massima verosimiglianza dei parametri ed i metodi sono applicati ad alcune delle serie storiche già trattate nel precedente capitolo.

Ringraziamenti

Desidero ricordare le tante persone che, in momenti diversi ed in vari modi, mi hanno donato il loro tempo e la loro assistenza nella realizzazione di questo lavoro.

Ringrazio anzitutto il professor Michele Miranda per avermi seguito con attenzione e supportato attraverso preziosi consigli in questo anno. Sono grato ai correlatori dei numerosi incontri che mi hanno dedicato: il professor Tiziano Vargiolu mi ha sempre guidato con pazienza e precisione, il dottor Enrico Edoli ha contribuito con importanti osservazioni e suggerimenti. Senza il loro aiuto questa tesi non esisterebbe.

Un ringraziamento particolare va al personale dello European Energy Market che ha fornito alcuni dei dati impiegati in questo lavoro ed al dottor Davide Tassinato per le indicazioni ed i chiarimenti sulla sua tesi, da cui questa trae in parte motivazione. Sono in debito con la professoressa Alessandra Borrelli, poiché il suo corso introduttivo alla Finanza matematica è stato indispensabile per affrontare i problemi trattati e la sua disponibilità spesso preziosa.

Voglio ringraziare sinceramente gli amici che mi hanno incoraggiato in questi mesi, a ciascuno sono profondamente riconoscente per il contributo ricevuto: Abramo, Alex, Ambra, Chiara, Federica, Francesco, Giulia, Luca, Michele, Mirco, Rami, Sergio, Valerio e Veronica.

Dedico infine questa tesi alle persone a me più care: mio fratello Federico, perché mi è sempre stato così vicino che a ragione si può dire raggiungiamo insieme il traguardo della laurea; i miei genitori Luigi e Malvina che mi hanno dato la possibilità di completare questo ciclo di studi e hanno sempre avuto fiducia nelle mie capacità, condividendo con me difficoltà e soddisfazioni di questi anni; Sabrina, che ha saputo aiutarmi con equilibrio ad affrontare serenamente gli ultimi mesi di lavoro.

*Ferrara,
21 marzo 2014*

CARLO MONTANARI

Capitolo 1

Mercati energetici

In questo capitolo presentiamo il concetto di commodity e descriviamo i principali tipi di contratto relativi a questo bene. Ci concentriamo poi sull'energia elettrica ed il gas naturale, mettendo in evidenza le loro peculiarità e descrivendo più in dettaglio la struttura di alcuni importanti mercati in cui sono scambiate queste commodity.

1.1 Mercati di commodity

Chiamiamo *commodity* un bene economico negoziabile (asset) dotato di valore intrinseco e sufficientemente standardizzato, in relazione ad alcune caratteristiche fondamentali, da essere in parte o del tutto fungibile (ogni sua istanza, in uno scambio, si può sostituire con un'altra senza modificarlo). Si tratta, dunque, di beni indifferenziati, prodotti ovunque con standard qualitativi equivalenti e commercializzati senza l'apporto di ulteriore valore aggiunto.

Un esempio importante è fornito dalle *materie prime*, i componenti alla base dei processi produttivi (e.g. frumento, rame, petrolio), che tuttavia non esauriscono la classe delle commodity, cui appartengono anche prodotti finiti come il pane o beni immateriali come i diritti di emissione dell'anidride carbonica. Tra le principali categorie, ricordiamo:

- prodotti agricoli: avena, frumento, mais, riso, soia, ...
- commodity coloniali: cacao, caffè, cotone, tabacco, zucchero, ...
- metalli industriali: acciaio, alluminio, nichel, rame, ...
- metalli preziosi: argento, oro, palladio, platino, ...
- bestiame e carne: bovini, suini, ...
- commodity energetiche: carbone, benzina, energia elettrica, gas naturale, petrolio, ...

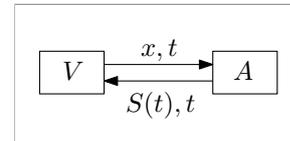
Una commodity è detta *stoccabile* se è possibile conservarla nel tempo ad un costo marginale rispetto al valore del bene e chiamiamo *scorte* le quantità conservate. Tra le commodity che non sono di questo tipo, figura l'energia elettrica, che può essere immagazzinata, ad esempio in batterie o attraverso bacini idroelettrici, solo ad un prezzo elevato rispetto al proprio valore. Una commodity stoccabile è detta *deperibile* o *soft commodity* se ha breve durata di conservazione, mentre viceversa è

detta *durevole* o *hard commodity*. I prodotti agricoli sono esempi del primo tipo, i metalli del secondo.

Contratti a pronti su commodity

Già 6000-6500 anni fa iniziarono i primi scambi relativi a commodity. In assenza di un veicolo monetario, si trattava di baratti: i due soggetti si accordavano in modo che ciascuno cedesse un bene all'altro per ricevere in cambio quello desiderato. Dall'introduzione della moneta, avvenuta circa 2500 anni fa, ad oggi, poi, sono state introdotte tipologie di transazione sempre più elaborate in risposta alla crescente complessità dell'economia. Presentiamo una breve rassegna dei contratti elementari che caratterizzano gli attuali mercati di commodity: i contratti a pronti, a termine, swap e le opzioni plain-vanilla.

Un **contratto a pronti (o spot)** su una fissata commodity è un contratto finanziario stipulato tra due controparti, il venditore V e l'acquirente A , che stabilisce la quantità della commodity che il primo deve consegnare fisicamente al secondo nella data di stipula t e l'importo che riceve, in cambio, nella stessa data. In base al contratto, dunque, V ha l'obbligo di consegnare fisicamente ad A una certa quantità x della commodity in t ed A ha l'obbligo di pagare a V un importo fissato $S(t)$.



La grandezza $S(t)$ è detta *prezzo spot* della commodity in t . In molti casi, per vincoli tecnici lo scambio avviene in una data T posteriore a t di pochi giorni, detta *data spot*. Naturalmente le specifiche della transazione potranno essere più complesse, in relazione alla commodity considerata, comprendendo altri aspetti come le caratteristiche del trasporto (e.g. soggetto incaricato del trasporto, luogo di consegna), l'unità di misura relativa alla commodity, la valuta.

Spesso lo scambio avviene attraverso un intermediario I , che riceve la commodity da V per consegnarla ad A e, contemporaneamente, incassa il denaro da A per versarlo a V (trattenendo in entrambi i casi una quantità stabilita, come compenso).

La stipula di un contratto a pronti comporta, per le due controparti, l'assunzione di rischi, tra cui ricordiamo:

- *rischio di prezzo*: il prezzo spot della commodity può aumentare o diminuire dopo lo scambio, causando una perdita rispettivamente per il venditore o l'acquirente, che si sarebbe evitata ritardando la transazione. La copertura da questo rischio si può realizzare, come vedremo, stipulando un contratto a termine o uno swap.
- *rischio di trasporto*: il soggetto incaricato del trasporto è responsabile dell'eventuale deterioramento, parziale o totale, della commodity. Se ne distinguono due tipi: i *rischi ordinari*, inerenti il deterioramento in condizioni normali, e quelli *straordinari*, relativi al deterioramento causato da condizioni eccezionali (e.g. guerre, catastrofi naturali). La copertura da questo rischio si può realizzare sia con *contratti assicurativi* stipulati con aziende specializzate, sia attraverso processi di *auto-assicurazione*. Nel caso in cui il trasporto sia differito rispetto allo scambio, inoltre, esiste un *rischio del costo di trasporto* causato dall'eventuale perdita che comporta un aumento del prezzo di trasporto per il soggetto che

ne è incaricato. La copertura da questo rischio si può realizzare stipulando un contratto a termine su un opportuno mercato dei trasporti.

- *rischio di consegna*: la qualità della commodity può essere inferiore alle aspettative, causando una perdita per l'acquirente. Le uniche forme di copertura da questo rischio sono contratti molto personalizzati o una buona conoscenza del venditore.
- *rischio di credito*: l'acquirente può non essere in grado di rispettare in parte o del tutto l'impegno di pagamento assunto, causando una perdita per il venditore. L'unica forma di copertura da questo rischio è una buona conoscenza dell'acquirente.

In generale, il *rischio di controparte* indica il rischio che una delle due controparti non onori gli impegni presi.

Contratti a termine su commodity

Gli altri contratti di cui ci occupiamo sono particolari *titoli derivati*, titoli finanziari il cui valore dipende da quello di un bene economico di riferimento, detto *sottostante*.

Un **contratto a termine (o forward o fixed-delivery forward)** su una fissata commodity è un contratto finanziario stipulato tra due controparti, il *venditore* V e l'*acquirente* A , che stabilisce la quantità della commodity che il primo deve consegnare al secondo nella data T , detta *scadenza* o *data di consegna*, posteriore alla data di stipula t e l'importo che riceve in cambio nella stessa data. In base al contratto, dunque, V ha l'obbligo di consegnare ad A una certa quantità x della commodity in T ed, in cambio, A ha l'obbligo di pagare a V un importo fissato $F(t, T)$.

La grandezza $F(t, T)$ è detta *prezzo forward* della commodity in t con consegna in T e la durata $T - t$ è chiamata *tempo alla scadenza* o *time to maturity (TTM)*. Stipulando il contratto, si dice che V assume un *posizione lunga*, A una *posizione corta* e ciascuna controparte ha una *posizione aperta* sul contratto a termine. La posizione viene *chiusa* alla scadenza attraverso la liquidazione (regolazione) del contratto. Come per il caso spot, in generale le specifiche sono più complesse e definiscono i dettagli della transazione.

Un contratto a termine è detto *fisico* se la commodity è consegnata fisicamente, mentre è detto *finanziario* se è il prezzo spot $S(T)$ ad essere scambiato. In quest'ultimo caso si dice che la consegna avviene *per differenziale* perché, se $F(t, T) < S(T)$, si avrà il pagamento di $S(T) - F(t, T)$ da parte di V ad A , mentre se $F(t, T) > S(T)$, al contrario sarà A a versare $F(t, T) - S(T)$ a V .

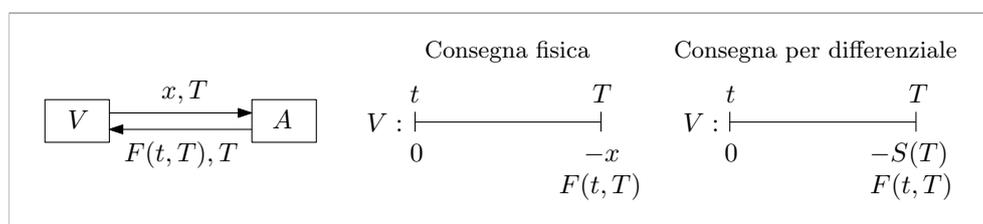


Figura 1.1: Contratto a termine (sinistra) e flussi di cassa di V rispetto al contratto a termine (destra).

Nella Figura 1.2 sono rappresentate graficamente le funzioni payoff di V ed A rispetto allo scambio forward, $P_V(S(T)) = F(t, T) - S(T)$ e $P_A(S(T)) = S(T) - F(t, T)$. Osserviamo che, se il prezzo della commodity alla scadenza T supera quello di consegna, l'acquirente guadagna ed il venditore perde, mentre nel caso in cui valga il viceversa, sarà il primo a perdere ed il secondo a guadagnare.

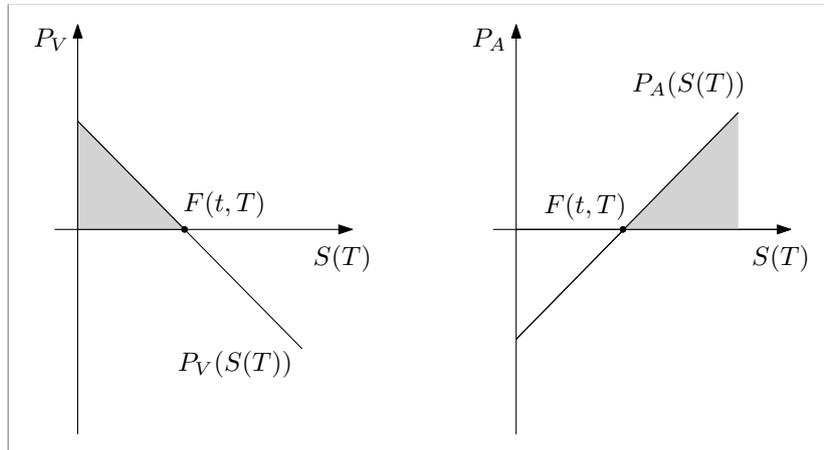


Figura 1.2: Funzioni payoff di V ed A rispetto ad uno scambio forward.

La stipula di un contratto a termine comporta per le due controparti l'assunzione di *rischi di trasporto, consegna, credito e controparte* analoghi a quelli inerenti un contratto a pronti.

Un contratto a termine stipulato su mercati non regolamentati, detti *over the counter (OTC)*, è chiamato semplicemente **forward** o **contratto a termine bilaterale**. Esistono, invece, mercati regolamentati sui quali è possibile stipulare particolari contratti a termine, detti **futures**. Questi si caratterizzano anzitutto per essere *standardizzati* in relazione a diverse proprietà, tra cui le più importanti sono:

- *sottostante*: caratteristiche fisiche e quantità della commodity.
- *modalità di liquidazione*: tipo di consegna, fisica o per differenziale; luogo e data della consegna fisica; valuta dei pagamenti; margine iniziale.
- *scadenza*: date ammissibili come scadenze.
- *regole di negoziazione*: tipologia, orari e date della negoziazione; minima variazione del prezzo ammessa, detta *tick*.

Chiamiamo *valore nominale* o *prezzo del futures* (o, più semplicemente, *prezzo futures*) il prezzo forward del contratto e diciamo che un soggetto finanziario *acquista* o *vende il futures* se assume rispettivamente una posizione lunga o corta su questo. L'elevato grado di standardizzazione rende i contratti fungibili e consente di annullare impegni di vendita o acquisto tramite *compensazione (clearing)*, cioè stipulando un contratto di segno opposto all'originale. Dunque, nel caso dei futures, è possibile chiudere una posizione anche prima della scadenza.

Nel periodo di negoziazione stabilito, gli operatori abilitati formulano le proprie proposte di scambio che, in base al regolamento del mercato, generano il prezzo del futures e l'accoppiamento di domanda e offerta. Se t_1, \dots, t_N sono le giornate di negoziazione tra la stipula e la liquidazione, in particolare, saranno definiti i *prezzi di chiusura giornalieri* $F(t_1, T), \dots, F(t_N, T)$.

Nei mercati di futures gli scambi avvengono attraverso un intermediario istituzionale, detto *Cassa di Compensazione o Clearing House (CH)*, con lo scopo di ridurre il rischio di controparte connesso ai contratti. Quando due soggetti finanziari stipulano un futures, la CH si interpone tra di essi, per cui gli obblighi contrattuali sorgono tra questa e ciascun contraente. In caso di inadempimento del venditore o dell'acquirente, dunque, la CH si sostituisce ai suoi obblighi, garantendo il buon esito della transazione, salvo poi rivalersi sulla parte che non ha rispettato gli impegni assunti. Il tipo di scambio adottato è detto *sistema dei margini* e consiste di due fasi:

- alla stipula del contratto t , le due controparti versano alla CH l'importo $MI := \alpha F(t, T)$ con $\alpha \in (0, 1)$, una quota fissata del valore nominale del futures, detta *marginine iniziale*. Questo pagamento è una garanzia sul buon esito della transazione ed è restituito alla scadenza.
- aggiustamento *mark to market*: per ogni data di negoziazione t_i posteriore alla data di stipula, chiamiamo *marginine di variazione* $MV_i := |F(t_i, T) - F(t_{i-1}, T)|$ la differenza, in valore assoluto, tra il prezzo di chiusura registrato in t_i e quello in t_{i-1} . Alla fine di ogni giornata di negoziazione, se il prezzo di chiusura è superiore a quello registrato il giorno precedente, il venditore matura una perdita potenziale pari al margine di variazione e l'acquirente un uguale guadagno potenziale. Nel caso in cui il prezzo sia diminuito, invece, si avranno un guadagno per il primo ed una perdita per il secondo. Il sistema dei margini obbliga la parte che matura una perdita potenziale a versare il margine di variazione alla CH, che provvede a girarlo alla controparte.

In questo modo, se una delle parti non paga quanto dovuto, la CH utilizza il suo margine iniziale per corrispondere il guadagno maturato all'altra e invita la prima a reintegrarlo. Se ciò non si verifica, viene chiusa la sua posizione, evitando futuri inadempimenti. Per ridurre al minimo il rischio di credito, dunque, il margine iniziale sarà scelto in modo da coprire il margine di variazione atteso del futures.

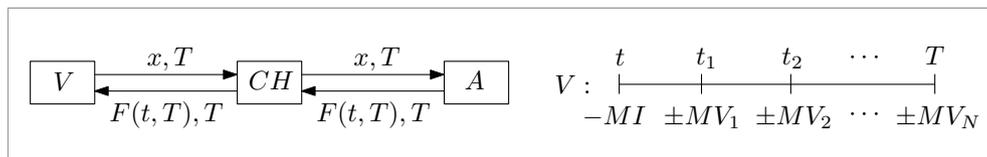


Figura 1.3: Futures (sinistra) e flusso di cassa di V relativo al futures (destra).

I prezzi di un forward ed un futures sulla stessa commodity e con la medesima data di scadenza sono differenti a causa delle tasse, dei costi di transazione e di altri importanti elementi, come l'impatto del rischio di credito. In pratica, però, questi rimangono comunque molto vicini, poiché le oscillazioni del prezzo della commodity rappresentano il fattore determinante. Eccetto quando diversamente specificato, dunque, identificheremo i due contratti in prima approssimazione.

Distinguiamo tre *finalità* di impiego di un contratto a termine:

- *copertura*: un soggetto finanziario che desidera acquistare o vendere una commodity in una data futura può assumere rispettivamente una posizione lunga o corta in un contratto a termine fisico per bloccare il prezzo e coprirsi dal rischio che questo salga o scenda causando una perdita.

Consideriamo, ad esempio, il caso di un agricoltore che voglia vendere il suo raccolto nel mese di settembre. All'inizio della stagione non è noto il prezzo spot finale, che potrà variare molto in relazione all'annata. L'agricoltore, allora, può assumere una posizione corta in un futures sul proprio prodotto, assicurandosi in questo modo l'incasso del valore nominale e coprendosi dal rischio di prezzo. In generale, però, una strategia basata su futures non consente di eliminare completamente tale rischio. Se chiamiamo *base* del futures in t con consegna in T la differenza tra i prezzi spot e futures $B(t, T) := S(t) - F(t, T)$, il *rischio base* consiste nella perdita che può causare questa differenza quando la posizione venga chiusa prima della scadenza. Se ne distinguono diverse componenti, come il prezzo del trasporto tra il punto di consegna stabilito dal futures e quello di fruizione della commodity o il costo di stoccaggio tra la data del raccolto e quella di scadenza.

- *speculazione*: se un soggetto finanziario, sulla scorta delle informazioni di cui dispone, si aspetta che il prezzo di un commodity in futuro crescerà o diminuirà, può assumere rispettivamente una posizione lunga o corta, in un contratto a termine finanziario, per ottenere un guadagno.
- *arbitraggio*: un arbitraggio è un'operazione finanziaria priva di rischi con rendimento strettamente positivo, realizzata eventualmente attraverso transazioni simultanee su due o più mercati. Opportunità di arbitraggio sono molto rare e durano per periodi brevi, ma talvolta si presentano e possono richiedere l'impiego di contratti a termine finanziari.

I mercati di futures su commodity furono istituiti a partire dalla metà del XIX secolo per venire incontro alle esigenze di copertura di produttori e commercianti. Con il trascorrere del tempo, però, a questi si sono affiancati un numero crescente di operatori con finalità speculativa, che hanno contribuito in modo significativo alla liquidità di questi mercati. Solo una piccola parte degli scambi, invece, avviene ad opera degli arbitraggisti.

Contratti swap su commodity

Un **contratto swap** su una fissata commodity è un contratto finanziario stipulato tra due controparti, il *venditore* V e l'*acquirente* A , che stabilisce, per ciascuna data T di un insieme di consegna J posteriore alla data di stipula t , la quantità della commodity che il primo deve consegnare al secondo e l'importo che riceve in cambio. In base al contratto, dunque, V ha l'obbligo di consegnare ad A una certa quantità x della commodity in ogni $T \in J$ ed, in cambio, A ha l'obbligo di pagare a V un importo fissato $F(t, J)$ nella stessa data.

La grandezza $F(t, J)$ è detta *prezzo swap* della commodity in t con consegna in J e la durata $t - \min J$ è detto *tempo alla consegna* o *time to delivery (TTD)*. Come per il caso forward, stipulando il contratto si dice che V assume un *posizione lunga*, A una *posizione corta* e ciascuna controparte ha una *posizione aperta* sul contratto swap. La posizione viene *chiusa* in $\max J$ attraverso la liquidazione del contratto.

Come al solito, le specifiche del contratto definiranno, in più, i restanti dettagli della transazione, in relazione alla commodity in oggetto. Un contratto swap può essere visto come una generalizzazione di un contratto a termine, dove l'operazione

finanziaria, invece di consistere di un unico scambio, è costituita da un insieme di scambi.

Un contratto swap è detto *fisico* se la commodity è consegnata fisicamente, mentre è detto *finanziario* se è il prezzo spot ad essere pagato in ogni data $T \in J$. In quest'ultimo caso si dice che la consegna avviene *per differenziale*.

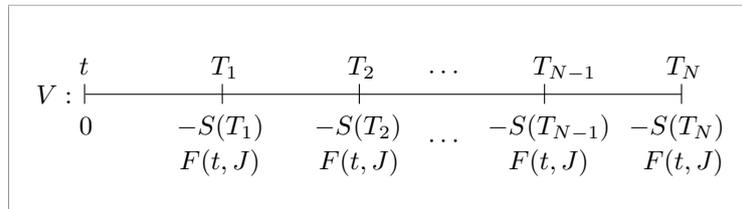


Figura 1.4: Flussi di cassa di V rispetto ad un contratto swap finanziario con insieme di consegna $J = \{T_1, \dots, T_N\}$.

Continuano a valere considerazioni relative a *rischi e finalità* analoghe a quelle presentate per i contratti a termine. Anche i contratti swap possono essere stipulati su mercati OTC, detti **contratti swap bilaterali**, oppure su mercati regolamentati, cui si fa riferimento in genere con l'espressione **commodity swap**.

Opzioni plain-vanilla

Un'**opzione plain-vanilla** su una fissata commodity è un contratto finanziario stipulato tra due controparti, il *venditore* V e l'*acquirente* A , che attribuisce a quest'ultimo, in cambio del pagamento di un importo stabilito, la *facoltà* (il diritto, ma non l'obbligo) di acquistare o vendere al primo una certa quantità della commodity entro o ad una data T , detta *data di esercizio*, posteriore alla data di stipula t , e ad un prezzo fissato, detto *prezzo di esercizio*. Le opzioni che attribuiscono la facoltà di acquistare si dicono **call**, quelle che attribuiscono la facoltà di vendere **put**. Se l'opzione può essere esercitata *solo* alla data T , è detta **europea**, altrimenti **americana**.

In base al contratto, dunque, una *call europea* obbliga A a versare a V un importo fissato $C(t)$ in t ed, in cambio, gli attribuisce la facoltà di *acquistare* da V un certa quantità x della commodity in T al prezzo K .

La grandezza $C(t)$ è detta *prezzo dell'opzione* in t e la durata $T-t$ è chiamata *tempo alla scadenza* o *time to maturity (TTM)*. Con le opportune variazioni, si potrebbero estendere anche alle opzioni molte delle considerazioni viste per i contratti a termine e swap, ma su questo non insistiamo.

Mercati di commodity

Nella maggior parte dei settori industriali il mercato è organizzato sulla base di contratti bilaterali fisici attraverso cui i contraenti stabiliscono la quantità da scambiare, il prezzo unitario, il luogo e la data di consegna. Nel caso delle commodity, tuttavia, per la loro natura indifferenziata il mercato tende ad organizzarsi nella forma di *borse merci*, cioè sedi di contrattazione nelle quali un operatore si incarica prima di

1. MERCATI ENERGETICI

raccogliere offerte di acquisto e di vendita, quindi di abbinarle. La fungibilità delle unità del bene è essenziale per garantire l'unicità del prezzo che viene generato.

Fino al XVIII secolo, le commodity erano scambiate prevalentemente su mercati cittadini a pronti, dove domanda ed offerta si incontravano portando a transazioni con consegna immediata. Lo sviluppo del commercio internazionale conseguente alla rivoluzione industriale ed il colonialismo portarono alla diffusione dei primi contratti con liquidazione differita, in particolare a Chicago su prodotti agricoli e a Londra su metalli. Le esigenze di standardizzazione in termini di quantità, qualità e date di consegna contribuirono alla nascita dei primi mercati a termine, il New York Cotton Exchange (NYCE) nel 1842 ed il Chicago Board of Trade (CBOT) nel 1848. Tra i principali mercati internazionali in attività, ricordiamo i seguenti:

Mercato	Sigla	Paese	Commodity
Chicago Board of Trade	CBOT	USA	Agricoltura, biocarburanti
Chicago Mercantile Exchange	CME	USA	Agricoltura, bestiame, carne
New York Mercantile Exchange	NYMEX	USA	<i>Energia</i> , metalli
Commodity Exchange	COMEX	USA	Metalli
IntercontinentalExchange	ICE	USA	<i>Energia</i> , metalli
Dalian Commodity Exchange	DCE	Cina	Agricoltura, <i>energia</i>
Zhengzhou Commodity Exchange	ZCE	Cina	Agricoltura, prodotti chimici
Shanghai Futures Exchange	SHFE	Cina	<i>Energia</i> , gomma, metalli
Multi Commodity Exchange of India	MCX	India	Agricoltura, <i>energia</i> , metalli
London Metal Exchange	LME	Regno Unito	Metalli, plastiche
London International Financial Futures and Options Exchange	LIFFE	Regno Unito	Agricoltura
NASDAQ OMX Commodities	NORDPOOL	Norvegia	<i>Energia</i> , emissioni CO_2
European Energy Exchange	EEX	Germania	<i>Energia</i> , emissioni CO_2
Marché à Terme International de France	MATIF	Francia	Agricoltura

La crescita del volume degli scambi e dell'interesse degli investitori verso questi asset registrata dal 1970 ad oggi ha indotto diverse società specializzate a sviluppare *indici* per misurare l'andamento dei prezzi delle classi di commodity fondamentali. Tra quelli di riferimento, citiamo S&P GSCI (Standard & Poor's – Goldman Sachs Commodity Index), TR/J CRB (Thomson Reuters – Jefferies Commodity Research Bureau) e DJ UBSCI (Dow Jones – UBS Commodity Index). A titolo di esempio, S&P GSCI è costituito da una selezione delle principali commodity di ciascun settore pesata con la rispettiva quantità della produzione mondiale (che negli indici di

commodity interpreta il ruolo svolto dalla capitalizzazione negli indici finanziari). Poiché i futures sono gli strumenti più liquidi, l'indice si basa su questi contratti, prendendo come prezzi di riferimento quelli con scadenza più vicina (*nearby contract*) ed aggiornandoli periodicamente. La base di S&P GSCI è 100 al 01-gen-1970.

In relazione ai volumi di futures ed opzioni negoziati su commodity, la categoria su cui sono stipulati più contratti è quella delle commodity agricole, seguite dalle commodity energetiche e dai metalli. Complessivamente, questi costituiscono circa il 14.5% del mercato globale di futures ed opzioni, mentre le azioni, un asset finanziario, sono invece il sottostante più trattato. Nella tabella riportiamo il numero di futures ed opzioni scambiati negli 85 mercati mondiali principali nell'anno 2012 per ciascuna categoria di beni economici.

Categoria	# Contratti	%
Azioni singole	6,467,944,406	30.55
Indici azionari	6,048,262,461	28.57
Tassi d'interesse	2,933,255,540	13.86
Valute	2,434,238,493	11.50
Agricoltura	1,270,531,588	6.00
Energia	905,856,150	4.28
Metalli non preziosi	554,253,069	2.62
Metalli preziosi	319,267,659	1.51
Altro	236,778,479	1.12
Totale	21,170,387,845	100.00

Fonte: Futures Industry Association (FIA), Annual Volume Survey 2012

Consideriamo le due classi di commodity su cui è scritto il maggior numero di contratti, quelle agricole ed energetiche, riportando per ciascuna i cinque derivati più scambiati. Le opzioni sono uno strumento poco utilizzato in relazione a questi asset, come è confermato dal fatto che nella lista troviamo solo futures. I dati in tabella si riferiscono all'anno 2012 e le percentuali sono rispetto al numero totale di contratti della categoria in questione.

#	Contratto	Dimensione	# Contratti	%
1	Soy Meal Futures, DCE	10 ton	325,876,653	25.65
2	White Sugar Futures, ZCE	10 ton	148,290,190	11.67
3	Rubber Futures, SHFE	5 ton	75,176,266	5.92
4	Corn Futures, CBOT	5,000 bsh	73,184,337	5.76
5	Soy Oil Futures, DCE	10 ton	68,858,554	5.42
Totale Agricoltura			1,270,531,588	100.00
1	Brent Crude Futures, ICE Futures Europe	1,000 bbl	325,876,653	35.97
2	Light, Sweet Crude Oil Futures, NYMEX	1,000 bbl	148,290,190	16.37
3	Henry Hub Natural Gas Futures, NYMEX	10,000 mmBtu	75,176,266	8.30
4	Gasoil Futures, ICE Futures Europe	100 ton	73,184,337	8.08
5	Crude Oil Futures, MCX	100 bbl	54,753,722	6.04
Totale Energia			905,856,150	100.00

Fonte: Futures Industry Association (FIA), Annual Volume Survey 2012

Concentriamoci ora su commodity energetiche ed esaminiamo due importanti esempi, quello dell'elettricità e del gas naturale, evidenziando le loro peculiarità. Durante gli anni '90 del secolo scorso, negli Stati Uniti ed in numerosi stati europei si sono avviati processi di liberalizzazione che hanno portato le rispettive filiere produttive, basate fin dal secondo dopoguerra su un modello di *monopolio pubblico*, ad evolversi verso *modelli concorrenziali*. Ciò ha consentito la nascita di mercati a pronti ed a termine che hanno favorito la diffusione di strumenti flessibili volti alla gestione del rischio connesso con le attività di produttori e consumatori.

1.2 Mercati elettrici

L'elettricità è una commodity energetica con caratteristiche tecniche ed economiche che la differenziano notevolmente rispetto alle altre della stessa classe. Le limitate possibilità di stoccaggio hanno un forte impatto sulle infrastrutture e sull'organizzazione del mercato, poiché la potenza elettrica è utile solo se può essere erogata in un periodo di tempo. Commodity con questa proprietà sono dette *commodity di flusso* e saranno il sottostante dei futures di cui ci occuperemo nel capitolo 3. Nei mercati elettrici, dunque, sono scambiati contratti a pronti ed a termine che prevedono in entrambi i casi la consegna della commodity su un fissato intervallo futuro. L'unità di misura impiegata è il *Megawattora (MWh)*, l'energia generata erogando la potenza di 1 MW per 1 ora, corrispondente a 3.6 GJ. Per dare un'idea dell'ordine di grandezza, osserviamo che il consumo annuo di elettricità per utenza residenziale, in Italia, nel 2011 è stato in media di 2.4 MWh.¹ A differenza dei mercati obbligazionari ed azionari, nel caso dell'elettricità la formazione dei prezzi è determinata in modo decisivo dalle dinamiche di produzione e consumo, di cui ora esaminiamo le caratteristiche principali. Rimandiamo per un'analisi approfondita a Pilipovic [Pil98], Geman [Gem05] e Mastropieri [Mas10].

La filiera produttiva dell'energia elettrica si compone di cinque fasi logicamente distinte (si veda la Figura 1.5):

1. *approvvigionamento*: questa fase consiste nella *produzione* di energia elettrica ad alta tensione mediante la trasformazione di fonti primarie ed eventualmente nell'*importazione* del quantitativo che questa non riesce a soddisfare. Gli impianti termoelettrici impiegano combustibili fossili (gas naturale, olio combustibile, carbone) o nucleari, quelli idroelettrici trasformano l'energia cinetica sviluppata durante la caduta dell'acqua immagazzinata in bacini. Sostenuta dalle politiche di incentivazione finalizzate alla protezione dell'ambiente, infine, si sta espandendo la produzione da impianti che utilizzano fonti rinnovabili, come l'energia eolica, quella solare, la geotermia, le biomasse, la combustione di rifiuti.
2. *dispacciamento*: istante per istante debbono essere determinati gli impianti di produzione che immettono energia nella rete di trasmissione. La non stoccabilità dell'elettricità, infatti, richiede che debba essere mantenuto un equilibrio costante tra la domanda proveniente dalla rete e l'offerta, per garantire un corretto funzionamento del sistema.

¹Istat, Rapporto sui dati ambientali nelle città italiane 2000-2011

3. *trasmissione*: in questa fase l'energia elettrica è trasportata dai generatori ai nodi periferici prossimi all'utenza finale attraverso una rete di cavi ad alta tensione. A causa della resistenza dei conduttori da cui questa è formata, durante la trasmissione hanno luogo perdite di energia direttamente proporzionali alla distanza tra i generatori ed i nodi. Per ridurre le dispersioni, dunque, è importante minimizzare la lunghezza del percorso compiuto dall'elettricità. La prima legge di Kirchhoff, inoltre, implica che la somma dell'energia immessa in un nodo della rete in ogni istante deve eguagliare la somma dell'energia prelevata nello stesso nodo, per cui ogni deficit di potenza erogata deve essere rapidamente contrastato attraverso un'opportuna variazione della potenza immessa, per evitare l'arresto degli impianti di generazione ed un conseguente black-out.
4. *distribuzione*: nella quarta fase la tensione dell'energia viene ridotta e l'elettricità è trasportata dai nodi periferici all'utenza finale. Per le caratteristiche fisiche del sistema, il percorso compiuto dall'energia tra il generatore e l'utenza finale non può essere determinato, per cui si parla di non tracciabilità dei flussi.
5. *vendita*: in quest'ultima fase imprese specializzate in attività di intermediazione vendono agli utenti finali l'accesso al servizio elettrico. Si tratta di un'attività di tipo commerciale che consiste principalmente nella definizione delle opzioni tariffarie rivolte a differenti tipologie di utenti, l'assunzione di responsabilità circa la disponibilità di energia elettrica nei tempi e nelle condizioni stabilite, la misurazione della grandezza oggetto del contratto, la fatturazione.

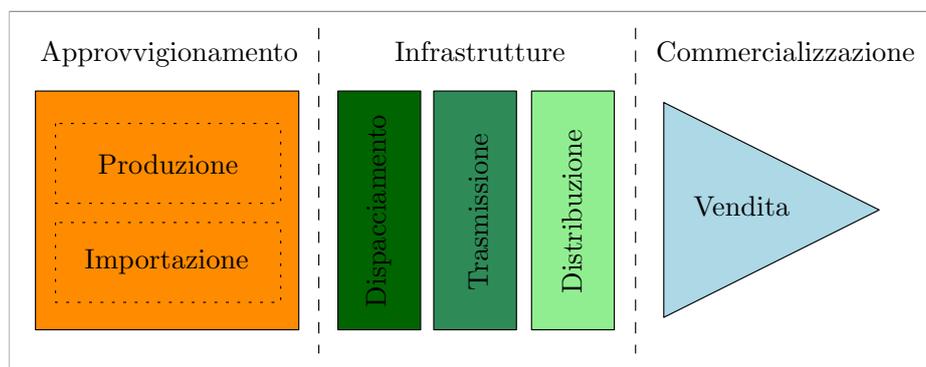


Figura 1.5: Filiera produttiva dell'energia elettrica.

Il modello tradizionale di fornitura dell'elettricità consiste in un monopolio legale verticalmente integrato in tutte le fasi della filiera produttiva. Tale modello è stato adottato, negli Stati Uniti ed in tutta Europa, dal secondo dopoguerra alla metà degli anni '80 del secolo scorso, ed il processo finalizzato al suo abbandono in favore di un modello concorrenziale è in molti paesi ancora in corso.

Da un punto di vista della *domanda*, la richiesta di potenza elettrica mostra un'elevata *variabilità*, sia nel medio che nel breve termine: nell'arco di una giornata, si alternano ore ad elevatissima richiesta di energia elettrica (*ore di picco*) ad ore a ridotta domanda di potenza (*ore fuori picco*), mentre su base settimanale, mensile o annuale si presentano periodicità che dipendono dalle caratteristiche sociali e climatiche dei vari paesi. Questa variabilità dei consumi richiede una notevole

flessibilità dell'offerta ed un elevato grado di coordinamento del sistema elettrico. Una seconda proprietà fondamentale della domanda è la *rigidità*, ovvero la bassa elasticità rispetto ai prezzi. Nonostante questi siano caratterizzati da forti oscillazioni durante le ore della giornata, la domanda è insensibile a queste variazioni poiché l'elettricità è un bene indispensabile e difficilmente sostituibile.

Dal lato dell'*offerta*, invece, l'impossibilità di stoccaggio implica che non possa essere acquistata nei periodi di eccesso di produzione per rivenderla in quelli di scarsità. L'erogazione della potenza deve avvenire nel momento in cui essa viene richiesta, per cui si rendono necessarie complesse operazioni di dispacciamento che assicurino il continuo bilanciamento di domanda ed offerta, preservando al contempo l'integrità fisica del sistema. Mentre l'elettricità si presenta per il consumatore come un prodotto omogeneo, poiché non ha qualità che possano variarne il gradimento, dal punto di vista dell'offerta le tecniche di produzione ed i costi sono eterogenei e dipendono in modo significativo dal tipo di combustibile adottato. L'impiego di un mix di generazione diversificato consente di modificare il fattore di utilizzo di ciascun impianto in modo da soddisfare la domanda al minor costo possibile.

La *rete di trasmissione* ha la funzione fondamentale di mettere in contatto domanda ed offerta distribuite nel territorio. Gli elevati costi fissi di investimento ed i ridotti costi marginali di utilizzo configurano la gestione della rete come un classico *monopolio naturale*. Con il processo di privatizzazione, dunque, si è reso necessario l'affidamento di questa attività a gestori di rete indipendenti, detti *Operatori di Rete e di Sistema*, che si distinguono in *Operatori del Sistema di Trasmissione (Transmission System Operator, TSO)* se sono proprietari della rete ed *Operatori di Sistema Indipendenti (Independent System Operator, ISO)* se non lo sono. I compiti principali svolti da questi soggetti riguardano le fasi di dispacciamento e trasmissione:

- *programmazione* delle unità di generazione connesse in rete per soddisfare il bisogno atteso di energia al netto delle perdite di trasporto
- *creazione della riserva di potenza* sufficiente ad intervenire in tempo reale per compensare variazioni nella domanda, nell'offerta o per risolvere eventuali congestioni
- *bilanciamento* in tempo reale del sistema, ordinando la produzione effettiva delle unità di riserva per ristabilire l'equilibrio domanda-offerta entro i tempi massimi consentiti

Contratti elettrici

Descriviamo gli aspetti fondamentali dei contratti elettrici, occupandoci prima di quelli a pronti e, poi, di quelli con consegna differita. Per chiarire il significato dei concetti faremo riferimento al mercato elettrico a pronti *EPEX (European Power Exchange) Spot* ed al mercato elettrico a termine *EEEX (European Energy Exchange) Power Derivatives*, parti del mercato energetico EEX con sede a Lipsia, come esempi caratteristici.

I **contratti elettrici a pronti** prevedono consegna fisica del bene e, dunque, che vi sia effettivamente produzione o consumo di energia elettrica da parte dei contraenti. Dove è avvenuto il processo di privatizzazione gli scambi sono organizzati, in prima approssimazione, in due differenti mercati: il mercato del giorno prima ed il mercato infragiornaliero.

Nel *mercato del giorno prima* avvengono la maggior parte delle transazioni. Per garantire l'efficienza dell'interazione tra domanda ed offerta, è necessario l'impiego di un meccanismo d'asta che incentivi i produttori ad offrire prezzi di vendita allineati ai costi marginali ed i consumatori a dichiarare i propri prezzi di riserva. Il modello che generalmente viene utilizzato è quello dell'*asta non discriminatoria a prezzi nodali*. In questo caso, il banditore raccoglie da ogni unità produttiva e per ciascuna delle 24 ore del giorno in questione le *offerte di vendita*, costituite da una quantità di energia e dal prezzo minimo al quale l'operatore è disposto a vendere quella quantità. Parallelamente sono raccolte dalle unità di consumo e per le stesse ore anche le *offerte di acquisto*, che specificano una quantità ed il prezzo massimo al quale sono disposte a comprare quella quantità. Vengono così generate, per ciascuna delle 24 ore, le due curve di domanda ed offerta che si ottengono prendendo, per ciascun livello di produzione, rispettivamente le offerte minime di vendita e quelle massime di acquisto. L'intersezione delle due curve risolve il problema di massimizzare il valore delle transazioni garantendo l'uguaglianza tra domanda ed offerta e fornisce da un lato la quantità complessiva acquistata, detta *Market Clearing Quantity (MCQ)*, e dall'altro il prezzo di equilibrio a cui avviene lo scambio, detto *Market Clearing Price (MCP)*. In assenza di congestioni, il prezzo di equilibrio è unico sull'intera rete e coincide

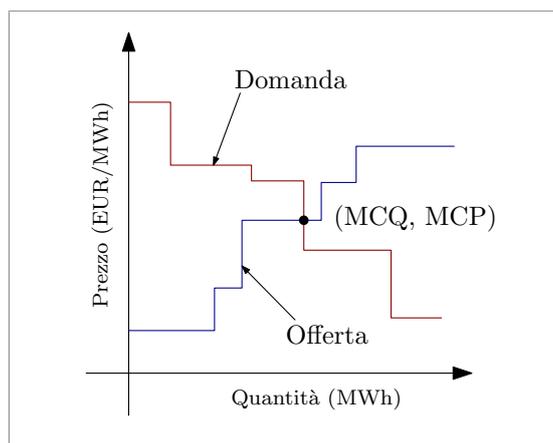


Figura 1.6: Curve della domanda e dell'offerta relative ad un'ora fissata di consegna.

con il costo marginale della più onerosa tra le unità di produzione utilizzate per soddisfare la domanda. Questo cresce all'aumentare della domanda, per la necessità di attivare impianti sempre più costosi. In presenza di vincoli di rete, tuttavia, il prezzo di equilibrio si differenzia geograficamente tra i diversi nodi e l'ordine di merito si modifica in modo da ridurre la produzione nei nodi saturati in esportazione ed aumentarla in quelli saturati in importazione. Quando i limiti massimi di transito impediscono almeno su una linea i flussi di scambio derivati dal dispacciamento non vincolato, il TSO/ISO è costretto ad equilibrare separatamente domanda ed offerta nei nodi limitati. In questo modo il mercato nazionale si frammenta in una somma di mercati locali, mettendo in evidenza differenziali di prezzo che riflettono le differenze di costo di generazione tra le aree: il prezzo di equilibrio sarà più alto nei nodi che importano energia e più basso in quelli che la esportano.

Il *mercato infragiornaliero* è caratterizzato da un meccanismo di formazione dei

prezzi simile, consentendo agli operatori di apportare modifiche ai programmi di dispacciamento definiti nel mercato del giorno prima anche durante la giornata di consegna attraverso ulteriori offerte di acquisto o vendita, per risolvere eventuali necessità non previste. Infine, esiste generalmente anche un terzo mercato, detto *mercato per il servizio di dispacciamento*, attraverso cui il TSO/ISO si approvvigiona delle risorse per la gestione ed il controllo del sistema (risoluzione delle congestioni intranazionali, creazione della riserva di potenza, bilanciamento in tempo reale). In questo caso il meccanismo d'asta è differente e le offerte accettate sono remunerate al prezzo presentato (*pay-as-bid*).

Come conseguenza delle dinamiche di produzione e consumo descritte in precedenza, ciascuno dei prezzi spot definiti è caratterizzato da una forte *stagionalità* e dalla possibilità di violenti *picchi* causati da temporanei problemi di bilanciamento nella rete di trasmissione. A titolo di esempio, consideriamo il mercato EPEX Spot, su cui sono scambiati contratti elettrici a pronti con consegna nelle zone Germania/Austria, Francia e Svizzera. Per ciascun'area, sono presenti le due tipologie di mercato che abbiamo descritto: il mercato del giorno prima è detto *EPEX Day Ahead*, mentre il mercato infragiornaliero *EPEX Intraday*. L'indice *PHELIX (PHysical ELectricity IndeX) Base* viene calcolato giornalmente come la media dei 24 prezzi orari di chiusura del mercato EPEX Day Ahead relativo all'area Germania/Austria. In modo analogo, l'indice *PHELIX Peak* è la media dei 12 prezzi di chiusura per le ore di picco comprese tra le 08:00 e le 20:00 del mercato EPEX Day Ahead relativo all'area Germania/Austria. Dalla figura è evidente il violento picco che nel luglio 2006 ha

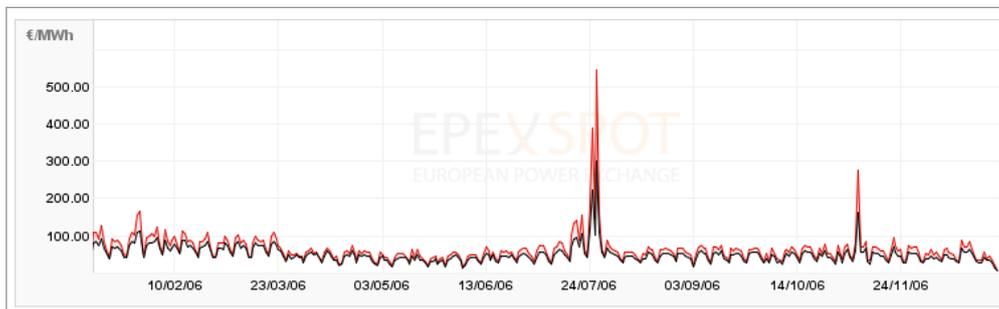


Figura 1.7: Indice PHELIX relativo ai prezzi spot del mercato EPEX Day Ahead per l'area Germania/Austria osservati dal 01-gen-2006 al 31-dic-2006. In nero il PHELIX Base, in rosso il PHELIX Peak. (Fonte: EPEX Spot)

portato l'indice PHELIX Peak, dopo aver oscillato per la maggior parte dell'anno sotto i 100 €/MWh, a superare i 500 €/MWh, così come si può notare una periodicità su base settimanale nell'andamento dell'indice.

I **contratti elettrici a termine** si differenziano dai contratti a termine su generiche commodity perché, invece di prevedere una *data di scadenza*, sono regolati in un *periodo di consegna* durante il quale l'acquirente riceve dal venditore l'energia specificata alla stipula e paga in cambio il prezzo stabilito. Nonostante il nome con cui sono comunemente indicati, dunque, sia i contratti a pronti che quelli a termine si configurano più propriamente come i contratti swap su commodity che abbiamo definito nel paragrafo 1.1. I mercati in cui vengono negoziati futures elettrici sono detti *mercati elettrici a termine*. Generalmente i periodi di consegna possono avere durata

mensile, trimestrale, stagionale od annuale e ciascun contratto prevede l'erogazione di una potenza elettrica costante pari ad 1 MW nell'arco dell'intero intervallo stabilito. I futures elettrici, inoltre, si distinguono in *base-load*, *peak-load* ed *offpeak-load* a seconda che garantiscano la consegna dell'energia, rispettivamente, in tutte le ore del periodo, nelle ore di picco e nelle ore fuori picco. La definizione delle ore di picco dipende dal particolare mercato, ma spesso si identificano con le ore dei giorni dal lunedì al venerdì comprese tra le 08:00 e le 20:00. Per fissare le idee, consideriamo ad esempio un *futures elettrico mensile base-load* ed osserviamo che il sottostante è costituito da

$$1 \text{ MW} \times 24 \text{ h/giorno} \times 30 \text{ giorni} = 720 \text{ MWh}$$

dove abbiamo assunto che il mese in questione avesse 30 giorni. Più in generale, dunque, un futures elettrico base-load su un periodo di consegna di N giorni obbligherà a fornire un'energia pari a $24N$ MWh erogando in modo costante la potenza di 1 MW. I futures elettrici che impegnano il venditore a consegnare fisicamente l'energia all'acquirente sono detti *fisici*, mentre quelli che lo obbligano al pagamento di un prezzo di riferimento, basato su un fissato prezzo spot, sono detti *finanziari*.

Concentriamoci su *futures elettrici finanziari* ed osserviamo che, non essendo richiesti il consumo o la produzione effettivi di energia, questi strumenti possono essere utilizzati non solo per la copertura da rischi, ma anche con finalità speculative o di arbitraggio. Il prezzo di riferimento sottostante del contratto è generalmente un indice che riflette l'andamento del prezzo spot del mercato del giorno prima ed è detto *prezzo di liquidazione finale (final settlement price)*. Sul mercato elettrico a termine EEX Power Derivatives sono negoziati futures elettrici scritti su indici del mercato EPEX Spot. Nel caso dei futures elettrici finanziari relativi all'area Germania/Austria, detti *futures Phelix*, il prezzo di liquidazione finale è l'indice PHELIX introdotto in precedenza: si considera, in particolare, il PHELIX Base per futures base-load ed il PHELIX Peak per futures peak-load.

In ogni giornata di apertura di un mercato elettrico a termine sono scambiati in genere i futures scritti su un numero fissato di settimane, mesi, trimestri, stagioni ed anni successivi, dove eventualmente alcune di queste tipologie può non essere presente. Nel mercato EEX Power Derivatives, ad esempio, sono negoziati i 19 futures Phelix base-load scritti sui 6 mesi, 7 trimestri e 6 anni successivi. Questo mercato ha caratteristiche peculiari, in realtà, perché sono disponibili per la negoziazione anche i contratti relativi al mese corrente. Poiché questi differiscono sensibilmente dagli altri futures mensili, però, non saranno oggetto del nostro studio. Nel *Mercato Elettrico a Termine (MTE)* italiano, invece, ogni giorno sono scambiati soltanto i futures sui 3 mesi, 4 trimestri ed 1 anno successivi. Il meccanismo di formazione del prezzo consiste in un'*asta continua* con specifiche che dipendono dal particolare mercato, attraverso cui si generano prezzi di equilibrio tra domanda ed offerta. Per ciascun futures è fissato un incremento minimo di prezzo, detto *tick size*, in genere pari a 0.01 €/MWh. In questo caso per un futures elettrico su un mese della durata di 30 giorni, dunque, il tick size è di $0.01 \text{ €/MWh} \times 720 \text{ MWh} = 7.20 \text{ €}$. Il prezzo registrato alla fine di ogni seduta di contrattazione è detto *prezzo di chiusura*. Nella Tabella 1.1 e nella Figura 1.8 riportiamo l'esito di una generica giornata di apertura del mercato EEX Power Derivatives per i futures Phelix base-load.

Ciascuno dei futures può essere scambiato soltanto nell'intervallo di tempo stabilito dal regolamento del mercato, detto *periodo di negoziazione (trading period)*. Nel

Contratto	Dim	PC	Inizio DP	Fine DP	#DP	TTD
gen-2013	744	49.92	01-01-2013	31-01-2013	31	29
feb-2013	672	50.85	01-02-2013	28-02-2013	28	60
mar-2013	743	45.30	01-03-2013	31-03-2013	31	88
apr-2013	720	44.00	01-04-2013	30-04-2013	30	119
mag-2013	744	42.14	01-05-2013	31-05-2013	31	149
giu-2013	720	42.68	01-06-2013	30-01-2013	30	180
Q1-2013	2159	48.62	01-01-2013	31-03-2013	90	29
Q2-2013	2184	42.93	01-04-2013	30-06-2013	91	119
Q3-2013	2208	43.92	01-07-2013	30-09-2013	92	210
Q4-2013	2209	49.82	01-10-2013	31-12-2013	92	302
Q1-2014	2159	50.57	01-01-2014	31-03-2014	90	394
Q2-2014	2184	43.45	01-04-2014	30-06-2014	91	484
Q3-2014	2208	44.58	01-07-2014	30-09-2014	92	575
Y-2013	8760	46.32	01-01-2013	31-12-2013	365	29
Y-2014	8760	47.00	01-01-2014	31-12-2014	365	394
Y-2015	8760	47.16	01-01-2015	31-12-2015	365	759
Y-2016	8784	48.13	01-01-2016	31-12-2016	366	1124
Y-2017	8760	49.40	01-01-2017	31-12-2017	365	1490
Y-2018	8760	50.30	01-01-2018	31-12-2018	365	1855

Fonte: EEX Power Derivatives

Tabella 1.1: Esiti delle contrattazioni sui futures Phelix base-load svolte il 03-dic-2012. Legenda: *Dim* per Dimensione del contratto (MWh), *PC* per Prezzo di Chiusura (€/MWh), *DP* per Delivery Period, *#DP* per durata del DP (giorni), *TTD* per Time To Delivery (giorni).

caso dei futures Phelix mensili, ad esempio, questo comincia 6 mesi prima dell'inizio del periodo di consegna e termina l'ultimo giorno lavorativo precedente la sua fine (e.g. il futures Phelix mensile base-load *lug-2013* è negoziato dal 01-gen-2013 al 31-lug-2013). Come per generici futures su commodity, per garantire il buon esito della transazione è adottato il sistema dei margini: alla stipula del contratto le controparti versano alla Clearing House il margine iniziale ed, in seguito, alla fine di ogni giornata di scambio la parte che ha maturato una perdita versa il margine di variazione a quella che ha guadagnato. Per i futures con periodi di consegna più lunghi del mese, è previsto inoltre un *meccanismo a cascata (cascading)*. Nel caso dei futures trimestrali, al termine dell'ultimo giorno del periodo di negoziazione la posizione di ciascuna controparte è convertita in tre posizioni uguali sui futures mensili i cui periodi di consegna, insieme, corrispondono al trimestre in questione. Se consideriamo ad esempio il futures *Q1-2013*, al termine dell'ultima giornata di negoziazione la posizione lunga del venditore viene convertita in tre posizioni lunghe sui futures *gen-2013*, *feb-2013* e *mar-2013*. Nel caso dei futures annuali, invece, al termine dell'ultimo giorno del periodo di negoziazione la posizione di ciascuna controparte è convertita in posizioni uguali sui futures mensili relativi ai primi tre mesi dell'anno e sui futures trimestrali relativi agli ultimi tre trimestri dell'anno, in modo che i periodi di consegna, insieme, corrispondano all'anno in questione.

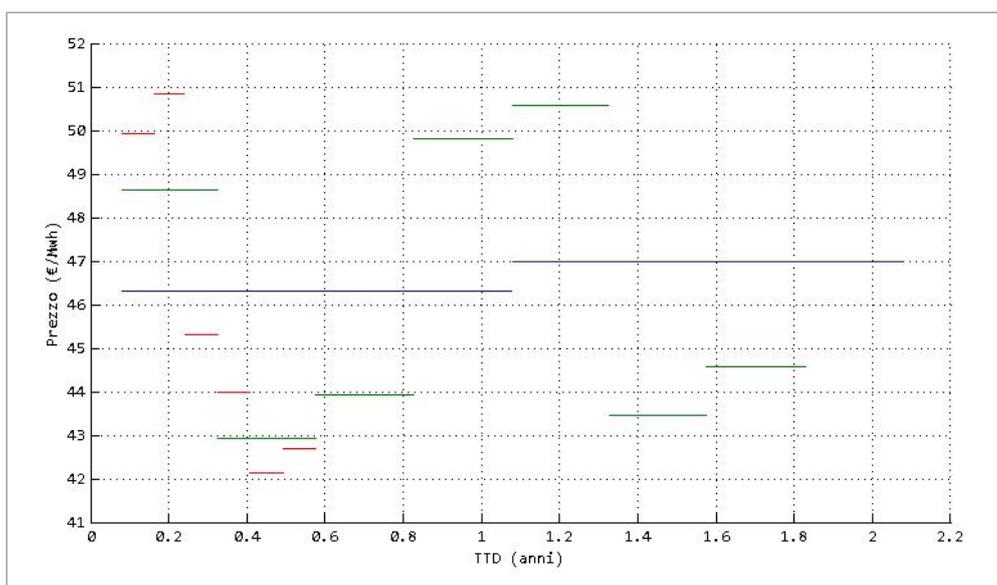


Figura 1.8: Esiti delle contrattazioni sui futures Phelix base-load svolte il 03-dic-2012. In rosso i futures mensili, in verde quelli trimestrali, in blu quelli annuali (soltanto i primi due).

1.3 Mercati del gas naturale

Il *gas naturale*, analogamente all'elettricità, è una commodity di flusso i cui contratti prevedono la consegna su intervalli di tempo. Sono due le unità di misura adottate più di frequente: il *British Thermal Unit (Btu)* negli Stati Uniti ed in Gran Bretagna; il *Megawattora (MWh)* nella maggior parte degli altri paesi. Il Btu è definito come l'energia necessaria per innalzare la temperatura di 1 libbra di acqua distillata posta al livello del mare da 39°F a 40°F ed il multiplo utilizzato nei contratti è in genere il Mega Btu, indicato con *mmBtu* o *MMBtu* e pari a 10^6 Btu. Osserviamo che 1 mmBtu corrisponde a circa 0.293 MWh e viceversa 1 MWh è uguale a circa 3.41 mmBtu. Una terza grandezza utilizzata comunemente per misurare le quantità di gas oggetto dei contratti è il *volume*. Notiamo che il potere calorifico, ovvero l'energia massima ricavata convertendo il vettore energetico attraverso combustione, di 1000 m^3 di gas naturale in condizioni standard (alla temperatura di 15°C ed alla pressione di 1 atm) è pari a 10.5 MWh. Per dare un'idea dell'ordine di grandezza dell'unità adottata per i contratti, osserviamo che il consumo annuo di gas naturale per utenza residenziale, in Italia, nel 2011 è stato in media di 7.8 MWh. Anche in questo caso le dinamiche dei prezzi sono guidate prevalentemente dall'interazione tra domanda ed offerta (si vedano Pilipovic [Pil98] e Geman [Gem05] per approfondire).

Il gas naturale è un gas composto principalmente da metano, la più piccola e leggera fra le molecole degli idrocarburi e prodotto dalla decomposizione anaerobica di materiale organico. In natura si trova comunemente allo stato fossile, da solo in giacimenti di gas naturale oppure insieme al petrolio o carbone. La filiera produttiva è composta da cinque fasi simili a quelle della filiera dell'energia elettrica, ma con differenze principalmente dovute alla possibilità di stoccaggio (si veda la Figura 1.9):

1. *approvvigionamento*: questa fase comprende sia l'*estrazione* che l'*importazione* del gas naturale. L'estrazione consiste nelle attività di *prospezione*, *ricerca* e *coltivazione* dei giacimenti: con la prima vengono svolti i rilievi geografici, geologici e geofisici finalizzati ad accertare la natura del sottosuolo o del sottofondo marino; la ricerca è volta direttamente al rinvenimento del giacimento; la coltivazione consiste nell'estrazione del gas naturale dal sito individuato. Attraverso la fase di importazione ciascuno Stato acquista il quantitativo di gas naturale che non è soddisfatto dall'attività di estrazione locale.
2. *stoccaggio e dispacciamento*: lo stoccaggio consiste nel processo di immagazzinamento in cavità naturali, tipicamente giacimenti esausti. Spesso vincoli legislativi comportano che la proprietà dei titoli minerari relativi ai giacimenti sia associata anche alla proprietà delle relative capacità di deposito, per cui un unico soggetto si occupa delle fasi di estrazione e stoccaggio. Il dispacciamento consiste nel bilanciare in tempo reale le quantità immesse nella rete di gasdotti con quelle prelevate ai punti di consumo. A fronte di una programmazione regolare dei flussi in ingresso dai luoghi di produzione, i deflussi verso le utenze finali sono fortemente irregolari. Quindi, nei momenti di minor consumo, il gas prodotto in eccesso viene stoccato, mentre quando la domanda è maggiore, viene reimpresso nella rete.
3. *trasporto dorsale*: il gas naturale è trasportato principalmente attraverso condotte, detti *gasdotti*, e si muove da un punto ad un altro in virtù del differenziale barico tra di essi. Si rende necessario, dunque, un sistema di centrali di compressione con la funzione di mantenere le pressioni desiderate, contrastando gli effetti dell'attrito cui è soggetto il gas naturale in moto lungo le pareti interne del tubo. Tramite gasdotti ad alta pressione il gas viene trasportato dai luoghi di produzione od importazione fino ai centri di consumo. Un sistema di trasporto alternativo è costituito da navi (dette metaniere) che ospitano gas naturale liquefatto e ne consentono lo spostamento fino a centri di rigassificazione. Gli ingenti costi fissi nel trasporto dorsale ad alta pressione configurano questa attività come un monopolio naturale. Analogamente al caso dell'elettricità, esistono perciò delle società che si occupano della gestione delle fasi di dispacciamento e trasporto, chiamate ancora *Transmission System Operator (TSO)* se sono proprietari della rete o *Independent System Operator (ISO)* se non lo sono.
4. *distribuzione*: in questa fase il gas naturale viene trasferito alle utenze finali. Si parla di *distribuzione primaria* nel caso in cui queste siano utenze industriali, termoelettriche o aziende di distribuzione, mentre viene chiamata *distribuzione secondaria* se sono utenze residenziali. Per queste ultime, ragioni relative alla dimensione dei consumi ed alla sicurezza della rete impongono la presenza di impianti di decompressione.
5. *vendita*: imprese specializzate in attività di intermediazione vendono agli utenti finali l'accesso alla rete del gas naturale. L'attività è di tipo commerciale ed analoga a quella descritta per il settore elettrico.

La dimensione degli investimenti iniziali e la redditività differita nel tempo storicamente hanno contribuito a rendere anche quella del gas naturale un'industria verticalmente integrata: in tutti i paesi europei si sono sviluppate imprese, nella maggioranza dei casi di proprietà pubblica, che hanno integrato le fasi di trasporto, stoccaggio e distribuzione. Una volta completato il processo di metanizzazione di

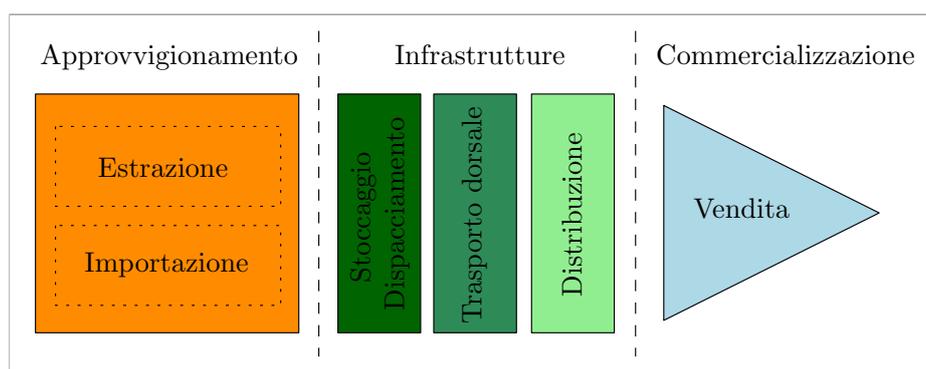


Figura 1.9: Filiera produttiva del gas naturale.

massa e raggiunta la maggior parte delle potenziali utenze civili ed industriali, tuttavia, sono caduti parte degli argomenti a favore dell'assetto monopolistico, sollecitando la transizione verso modelli concorrenziali.

Dal lato della *domanda*, la richiesta di gas naturale si caratterizza per un'elevata *variabilità* su base stagionale, con una forte richiesta nel periodo invernale per alimentare il riscaldamento delle abitazioni ed un calo in quello estivo. La possibilità di stoccaggio consente di modulare l'*offerta*, garantendo l'equilibrio necessario per il buon funzionamento del sistema. Insieme all'attività di dispacciamento, ciò è fondamentale per garantire che i flussi dai luoghi di produzione o importazione in ingresso nella rete si mantengano regolari. Nel primo caso, infatti, si ha la necessità di produrre ad un livello tale da ammortizzare gli ingenti costi legati alla fase di ricerca e prima coltivazione del giacimento. Per le importazioni, invece, i contratti pluriennali in genere identificano un quantitativo da ritirare annualmente vincolato ad una clausola *take or pay*, in base alla quale la parte non consumata deve comunque essere pagata.

Contratti su gas naturale

Un *hub del gas naturale* è un mercato in cui produttori e consumatori effettuano transazioni bilaterali di gas naturale su base giornaliera, un punto di scambio che offre garanzie di contabilizzazione e servizi connessi con l'infrastruttura della rete (stoccaggio, trasporto, distribuzione). Un hub è detto *fisico (point-specific hub)* se le transazioni sono relative ad un punto di intersezione tra reti di trasporto gestite da TSO differenti. In Europa tipicamente questi si trovano alla frontiera tra due stati, come l'hub *CEGH (Central European Gas Hub)*, situato al confine tra Austria e Slovacchia. Negli Stati Uniti, invece, dove un processo di liberalizzazione iniziato nel 1985 ha consentito ai TSO di operare su più stati, questo vincolo è meno stretto. *Henry Hub*, hub fisico statunitense situato in Louisiana, nel Golfo del Messico, è uno dei più grandi al mondo in relazione ai volumi scambiati. Un hub è detto *virtuale (system hub)* se le transazioni riguardano l'intera rete di trasporto gestita dai TSO nazionali o parti di essa. Alcuni esempi sono l'hub inglese *NBP (National Balancing Point)* e quello olandese *TTF (Title Transfer Facility)*, i più importanti e longevi hub europei, i tedeschi *NCG (NetConnect Germany)* e *GASPOOL (Gaspool Balancing Services Hub)*, che insieme costituiscono il secondo mercato europeo per volumi, l'hub

italiano *PSV (Punto di Scambio Virtuale)*. Spesso, in corrispondenza di un hub (fisico o virtuale) si sviluppano mercati regolamentati in cui sono scambiati contratti a pronti od a termine su gas naturale ed in questo caso si parla di *trading hub*. Esempi importanti sono l'inglese *ICE (InterContinental Exchange) Endex*, l'olandese *APX (Amsterdam Power Exchange) Endex* ed il tedesco *EEX (European Energy Exchange)*. Nella Figura 1.10 riportiamo una mappa con i principali hub e mercati del gas europei. Descriviamo ora gli aspetti fondamentali dei contratti su gas naturale,

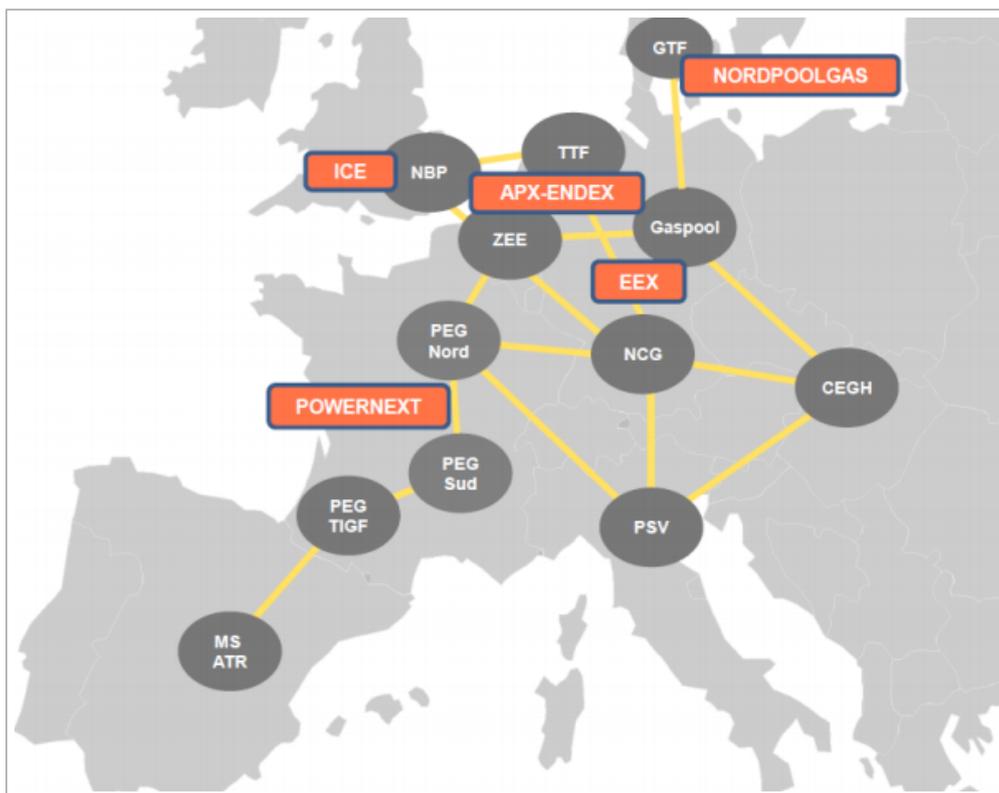


Figura 1.10: Hub (grigio) e mercati (arancione) del gas naturale in Europa. (Fonte: [Hea12])

considerando come esempio il mercato a pronti *EEX Spot Market* ed il mercato a termine *EEX Derivatives Market*, parti del mercato energetico EEX.

I **contratti su gas naturale a pronti** obbligano il venditore alla consegna fisica del bene, perciò impongono la produzione o il consumo effettivi di gas da parte dei contraenti. Come nel caso dell'elettricità, gli scambi avvengono generalmente in due differenti mercati: il *mercato del giorno prima* ed il *mercato infragiornaliero*. In entrambi i casi la modalità di contrattazione consiste in un'*asta continua* attraverso cui si generano istante per istante prezzi di equilibrio tra domanda ed offerta. Nel mercato del giorno prima sono scambiati contratti che prevedono l'erogazione di un flusso costante di gas durante le 24 ore comprese tra le 06:00 del giorno in questione e le 06:00 del giorno successivo. Il *contratto NCG giornaliero 1 MW* del mercato EEX Spot Market, ad esempio, prevede l'erogazione di un flusso costante di gas naturale equivalente alla potenza di 1 MW sulla rete associata all'hub NCG. Nel mercato

infragiornaliero, invece, sono negoziati contratti che obbligano il venditore a fornire, con stessa modalità del caso precedente, gas naturale nel corso delle ore comprese tra quella successiva all'istante di stipula e le 06:00 del giorno successivo.

In virtù delle dinamiche di produzione e consumo considerate, i prezzi spot mostrano una *periodicità su base stagionale* e presentano *picchi* conseguenti a problemi temporanei nel bilanciamento della rete di trasporto. Le possibilità di stoccaggio del gas naturale, tuttavia, rendono questi eventi meno frequenti e violenti rispetto al caso dell'elettricità, così come la stagionalità meno marcata. Nella Figura 1.11 è rappresentata la curva dei prezzi del contratto NCG giornaliero 1 MW, da cui sono evidenti i picchi che si sono presentati nell'ottobre 2011 e nel febbraio 2012, mentre è difficile individuare trend stagionali.

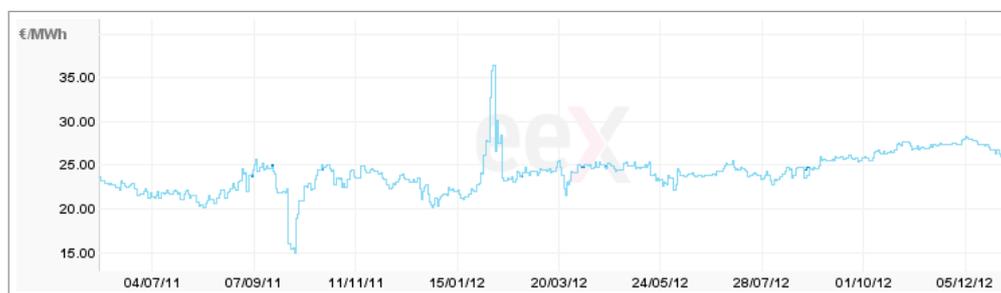


Figura 1.11: Prezzi del contratto NCG giornaliero 1 MW del mercato EEX Spot Market osservati dal 01-gen-2011 al 31-dic-2012. (Fonte: EEX)

I **contratti su gas naturale a termine**, come i corrispondenti per l'elettricità, sono liquidati in un *periodo di consegna* durante il quale l'acquirente riceve dal venditore l'energia specificata alla stipula e paga in cambio il prezzo stabilito. Anche in questo caso, dunque, i contratti a pronti ed a termine si configurano più propriamente come contratti swap su commodity. I mercati in cui vengono negoziati futures su gas naturale sono detti *mercati del gas naturale a termine*. I periodi di consegna, in genere, hanno durata *mensile, trimestrale, stagionale od annuale* e ciascun contratto prevede l'erogazione di un flusso costante di gas dalle ore 06:00 del primo giorno dell'intervallo stabilito fino alle ore 06:00 del giorno successivo all'ultimo. Un *futures su gas naturale mensile*, dunque, obbliga a consegnare $24 \times 30 = 720$ MWh, nel caso in cui il mese sia costituito da 30 giorni. I futures su gas naturale che comportano la consegna fisica dell'energia sono detti *fisici*, mentre quelli che prevedono il pagamento di un prezzo di riferimento, basato su un fissato prezzo spot, sono detti *finanziari*. Esempi di futures su gas naturale del primo tipo cui faremo riferimento sono i *futures NCG*, i *futures TTF*, i *futures PSV*, ed i *futures Henry Hub*, contratti che impegnano il venditore a consegnare fisicamente l'energia pattuita sulla rete associata ai rispettivi hub. In ogni giornata di apertura del mercato sono scambiati in genere i futures scritti su un numero fissato di settimane, mesi, trimestri, stagioni ed anni successivi, dove eventualmente alcune di queste tipologie può non essere presente. Nel mercato EEX Power Derivatives, ad esempio, sono negoziati i 10 futures NCG scritti sui 3 mesi, 5 trimestri e 2 anni successivi. Come nel caso dei mercati spot, il prezzo è generato con un'*asta continua* e, per ciascun contratto, è fissato l'incremento minimo, detto *tick size*. I prezzi registrati alla fine di ogni seduta di contrattazioni sono chia-

mati *prezzi di chiusura* e l'esito di una generica giornata di scambi è analogo a quello che abbiamo rappresentato nella Tabella 1.1 e nella Figura 1.8 per i futures elettrici. Il *periodo di negoziazione (trading period)* è ancora l'intervallo di tempo in cui sono possibili compravendite dei contratti, così come continuano ad essere adottati il sistema dei margini per tutelare da eventuale inadempimento della controparte ed il meccanismo a cascata per futures con consegne più lunghe del mese.

1.4 Mercati energetici

Un *mercato energetico* è un mercato regolamentato in cui sono scambiati contratti su commodity energetiche. Questo si compone a sua volta di due sottomercati, un *mercato energetico a pronti* ed un *mercato energetico a termine*. Uno dei più importanti esempi in Europa è costituito da *EEX (European Energy Exchange)*, con sede a Lipsia, nel quale è possibile scambiare contratti su elettricità, gas naturale, carbone e diritti di emissione dell'anidride carbonica. Il mercato a pronti, in questo caso, è composto dal mercato *EPEX Spot* per l'elettricità e dai mercati *EEX Spot Market* per il gas naturale ed i diritti di emissione. Il mercato a termine, invece, si suddivide nei mercati *EEX Derivatives Market* per l'elettricità, il gas naturale, il carbone ed i diritti di emissione. I futures elettrici scambiati, in particolare, sono relativi alle aree Germania/Austria, Francia e Svizzera, mentre i futures su gas naturale prevedono la consegna nelle reti associate agli hub NCG e GASPOOL.

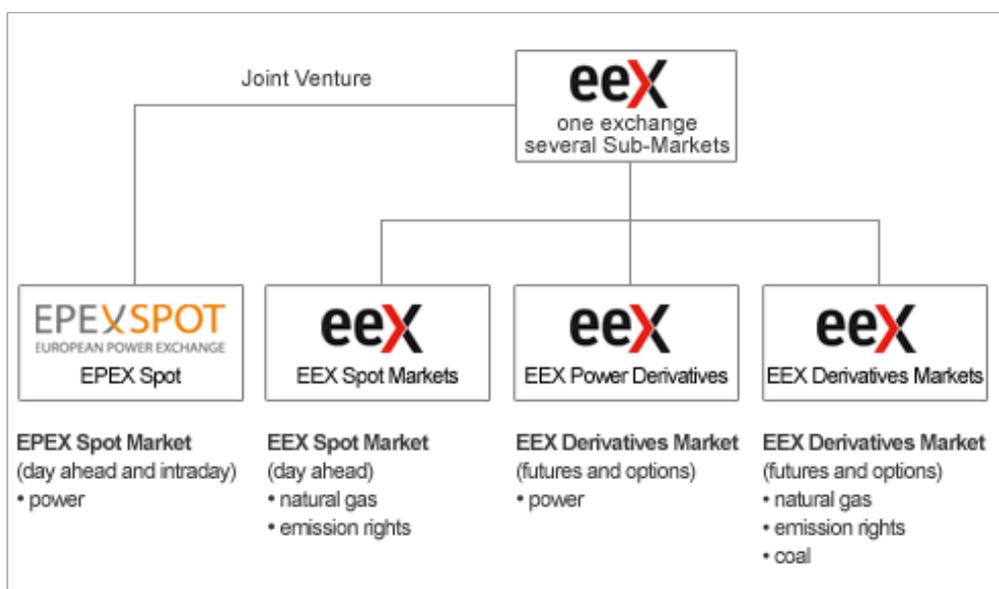


Figura 1.12: Struttura del mercato energetico EEX. (Fonte: EEX)

L'obiettivo del capitolo 3 consisterà nello studiare due possibili modelli stocastici per un mercato energetico a termine composto da futures scritti su commodity di *flusso*, come elettricità o gas naturale, calibrandone i parametri sui prezzi di chiusura osservati in un intervallo di tempo. In particolare cercheremo di fornire una buona approssimazione della volatilità dei contratti e delle correlazioni tra di essi. Nella Figura 1.13 mostriamo un esempio dei dati su cui eseguiremo la calibrazione, i prezzi

di chiusura del mercato costituito dai futures elettrici mensili Phelix base-load e dai futures su gas naturale NCG con consegne in *gen-2013*, *feb-2013*, *mar-2013* osservati dal 01-ott-2012 al 21-dic-2012. Poiché in ogni giornata di negoziazione di EEX Derivatives Market sono scambiati i futures Phelix base-load scritti sui 6 mesi successivi ed i futures NCG scritti sui 3 mesi successivi, mentre siamo in grado di osservare nel primo caso i contratti *gen-2013*, *feb-2013*, *mar-2013* nell'intervallo desiderato, non lo siamo invece nel secondo. Mostreremo tuttavia nel paragrafo 3.5 come utilizzare i prezzi dei contratti trimestrali ed annuali per interpolare quelli mensili ed ottenere così il grafico di destra. Poiché ci occuperemo soltanto di *prezzi*

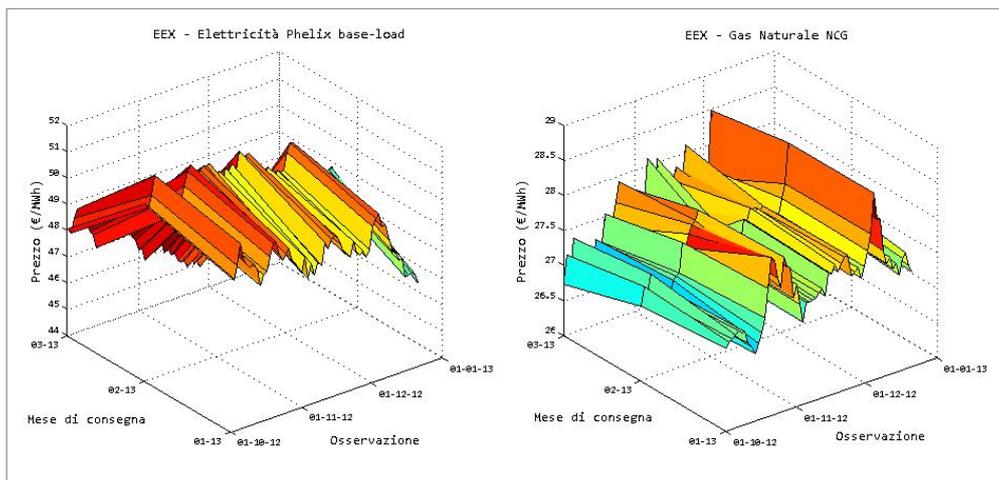


Figura 1.13: Esempio di mercato energetico a termine osservato dal 01-ott-2012 al 21-dic-2012.

di chiusura, nel seguito della trattazione ci riferiremo a questi più brevemente con l'espressione *prezzi*. I nostri modelli saranno chiamati a soddisfare due importanti proprietà sperimentali dei futures energetici:

- *effetto Samuelson*: la volatilità di un futures è decrescente rispetto al tempo alla consegna, per cui è tanto più piccola quanto più lontano è il periodo di consegna. Il decadimento, inoltre, è esponenziale e la volatilità tende ad un valore costante strettamente positivo al convergere all'infinito del tempo alla consegna. Samuelson [Sam65] spiega questo comportamento suggerendo che le informazioni più importanti relative al contratto diventano note solo in prossimità della scadenza e, quindi, non influenzano futures con consegne lontane nel tempo, che manifestano piuttosto una volatilità costante, caratteristica della commodity. Eventi climatici che modificano la domanda di gas naturale o problemi temporanei nella rete di trasmissione dell'elettricità, ad esempio, modificheranno soltanto i prezzi spot ed i prezzi dei futures con consegne vicine. Quelli con consegne lontane, invece, manifesteranno una volatilità a lungo termine che dipende da altri fattori, come innovazioni tecnologiche o equilibri geopolitici che possono influenzare il valore della commodity.
- *stagionalità della volatilità*: le caratteristiche climatiche e sociali della regione in cui è consegnata la commodity sono tra i fattori principali che guidano i suoi prezzi e presentano delle periodicità sia sul breve che sul medio termine. Nel

caso del gas naturale, ad esempio, la domanda relativa alle utenze residenziali dipende fortemente dalla temperatura, che varia su base stagionale. Poiché queste ciclicità si riflettono sul flusso di informazioni che determina i prezzi dei futures, ci si aspetta che anche la volatilità le manifesti.

Definiamo la volatilità storica dei log-rendimenti di un futures energetico e vediamo un esempio concreto delle precedenti proprietà. Consideriamo un mercato energetico a termine e fissiamo una commodity di flusso. Indichiamo, per ogni giornata di contrattazione t , con $\{f_i(t)\}_{i=1,\dots,m}$ i prezzi osservati in t dei futures su di essa con consegne negli intervalli $\{[\tau_i, \theta_i]\}_{i=1,\dots,m}$. Se $t_0 < \dots < t_N$ sono le date di osservazione, chiameremo *log-rendimento giornaliero* del futures sulla commodity considerata con consegna in $[\tau_i, \theta_i]$ in t_l il valore

$$\Delta x_i(t_l) := \log \left(\frac{f_i(t_l)}{f_i(t_{l-1})} \right)$$

per ogni $i = 1, \dots, m$ ed $l = 1, \dots, N$. Dati $l \geq n \geq 1$, definiamo la *volatilità storica ad n giorni* del log-rendimento di f_i in t_l come

$$s_i(t_l) := \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{p=l-n+1}^l (\Delta x_i(t_p) - m_{il})^2}$$

dove $m_{il} := \frac{1}{n} \sum_{p=l-n+1}^l \Delta x_i(t_p)$, per ogni $i = 1, \dots, m$. Per rendere più leggibile il valore della volatilità dei log-rendimenti giornalieri, si utilizza in genere la *volatilità annualizzata*, definita come $s_i^a := \sqrt{252} s_i$ per ogni $i = 1, \dots, m$, la volatilità che avrebbe il log-rendimento annuo se tutti i log-rendimenti giornalieri fossero uguali a quello considerato. D'ora in avanti con s_i^a indichiamo la volatilità annualizzata storica a 20 giorni. Per ogni data di osservazione t , si chiama *struttura a termine della volatilità storica a 20 giorni* in t dei futures sulla commodity fissata la funzione che associa al tempo alla consegna $\tau_i - t$ la volatilità del futures corrispondente $s_i^a(t)$, per ogni $i = 1, \dots, m$.

Concentriamoci sui futures su gas naturale mensili Henry Hub del mercato statunitense NYMEX e notiamo che manifestano le proprietà descritte in precedenza. Ogni giorno sono scambiati i contratti relativi ai 36 mesi successivi, quindi possiamo osservare dal 03-gen-2012 al 27-dic-2012 i 24 futures *gen-2013*, \dots , *dic-2014*, i cui prezzi sono rappresentati in Figura 1.14. Il grafico di sinistra nella Figura 1.15 mostra come la volatilità storica a 20 giorni del futures *gen-2013* cresca al trascorrere del tempo, quando aumentano le informazioni relative al mese di consegna, in accordo con l'effetto Samuelson. Il grafico di destra, invece, rappresenta la struttura a termine della volatilità storica a 20 giorni osservata il 03-dic-2012. Anche in questo caso è evidente come le consegne più lontane siano meno volatili di quelle vicine. Emerge inoltre un debole andamento stagionale, poiché in corrispondenza dei contratti con consegne nei mesi invernali la volatilità decresce meno rapidamente rispetto a quanto accade per quelli con consegne nei mesi estivi.

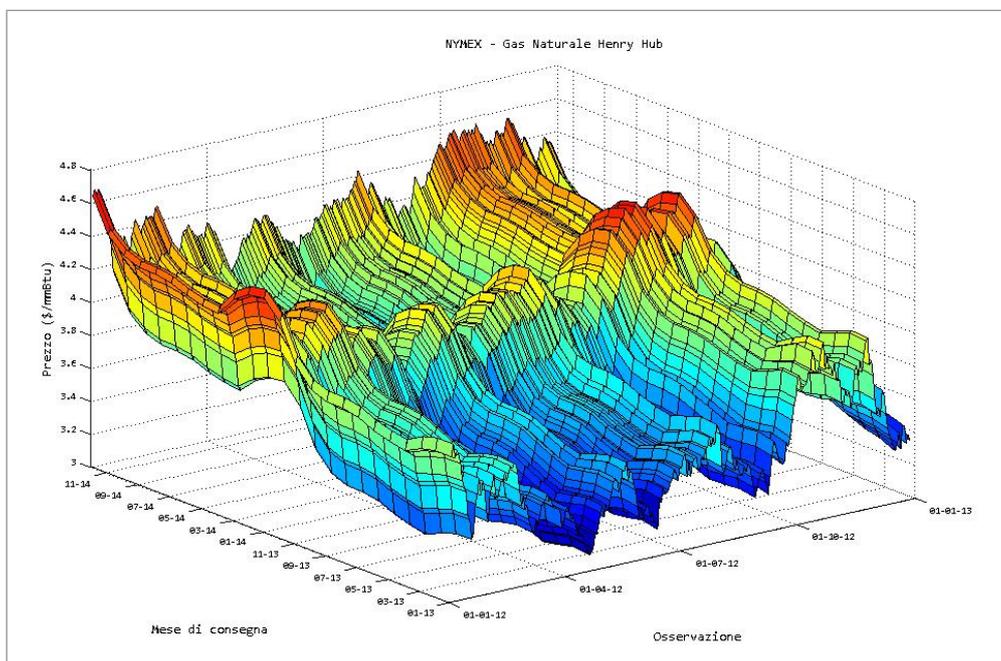


Figura 1.14: Prezzi dei 24 futures mensili Henry Hub con consegne da *gen-2013* a *dic-2014* osservati dal 03-gen-2012 al 27-dic-2012.

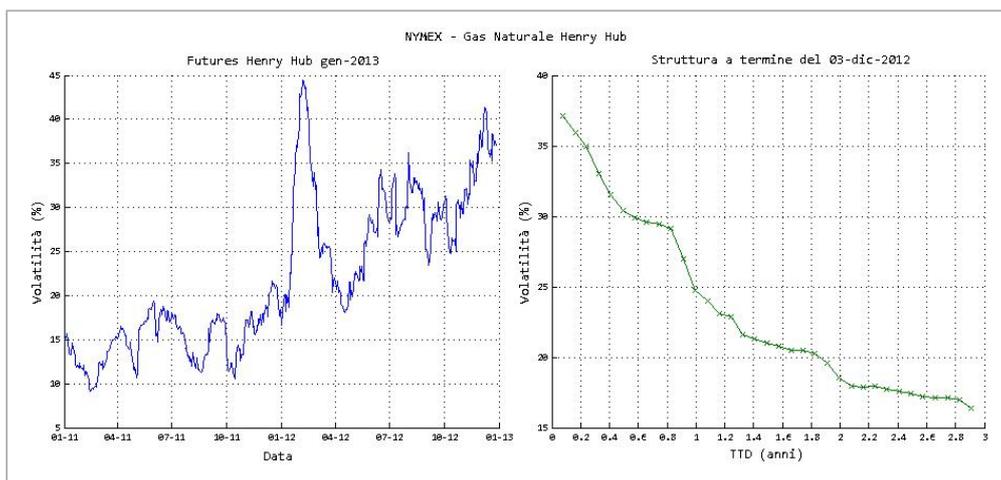


Figura 1.15: A sinistra, volatilità storica a 20 giorni dei log-rendimenti dei futures *gen-2013*. A destra, struttura a termine della volatilità osservata il 03-dic-2012.

Capitolo 2

Preliminari di analisi stocastica

In questo capitolo introduciamo i principali strumenti che saranno utilizzati in seguito per studiare i modelli di mercati energetici a termine di cui ci occuperemo. Nel primo paragrafo presentiamo il concetto di vettore di moti browniani correlati, centrale nella nostra analisi. Nei due successivi ricordiamo alcuni risultati fondamentali del calcolo integrale secondo Itô ed, al termine del terzo paragrafo, dimostriamo un corollario del Teorema di Girsanov che sarà applicato nel capitolo 4. Nel quarto paragrafo introduciamo la nozione di processo stocastico cointegrato.

2.1 Moti browniani

Un moto browniano è nato come modello probabilistico del moto di una particella in un fluido e consiste in un processo stocastico reale definito nell'intervallo $[0, \infty)$ inizialmente nullo, con incrementi indipendenti stazionari gaussiani centrati e traiettorie continue. Più precisamente:

Definizione 2.1. Sia (Ω, \mathcal{F}, P) uno spazio di probabilità. Il processo stocastico reale $W = \{W_t\}_{t \geq 0}$ è detto *moto browniano* su (Ω, \mathcal{F}, P) se

B1 $W_0 = 0$ q.c.

B2 Per ogni $n \geq 1$ e $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$, le variabili casuali $\{W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\}_{i=1, \dots, n}$ sono indipendenti

B3 Per ogni $0 \leq t < s$, si ha $W_s - W_t \sim \mathcal{N}(0, s - t)$

B4 L'applicazione $t \mapsto W_t$ è continua q.c., i.e. esiste $A \in \mathcal{F}$ tale che $P(A) = 1$ ed $A \subseteq \{\omega \in \Omega \mid t \mapsto W_t(\omega) \text{ è continua} \}$

Nella definizione abbiamo utilizzato l'abbreviazione $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ per significare che la variabile casuale X ha distribuzione normale di media μ e varianza σ^2 . Provare l'esistenza di un moto browniano non è banale e, per una dimostrazione, si può vedere Karatzas et al. [KS98]. Indichiamo, per ogni $n, m \geq 1$, con \mathbb{R}_m^n l'algebra della matrici reali $n \times m$ e con $\mathbb{R}^n := \mathbb{R}_1^n$, $\mathbb{R}_m := \mathbb{R}_m^1$ rispettivamente lo spazio dei vettori colonna n -dimensionali e dei vettori riga m -dimensionali. Possiamo generalizzare il concetto di moto browniano considerando il processo che rappresenta il moto in uno spazio d -dimensionale con la seguente:

Definizione 2.2. Sia (Ω, \mathcal{F}, P) uno spazio di probabilità. Il processo stocastico $\mathbf{W} = (W^1 = \{W_t^1\}_{t \geq 0}, \dots, W^d = \{W_t^d\}_{t \geq 0})^\top$ a valori in \mathbb{R}^d è detto *moto browniano d -dimensionale* su (Ω, \mathcal{F}, P) se le sue componenti W^1, \dots, W^d sono moti browniani reali indipendenti.

Il nostro approccio consisterà nell'utilizzare moti browniani per rappresentare i fattori di rischio che determinano il comportamento dei prezzi dei futures. Poiché queste sorgenti di incertezza, in generale, non sono tra loro indipendenti, dobbiamo estendere ulteriormente la nozione di moto browniano d -dimensionale al caso in cui le componenti abbiano coefficienti di correlazione non nulli. Presentiamo la definizione e rimandiamo a Björk [Bjö04] per una dimostrazione delle principali proprietà.

Definizione 2.3. Dato (Ω, \mathcal{F}, P) uno spazio di probabilità, diciamo che il processo stocastico $\mathbf{W} = (W^1, \dots, W^d)^\top$ a valori in \mathbb{R}^d è un *vettore d -dimensionale di moti browniani correlati* o *moto browniano d -dimensionale correlato* su (Ω, \mathcal{F}, P) se esistono $\overline{\mathbf{W}} = (\overline{W}^1, \dots, \overline{W}^d)^\top$ un moto browniano d -dimensionale e Γ una matrice reale invertibile $d \times d$ tali che:

$$C1 \quad \forall i \in \underline{d}: |\Gamma^i| = 1$$

$$C2 \quad \mathbf{W} = \Gamma \overline{\mathbf{W}}, \text{ i.e. } \forall i \in \underline{d}: W^i = \sum_{j=1}^d \Gamma_j^i \overline{W}^j$$

dove Γ^i indica la i -esima riga di Γ e $|\cdot|$ è la norma euclidea su \mathbb{R}_d . Diciamo infine che il processo stocastico $\mathbf{W} = (W_i^h)_{i=1, \dots, n}^{h=1, \dots, m}$ a valori nelle matrici \mathbb{R}_n^m è un *moto browniano $(m \times n)$ -dimensionale correlato* su (Ω, \mathcal{F}, P) se il vettore colonna che si ottiene linearizzando per righe \mathbf{W} è un moto browniano mn -dimensionale correlato su (Ω, \mathcal{F}, P) .

Osserviamo come la richiesta relativa all'invertibilità della matrice Γ sia naturale. Per la condizione C2 infatti sappiamo che $W^h = \Gamma_1^h \overline{W}^1 + \Gamma_2^h \overline{W}^2 + \dots + \Gamma_d^h \overline{W}^d$ per ogni $h \in \underline{d}$. La matrice Γ è invertibile esattamente quando i d vettori dei coefficienti di queste combinazioni lineari sono linearmente indipendenti ovvero non esistono sorgenti di rischio \overline{W}^h per qualche $h = 1, \dots, d$ linearmente dipendenti.

Se \mathbf{W} è un vettore d -dimensionale di moti browniani correlati, indicheremo con $\text{Cor}(\mathbf{W}) := (\text{Cor}(W^i, W^j))_{i,j=1, \dots, d}$ la *matrice di correlazione* di \mathbf{W} . Si può provare che $\text{Cor}(\mathbf{W}) = \Gamma \Gamma^\top$ è una matrice simmetrica e semidefinita positiva. Se $\text{Cor}(\mathbf{W}) = \Lambda \Lambda^\top$ per qualche altra matrice Λ , inoltre, siamo in grado di trovare un vettore $\widetilde{\mathbf{W}} := (\widetilde{W}^1, \dots, \widetilde{W}^d)^\top$ di moti browniani reali indipendenti tali che $\mathbf{W} = \Lambda \widetilde{\mathbf{W}}$. Utilizzando la decomposizione di Cholesky, dunque, possiamo ridurci a considerare sempre Γ matrice triangolare inferiore, quando sia necessario. Ricordiamo l'enunciato della proposizione, mentre si veda Comincioli [Com04] per una dimostrazione.

Proposizione 2.4 (Decomposizione di Cholesky). *Se A è una matrice reale $n \times n$ simmetrica e semidefinita positiva, allora esiste una matrice reale $n \times n$ triangolare inferiore L , con elementi non negativi sulla diagonale principale, tale che $A = LL^\top$. Se A è definita positiva, la matrice L con queste proprietà è anche unica.*

2.2 Integrale stocastico

D'ora in avanti fissiamo $\Omega := (\Omega, \mathcal{F}, P)$ uno spazio di probabilità ed $I = [T_0, T_1]$ o $I = [T_0, \infty)$ un intervallo reale con $T_0 \geq 0$ su cui saranno definiti i processi stocastici di cui ci occuperemo. Introduciamo i concetti fondamentali relativi all'integrale stocastico, rimandando a Lamberton et al. [LL08], Pascucci [Pas08] e Björk [Bjö04] per le dimostrazioni.

Ricordiamo che $\underline{\mathcal{F}} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$ è una *filtrazione* su Ω se è una famiglia crescente di sotto- σ -algebre di \mathcal{F} . In questo caso chiamiamo $(\Omega, \mathcal{F}, \underline{\mathcal{F}}, P)$ spazio di probabilità *filtrato*. Intuitivamente \mathcal{F}_t rappresenta l'informazione disponibile nell'istante t , gli eventi per i quali si dispone di una misura della probabilità del loro verificarsi al tempo t . Dato un generico processo stocastico $X = \{X_t\}_{t \in I}$, un esempio importante si ottiene considerando la famiglia definita da $\mathcal{F}_t^X := \sigma(\{X_s\}_{T_0 \leq s \leq t})$, per ogni $t \in I$, detta *filtrazione naturale* associata ad X . Questa contiene, per ogni $t \in I$, la storia del processo X fino all'istante t , gli eventi esprimibili come funzione delle variabili X_s , con $s \leq t$.

Spesso si rivela utile fare alcune ipotesi sullo spazio di probabilità filtrato, che enunciamo. Data $\underline{\mathcal{F}}$ una filtrazione su Ω , indichiamo con $\underline{\mathcal{F}}_+$ la famiglia definita da $\mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$ per ogni $t \in [T_0, T_1)$ e $\mathcal{F}_{T_1+} := \mathcal{F}_{T_1}$ se $T_1 < \infty$, contenente le σ -algebre degli eventi immediatamente conoscibili dopo l'istante t , al variare di t in I . Si dice che $\underline{\mathcal{F}}$ è *continua a destra* se, per ogni $t \in I$, si ha $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$. Indicati con $\mathcal{N} := \{A \in \mathcal{F} \mid P(A) = 0\}$ l'insieme degli eventi *trascurabili* di Ω , possiamo così definire:

Definizione 2.5. Una filtrazione $\underline{\mathcal{F}}$ di Ω si dice *filtrazione standard* se $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{F}_{T_0}$ ed $\underline{\mathcal{F}}$ è continua a destra. In questo caso $(\Omega, \mathcal{F}, \underline{\mathcal{F}}, P)$ è detto *spazio di probabilità filtrato standard*.

Un processo è detto *adattato* ad una filtrazione se le informazioni che fornisce in ogni istante sono già contenute in quelle codificate dalla filtrazione.

Definizione 2.6. Data $\underline{\mathcal{F}}$ una filtrazione su Ω , il processo stocastico reale $X = \{X_t\}_{t \in I}$ si dice *adattato ad $\underline{\mathcal{F}}$* se X_t è \mathcal{F}_t -misurabile per ogni $t \in I$, ovvero l'applicazione $X_t: (\Omega, \mathcal{F}_t) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ è misurabile per ogni $t \in I$. Ciò equivale a chiedere che $\mathcal{F}_t^X \subseteq \mathcal{F}_t$ per ogni $t \in I$.

La definizione di processo stocastico reale $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ implica non solo che $X_t = X(t, \cdot)$ sia una variabile casuale per ogni $t \in I$, ma la condizione più forte di misurabilità nella coppia di variabili (t, ω) . In modo analogo introduciamo una proprietà più forte dell'adattabilità:

Definizione 2.7. Data $\underline{\mathcal{F}}$ una filtrazione su Ω , il processo stocastico reale $X = \{X_t\}_{t \in I}$ si dice *progressivamente misurabile* rispetto ad $\underline{\mathcal{F}}$ se $X_{|[T_0, t] \times \Omega}$ è $(\mathcal{B}([T_0, t]) \otimes \mathcal{F}_t)$ -misurabile per ogni $t \in I$, i.e. l'applicazione

$$X: ([T_0, t] \times \Omega, \mathcal{B}([T_0, t]) \otimes \mathcal{F}_t) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$$

è misurabile per ogni $t \in I$.

Si può dimostrare che ogni processo progressivamente misurabile è misurabile ed adattato. Quando si lavora in uno spazio di probabilità filtrato, è utile rafforzare il concetto di moto browniano richiedendo che le informazioni fornite dal processo siano coerenti con quelle della filtrazione dello spazio.

Definizione 2.8. Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \underline{\mathcal{F}} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ uno spazio di probabilità filtrato. Il processo stocastico reale $W = \{W_t\}_{t \geq 0}$ è detto $\underline{\mathcal{F}}$ -moto browniano su (Ω, \mathcal{F}, P) se

- B1 $W_0 = 0$ q.c.
- B2 Per ogni $0 \leq t < s$, la variabile casuale $W_s - W_t$ è indipendente da \mathcal{F}_t e $W_s - W_t \sim \mathcal{N}(0, s - t)$
- B3 W è adattato ad $\underline{\mathcal{F}}$
- B4 L'applicazione $t \mapsto W_t$ è continua q.c.

La richiesta B3 è equivalente a chiedere che la filtrazione naturale di W sia contenuta nella filtrazione dello spazio. Nel caso in cui si verifichi l'uguaglianza $\mathcal{F}_t^W = \mathcal{F}_t$ per ogni $t \geq 0$, si ritrova la Definizione 2.1, per cui ogni moto browniano W è anche un $\underline{\mathcal{F}}^W$ -moto browniano.

D'ora in avanti con $I = [T_0, T_1]$ indicheremo un intervallo reale compatto con $T_0 \geq 0$. Il prossimo passo consiste nell'introdurre una classe di processi per i quali sia possibile considerare il concetto di integrale stocastico. Per snellire la notazione, indichiamo uno spazio di probabilità filtrato standard solamente con $\Omega := (\Omega, \mathcal{F}, \underline{\mathcal{F}} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$, quando ciò non comporti rischi di ambiguità.

Definizione 2.9. Sia Ω uno spazio di probabilità filtrato standard. Diremo che un processo stocastico reale $u = \{u_t\}_{t \in I}$ appartiene alla classe $\mathbb{L}^2(I, \Omega)$ se

- L1 u è progressivamente misurabile rispetto ad $\underline{\mathcal{F}}$
- L2 $u \in L^2(I \times \Omega)$, i.e. esiste finito l'integrale $\int_I \mathbb{E}(u_t^2) dt = \|u\|_{L^2(I \times \Omega)}^2$

Osserviamo che $\mathbb{L}^2(I, \Omega)$ è un sottospazio chiuso di $L^2(I \times \Omega)$. Definiremo l'integrale stocastico di $u \in \mathbb{L}^2(I, \Omega)$ come il limite in $L^2(\Omega)$ di una successione di integrali di processi semplici che approssimano u in $L^2(I \times \Omega)$. A questo scopo introduciamo:

Definizione 2.10. Siano Ω uno spazio di probabilità filtrato standard e W un $\underline{\mathcal{F}}$ -moto browniano su Ω . Chiamiamo u processo *semplice* su Ω se $u \in \mathbb{L}^2(I, \Omega)$ ed

$$u = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{[t_{i-1}, t_i)}$$

con $n \geq 1$, $T_0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T_1$, $\chi_{[t_{i-1}, t_i)}$ funzione indicatrice di $[t_{i-1}, t_i)$ ed a_i variabile casuale su (Ω, \mathcal{F}, P) , per ogni $i = 1, \dots, n$. Indichiamo con $\text{Smp}(I, \Omega)$ la classe dei processi semplici su Ω e, dato $u \in \text{Smp}(I, \Omega)$, definiamo

$$\int_I u_t dW_t := \sum_{i=1}^n a_i (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})$$

l'integrale stocastico (di Itô) di u in I .

Una conseguenza importante di $u = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{[t_{i-1}, t_i)} \in \mathbb{L}^2(I, \Omega)$ è che a_i deve essere $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ -misurabile e di quadrato sommabile, ovvero $a_i \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{t_{i-1}}, P)$ per ogni $i = 1, \dots, n$. La proprietà fondamentale dell'integrale stocastico di processi semplici che consente di estendere la definizione anche a generici processi $\mathbb{L}^2(I, \Omega)$ è l'isometria di Itô. Se $u \in \text{Smp}(I, \Omega)$, allora

$$\left\| \int_I u_t dW_t \right\|_{L^2(\Omega)} = \|u\|_{L^2(I \times \Omega)}$$

Ciò assicura che, se $\{u^n\} \subseteq \text{Smp}(I, \Omega)$ è una successione di Cauchy di $L^2(I \times \Omega)$, allora $\{\int_I u_t^n dW_t\}$ è una successione di Cauchy di $L^2(\Omega)$. Sfruttando dunque la densità dei processi semplici in $\mathbb{L}^2(I, \Omega)$, saremo in grado di procedere come desiderato. Vale infatti:

Proposizione 2.11 (Densità di $\text{Smp}(I, \Omega)$ in $\mathbb{L}^2(I, \Omega)$). *Se Ω uno spazio di probabilità filtrato standard ed $u \in \mathbb{L}^2(I, \Omega)$, allora esiste $\{u^n\}_{n \geq 0} \subseteq \text{Smp}(I, \Omega)$ tale che*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u^n - u\|_{L^2(I \times \Omega)} = 0$$

Questo risultato, insieme alla completezza di $L^2(\Omega)$ ed alle considerazioni precedenti, garantiscono che la prossima definizione sia ben posta:

Definizione 2.12. Siano Ω uno spazio di probabilità filtrato standard e W un \mathcal{F} -moto browniano su Ω . Dati $u \in \mathbb{L}^2(I, \Omega)$ ed $\{u^n\}_{n \geq 0} \subseteq \text{Smp}(I, \Omega)$ tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} u^n = u$ in $L^2(I \times \Omega)$, definiamo

$$\int_I u_t dW_t := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I u_t^n dW_t \quad \text{in } L^2(\Omega)$$

l'integrale stocastico di u in I . Se $a, b \in I$ ed $a < b$, poniamo

$$\int_a^b u_t dW_t := \int_I u_t \chi_{[a, b)}(t) dW_t$$

l'integrale stocastico di u in $[a, b]$.

Si dimostra che *linearità* ed *additività* dell'integrale stocastico di processi semplici, insieme con l'isometria di Itô, continuano a valere anche nel caso generale. Enunciamo le proprietà che ci saranno utili nel seguente capitolo:

Proposizione 2.13 (Proprietà dell'integrale stocastico). *Se Ω è uno spazio di probabilità filtrato standard, W un \mathcal{F} -moto browniano su Ω ed $u, v \in \mathbb{L}^2(I, \Omega)$, allora*

$$\mathbb{E} \left(\int_I u_t dW_t \int_I v_t dW_t \right) = \mathbb{E} \left(\int_I u_t v_t dt \right) \tag{2.1}$$

$$\left\| \int_I u_t dW_t \right\|_{L^2(\Omega)} = \|u\|_{L^2(I \times \Omega)} \tag{2.2}$$

$$\mathbb{E}\left(\int_I u_t dW_t\right) = 0 \quad (2.3)$$

$$\text{Var}\left(\int_I u_t dW_t\right) = \mathbb{E}\left(\int_I u_t^2 dt\right) \quad (2.4)$$

$$\text{Cov}\left(\int_I u_t dW_t, \int_I v_t dW_t\right) = \mathbb{E}\left(\int_I u_t v_t dt\right) \quad (2.5)$$

In particolare, l'equazione (2.2) consente di definire l'isometria $\Phi(u) := \int_I u_t dW_t$ da $\mathbb{L}^2(I, \Omega)$ in $L^2(\Omega)$, il che giustifica la scelta dell'espressione utilizzata per indicare questa uguaglianza tra norme.

Una martingala su uno spazio filtrato è un processo stocastico reale adattato alla filtrazione il cui valore, in ogni istante t , coincide con il suo valore atteso in un istante futuro in base all'informazione disponibile in t . Intuitivamente, dunque, una martingala è un processo le cui traiettorie, in media, non presentano alcun trend.

Definizione 2.14. Dato Ω uno spazio di probabilità filtrato, diciamo che un processo stocastico $M = \{M_t\}_{t \in I}$ è una *P-martingala* su Ω o una *martingala* su $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}, P)$ se

- M1 $\forall t \in I : M_t \in L^1(\Omega)$
- M2 M è adattato ad \mathcal{F}
- M3 $\forall t < s \in I : \mathbb{E}^P(M_s | \mathcal{F}_t) = M_t$

Si dimostra facilmente che $\mathbb{E}^P(M_{t+\delta} - M_t | \mathcal{F}_t) = 0$ per ogni $t \in I$ e $\delta > 0$, perciò gli incrementi futuri sono imprevedibili e non è attesa alcuna tendenza per il futuro. Un esempio di martingala che incontreremo in seguito è costituito dal processo aspettazione condizionata di una variabile casuale $L^1(\Omega)$ rispetto alle σ -algebre della filtrazione.

Proposizione 2.15. Se Ω è uno spazio di probabilità filtrato ed $X \in L^1(\Omega)$, allora il processo $\{\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_t)\}_{t \in I}$ è una *P-martingala* su Ω .

Si può dimostrare che, se $u \in \mathbb{L}^2(I, \Omega)$, il processo $\{\int_{T_0}^t u_s dW_s\}_{t \in I}$ è una martingala su Ω . Più precisamente:

Proposizione 2.16. Se $\Omega = (\Omega, \mathcal{F}, \underline{\mathcal{F}} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ è uno spazio di probabilità filtrato standard, W un $\underline{\mathcal{F}}$ -moto browniano su Ω , $u \in \mathbb{L}^2(I, \Omega)$ e definiamo il processo

$$X_t := \int_{T_0}^t u_s dW_s$$

per ogni $t \in I$, allora X è una *P-martingala* su Ω .

2.3 Processi di Itô

Indichiamo con $\Omega := (\Omega, \mathcal{F}, \underline{\mathcal{F}} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ uno spazio di probabilità filtrato standard e con $I = [T_0, T_1]$ un intervallo reale compatto con $T_0 \geq 0$. Per definire i processi di Itô, introduciamo le classi $\mathbb{L}_{\text{loc}}^p(I, \Omega)$. D'ora in avanti utilizziamo il simbolo $\|\cdot\|$ per rappresentare la norma euclidea su un generico spazio vettoriale o matriciale. Anche in questo caso rimandiamo per le dimostrazioni delle proprietà elementari a Lamberton et al. [LL08], Pascucci [Pas08] ed Øksendal [Øks03].

Definizione 2.17. Siano Ω uno spazio di probabilità filtrato standard e $p \geq 1$. Diremo che un processo stocastico reale $u = \{u_t\}_{t \in I}$ appartiene alla classe $\mathbb{L}_{\text{loc}}^p(I, \Omega)$ se

- L1 u è progressivamente misurabile rispetto ad $\underline{\mathcal{F}}$
- L2 $\int_I |u_t|^p dt < \infty$ q.c.

Per la disuguaglianza di Hölder si dimostra che, se $1 \leq p \leq q$, allora $\mathbb{L}_{\text{loc}}^q(\Omega) \subseteq \mathbb{L}_{\text{loc}}^p(I, \Omega)$. In particolare, dunque, $\mathbb{L}^2(I, \Omega) \subseteq \mathbb{L}_{\text{loc}}^2(I, \Omega) \subseteq \mathbb{L}_{\text{loc}}^1(I, \Omega)$. È possibile estendere la definizione di integrale stocastico introdotta per processi $u \in \mathbb{L}^2(I, \Omega)$ anche al caso $u \in \mathbb{L}_{\text{loc}}^2(I, \Omega)$, ma non insistiamo su questo poiché non sarà utilizzata nei modelli di cui ci occuperemo nel prossimo capitolo. Abbiamo ora tutti gli strumenti per definire processi di Itô:

Definizione 2.18. Dati Ω uno spazio di probabilità filtrato standard e W un $\underline{\mathcal{F}}$ -moto browniano su Ω , diciamo che un processo stocastico $X = \{X_t\}_{t \in I}$ è un *processo di Itô* su Ω definito in I rispetto a W se per ogni $t \in I$

$$X_t = X_{T_0} + \int_{T_0}^t \mu_s ds + \int_{T_0}^t \sigma_s dW_s$$

dove X_{T_0} è una variabile casuale \mathcal{F}_{T_0} -misurabile, $\mu \in \mathbb{L}_{\text{loc}}^1(I, \Omega)$ e $\sigma \in \mathbb{L}_{\text{loc}}^2(I, \Omega)$. Un'abbreviazione della precedente espressione usata comunemente è la forma differenziale

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t \quad \text{in } I$$

Questa notazione consente di definire il processo X in modo univoco, una volta assegnato il valore iniziale X_{T_0} . I processi μ e σ sono detti rispettivamente *coefficiente di drift* (o semplicemente *drift*) e *coefficiente di diffusione* di X .

Intuitivamente il drift imprime la direzione al processo X , mentre il coefficiente di diffusione fornisce un contributo stocastico alla sua evoluzione. Si può dimostrare che la rappresentazione differenziale di un processo di Itô è unica, nel senso che μ e σ sono univocamente determinati a meno di processi quasi ovunque uguali su $I \times \Omega$.

Per i nostri scopi è importante osservare che, se un processo di Itô è una martingala, il drift deve essere nullo, come ci aspettiamo per la Proposizione 2.16. In altre parole si può dimostrare:

Proposizione 2.19. Siano Ω uno spazio di probabilità filtrato standard, W un $\underline{\mathcal{F}}$ -moto browniano su Ω ed X un processo di Itô. Se X è una martingala, allora $\mu = 0$ quasi ovunque in $I \times \Omega$.

Uno strumento fondamentale nello studio dei mercati energetici che condurremo è la covarianza quadratica di due processi di Itô. Indichiamo l'insieme delle *partizioni* dell'intervallo $I = [T_0, T_1]$ con

$$\text{Prt}(I) := \{\pi = (t_0, \dots, t_N) \in \mathbb{R}_{N+1} \mid N \geq 1, T_0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T_1\}$$

e con $|\pi| := \max_{l \in \underline{N}} (t_l - t_{l-1})$ l'*ampiezza* o *passo* della partizione π . Rappresentiamo l'insieme delle partizioni *equispaziate* di passo $\varepsilon > 0$ con

$$\text{Prt}(I, \varepsilon) := \{\pi = (t_0, \dots, t_N) \in \text{Prt}(I) \mid \forall l \in \underline{N} : t_l - t_{l-1} = \varepsilon\}$$

Abbiamo ciò che occorre per definire sia il processo covarianza quadratica di X ed Y che il processo variazione quadratica di X , quando X, Y siano processi di Itô.

Definizione 2.20. Dati Ω uno spazio di probabilità filtrato standard, W un \mathcal{F} -moto browniano su Ω ed X, Y due processi di Itô, chiamiamo *covarianza quadratica* di X ed Y rispetto ad Ω il processo definito ponendo, per ogni $t \in I$

$$\langle X, Y \rangle_t := \lim_{\substack{|\pi| \rightarrow 0 \\ \pi \in \text{Pr}([T_0, t])}} \sum_{l=1}^N (X_{t_l} - X_{t_{l-1}}) (Y_{t_l} - Y_{t_{l-1}}) \quad \text{q.c.}$$

Definiamo inoltre *variazione quadratica* di X rispetto ad Ω il processo che otteniamo ponendo, per ogni $t \in I$

$$\langle X \rangle_t := \langle X, X \rangle_t = \lim_{\substack{|\pi| \rightarrow 0 \\ \pi \in \text{Pr}([T_0, t])}} \sum_{l=1}^N (X_{t_l} - X_{t_{l-1}})^2 \quad \text{q.c.}$$

Osserviamo che variazione e covarianza quadratica di processi di Itô si possono esprimere in forma integrale.

Proposizione 2.21 (Proprietà caratteristica della (co)variazione quadratica). *Se Ω è uno spazio di probabilità filtrato standard, W è un \mathcal{F} -moto browniano su Ω ed X, Y sono due processi di Itô con decomposizioni $dX_t = \mu_t^X dt + \sigma_t^X dW_t$ e $dY_t = \mu_t^Y dt + \sigma_t^Y dW_t$, allora per ogni $t \in I$*

$$\begin{aligned} \langle X, Y \rangle_t &= \int_{T_0}^t \sigma_s^X \sigma_s^Y ds \\ \langle X \rangle_t &= \int_{T_0}^t (\sigma_s^X)^2 ds \end{aligned}$$

ovvero, in forma differenziale, $d\langle X, Y \rangle_t = \sigma_t^X \sigma_t^Y dt$ e $d\langle X \rangle_t = (\sigma_t^X)^2 dt$.

In particolare, dunque, per il moto browniano considerato W la sua variazione quadratica risulta, in forma differenziale, $d\langle W \rangle_t = dt$. Si dimostra che la covarianza quadratica è una forma bilineare sui processi di Itô, come emerge dalla seguente:

Proposizione 2.22. *Siano Ω uno spazio di probabilità filtrato standard e W un \mathcal{F} -moto browniano su Ω . Se X, Y, Z sono processi di Itô ed $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora*

- (i). $\langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle$
- (ii). $\langle \alpha X + \beta Y, Z \rangle = \alpha \langle X, Z \rangle + \beta \langle Y, Z \rangle$
- (iii). $|\langle X, Y \rangle|^2 \leq \langle X \rangle \langle Y \rangle$ (disuguaglianza di Schwarz)
- (iv). $\langle X, Y \rangle = \frac{1}{2} [\langle X + Y \rangle - \langle X \rangle - \langle Y \rangle]$ (identità di polarizzazione)

Processi di Itô scalari guidati da moti browniani d -dimensionali correlati

Estendiamo ora la definizione di processo di Itô in modo che l'evoluzione del processo sia guidata da più sorgenti di incertezza correlate tra loro. Poiché nelle applicazioni di cui ci occuperemo la filtrazione dello spazio di probabilità sarà la filtrazione naturale del moto browniano, ci limitiamo a considerare solo questo caso.

Definizione 2.23. Siano Ω uno spazio di probabilità filtrato standard, $W = (W^1, \dots, W^d)^T$ un moto browniano d -dimensionale correlato su Ω ed $\underline{\mathcal{F}} = \underline{\mathcal{F}}^W$. Diciamo che un processo stocastico $X = \{X_t\}_{t \in I}$ è un *processo di Itô* su Ω definito in I rispetto a W se per ogni $t \in I$

$$X_t = X_{T_0} + \int_{T_0}^t \mu_s ds + \sum_{i=1}^d \int_{T_0}^t \sigma_s^i dW_s^i = X_{T_0} + \int_{T_0}^t \mu_s ds + \int_{T_0}^t \sigma_s dW_s$$

dove X_{T_0} è una variabile casuale \mathcal{F}_{T_0} -misurabile, $\mu \in \mathbb{L}_{\text{loc}}^1(I, \Omega)$, $\sigma^i \in \mathbb{L}_{\text{loc}}^2(I, \Omega)$ per ogni $i = 1, \dots, d$ e $\sigma = (\sigma^1, \dots, \sigma^d)$. Abbreviamo la precedente espressione in forma differenziale scrivendo

$$dX_t = \mu_t dt + \sum_{i=1}^d \sigma_t^i dW_t^i = \mu_t dt + \sigma_t dW_t \quad \text{in } I$$

Questa notazione consente di definire il processo X in modo univoco, una volta assegnato il valore iniziale X_{T_0} . I processi μ e σ sono detti rispettivamente *coefficiente di drift* (o semplicemente *drift*) e *coefficiente di diffusione* di X .

Si può dimostrare che la rappresentazione differenziale di un processo di Itô è unica, nel senso che μ e σ sono univocamente determinati a meno di processi quasi ovunque uguali su $I \times \Omega$. Continua a valere l'osservazione per cui, se il processo è una martingala, il drift deve essere nullo.

Proposizione 2.24. Siano Ω uno spazio di probabilità filtrato standard, W un moto browniano d -dimensionale correlato su Ω con $\underline{\mathcal{F}} = \underline{\mathcal{F}}^W$ ed X un processo di Itô. Se X è una martingala, allora $\mu = 0$ quasi ovunque in $I \times \Omega$.

In modo analogo a quanto visto nella Definizione 2.20, si possono definire variazione e covarianza quadratica di processi di Itô guidati da moti browniani correlati.

Definizione 2.25. Dati Ω uno spazio di probabilità filtrato standard, W un moto browniano d -dimensionale correlato su Ω con $\underline{\mathcal{F}} = \underline{\mathcal{F}}^W$ ed X, Y due processi di Itô, chiamiamo *covarianza quadratica* di X ed Y rispetto ad Ω il processo definito ponendo, per ogni $t \in I$

$$\langle X, Y \rangle_t := \lim_{|\pi| \rightarrow 0} \sum_{l=1}^N (X_{t_l} - X_{t_{l-1}}) (Y_{t_l} - Y_{t_{l-1}}) \quad \text{q.c.}$$

$\pi \in \text{Prt}([T_0, t])$

Definiamo inoltre *variazione quadratica* di X rispetto ad Ω il processo che otteniamo ponendo, per ogni $t \in I$

$$\langle X \rangle_t := \langle X, X \rangle_t = \lim_{|\pi| \rightarrow 0} \sum_{l=1}^N (X_{t_l} - X_{t_{l-1}})^2 \quad \text{q.c.}$$

$\pi \in \text{Prt}([T_0, t])$

Variazione e covariazione quadratica di processi di Itô si possono ancora esprimere in forma integrale.

Proposizione 2.26 (Proprietà caratteristica della (co)variazione quadratica). *Se Ω è uno spazio di probabilità filtrato standard, W è un moto browniano d -dimensionale correlato su Ω con $\underline{\mathcal{F}} = \underline{\mathcal{F}}^W$ ed X, Y sono due processi di Itô con decomposizioni $dX_t = \mu_t^X dt + \sigma_t^X dW_t$ e $dY_t = \mu_t^Y dt + \sigma_t^Y dW_t$, allora per ogni $t \in I$*

$$\begin{aligned}\langle X, Y \rangle_t &= \int_{T_0}^t \Lambda_s^{XY} ds \\ \langle X \rangle_t &= \int_{T_0}^t (\Sigma_s^X)^2 ds\end{aligned}$$

dove $R := \text{Cor}(W)$, $\Sigma^{XY} := \sqrt{\sigma^X R (\sigma^Y)^T}$, $\Sigma^X := \Sigma^{XX}$, $\Sigma^Y := \Sigma^{YY}$ e $\Lambda^{XY} := \frac{1}{2} [(\Sigma^{XY})^2 - (\Sigma^X)^2 - (\Sigma^Y)^2]$. Possiamo esprimere il risultato in forma differenziale come $d\langle X, Y \rangle_t = \Lambda_t^{XY} dt$ e $d\langle X \rangle_t = (\Sigma_t^X)^2 dt$.

Forniremo una dimostrazione del precedente enunciato nel caso particolare in cui drift e coefficienti di diffusione dei due processi di Itô siano deterministici con la Proposizione 3.10. Anche la disuguaglianza di Schwarz e l'identità di polarizzazione valgono ancora:

Proposizione 2.27. *Siano Ω uno spazio di probabilità filtrato standard e W un moto browniano d -dimensionale correlato su Ω con $\underline{\mathcal{F}} = \underline{\mathcal{F}}^W$. Se X, Y sono processi di Itô, allora*

- (i). $|\langle X, Y \rangle|^2 \leq \langle X \rangle \langle Y \rangle$ (disuguaglianza di Schwarz)
- (ii). $\langle X, Y \rangle = \frac{1}{2} [\langle X + Y \rangle - \langle X \rangle - \langle Y \rangle]$ (identità di polarizzazione)

Uno strumento essenziale per la nostra analisi sarà la formula di Itô, attraverso cui è possibile derivare la dinamica del processo che si ottiene componendo un processo di Itô X_t ed una funzione $U(t, x)$ di classe $C^{1,2}$.

Proposizione 2.28 (Formula di Itô). *Se Ω è uno spazio di probabilità filtrato standard, $W = (W^1, \dots, W^d)^T$ è un moto browniano d -dimensionale correlato su Ω con $\underline{\mathcal{F}} = \underline{\mathcal{F}}^W$, $U \in C^{1,2}(I \times \mathbb{R})$ ed X è un processo di Itô, allora $\{U(t, X_t)\}_{t \in I}$ è ancora un processo di Itô e soddisfa l'equazione*

$$dU(t, X_t) = \partial_t U(t, X_t) dt + \partial_x U(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} \partial_{xx}^2 U(t, X_t) d\langle X \rangle_t \quad \text{in } I$$

Procediamo introducendo il Teorema di Girsanov, che ci consentirà di passare dalla dinamica dei prezzi futures rispetto alla misura del mondo reale a quella rispetto ad una misura neutrale al rischio. Dato X un processo di Itô su $(\Omega, \mathcal{F}, \underline{\mathcal{F}}, P)$ definito in I rispetto a W^P , un moto browniano d -dimensionale (non correlato) su (Ω, \mathcal{F}, P) con $\underline{\mathcal{F}} = \underline{\mathcal{F}}^{W^P}$, ci poniamo il problema del passaggio dalla dinamica di X rispetto a P a quella rispetto ad una nuova misura di probabilità Q assolutamente continua rispetto a P su \mathcal{F}_{T_1} . Ricordiamo che, quando $Q \ll_{\mathcal{F}_{T_1}} P$, per il Teorema di Radon-Nikodym esiste ed è unica (P -quasi certamente) la variabile casuale $Z_{T_1} \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_{T_1})$ detta *densità* di Q rispetto a P ed indicata con $\frac{dQ}{dP}|_{\mathcal{F}_{T_1}} := Z_{T_1}$. Poiché $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$ è una

filtrazione, vale anche $Q \ll_{\mathcal{F}_t} P$ per ogni $t \in I$, per cui, applicando ancora il Teorema di Radon-Nikodym, si ottiene il processo $Z = \{Z_t\}_{t \in I}$ dove

$$Z_t = \frac{dQ}{dP} \Big|_{\mathcal{F}_t} \quad (2.6)$$

per ogni $t \in I$. Per come è stato costruito, si può dimostrare che Z è una P -martingala o, in modo equivalente, che $E^P(Z_{T_1}) = 1$. Il Teorema di Girsanov garantisce che se Z è la *martingala esponenziale* associata ad un processo $\theta \in \mathbb{L}_{\text{loc}}^2(I, \Omega; \mathbb{R}^d)$, allora esiste un W^Q moto browniano d -dimensionale su (Ω, \mathcal{F}, Q) tale che $dW_t^P = \theta_t dt + dW_t^Q$. Prima di enunciare il risultato, servono quindi alcune definizioni preliminari:

Definizione 2.29. Siano Ω uno spazio di probabilità filtrato standard e $p \geq 1$. Diremo che un processo stocastico $u = \{u_t\}_{t \in I}$ a valori nei vettori colonna d -dimensionali \mathbb{R}^d appartiene alla classe $\mathbb{L}_{\text{loc}}^p(I, \Omega; \mathbb{R}^d)$ se

L1 u è progressivamente misurabile rispetto ad $\underline{\mathcal{F}}$

L2 $\int_I |u_t|^p dt < \infty$ q.c.

In modo del tutto analogo si possono definire processi $\mathbb{L}_{\text{loc}}^p(I, \Omega; \mathbb{R}^d)$.

Definizione 2.30. Siano Ω uno spazio di probabilità filtrato standard, W^P un moto browniano d -dimensionale su Ω con $\underline{\mathcal{F}} = \underline{\mathcal{F}}^{W^P}$ e $\theta \in \mathbb{L}_{\text{loc}}^2(I, \Omega; \mathbb{R}^d)$. Indichiamo con Z^{θ, W^P} , oppure più brevemente Z^θ , il processo di Itô che soddisfa l'equazione

$$dZ_t^\theta = Z_t^\theta \theta_t^\top dW_t^P \quad \text{in } I$$

e tale che $Z_{T_0}^\theta = 1$. Diciamo poi che Z^{θ, W^P} è la W^P -*martingala esponenziale* associata a θ se Z^{θ, W^P} è una P -martingala su Ω .

Applicando la formula di Itô si può dimostrare che Z^θ è il processo definito per ogni $t \in I$ da

$$Z_t^\theta = e^{\int_{T_0}^t \theta_s^\top dW_s^P - \frac{1}{2} \int_{T_0}^t |\theta_s|^2 ds}$$

Notiamo come la condizione che Z^θ sia una P -martingala su Ω è equivalente a chiedere che $E^P(Z_t^\theta) = 1$ per ogni $t \in I$, ovvero $E^P(Z_{T_1}^\theta) = 1$. In questo caso è possibile definire la misura di probabilità Q assolutamente continua rispetto a P su \mathcal{F}_{T_1} in modo che $Z_{T_1}^\theta = \frac{dQ}{dP} \Big|_{\mathcal{F}_{T_1}}$ ponendo

$$Q(A) = \int_A Z_{T_1}^\theta dP$$

per ogni $A \in \mathcal{F}_{T_1}$. Abbiamo ora gli strumenti per enunciare il Teorema di Girsanov:

Proposizione 2.31 (Teorema di Girsanov). *Siano $(\Omega, \mathcal{F}, \underline{\mathcal{F}}, P)$ uno spazio di probabilità filtrato standard, W^P un moto browniano d -dimensionale su (Ω, \mathcal{F}, P) con $\underline{\mathcal{F}} = \underline{\mathcal{F}}^{W^P}$ e $\theta \in \mathbb{L}_{\text{loc}}^2(I, \Omega; \mathbb{R}^d)$. Se $E^P(Z_{T_1}^{\theta, W^P}) = 1$ e Q è la misura di probabilità su $(\Omega, \mathcal{F}_{T_1})$ definita da $Z_{T_1}^{\theta, W^P} = \frac{dQ}{dP} \Big|_{\mathcal{F}_{T_1}}$, allora il processo stocastico*

$$W_t^Q := W_t^P - \int_{T_0}^t \theta_s ds \quad \text{in } I$$

è un moto browniano d -dimensionale su $(\Omega, \mathcal{F}_{T_1}, Q)$ che soddisfa l'equazione

$$dW_t^P = \theta_t dt + dW_t^Q \quad \text{in } I$$

Il precedente, dunque, garantisce che la nuova dinamica differisca dalla vecchia unicamente nel drift, perché il coefficiente di diffusione si mantiene invariato. La funzione θ che definisce il cambiamento di misura è detta *nucleo di Girsanov*. Insieme a questo teorema, per risolvere il problema che ci siamo posti inizialmente è necessario il seguente risultato, in base a cui il processo delle densità di Q rispetto a P definito dalla (2.6) è sempre una martingala esponenziale associata a qualche θ .

Proposizione 2.32. *Se $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}, P)$ è uno spazio di probabilità filtrato standard, W^P è un moto browniano d -dimensionale su (Ω, \mathcal{F}, P) con $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{W^P}$, Q è una misura di probabilità su $(\Omega, \mathcal{F}_{T_1})$ tale che $Q \ll_{\mathcal{F}_{T_1}} P$ e Z è il processo stocastico*

$$Z_t := \frac{dQ}{dP} \Big|_{\mathcal{F}_t} \quad \text{in } I$$

allora esiste $\theta \in \mathbb{L}_{\text{loc}}^2(I, \Omega; \mathbb{R}^d)$ tale che $Z = Z^{\theta, W^P}$ e $E^P(Z_{T_1}^{\theta, W^P}) = 1$.

Processi di Itô vettoriali guidati da moti browniani d -dimensionali correlati

Ci occupiamo per finire del caso di processi di Itô a valori vettoriali, dimostrando una conseguenza del Teorema di Girsanov che impiegheremo nel capitolo 4.

Definizione 2.33. Siano Ω uno spazio di probabilità filtrato standard, W un moto browniano d -dimensionale correlato su Ω ed $\mathcal{F} = \mathcal{F}^W$. Diciamo che un processo $X = (X^1 = \{X_t^1\}_{t \in I}, \dots, X^n = \{X_t^n\}_{t \in I})^T$ a valori nei vettori colonna n -dimensionali reali è un *processo di Itô a valori in \mathbb{R}^n* su Ω definito in I rispetto a W se per ogni $t \in I$

$$\forall i = 1, \dots, n : X_t^i = X_{T_0}^i + \int_{T_0}^t \mu_s^i ds + \int_{T_0}^t \sigma_s^i dW_s \quad (2.7)$$

ovvero in forma vettoriale

$$X_t = X_{T_0} + \int_{T_0}^t \mu_s ds + \int_{T_0}^t \sigma_s dW_s \quad (2.8)$$

dove $X_{T_0} = (X_{T_0}^1, \dots, X_{T_0}^n)^T$ è una variabile casuale \mathcal{F}_{T_0} -misurabile, $\mu = (\mu^1, \dots, \mu^n)^T \in \mathbb{L}_{\text{loc}}^1(I, \Omega; \mathbb{R}^n)$, $\sigma \in \mathbb{L}_{\text{loc}}^2(I, \Omega; \mathbb{R}_d^n)$ ed indichiamo con $\sigma^1, \dots, \sigma^n$ le righe di σ . Abbreviamo l'equazione (2.8) in forma differenziale scrivendo

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t \quad \text{in } I$$

Questa notazione consente di definire il processo X in modo univoco, una volta assegnato il valore iniziale X_{T_0} . I processi μ e σ sono detti rispettivamente *coefficiente di drift* (o semplicemente *drift*) e *coefficiente di diffusione* di X .

Si può dimostrare ancora che la rappresentazione differenziale di un processo di Itô è unica, nel senso che μ e σ sono univocamente determinati a meno di processi quasi ovunque uguali su $I \times \Omega$. Vediamo come definire l'integrale rispetto ad un processo di Itô.

Definizione 2.34. Siano Ω uno spazio di probabilità filtrato standard, W un moto browniano d -dimensionale correlato su Ω ed $\mathcal{F} = \mathcal{F}^W$. Dati X un processo di Itô a valori in \mathbb{R}^n con decomposizione $dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$ per ogni $t \in I$ ed Y un processo stocastico a valori in \mathbb{R}_n tale che $Y\mu = \{Y_t\mu_t\}_{t \in I} \in \mathbb{L}_{\text{loc}}^1(I, \Omega; \mathbb{R})$ e $Y\sigma = \{Y_t\sigma_t\}_{t \in I} \in \mathbb{L}_{\text{loc}}^2(I, \Omega; \mathbb{R}_d)$, definiamo per ogni $t \in I$

$$\int_{T_0}^t Y_s dX_s := \int_{T_0}^t Y_s \mu_s ds + \int_{T_0}^t Y_s \sigma_s dW_s$$

l'integrale di Y rispetto a X in $[T_0, t]$.

Oltre al Teorema di Girsanov, per ottenere il risultato che cerchiamo è necessaria una proposizione che garantisca l'unicità in legge delle soluzioni deboli di una equazione differenziale stocastica (SDE). A questo scopo ricordiamo la nozione di legge di un processo stocastico vettoriale. Se indichiamo con $\mathcal{B} := \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ la σ -algebra dei boreliani di \mathbb{R}^n , un sottoinsieme C di $(\mathbb{R}^n)^I$ è detto *cilindrico* se è della forma $C = \{\{x_t\}_{t \in I} \in (\mathbb{R}^n)^I \mid \forall i = 1, \dots, k : x_{t_i} \in A_{t_i}\}$ per qualche $k \geq 1$, $t_1, \dots, t_k \in I$ ed $A_{t_1}, \dots, A_{t_k} \in \mathcal{B}$. Rappresentando la collezione dei sottoinsiemi cilindrici di $(\mathbb{R}^n)^I$ con \mathcal{C} , possiamo definire la σ -algebra prodotto $\mathcal{B}^I = \otimes_{t \in I} \mathcal{B}$ come la più piccola σ -algebra su $(\mathbb{R}^n)^I$ che contiene \mathcal{C} , ovvero $\mathcal{B}^I := \sigma(\mathcal{C})$. Poiché l'insieme $C(I, \mathbb{R}^n)$ delle funzioni continue da I in \mathbb{R}^n è contenuto in $(\mathbb{R}^n)^I$, la σ -algebra \mathcal{B}^I induce una σ -algebra su $C(I, \mathbb{R}^n)$, che indicheremo con \mathcal{B}_c^I .

La famiglia $X = \{X_t\}_{t \in I}$ è un processo stocastico su (Ω, \mathcal{F}, P) a valori in \mathbb{R}^n se per ogni $t \in I$ la funzione $X_t : (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B})$ è una variabile casuale. Possiamo riguardare $X = \{X_t\}_{t \in I}$ anche come un'unica variabile casuale $X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow ((\mathbb{R}^n)^I, \mathcal{B}^I)$ definita associando ad ogni $\omega \in \Omega$ la funzione

$$\begin{cases} X(\omega) : I \rightarrow \mathbb{R}^n \\ X(\omega) : t \mapsto X_t(\omega) \end{cases}$$

detta *traiettoria* di X corrispondente all'esito ω . La variabile X induce dunque sullo spazio delle traiettorie $((\mathbb{R}^n)^I, \mathcal{B}^I)$ una misura di probabilità P_X , chiamata *P-legge* (o *misura immagine*) di X e definita per ogni $A \in \mathcal{B}^I$ da

$$P_X(A) := P(X \in A) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\})$$

Il processo stocastico X è detto *q.c. continuo* se per q.o. $\omega \in \Omega$ la funzione $t \mapsto X_t(\omega)$ è continua da I in \mathbb{R}^n . Osserviamo quale forma assume la formula del cambio di variabili nel caso di processi stocastici q.c. continui.

Proposizione 2.35 (Formula del cambio di variabili). *Se (Ω, \mathcal{F}, P) è uno spazio di probabilità, $X = \{X_t\}_{t \in I}$ è un processo stocastico su (Ω, \mathcal{F}, P) a valori in \mathbb{R}^n q.c. continuo ed $f : (C(I; \mathbb{R}^n), \mathcal{B}_c^I) \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione misurabile, allora $f(X) : (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile se e solo se $f : (C(I; \mathbb{R}^n), \mathcal{B}_c^I, P_X) \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile. In questo caso vale*

$$\int_{\Omega} f(X(\omega)) P(d\omega) = \int_{C(I; \mathbb{R}^n)} f(x) P_X(dx)$$

Una soluzione debole di un'equazione differenziale stocastica è *unica in legge* se, presa un'altra soluzione debole, i due processi hanno medesima legge sulle

traiettorie *continue*. Per essere più precisi enunciamo la seguente proposizione, una cui dimostrazione è fornita dal Lemma 5.3.1 in [Øks03].

Proposizione 2.36 (Unicità in legge delle soluzioni deboli di SDE). *Siano $(\Omega, \mathcal{F}, \underline{\mathcal{F}}, P)$ ed $(\Omega', \mathcal{F}', \underline{\mathcal{F}}', P')$ spazi di probabilità filtrati standard, W un moto browniano d -dimensionale su (Ω, \mathcal{F}, P) , W' un moto browniano d -dimensionale su $(\Omega', \mathcal{F}', P')$, $\underline{\mathcal{F}} = \underline{\mathcal{F}}^W$, $\underline{\mathcal{F}}' = \underline{\mathcal{F}}^{W'}$, X un processo di Itô a valori in \mathbb{R}^n su Ω definito in I rispetto a W ed Y un processo di Itô a valori in \mathbb{R}^n su Ω' definito in I rispetto a W' . Se X ed Y sono q.c. continui e soddisfano*

$$dX_t = \mathbf{b}(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t \quad \text{in } I \quad (2.9)$$

$$dY_t = \mathbf{b}(t, Y_t) dt + \sigma(t, Y_t) dW'_t \quad \text{in } I \quad (2.10)$$

dove $\mathbf{b} : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\sigma : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_d^n$ sono funzioni misurabili per le quali esistono due costanti $C, D > 0$ tali che

$$\begin{aligned} \forall t \in I : \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{b}(t, \mathbf{x})| + |\sigma(t, \mathbf{x})| &\leq C(1 + |\mathbf{x}|) \\ \forall t \in I : \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{b}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{b}(t, \mathbf{y})| + |\sigma(t, \mathbf{x}) - \sigma(t, \mathbf{y})| &\leq D|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \end{aligned} \quad (2.11)$$

allora X ed Y hanno la stessa legge su $C(I; \mathbb{R}^n)$, ovvero $P_X = P'_Y$ in \mathcal{B}_c^I .

La precedente proposizione consente di dimostrare un corollario del Teorema di Girsanov che sarà impiegata nel capitolo 4.

Proposizione 2.37 (Corollario del Teorema di Girsanov). *Siano $(\Omega, \mathcal{F}, \underline{\mathcal{F}}, P)$ uno spazio di probabilità filtrato standard, W^P un moto browniano d -dimensionale su (Ω, \mathcal{F}, P) con $\underline{\mathcal{F}} = \underline{\mathcal{F}}^{W^P}$. Supponiamo che X ed Y siano due processi di Itô a valori in \mathbb{R}^n q.c. continui che soddisfano*

$$dX_t = \mathbf{b}(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t \quad \text{in } I \quad (2.12)$$

$$dY_t = \beta(t, Y_t) dt + \sigma(t, Y_t) dW_t \quad \text{in } I \quad (2.13)$$

dove $\mathbf{b}, \beta : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\sigma : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_d^n$ sono funzioni misurabili per le quali valgono le condizioni (2.11). Supponiamo che esista $\varphi \in \mathbb{L}_{\text{loc}}^2(I, \Omega; \mathbb{R}^d)$ tale che $E^P(Z_{T_1}^{-\varphi, W}) = 1$ e valga

$$\sigma(t, Y_t)\varphi_t = \beta(t, Y_t) - \mathbf{b}(t, Y_t) \quad \text{in } I \quad (2.14)$$

Se $\kappa : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_n^d$ è una funzione misurabile che soddisfa

$$\kappa(t, Y_t)\sigma(t, Y_t) = \delta_d \quad \text{in } I \quad (2.15)$$

dove δ_d è la matrice identica di \mathbb{R}_d^d , allora la legge di X e quella di Y su $C(I; \mathbb{R}^n)$ sono equivalenti, ovvero $P_X \sim P_Y$ su \mathcal{B}_c^I . La densità di Radon-Nikodym di P_X rispetto a P_Y è data da

$$\frac{dP_X}{dP_Y}(Y) = \exp\left(-\int_I [\kappa_s(\beta_s - \mathbf{b}_s)]^T \kappa_s dY_s + \int_I [\kappa_s(\beta_s - \mathbf{b}_s)]^T \kappa_s \beta_s - \frac{|\kappa_s(\beta_s - \mathbf{b}_s)|^2}{2} ds\right)$$

dove per ogni $t \in I$ abbiamo posto $\beta_t := \beta(t, Y_t)$, $\mathbf{b}_t := \mathbf{b}(t, Y_t)$ e $\kappa_t := \kappa(t, Y_t)$.

Se $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ e definiamo $\gamma_t := \kappa_t \beta_t$ per ogni $t \in I$, allora la precedente diventa

$$\frac{dP_X}{dP_Y}(Y) = \exp\left(-\int_I \gamma_s^T \kappa_s dY_s + \frac{1}{2} \int_I |\gamma_s|^2 ds\right) \quad (2.16)$$

Dimostrazione: Sia Q la misura di probabilità su $(\Omega, \mathcal{F}_{T_1})$ definita da $Z_{T_1}^{-\varphi, \mathbf{W}} = \frac{dQ}{dP}|_{\mathcal{F}_{T_1}}$. Poiché $\varphi \in \mathbb{L}_{\text{loc}}^2(I, \Omega; \mathbb{R}^d)$ e vale $E^P(Z_{T_1}^{-\varphi, \mathbf{W}}) = 1$, per il Teorema di Girsanov (Proposizione 2.31) il processo stocastico

$$\widetilde{\mathbf{W}}_t := \mathbf{W}_t + \int_{T_0}^t \varphi_s ds \quad \text{in } I$$

è un moto browniano d -dimensionale su $(\Omega, \mathcal{F}_{T_1}, Q)$ che soddisfa

$$d\widetilde{\mathbf{W}}_t = \varphi_t dt + d\mathbf{W}_t \quad \text{in } I$$

Se sostituiamo la precedente nell'equazione (2.13), ricordando (2.14) otteniamo

$$\begin{aligned} d\mathbf{Y}_t &= \beta(t, \mathbf{Y}_t) dt + \sigma(t, \mathbf{Y}_t) d\mathbf{W}_t = \beta(t, \mathbf{Y}_t) dt + \sigma(t, \mathbf{Y}_t) (-\varphi_t dt + d\widetilde{\mathbf{W}}_t) = \\ &= [\beta(t, \mathbf{Y}_t) - (\beta(t, \mathbf{Y}_t) - \mathbf{b}(t, \mathbf{Y}_t))] dt + \sigma(t, \mathbf{Y}_t) d\widetilde{\mathbf{W}}_t = \\ &= \mathbf{b}(t, \mathbf{Y}_t) dt + \sigma(t, \mathbf{Y}_t) d\widetilde{\mathbf{W}}_t \end{aligned} \quad (2.17)$$

per ogni $t \in I$. Possiamo applicare la Proposizione 2.36 sull'unicità in legge delle soluzioni deboli di una SDE ai processi X ed Y , poiché questi soddisfano le equazioni (2.12), (2.17) e per i coefficienti \mathbf{b} , σ valgono le condizioni (2.11). Segue che la P -legge di X coincide con la Q -legge di Y su $C(I; \mathbb{R}^n)$, ovvero $P_X = Q_Y$ in \mathcal{B}_c^I .

Mostriamo ora che P_X è assolutamente continua rispetto a P_Y su \mathcal{B}_c^I trovando la densità di Radon-Nikodym dell'una rispetto all'altra. Se A è un sottoinsieme misurabile di $C(I; \mathbb{R}^n)$, allora ricordiamo la Definizione 2.30 ed osserviamo

$$\begin{aligned} P_X(A) &= Q_Y(A) = Q(\mathbf{Y} \in A) = \int_{\Omega} \chi_{\{\mathbf{Y} \in A\}}(\omega) Z_{T_1}^{-\varphi, \mathbf{W}}(\omega) P(d\omega) = \\ &= \int_{\Omega} \chi_{\{\mathbf{Y} \in A\}}(\omega) \exp\left(-\int_I \varphi_s^T d\mathbf{W}_s - \frac{1}{2} \int_I |\varphi_s|^2 ds\right) P(d\omega) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Moltiplicando entrambi i membri della (2.13) per $\kappa(t, \mathbf{Y}_t)$ ed applicando l'equazione (2.15), otteniamo $d\mathbf{W}_t$ in funzione di \mathbf{Y}_t come segue

$$d\mathbf{W}_t = \kappa(t, \mathbf{Y}_t) d\mathbf{Y}_t - \kappa(t, \mathbf{Y}_t) \beta(t, \mathbf{Y}_t) dt \quad (2.19)$$

per ogni $t \in I$. Allo stesso modo, sfruttiamo l'equazione (2.15) nella (2.14) e ne deriviamo

$$\varphi_t = \kappa(t, \mathbf{Y}_t) (\beta(t, \mathbf{Y}_t) - \mathbf{b}(t, \mathbf{Y}_t)) \quad (2.20)$$

per ogni $t \in I$. Sostituiamo le due precedenti espressioni nella martingala esponenziale associata a $-\varphi$ per ottenere

$$\begin{aligned} &\exp\left(-\int_I \varphi_s^T d\mathbf{W}_s - \frac{1}{2} \int_I |\varphi_s|^2 ds\right) = \\ &= \exp\left(-\int_I [\kappa(s, \mathbf{Y}_s) (\beta(s, \mathbf{Y}_s) - \mathbf{b}(s, \mathbf{Y}_s))]^T d\mathbf{W}_s - \frac{1}{2} \int_I |\kappa(s, \mathbf{Y}_s) (\beta(s, \mathbf{Y}_s) - \mathbf{b}(s, \mathbf{Y}_s))|^2 ds\right) = \\ &= \exp\left(-\int_I [\kappa(s, \mathbf{Y}_s) (\beta(s, \mathbf{Y}_s) - \mathbf{b}(s, \mathbf{Y}_s))]^T \kappa(s, \mathbf{Y}_s) d\mathbf{Y}_s + \right. \\ &\quad \left. + \int_I [\kappa(s, \mathbf{Y}_s) (\beta(s, \mathbf{Y}_s) - \mathbf{b}(s, \mathbf{Y}_s))]^T \kappa(s, \mathbf{Y}_s) \beta(s, \mathbf{Y}_s) - \frac{|\kappa(s, \mathbf{Y}_s) (\beta(s, \mathbf{Y}_s) - \mathbf{b}(s, \mathbf{Y}_s))|^2}{2} ds\right) \end{aligned}$$

Ora possiamo applicare la formula per il cambio di variabili (Proposizione 2.35) nell'ultimo membro dell'equazione (2.18), da cui

$$\begin{aligned} P_X(A) &= \int_{\Omega} \chi_{\{Y \in A\}}(\omega) \exp \left(- \int_I [\kappa(s, Y_s)(\beta(s, Y_s) - \mathbf{b}(s, Y_s))]^T \kappa(s, Y_s) dY_s + \right. \\ &\quad \left. + \int_I [\kappa(s, Y_s)(\beta(s, Y_s) - \mathbf{b}(s, Y_s))]^T \kappa(s, Y_s) \beta(s, Y_s) - \frac{|\kappa(s, Y_s)(\beta(s, Y_s) - \mathbf{b}(s, Y_s))|^2}{2} ds \right) P(d\omega) = \\ &= \int_{C(I; \mathbb{R}^n)} \chi_A(\mathbf{y} \cdot) \exp \left(- \int_I [\kappa(s, \mathbf{y}_s)(\beta(s, \mathbf{y}_s) - \mathbf{b}(s, \mathbf{y}_s))]^T \kappa(s, \mathbf{y}_s) d\mathbf{y}_s + \right. \\ &\quad \left. + \int_I [\kappa(s, \mathbf{y}_s)(\beta(s, \mathbf{y}_s) - \mathbf{b}(s, \mathbf{y}_s))]^T \kappa(s, \mathbf{y}_s) \beta(s, \mathbf{y}_s) - \frac{|\kappa(s, \mathbf{y}_s)(\beta(s, \mathbf{y}_s) - \mathbf{b}(s, \mathbf{y}_s))|^2}{2} ds \right) P_Y(d\mathbf{y} \cdot) \end{aligned}$$

Abbiamo così dimostrato che P_X è assolutamente continua rispetto a P_Y e per quasi ogni $\mathbf{y} \cdot \in C(I; \mathbb{R}^n)$ si ha

$$\begin{aligned} \frac{dP_X}{dP_Y}(\mathbf{y} \cdot) &= \exp \left(- \int_I [\kappa(s, \mathbf{y}_s)(\beta(s, \mathbf{y}_s) - \mathbf{b}(s, \mathbf{y}_s))]^T \kappa(s, \mathbf{y}_s) d\mathbf{y}_s + \right. \\ &\quad \left. + \int_I [\kappa(s, \mathbf{y}_s)(\beta(s, \mathbf{y}_s) - \mathbf{b}(s, \mathbf{y}_s))]^T \kappa(s, \mathbf{y}_s) \beta(s, \mathbf{y}_s) - \frac{|\kappa(s, \mathbf{y}_s)(\beta(s, \mathbf{y}_s) - \mathbf{b}(s, \mathbf{y}_s))|^2}{2} ds \right) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Poiché $\frac{dP_X}{dP_Y} > 0$, segue che anche P_Y è assolutamente continua rispetto a P_X e per quasi ogni $\mathbf{x} \cdot \in C(I; \mathbb{R}^n)$ vale

$$\begin{aligned} \frac{dP_Y}{dP_X}(\mathbf{x} \cdot) &= \left(\frac{dP_X}{dP_Y}(\mathbf{x} \cdot) \right)^{-1} = \exp \left(\int_I [\kappa(s, \mathbf{x}_s)(\beta(s, \mathbf{x}_s) - \mathbf{b}(s, \mathbf{x}_s))]^T \kappa(s, \mathbf{x}_s) d\mathbf{x}_s - \right. \\ &\quad \left. - \int_I [\kappa(s, \mathbf{x}_s)(\beta(s, \mathbf{x}_s) - \mathbf{b}(s, \mathbf{x}_s))]^T \kappa(s, \mathbf{x}_s) \beta(s, \mathbf{x}_s) - \frac{|\kappa(s, \mathbf{x}_s)(\beta(s, \mathbf{x}_s) - \mathbf{b}(s, \mathbf{x}_s))|^2}{2} ds \right) \end{aligned}$$

Se per ogni $t \in I$ poniamo $\beta_t := \beta(t, Y_t)$, $\mathbf{b}_t := \mathbf{b}(t, Y_t)$ e $\kappa_t := \kappa(t, Y_t)$, l'equazione (2.21) implica che

$$\frac{dP_X}{dP_Y}(Y) = \exp \left(- \int_I [\kappa_s(\beta_s - \mathbf{b}_s)]^T \kappa_s dY_s + \int_I [\kappa_s(\beta_s - \mathbf{b}_s)]^T \kappa_s \beta_s - \frac{|\kappa_s(\beta_s - \mathbf{b}_s)|^2}{2} ds \right)$$

come desiderato.

Nel caso in cui $\mathbf{b} = 0$, l'equazione (2.16) segue immediatamente dalla precedente definendo $\gamma_t := \kappa_t \beta_t$ per ogni $t \in I$ ed osservando che $(\kappa_s \beta_s)^T \kappa_s \beta_s = \gamma_s^T \gamma_s = |\gamma_s|^2$ per ogni $s \in I$. ■

Vediamo quale forma assume la precedente proposizione nel caso particolare di processi scalari guidati da moti browniani reali.

Proposizione 2.38. *Se valgono le ipotesi della Proposizione 2.37 nel caso $n = d = 1$, allora la legge di X e quella di Y su $C(I; \mathbb{R}^n)$ sono equivalenti, ovvero $P_X \sim P_Y$ su \mathcal{B}_C^1 . La densità di Radon-Nikodym di P_X rispetto a P_Y è data da*

$$\frac{dP_X}{dP_Y}(Y) = \exp \left(- \int_I \kappa_s^2 (\beta_s - b_s) dY_s + \frac{1}{2} \int_I \kappa_s^2 (\beta_s^2 - b_s^2) ds \right)$$

dove per ogni $t \in I$ abbiamo posto $\beta_t := \beta(t, Y_t)$, $b_t := b(t, Y_t)$ e $\kappa_t := \kappa(t, Y_t)$.

Dimostrazione: Applicando la Proposizione 2.37 si ottiene che $P_X \sim P_Y$ e vale

$$\begin{aligned} \frac{dP_X}{dP_Y}(Y) &= \exp \left(- \int_I \kappa_s (\beta_s - b_s) \kappa_s dY_s + \int_I \kappa_s (\beta_s - b_s) \kappa_s \beta_s - \frac{\kappa_s^2 (\beta_s - b_s)^2}{2} ds \right) = \\ &= \exp \left(- \int_I \kappa_s^2 (\beta_s - b_s) dY_s + \frac{1}{2} \int_I \kappa_s^2 (2\beta_s^2 - 2\beta_s b_s) - \kappa_s^2 (\beta_s^2 - 2\beta_s b_s + b_s^2) ds \right) = \\ &= \exp \left(- \int_I \kappa_s^2 (\beta_s - b_s) dY_s + \frac{1}{2} \int_I \kappa_s^2 (\beta_s^2 - b_s^2) ds \right) \end{aligned}$$

2.4 Processi stocastici cointegrati

Fissiamo $\Omega := (\Omega, \mathcal{F}, P)$ uno spazio di probabilità ed occupiamoci di definire la nozione di processo debolmente stazionario nel caso in cui l'insieme dei tempi sia discreto. A questo scopo introduciamo prima la nozione di autocovarianza j -esima in un istante $t \in \mathbb{N}$, la covarianza tra il valore del processo in t e quello in $t - j$. Rappresentiamo con \mathbb{N}^+ l'insieme dei numeri naturali positivi.

Definizione 2.39. Dati Ω uno spazio di probabilità, $t_0 \in \mathbb{N}$, $I = \{t \in \mathbb{N} \mid t \geq t_0\}$ ed $X = \{X_t\}_{t \in I}$ un processo stocastico reale su Ω tale che $\{X_t\}_{t \in I} \subseteq L^2(\Omega)$, indichiamo per ogni $t \geq t_0$ con $\mu_t := E(X_t)$ l'aspettazione di X in t . Dato $j \in \mathbb{N}$, definiamo per ogni $t \geq t_0 + j$

$$\gamma_{jt} := \text{Cov}(X_t, X_{t-j}) = E((X_t - \mu_t)(X_{t-j} - \mu_{t-j}))$$

l'autocovarianza j -esima di X in t . In particolare, dunque, $\gamma_{0t} := \text{Var}(X_t)$ è la varianza di X in t . Indichiamo con Δ l'operatore differenza prima definito ponendo per ogni $t \geq t_0 + 1$

$$\Delta X_t := X_t - X_{t-1}$$

Se $d \in \mathbb{N}$ e $d \geq 1$, chiamiamo differenza d -esima l'operatore Δ^d ottenuto componendo d volte Δ .

Un processo stocastico reale a tempo discreto è debolmente stazionario se l'aspettazione e le autocovarianze sono indipendenti dal tempo. Quando è necessario applicare d volte l'operatore Δ per ottenere la stazionarietà, si dice che il processo è integrato di ordine d .

Definizione 2.40. Dati Ω uno spazio di probabilità, $t_0 \in \mathbb{N}$, $I = \{t \in \mathbb{N} \mid t \geq t_0\}$ ed $X = \{X_t\}_{t \in I}$ un processo stocastico reale su Ω tale che $\{X_t\}_{t \in I} \subseteq L^2(\Omega)$, diciamo che X è debolmente stazionario (o stazionario del secondo ordine o stazionario rispetto alla covarianza) se

$$\text{S1 } \exists \mu \in \mathbb{R} : \forall t \geq t_0 : \mu_t = \mu$$

$$\text{S2 } \forall j \in \mathbb{N} : \exists \gamma_j \in \mathbb{R} : \forall t \geq t_0 + j : \gamma_{jt} = \gamma_j$$

Chiamiamo X integrato di ordine 0 su Ω se X è debolmente stazionario ed indichiamo l'insieme di questi processi con $I_0(\Omega)$. Dato $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 1$, chiamiamo X integrato di ordine d su Ω se $\{\Delta^d X_t\}_{t \geq t_0 + d} \in I_0(\Omega)$ ed indichiamo l'insieme di questi processi con $I_d(\Omega)$.

In generale per ogni $d \geq 1$ non vale $I_d(\Omega) \subseteq I_{d-1}(\Omega)$, per cui nel caso $d = 1$ possiamo trovare X un processo integrato di ordine 1 e non debolmente stazionario, ovvero $X \in I_1(\Omega) \setminus I_0(\Omega)$. A questo scopo definiamo $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ un processo rumore bianco gaussiano su Ω se le ε_t sono variabili casuali su Ω indipendenti ed identicamente distribuite con $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ per ogni $t \in \mathbb{N}$. Un processo stocastico $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ su Ω è detto passeggiata aleatoria con deriva δ se può essere definito ricorsivamente come

$$X_0 := x_0 \in \mathbb{R}$$

$$X_t := X_{t-1} + \delta + \varepsilon_t, \text{ per ogni } t \in \mathbb{N}^+$$

dove $\delta \in \mathbb{R}$. Segue dunque che il processo delle differenze prime è dato da

$$\Delta X_t = \delta + \varepsilon_t, \text{ per ogni } t \in \mathbb{N}^+$$

Si osserva che $E(X_1) = x_0 + \delta$, $E(X_2) = x_0 + 2\delta$, per cui se $\delta \neq 0$ abbiamo $X \notin I_0(\Omega)$. Poiché invece per ogni $t \in \mathbb{N}^+$

$$\begin{aligned} E(\Delta X_t) &= \delta \\ E((\Delta X_t - \delta)^2) &= E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2 \\ E((\Delta X_t - \delta)(\Delta X_{t-j} - \delta)) &= E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-j}) = 0, \text{ per ogni } j \in \mathbb{N}^+ \end{aligned}$$

si ha $\Delta X \in I_0(\Omega)$, da cui $X \in I_1(\Omega)$.

Molte delle serie storiche di interesse economico sono realizzazioni empiriche di processi $I_1(\Omega)$ oppure, nel caso di grandezze nominali, $I_2(\Omega)$. Quando tra i processi esiste una relazione di equilibrio di lungo periodo per cui le variabili si muovono insieme al trascorrere del tempo in modo da non manifestare alcuna tendenza al cambiamento, si può utilizzare il concetto di cointegrazione per descrivere questa situazione, introdotto nel 1987 dagli economisti Robert Engle e Clive Granger. In particolare, infatti, un vettore di processi stocastici a tempo discreto $I_1(\Omega)$ è cointegrato se esiste una combinazione lineare non nulla dei processi che sia debolmente stazionaria. Per uno studio delle proprietà elementari di questi processi si veda Hamilton [Ham94].

Definizione 2.41. Dati Ω uno spazio di probabilità ed $\mathbf{X} = (X^1 = \{X_t^1\}_{t \in \mathbb{N}}, \dots, X^n = \{X_t^n\}_{t \in \mathbb{N}})^T$ un processo stocastico a valori in \mathbb{R}^n su Ω , definiamo

$$\text{Coi}(\mathbf{X}) := \{\beta \in \mathbb{R}^n \mid \beta^T \mathbf{X} \in I_0(\Omega)\}$$

lo spazio di cointegrazione di \mathbf{X} . Un vettore $\beta \in \text{Coi}(\mathbf{X})$ è detto *vettore di cointegrazione* di \mathbf{X} , mentre la relazione $\beta^T \mathbf{X}$ è detta *relazione di cointegrazione*. Chiamiamo \mathbf{X} un *vettore di processi cointegrati* (o *processo cointegrato*) su Ω se

- C1 $X^1, \dots, X^n \in I_1(\Omega)$
- C2 $\text{Coi}(\mathbf{X}) \neq \{\mathbf{0}^n\}$

ed indichiamo con $\text{CI}(\Omega)$ l'insieme di questi processi. Poiché $\text{Coi}(\mathbf{X})$ è un \mathbb{R} -sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n , possiamo definire il *rango di cointegrazione* di \mathbf{X} come

$$\text{rg}^c(\mathbf{X}) := \dim_{\mathbb{R}} \text{Coi}(\mathbf{X})$$

Se $r = \text{rg}^c(\mathbf{X})$, una matrice $\beta \in \mathbb{R}_r^n$ è detta *matrice di cointegrazione* se le colonne β_1, \dots, β_r costituiscono una base di $\text{Coi}(\mathbf{X})$ su \mathbb{R} .

Si potrebbe generalizzare la nozione di vettore di processi cointegrati al caso in cui le componenti siano $I_d(\Omega)$ ed esista una loro combinazione lineare non nulla $I_{d-b}(\Omega)$ con $d, b \in \mathbb{N}$ e $1 \leq b \leq d$. Processi di questo tipo sono detti *cointegrati con ordine di integrazione d ed ordine di cointegrazione b* ed il loro insieme si indica con $\text{CI}_{d,b}(\Omega)$. Noi, comunque, ci occuperemo soltanto di $\text{CI}(\Omega) = \text{CI}_{1,1}(\Omega)$.

Introduciamo ora la classe di processi $\text{CI}(\Omega)$ che soddisfano l'equazione di Ornstein-Uhlenbeck multivariata a tempo discreto.

Definizione 2.42. Siano $\Omega := (\Omega, \mathcal{F}, \underline{\mathcal{F}}, P)$ uno spazio di probabilità filtrato standard ed $X = \{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ un processo stocastico a valori in \mathbb{R}^n su Ω . Diciamo che X è un *processo di Ornstein-Uhlenbeck a tempo discreto cointegrato* su Ω se $X \in \text{CI}(\Omega)$ ed esistono W un moto browniano n -dimensionale su Ω e $\Pi, \Sigma \in \mathbb{R}_n^n$ tali che

$$\Delta X_t = \Pi X_{t-1} + \Sigma \Delta W_t \quad (2.22)$$

per ogni $t \in \mathbb{N}^+$. Indichiamo con $\text{OUDC}(\Omega)$ l'insieme di questi processi.

La matrice Π rappresenta la relazione a lungo termine tra le componenti di X , mentre Σ descrive il loro comportamento a breve termine. Poiché X è un processo cointegrato, le componenti del vettore del membro di sinistra dell'equazione (2.22) sono processi $I_0(\Omega)$, per cui anche quelle del membro di destra devono avere la stessa proprietà. Ciò implica che $\Pi \neq 0_n^n$ e le componenti del vettore ΠX_{t-1} devono essere processi $I_0(\Omega)$, quindi $\text{rg}^c(X) = \text{rg}(\Pi)$ e le colonne di Π^T sono vettori di cointegrazione di X . Se $r = \text{rg}(\Pi)$, esistono due matrici $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_r^n$ tali che $\Pi = \alpha \beta^T$, da cui segue che β è una matrice di cointegrazione di X ed α rappresenta la velocità con cui è raggiunto l'equilibrio di lungo termine tra le componenti di X . Osserviamo che la decomposizione di Π non è unica, poiché per ogni matrice invertibile $\gamma \in \mathbb{R}_r^r$ si ha $\Pi = (\alpha \gamma^{-1})(\beta \gamma^T)^T$.

Capitolo 3

Mercati energetici a termine

In questo capitolo introduciamo due modelli stocastici per *mercati energetici a termine* che estendono quello proposto da Edoli, Tasinato e Vargiolu [ETV13]. Il primo paragrafo è dedicato a contestualizzare la scelta, mentre nel secondo definiamo il modello generale e dimostriamo alcune proprietà elementari. Nel terzo e quarto paragrafo, poi, studiamo i modelli che si ottengono considerando due possibili alternative per la struttura a termine della volatilità dei futures. Fissiamo dunque due diverse scelte per i *coefficienti di diffusione* dei processi che rappresentano i prezzi e calibriamo i parametri da cui dipendono sui dati osservati. Il quinto paragrafo propone un metodo di interpolazione dei prezzi per superare alcune difficoltà che si possono incontrare applicando la tecnica di calibrazione. Nell'ultimo paragrafo, infine, testiamo i metodi sviluppati sulle serie storiche di importanti mercati energetici internazionali.

Il nostro approccio ha lo scopo di fornire una buona approssimazione della volatilità storica dei prezzi e delle correlazioni osservate tra i futures energetici, consentendo così di risolvere problemi di gestione del rischio o valutazione di opzioni.

3.1 Alternative per un modello dei futures energetici

I principali modelli adottati per rappresentare futures su commodity si basano sulle soluzioni proposte per i *mercati obbligazionari* nel corso degli anni '90 e che, in prima approssimazione, mettono in evidenza due tipi diversi di approccio. Il primo consiste nel considerare un modello stocastico per il tasso d'interesse spot e, da questo, derivare i prezzi delle obbligazioni attraverso la teoria dell'arbitraggio. L'alternativa, invece, è quella di introdurre direttamente la dinamica forward: i *modelli HJM*, seguendo Heath, Jarrow e Morton [HJM92], specificano l'intera curva dei tassi d'interesse; i *modelli BGM* (o *Libor Market Model*, *LMM*), introdotti da Brace, Gatarek e Musiela [BGM97], si concentrano soltanto su un sottoinsieme di tassi d'interesse forward osservabili e derivano da questi le proprietà del resto della curva. Una descrizione più approfondita del problema si trova in Musiela e Rutkowski [MR06].

Per le commodity, come abbiamo visto, esistono sia mercati spot che forward, quindi entrambe le alternative possono essere seguite. I primi importanti modelli stocastici per prezzi spot furono proposti da Schwartz [Sch97], Pilipovic [Pil98],

Schwartz e Smith [SS00]. In quest'ultimo lavoro, in particolare, gli autori utilizzano due moti browniani per rappresentare rispettivamente le variazioni a breve termine e le dinamiche a lungo termine, derivando poi i prezzi di futures ed opzioni su futures attraverso argomenti di non arbitraggio. Altri modelli sono stati sviluppati negli anni successivi, adattati a specifiche commodity, i cui ingredienti principali sono in genere una funzione deterministica per la stagionalità e fattori stocastici rappresentati da processi di Lévy. Il limite principale di questo approccio, però, è dato dalle difficoltà tecniche che intervengono quando si passa alla dinamica forward, che risulta poco trattabile. Se consideriamo l'elettricità, inoltre, si aggiunge che in questo caso il concetto di prezzo spot è problematico: da un lato, esistono diversi tipi di mercato spot (e.g. mercato del giorno prima, mercato infragiornaliero), per cui il prezzo spot non è definito univocamente; dall'altro, le difficoltà di stoccaggio rendono questi mercati poco liquidi. Ostacoli simili, anche se in misura minore, si riscontrano considerando il gas naturale. Per una rassegna dei modelli relativi ai prezzi spot elettrici, si vedano Geman et al. [EG99] e Ventosa et al. [VBR05].

L'altra linea di ricerca consiste nel descrivere direttamente i futures, derivando eventualmente in seguito, per arbitraggio, la dinamica spot. Il primo modello di tipo HJM è dovuto a Clewlow e Strickland [CS99], secondo cui il prezzo forward $F(t, T)$ nella data t con consegna in T deve soddisfare l'equazione stocastica

$$\frac{dF(t, T)}{F(t, T)} = \sigma e^{-\lambda(T-t)} dW(t) \quad (3.1)$$

con $\sigma, \lambda > 0$ e W moto browniano rispetto ad una misura neutrale al rischio. A favore della dinamica scelta, si osserva che è soddisfatto l'effetto Samuelson. Per contro, però, non sono considerate le variazioni stagionali della volatilità e tutti i futures debbono essere perfettamente correlati. Se ciò è valido per alcune commodity energetiche, come il petrolio, risulta invece poco realistico per altre, tra cui l'elettricità ed il gas naturale.

Una popolare estensione di questo modello si trova in Bjerksund et al. [BRS00], i primi ad applicare un approccio di tipo HJM ai mercati elettrici, che propongono per il prezzo forward $F(t, T)$ la seguente dinamica neutrale al rischio

$$\frac{dF(t, T)}{F(t, T)} = \sum_{p=1}^d \sigma_p(t, T) dW_p(t) \quad (3.2)$$

dove, per ogni $p = 1, \dots, d$, le funzioni σ_p devono garantire volatilità decrescente rispetto alla scadenza T e i W_p sono moti browniani indipendenti. Questo significa che il logaritmo naturale del prezzo forward ha distribuzione

$$\log F(t, T) \sim \mathcal{N} \left(\log F(t_0, T) - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^d \int_{t_0}^t \sigma_p(s, T)^2 ds, \sum_{p=1}^d \int_{t_0}^t \sigma_p(s, T)^2 ds \right)$$

con $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ la distribuzione normale di media μ e varianza σ^2 . L'equazione (3.2) richiede che siano specificati il numero dei fattori di rischio e la struttura della volatilità. Bjerksund et al. [BRS00], avendo come obiettivo il mercato elettrico scandinavo, si concentrano su due modelli, il primo ad un fattore con finalità di valutazione di opzioni su futures, il secondo a tre fattori per risolvere problemi di gestione del rischio. Altre proposte di questo tipo sono state formulate da Koekebakker [Koe03],

Koekebakker e Ollmar [KO05], Breslin et al. [BCKS08]. Modelli più complessi, ma meno trattabili, prevedono invece l'introduzione, ad esempio, di una struttura di volatilità stocastica, di processi di salto o di processi a regime variabile (*switching regime*). Questi hanno il vantaggio di rendere conto meglio della frequenza e dell'ampiezza dei picchi presenti nella volatilità storica e che, specialmente nel caso dell'elettricità, sono descritti con difficoltà dall'equazione (3.2). Una presentazione più approfondita delle proposte è presente in Benth e Koekebakker [BK05], Fanelli e Musti [FM08].

Diversamente dai modelli di tipo HJM, quelli basati sul paradigma BGM sono meno numerosi in letteratura. Esempi importanti relativi ai mercati elettrici sono forniti da Benth e Koekebakker [BK05], Kiesel et al. [KSB09], Börger [Bör08]. Seguendo questi, si descrive il prezzo $F_i(t)$ osservato in t del futures con consegna in $[\tau_i, \theta_i]$ con l'equazione

$$\frac{dF_i(t)}{F_i(t)} = \sum_{p=1}^d \sigma_{ip}(t) dW_p(t) \quad (3.3)$$

dove, al variare di $p = 1, \dots, d$, i W_p sono moti browniani indipendenti rispetto ad una misura neutrale al rischio ed $i = 1, \dots, m$ con m il numero di contratti osservati in t . Come in (3.2), sarà necessario specificare il numero dei fattori d e le componenti della volatilità σ_{ip} . Kiesel et al. [KSB09] considerano, in particolare, la scelta

$$\frac{dF_i(t)}{F_i(t)} = \alpha_1 e^{-\lambda(\tau_i-t)} dW_1(t) + \alpha_2 dW_2(t) \quad (3.4)$$

ed interpretano economicamente la prima sorgente di rischio con le variazioni di prezzo causate dall'aumento dell'attività di scambio del futures al crescere delle conoscenze relative al periodo di consegna (e.g. condizioni meteorologiche, improvvise interruzioni di forniture), mentre la seconda con l'incertezza a lungo termine sul prezzo connessa con la commodity considerata. Viene poi proposta una tecnica di calibrazione che ha lo scopo di fornire una valutazione delle opzioni sui futures del mercato. Una estensione di questo approccio si trova in Edoli, Tasinato e Vargiolu [ETV13], che considerano futures scritti su più commodity energetiche, per ciascuna delle quali vale la dinamica in (3.4). Dunque ipotizzano

$$\frac{dF_i^h(t)}{F_i^h(t)} = \alpha_1^h e^{-\lambda^h(\tau_i^h-t)} dW_1^h(t) + \alpha_2^h dW_2^h(t) \quad (3.5)$$

dove $F_i^h(t)$ è il prezzo osservato in t del futures sulla commodity h -esima con consegna in $[\tau_i, \theta_i]$ ed $i = 1, \dots, m$, $h = 1, \dots, n$. Per aumentare la flessibilità del modello, si assume che i moti browniani in $\mathbf{W}^h = (W_1^h, W_2^h)^T$ siano correlati tra loro, mentre per cogliere la struttura di correlazione tra commodity differenti, si chiede che anche $\mathbf{W}^h, \mathbf{W}^k$ lo siano. La tecnica di calibrazione introdotta da Kiesel et al. [KSB09] ha il limite di dipendere dai prezzi delle opzioni su futures, che costituiscono un mercato spesso poco liquido. Con l'obiettivo di aggirare questo ostacolo ed ottenere, in più, le correlazioni tra sorgenti di rischio, in [ETV13] si forniscono due metodi di calibrazione che utilizzano, invece, le serie storiche dei prezzi futures osservati. Anche per i modelli di tipo BGM sono presenti proposte che, a patto di aumentare le difficoltà tecniche, consentono di rappresentare con maggiore accuratezza il comportamento dei futures, in particolare elettrici. Un esempio è costituito da Fanone [Fan12], che

si occupa di un modello basato su componenti con distribuzione gaussiana normale-inversa (NIG) e fornisce una stima dei parametri sulla base dei prezzi futures osservati attraverso l'analisi delle componenti indipendenti (independent component analysis o ICA).

Analisi delle componenti principali dei dati di mercato

Concentriamoci sul modello proposto da Kiesel et al. [KSB09] descritto dall'equazione (3.3). Come anticipato, è necessario specificare il numero delle sorgenti di incertezza d e le componenti della volatilità σ_{ip} . Riguardo al primo problema, una tecnica che può essere utilizzata è l'analisi delle componenti principali (principal component analysis o PCA).

Per distinguere variabili casuali da loro realizzazioni, useremo lettere rispettivamente maiuscole e minuscole. Supponiamo che, per ogni $i = 1, \dots, m$, il prezzo F_i del futures con consegna in $[\tau_i, \theta_i]$ sia osservato nelle date $T_0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T_1$ di un intervallo $I = [T_0, T_1]$ e chiamiamo log-rendimento in $[t_{l-1}, t_l]$ la grandezza

$$\Delta X_i(t_l) := \log \left(\frac{F_i(t_l)}{F_i(t_{l-1})} \right)$$

dove $l = 1, \dots, N$. Applicando la formula di Itô ed il teorema di Girsanov all'equazione (3.3), si potrebbe dimostrare che la dinamica di ΔX_i rispetto alla misura del mondo reale è data da

$$\Delta X_i(t_l) = \int_{t_{l-1}}^{t_l} \eta_i(s) ds + \sum_{p=1}^d \int_{t_{l-1}}^{t_l} \sigma_{ip}(s) d\bar{W}_p(s) \quad (3.6)$$

con η_i una opportuna funzione e \bar{W}_p moti browniani indipendenti rispetto alla misura oggettiva, per ogni $p = 1, \dots, d$. Più avanti, nella Proposizione 3.6, svolgeremo il caso $d = 2$. Dunque gli Nm log-rendimenti sono normalmente distribuiti rispetto alla misura del mondo reale e, per ogni $i = 1, \dots, m$, le variabili casuali $\Delta X_i(t_1), \dots, \Delta X_i(t_N)$ sono *indipendenti*. Se ci limitiamo a considerare un intervallo di tempo I sufficientemente piccolo e lontano da τ_i da poter supporre costanti gli integrali nell'equazione (3.6), infine, queste sono anche *identicamente distribuite*. Introduciamo la matrice $N \times m$ delle loro realizzazioni, che chiamiamo *matrice dei dati (di mercato)*

$$\mathbf{X} := \left(x_i^l \right)_{\substack{l=1, \dots, N \\ i=1, \dots, m}} := \begin{pmatrix} \mathbf{x}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}^N \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \Delta x_1(t_1) & \cdots & \Delta x_m(t_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta x_1(t_N) & \cdots & \Delta x_m(t_N) \end{pmatrix}$$

dove $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^N$ sono le righe di \mathbf{X} , vettori m -dimensionali detti *osservazioni*. Se vale l'ipotesi enunciata in precedenza, per cui l'intervallo I è piccolo e lontano da τ_1 , possiamo considerare $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^N$ realizzazioni di variabili casuali normali indipendenti ed identicamente distribuite.

La PCA è una tecnica di riduzione delle dimensioni utilizzata spesso nello studio di modelli multi-fattoriali. Il metodo consiste nell'applicare una trasformazione lineare ortogonale allo spazio m -dimensionale contenente le osservazioni in modo che, nel nuovo sistema di riferimento, le varianze delle proiezioni delle osservazioni sugli

assi coordinati siano decrescenti, dal primo asse all'ultimo. Se la matrice (destra) $m \times m$ di questa trasformazione è la matrice ortogonale

$$E := (e_1, \dots, e_m) := \begin{pmatrix} e_1^1 & \dots & e_m^1 \\ \vdots & & \vdots \\ e_1^m & \dots & e_m^m \end{pmatrix}$$

con e_1, \dots, e_m le colonne di E , allora $X_E := (X_{e^1}, \dots, X_{e^m}) := XE$ è la matrice $N \times m$ delle osservazioni dopo la trasformazione. Per ogni $i = 1, \dots, m$, il vettore N -dimensionale $X_{e^i} = X e_i = (x^l \cdot e_i)_{l=1, \dots, N}$ contiene le proiezioni di x^1, \dots, x^N sull' i -esimo asse coordinato del nuovo riferimento ed è detta *i -esima componente principale* di X . Le componenti del vettore m -dimensionale e_i , invece, sono dette *pesi dell' i -esimo fattore (factor loadings)* di X . Se indichiamo con $\text{Var}(X_{e^i})$ la varianza campionaria (corretta) di X_{e^i} , la trasformazione ortogonale è scelta in modo che

$$\text{Var}(X_{e^1}) \geq \text{Var}(X_{e^2}) \geq \dots \geq \text{Var}(X_{e^m}) \quad (3.7)$$

Si può dimostrare che la matrice E con queste proprietà si ottiene diagonalizzando la matrice $N \times N$ delle covarianze campionarie di X , i.e. $\Omega := \text{Cov}(X) := (\text{Cov}(x^l, x^q))_{l,q=1, \dots, N}$. Infatti, poiché Ω è una matrice simmetrica reale, è sempre possibile trovare una matrice $m \times m$ ortogonale E ed una diagonale Λ tali che

$$\Omega = E\Lambda E^T$$

e gli elementi sulla diagonale di Λ , i.e. gli autovalori di Ω , siano in ordine decrescente $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_m$. Con questa scelta di E , si può dimostrare che

$$\text{Cov}(X_E) = E^T \Omega E = \Lambda$$

da cui, per ogni $i = 1, \dots, m$, vale $\text{Var}(X_{e^i}) = \text{Cov}(X_{e^i}, X_{e^i}) = \lambda_i$ e, dunque, la relazione (3.7).

Obiettivo dell'analisi è individuare quante componenti principali sono necessarie per spiegare buona parte della varianza totale di X per dedurre il numero di fattori da utilizzare nel modello. In altre parole, si cerca di approssimare la matrice delle covarianze Ω prendendo soltanto i primi $k \leq m$ autovalori in Λ e ponendo i restanti a zero. Se chiamiamo rispettivamente *percentuale di varianza spiegata dall' i -esimo fattore* e *percentuale di varianza cumulativa spiegata dai primi k fattori* le quantità

$$p_i := \frac{\text{Var}(X_{e^i})}{\sum_{j=1}^m \text{Var}(X_{e^j})}, \quad p_k^c := p_1 + \dots + p_k$$

per ogni $i, k = 1, \dots, m$, allora il *criterio della percentuale di varianza* con livello di riferimento $\alpha \in (0, 1)$ prescrive che si possano utilizzare soltanto k fattori (i.e. k variabili) per rappresentare X se $k = \min \{1 \leq h \leq m \mid p_h^c \geq \alpha\}$ è il numero minimo di componenti principali necessarie a spiegare il livello prefissato α . Negli studi empirici, una scelta tipica per il livello di riferimento è $\alpha = 95\%$.

Osservazione 3.1. Applichiamo la PCA ai *futures su gas naturale mensili* Henry Hub del mercato statunitense NYMEX. Poiché in ogni giornata di contrattazione sono disponibili i contratti relativi ai 36 mesi di consegna successivi, possiamo considerare i prezzi registrati dal 03-gen-2012 al 31-gen-2012 dei 12 futures *gen-2013*, ...

dic-2013. Poiché l'intervallo di osservazione è sufficientemente piccolo e lontano dall'inizio delle consegne, vale con buona approssimazione l'ipotesi sull'uguaglianza delle distribuzioni dei log-rendimenti richiesta dall'analisi. Utilizzando la Function 5.2, si ricava che il primo fattore spiega il 99.60% della varianza totale, mentre i primi quattro consentono di raggiungere il 99.99%, come vediamo in Figura 3.1. Riguardo al primo fattore, i pesi dello stesso segno evidenziano come una sua variazione comporti il movimento di tutta la struttura a termine nella stessa direzione, un comportamento compatibile con il significato economico che Kiesel et al. [KSB09] gli attribuiscono.

Prendiamo, poi, *futures elettrici mensili* relativi all'area Germania/Austria del mercato tedesco EEX, detti futures Phelix mensili. In questo caso, poiché ogni giorno sono scambiati soltanto i contratti relativi ai 6 mesi di consegna successivi, interpoliamo i dati per sfruttare anche le informazioni fornite dai futures trimestrali ed annuali, così da osservare in un intervallo di tempo sufficientemente lontano dall'inizio delle consegne i prezzi desiderati. Utilizzando l'algoritmo di smoothing che descriveremo nel paragrafo 3.5, possiamo considerare i prezzi registrati dal 02-gen-2012 al 31-gen-2012 dei 12 futures *gen-2013*, ..., *dic-2013*. L'analisi delle componenti principali evidenzia che i primi due fattori spiegano il 98.62% della varianza totale, mentre i primi quattro consentono di raggiungere il 99.99%, come vediamo in Figura 3.2.

Risultati analoghi si ottengono se studiamo con lo stesso metodo i *futures su gas naturale mensili* NCG del mercato tedesco EEX. Interpolando i dati con l'algoritmo di smoothing ed applicando la PCA, si ottiene la Figura 3.3, da cui notiamo come i primi due fattori spiegano il 97.31% della varianza totale ed i primi quattro, come in precedenza, raggiungono il 99.99%. ■

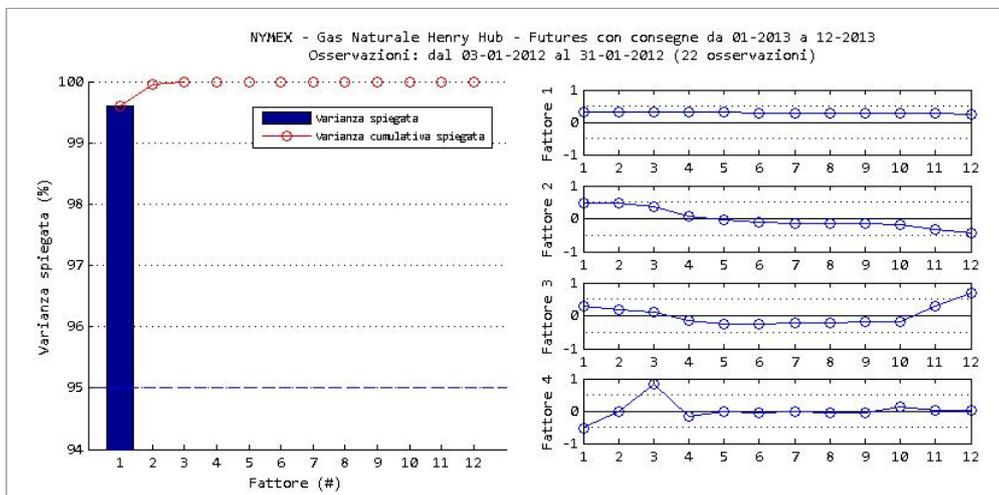


Figura 3.1: PCA per i futures elettrici mensili Henry Hub del mercato NYMEX trattati nell'Osservazione 3.1. A sinistra la varianza spiegata da ciascun fattore, a destra i pesi dei primi quattro fattori. (Fonte: elaborazione su dati Reuters)

L'osservazione precedente suggerisce che la scelta di adottare un modello a due fattori, analogo a quello descritto dall'equazione (3.3), comporti una perdita di infor-

3.2. Un modello multi-commodity a due fattori

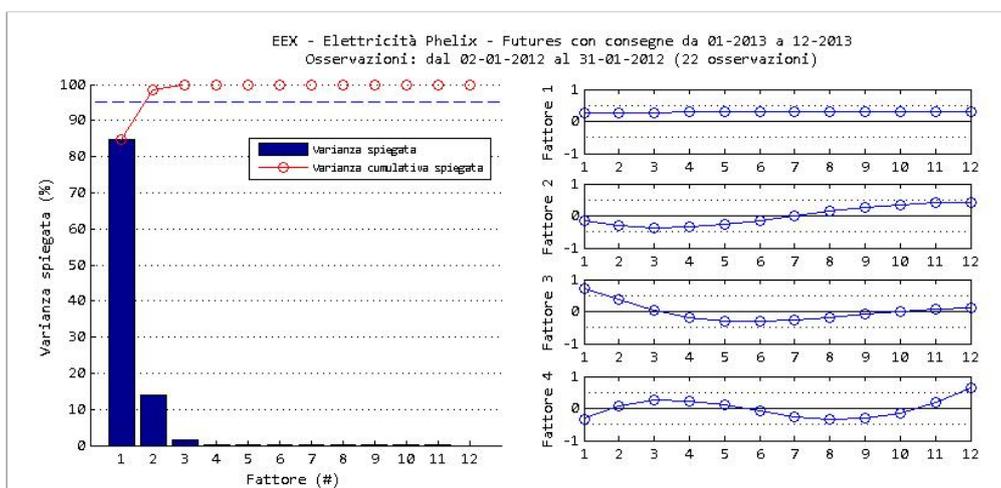


Figura 3.2: PCA per i futures elettrici mensili Phelix del mercato EEX trattati nell'Osservazione 3.1. A sinistra la varianza spiegata da ciascun fattore, a destra i pesi dei primi quattro fattori. (Fonte: elaborazione su dati EEX)

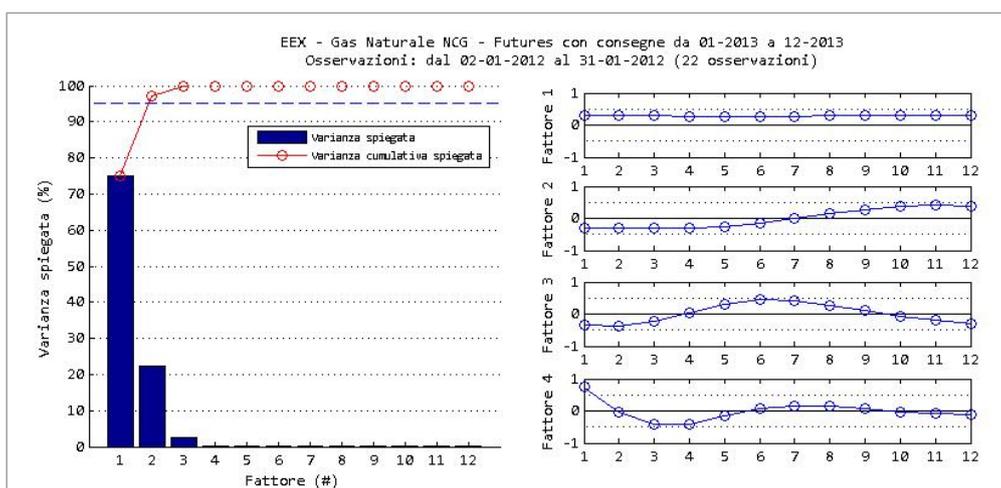


Figura 3.3: PCA per i futures su gas naturale mensili NCG del mercato EEX trattati nell'Osservazione 3.1. A sinistra la varianza spiegata da ciascun fattore, a destra i pesi dei primi quattro fattori. (Fonte: elaborazione su dati EEX)

mazione accettabile. I fattori successivi al terzo spiegano soltanto le variazioni di una piccola parte della struttura a termine e tale limite è ricompensato dalle minori difficoltà che si incontrano nella calibrazione dei parametri del modello sui prezzi osservati.

3.2 Un modello multi-commodity a due fattori

Seguendo Edoli, Tasinato, Vargiolu [ETV13], estendiamo l'approccio di Kiesel et al. [KSB09] e studiamo un mercato di futures su $n \geq 2$ commodity energetiche. Come visto nel paragrafo precedente, i prezzi saranno rappresentati da moti browniani

geometrici bidimensionali con volatilità deterministica (non costante). In particolare, assumeremo che tutti i futures sulla stessa commodity condividano le due medesime sorgenti di rischio, interpretandole rispettivamente con l'incertezza sul prezzo nel breve e lungo periodo. Ipotizzeremo, infine, che i due fattori che guidano una commodity siano correlati, sia tra loro, che con i restanti, introducendo $2n$ moti browniani correlati. Dopo aver descritto alcune proprietà generali di questo modello, estenderemo in due modi differenti l'equazione (3.5) e ne calibreremo i parametri utilizzando una delle due tecniche descritte in [ETV13], quella basata sulla covarianza quadratica.

Ci limitiamo a considerare *commodity energetiche di flusso*, come elettricità o gas naturale, per le quali le difficoltà di stoccaggio costringono ad una regolazione su intervalli di tempo, piuttosto che su date specifiche. Quando non diversamente specificato, con il termine *commodity* ci riferiamo solo a questo particolare tipo. L'unità di misura relativa ai prezzi varierà in funzione della commodity (e.g. €/MWh per i futures elettrici).

D'ora in avanti, indichiamo con $I = [T_0, T_1]$ un intervallo temporale, che interpretiamo come il periodo di osservazione dei prezzi futures, e misureremo il tempo in giorni. Adottiamo, per ogni $n \in \mathbb{Z}, n \geq 1$, la convenzione $\underline{n} := \{1, \dots, n\}$.

Iniziamo definendo una struttura di consegna per il nostro modello di mercato, i.e. gli intervalli di tempo su cui sono regolati i contratti. Assumiamo, senza perdere di generalità, che questa sia la medesima per tutte le commodity e chiediamo sia costituita da periodi consecutivi di uguale durata. Ciò affinché abbia senso far guidare dagli stessi fattori di rischio futures su un fissato sottostante, ma con consegne diverse.

Definizione 3.2. Siano $m \in \mathbb{Z}, m \geq 2$ e $\Delta > 0$. Chiamiamo $\mathcal{C} = \{J_i\}_{i \in \underline{m}}$ *struttura di consegna posteriore ad I* se, per ogni $i \in \underline{m}$, si ha $J_i = [\tau_i, \theta_i]$ e valgono le seguenti proprietà:

- $\tau_1 \geq T_1$
- $\forall i \in \underline{m} : \theta_i - \tau_i = \Delta$
- $\forall i \in \underline{m-1} : \theta_i = \tau_{i+1}$

Ci riferiamo a J_i come all' i -esimo *periodo di consegna* di \mathcal{C} .

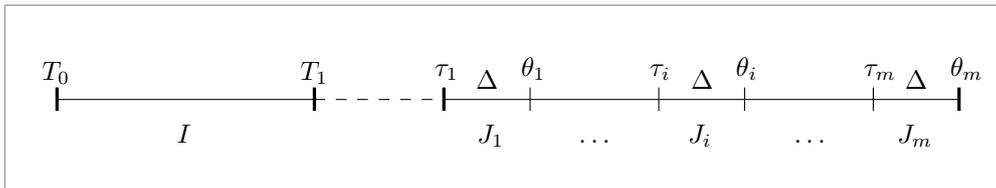


Figura 3.4: Intervallo di osservazione I e struttura di consegna $\mathcal{C} = \{J_i\}_{i \in \underline{m}}$ posteriore ad I

Fissiamo, d'ora in avanti, anche \mathcal{C} una struttura di consegna posteriore ad I . Nei mercati reali, come sappiamo, i futures su commodity hanno in genere periodi di consegna settimanali, mensili, trimestrali ed annuali ($\Delta = 7, 30, 90, 365$ giorni). Sia $n \in \mathbb{Z}, n \geq 2$.

Definizione 3.3. Diciamo che $\mathcal{M} = (\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}, P, Q, \overline{W}, \{F^h\}_{h \in \underline{n}})$ è un *mercato energetico a termine* con struttura di consegna \mathcal{C} osservato in I , o brevemente \mathcal{C} -MET su I , se valgono le seguenti proprietà:

M1 $(\Omega, P) := (\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}, P)$ è uno spazio di probabilità filtrato standard con $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{T_1}$, $\overline{W} = (\overline{W}_1^1, \overline{W}_2^1, \dots, \overline{W}_1^m, \overline{W}_2^m)^T$ è un $2n$ -moto browniano correlato su (Ω, \mathcal{F}, P) ed $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^{\overline{W}}$ per ogni $t \in I$. Chiamiamo P *misura oggettiva* o *misura del mondo reale* di \mathcal{M} .

M2 Per ogni $h \in \underline{n}$, la funzione $F^h = (F_1^h, \dots, F_m^h)^T$ è un processo stocastico vettoriale a valori in $(\mathbb{R}^+)^m$ definito su $I \times \Omega$. Per ogni $(h, i) \in \underline{n} \times \underline{m}$, chiamiamo F_i^h il *prezzo del futures* sulla commodity h -esima con consegna in J_i e chiediamo sia il processo di Itô che soddisfa

$$\frac{dF_i^h(t)}{F_i^h(t)} = \mu_i^h(t) dt + \sigma_{i1}^h(t) d\overline{W}_1^h(t) + \sigma_{i2}^h(t) d\overline{W}_2^h(t) \quad \text{in } I \quad (3.8)$$

dove $\mu_i^h \in \mathbb{L}_{\text{loc}}^1(I, \Omega)$ e $\sigma_{i1}^h, \sigma_{i2}^h \in L^2(I)$ sono funzioni deterministiche. Il processo $\overline{W}^h := (\overline{W}_1^h, \overline{W}_2^h)^T$ è un moto browniano 2-dimensionale correlato su (Ω, \mathcal{F}, P) con $\rho^h := \text{Cor}(\overline{W}_1^h, \overline{W}_2^h) \in [-1, 1]$.

M3 Q è una misura di probabilità su $(\Omega, \mathcal{F}_{T_1})$ tale che, per ogni $(h, i) \in \underline{n} \times \underline{m}$, si ha $Q \sim_{\mathcal{F}_{T_1}} P$ ed F_i^h è una martingala su $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}, Q)$. Chiamiamo Q *misura neutrale al rischio* o *misura martingala equivalente* di \mathcal{M} .

Chiariamo il significato della richiesta M3 mostrando, in modo intuitivo, che l'esistenza di una misura neutrale al rischio è necessaria se assumiamo che il mercato sia *libero da arbitraggi*. A questo scopo, supponiamo che il *tasso d'interesse privo di rischio* di \mathcal{M} sia rappresentato da una funzione deterministica $r \in L^1(I)$. Fissati $h \in \underline{n}$ ed $i \in \underline{m}$, consideriamo il futures sulla commodity h -esima con consegna in $J_i = [\tau_i, \theta_i]$ ed indichiamo con $S^h \in \mathbb{L}_{\text{loc}}^1(J_i, \Omega)$ il *prezzo spot* di riferimento (e.g. il prezzo sul mercato del giorno prima). Se il contratto stipulato in $t \in I$ è di tipo *finanziario*, come abbiamo osservato nel paragrafo 1.2 la sua regolazione avviene in θ_i ed il saldo nell'operazione, dal punto di vista dell'acquirente, è dato da

$$P_i^h(t) := \int_{\tau_i}^{\theta_i} (S^h(u) - F_i^h(t)) du$$

Nell'ipotesi di assenza di arbitraggi, in t il valore dello scambio deve essere nullo, per cui si ha

$$\mathbb{E}^Q \left(e^{-\int_t^{\theta_i} r(s) ds} P_i^h(t) \mid \mathcal{F}_t \right) = 0$$

per una qualche Q misura di probabilità equivalente a P . Notando che il fattore di sconto $e^{-\int_t^{\theta_i} r(u) du}$ è una costante deterministica strettamente positiva, ciò è equivalente a

$$\mathbb{E}^Q (P_i^h(t) \mid \mathcal{F}_t) = 0$$

In virtù della proprietà M2 il prezzo futures $F_i^h(t)$ è \mathcal{F}_t -misurabile, quindi si ottiene

$$F_i^h(t) = \mathbb{E}^Q \left(\frac{1}{\theta_i - \tau_i} \int_{\tau_i}^{\theta_i} S^h(u) du \mid \mathcal{F}_t \right)$$

da cui, per la Proposizione 2.15, il processo F_i^h è una Q -martingala su Ω . Se invece il futures stipulato in t è di tipo *fisico*, la regolazione avviene nell'intervallo $[\tau_i, \theta_i]$, in cui la commodity dal valore $S^h(u)$, $u \in [\tau_i, \theta_i]$, viene scambiata con il prezzo futures $F_i^h(t)$. Assumendo ancora un mercato libero da arbitraggi, in t il valore della transazione deve essere nullo, perciò

$$\mathbb{E}^Q \left(\int_{\tau_i}^{\theta_i} e^{-\int_t^u r(s) ds} (S^h(u) - F_i^h(t)) du \mid \mathcal{F}_t \right) = 0$$

Moltiplicando per la costante deterministica strettamente positiva $e^{-\int_{T_0}^t r(s) ds}$, possiamo riscrivere la precedente come

$$\mathbb{E}^Q \left(\int_{\tau_i}^{\theta_i} e^{-\int_{T_0}^u r(s) ds} (S^h(u) - F_i^h(t)) du \mid \mathcal{F}_t \right) = 0$$

Se poniamo

$$C_i := \int_{\tau_i}^{\theta_i} e^{-\int_{T_0}^u r(s) ds} du$$

e ricordiamo che il prezzo futures $F_i^h(t)$ è \mathcal{F}_t -misurabile, si deriva

$$F_i^h(t) = \mathbb{E}^Q \left(\frac{1}{C_i} \int_{\tau_i}^{\theta_i} e^{-\int_{T_0}^u r(s) ds} S^h(u) du \mid \mathcal{F}_t \right)$$

Segue dunque, come nel caso precedente, che il processo F_i^h è una Q -martingala su Ω per la Proposizione 2.15.

Prima di specificare una struttura della volatilità per il nostro modello, fornendo esplicitamente le funzioni σ_{i1}^h e σ_{i2}^h , dimostriamo alcune proprietà generali, indipendenti da questa scelta. Possiamo anticipare, però, che uno dei due fattori di rischio rappresenterà movimenti di prezzo temporanei, causati da shock di breve periodo, come problemi di approvvigionamento improvvisi o eventi meteorologici inattesi. L'altro, invece, sarà responsabile di cambiamenti con conseguenze sul lungo periodo, variazioni strutturali nel prezzo delle commodity per effetto, ad esempio, dell'introduzione di nuove tecnologie, dell'ottimizzazione delle risorse o di nuovi equilibri geopolitici.

Per iniziare a studiare un mercato energetico a termine, introduciamo alcune grandezze che lo caratterizzano e saranno importanti nel seguito. Ricordiamo che si indicano, per ogni $n, m \geq 1$, con \mathbb{R}_m^n l'algebra delle matrici reali $n \times m$ e con $\mathbb{R}^n := \mathbb{R}_1^n$, $\mathbb{R}_m := \mathbb{R}_m^1$ rispettivamente lo spazio dei vettori colonna n -dimensionali e dei vettori riga m -dimensionali.

Definizione 3.4. Sia \mathcal{M} un \mathcal{C} -MET su I . Per ogni $(h, i) \in \underline{n} \times \underline{m}$ definiamo la *volatilità locale* di F_i^h come

$$\Sigma_i^h := \sqrt{(\sigma_{i1}^h)^2 + 2\rho^h \sigma_{i1}^h \sigma_{i2}^h + (\sigma_{i2}^h)^2} \in \mathbb{R}^I$$

Poniamo $X_i^h := \log(F_i^h)$ e lo chiamiamo *log-prezzo* del futures h -esimo con consegna in J_i . X_i^h è un processo stocastico ben definito, poiché F_i^h è strettamente positivo.

Per ogni $h, k \in \underline{n}$, siano

$$\begin{aligned}\rho_{ab}^{hk} &:= \text{Cor}(W_a^h, W_b^k) \in \mathbb{R}, \quad \text{per ogni } a, b \in \underline{2} \\ \rho^{hk} &:= \text{Cor}(\mathbf{W}^h, \mathbf{W}^k) = (\rho_{ab}^{hk})_{a,b \in \underline{2}} = \begin{pmatrix} \rho_{11}^{hk} & \rho_{12}^{hk} \\ \rho_{21}^{hk} & \rho_{22}^{hk} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_2^2 \\ \rho &:= \text{Cor}(\mathbf{W}) = (\rho^{hk})_{h,k \in \underline{n}} \in \mathbb{R}_{2n}^{2n}\end{aligned}$$

Applicando il teorema di Girsanov si può derivare la dinamica di F_i^h neutrale al rischio, mostrando come il drift sia nullo, i coefficienti di diffusione siano gli stessi e i moti browniani rispetto alla misura martingala equivalente abbiano coefficienti di correlazione identici a quelli che intervengono nella dinamica dell'equazione (3.8).

Proposizione 3.5. *Se \mathcal{M} è un C-MET su I ed $(h, i) \in \underline{n} \times \underline{m}$, allora vale*

$$\frac{dF_i^h(t)}{F_i^h(t)} = \sigma_{i1}^h(t) dW_1^h(t) + \sigma_{i2}^h(t) dW_2^h(t) \quad \text{in } I \quad (3.9)$$

dove $\mathbf{W}^h := (W_1^h, W_2^h)^\top$ è un moto browniano 2-dimensionale correlato su (Ω, \mathcal{F}, Q) con coefficiente di correlazione $\rho^h = \text{Cor}(W_1^h, W_2^h) \in [-1, 1]$.

Dimostrazione: Il prezzo futures F_i^h è, per la proprietà M2 della definizione di mercato energetico a termine, il processo di Itô che soddisfa per ogni $t \in I$

$$\begin{aligned}\frac{dF_i^h(t)}{F_i^h(t)} &= \mu_i^h(t) dt + \sigma_{i1}^h(t) d\bar{W}_1^h(t) + \sigma_{i2}^h(t) d\bar{W}_2^h(t) = \\ &= \mu_i^h(t) dt + \sigma_i^h(t) d\bar{\mathbf{W}}^h(t)\end{aligned} \quad (3.10)$$

dove $\bar{\mathbf{W}}^h := (\bar{W}_1^h, \bar{W}_2^h)^\top$ è un vettore di moti browniani correlati su (Ω, \mathcal{F}, P) e $\sigma_i^h := (\sigma_{i1}^h, \sigma_{i2}^h)$. Per definizione di moto browniano correlato, esistono $\widehat{\mathbf{W}}^h := (\widehat{W}_1^h, \widehat{W}_2^h)^\top$ un vettore di moti browniani indipendenti e Γ^h una matrice 2×2 con righe a norma unitaria tali che $\bar{\mathbf{W}}^h = \Gamma^h \widehat{\mathbf{W}}^h$. Sostituendo nella precedente equazione deduciamo

$$\frac{dF_i^h(t)}{F_i^h(t)} = \mu_i^h(t) dt + \sigma_i^h(t) \Gamma^h d\widehat{\mathbf{W}}^h(t) \quad \text{in } I \quad (3.11)$$

Ora ricordiamo che $Q \sim_{\mathcal{F}_{T_1}} P$ per la proprietà M3, quindi in particolare $Q \ll_{\mathcal{F}_{T_1}} P$ e possiamo considerare il processo Z delle densità di Q rispetto a P definito da

$$Z_t := \frac{dQ}{dP} \Big|_{\mathcal{F}_t}$$

per ogni $t \in I$. Per la Proposizione 2.32, esiste $\theta^h = (\theta_1^h, \theta_2^h)^\top \in \mathbb{L}_{\text{loc}}^2(I, \Omega; \mathbb{R}^2)$ tale che $Z = Z^{\theta^h, \widehat{\mathbf{W}}^h}$ e $E^P(Z_{T_1}^{\theta^h, \widehat{\mathbf{W}}^h}) = 1$. Poiché sono soddisfatte le ipotesi del Teorema di Girsanov 2.31, esiste $\widetilde{\mathbf{W}}^h := (\widetilde{W}_1^h, \widetilde{W}_2^h)^\top$ un moto browniano bidimensionale su $(\Omega, \mathcal{F}_{T_1}, Q)$ tale che

$$d\widetilde{\mathbf{W}}^h(t) = \theta^h(t) dt + d\widehat{\mathbf{W}}^h(t) \quad \text{in } I$$

Se adesso definiamo $\mathbf{W}^h := \Gamma^h \widehat{\mathbf{W}}^h$, questo è un moto browniano 2-dimensionale correlato con coefficiente di correlazione $\text{Cor}(W_1^h, W_2^h) = \Gamma_{12}^h = \text{Cor}(\overline{W}_1^h, \overline{W}_2^h) = \rho^h$. Torniamo all'equazione (3.11) e, sostituendo quanto ricavato, osserviamo che

$$\begin{aligned} \frac{dF_i^h(t)}{F_i^h(t)} &= \mu_i^h(t) dt + \sigma_i^h(t) \Gamma^h \left(\boldsymbol{\theta}^h(t) dt + d\widehat{\mathbf{W}}^h(t) \right) = \\ &= (\mu_i^h(t) + \sigma_i^h(t) \Gamma^h \boldsymbol{\theta}^h(t)) dt + \sigma_i^h(t) d\mathbf{W}^h(t) \end{aligned}$$

per ogni $t \in I$. Ricordiamo che F_i^h è una Q -martingala su Ω per la proprietà M3, quindi applicando la Proposizione 2.24 si ottiene che il drift deve essere nullo

$$\mu_i^h(t) + \sigma_i^h(t) \Gamma^h \boldsymbol{\theta}^h(t) = 0 \quad \text{in } I$$

Come desiderato, se ne deduce che

$$\frac{dF_i^h(t)}{F_i^h(t)} = \sigma_i^h(t) d\mathbf{W}^h(t) \quad \text{in } I$$

■

Dall'ipotesi che i prezzi futures siano moti browniani geometrici segue, utilizzando la formula di Itô della Proposizione 2.28, che la loro dinamica è log-normale. D'ora in poi, perciò, sarà più conveniente studiare i log-prezzi futures, processi stocastici che soddisfano le seguenti equazioni.

Proposizione 3.6. *Se \mathcal{M} è un C-MET su I , $(h, i) \in \underline{n} \times \underline{m}$ ed $\eta_i^h(t) := \mu_i^h(t) - \frac{\Sigma_i^h(t)^2}{2}$ in I , allora*

$$dX_i^h(t) = \eta_i^h(t) dt + \sigma_{i1}^h(t) d\overline{W}_1^h(t) + \sigma_{i2}^h(t) d\overline{W}_2^h(t) \quad \text{in } I$$

$$dX_i^h(t) = -\frac{\Sigma_i^h(t)^2}{2} dt + \sigma_{i1}^h(t) dW_1^h(t) + \sigma_{i2}^h(t) dW_2^h(t) \quad \text{in } I$$

Segue che

$$E^Q(X_i^h(t)) = X_i^h(T_0) - \frac{1}{2} \int_{T_0}^t \Sigma_i^h(s)^2 ds \quad \text{in } I \quad (3.12)$$

$$\text{Var}^Q(X_i^h(t)) = \int_{T_0}^t \Sigma_i^h(s)^2 ds \quad \text{in } I \quad (3.13)$$

Dimostrazione: Per definizione, F_i^h è il processo di Itô definito dall'equazione differenziale stocastica

$$\frac{dF_i^h(t)}{F_i^h(t)} = \mu_i^h(t) dt + \sigma_{i1}^h(t) d\overline{W}_1^h(t) + \sigma_{i2}^h(t) d\overline{W}_2^h(t) \quad \text{in } I \quad (3.14)$$

dove $\overline{\mathbf{W}}^h := (\overline{W}_1^h, \overline{W}_2^h)^T$ è un vettore di moti browniani correlati rispetto ad (Ω, \mathcal{F}, P) con $\rho^h = \text{Cor}(\overline{W}_1^h, \overline{W}_2^h)$. Applicando la formula di Itô della Proposizione 2.28 al processo F_i^h ed alla funzione $U(t, x) = \log(x)$, per ogni $t \in I$ si ottiene

$$dX_i^h(t) = d(\log F_i^h(t)) = \frac{1}{F_i^h(t)} dF_i^h(t) - \frac{1}{2F_i^h(t)^2} d\langle F_i^h \rangle_t \quad (3.15)$$

Occupiamoci di calcolare il processo variazione quadratica $\langle F_i^h \rangle$. Per definizione di moto browniano correlato, esistono $\widetilde{W}^h := (\widetilde{W}_1^h, \widetilde{W}_2^h)^T$ un vettore di moti browniani indipendenti e Γ^h una matrice 2×2 con righe a norma unitaria tali che $\overline{W}^h = \Gamma^h \widetilde{W}^h$. Dunque, se poniamo $\sigma_i^h := (\sigma_{i1}^h, \sigma_{i2}^h)$, si ha

$$\begin{aligned} dF_i^h(t) &= F_i^h(t) \left[\mu_i^h(t) dt + \sigma_i^h(t) d\overline{W}^h(t) \right] = F_i^h(t) \left[\mu_i^h(t) dt + \sigma_i^h(t) \Gamma^h d\widetilde{W}^h(t) \right] = \\ &= F_i^h(t) \left[\mu_i^h(t) dt + |\sigma_i^h(t) \Gamma^h| dW^*(t) \right] \end{aligned}$$

dove W^* è un moto browniano rispetto ad (Ω, \mathcal{F}, P) ed abbiamo indicato con $|\cdot|$ la norma euclidea su \mathbb{R}_2 . Ora osserviamo

$$\begin{aligned} |\sigma_i^h \Gamma^h|^2 &= (\sigma_i^h \Gamma^h)(\sigma_i^h \Gamma^h)^T = \sigma_i^h \Gamma^h (\Gamma^h)^T (\sigma_i^h)^T = \sigma_i^h \text{Cor}(\overline{W}^h) (\sigma_i^h)^T = \\ &= \sigma_i^h \begin{pmatrix} 1 & \rho^h \\ \rho^h & 1 \end{pmatrix} (\sigma_i^h)^T = \sigma_i^h \begin{pmatrix} \sigma_{i1}^h + \rho^h \sigma_{i2}^h \\ \rho^h \sigma_{i1}^h + \sigma_{i2}^h \end{pmatrix} = (\sigma_{i1}^h)^2 + 2\rho^h \sigma_{i1}^h \sigma_{i2}^h + (\sigma_{i2}^h)^2 = \\ &= (\Sigma_i^h)^2 \end{aligned}$$

Deduciamo quindi che $dF_i^h(t) = F_i^h(t) [\mu_i^h(t) dt + \Sigma_i^h(t) dW^*(t)]$, da cui segue per la [Proposizione 2.21](#) che il processo variazione quadratica soddisfa l'equazione $d\langle F_i^h \rangle_t = F_i^h(t)^2 \Sigma_i^h(t)^2 dt$. Sostituendo questa relazione e l'equazione [\(3.14\)](#) nella [\(3.15\)](#), deriviamo l'espressione desiderata

$$\begin{aligned} dX_i^h(t) &= \mu_i^h(t) dt + \sigma_{i1}^h(t) d\overline{W}_1^h(t) + \sigma_{i2}^h(t) d\overline{W}_2^h(t) - \frac{1}{2} \Sigma_i^h(t)^2 dt = \\ &= \eta_i^h(t) dt + \sigma_{i1}^h(t) d\overline{W}_1^h(t) + \sigma_{i2}^h(t) d\overline{W}_2^h(t) \end{aligned}$$

Ragionando in modo del tutto analogo, ma partendo dalla dinamica neutrale al rischio espressa dall'equazione [\(3.9\)](#), si può ricavare il secondo risultato

$$dX_i^h(t) = -\frac{\Sigma_i^h(t)^2}{2} dt + \sigma_{i1}^h(t) dW_1^h(t) + \sigma_{i2}^h(t) dW_2^h(t) \quad \text{in } I$$

dove $(W_1^h, W_2^h)^T$ è un vettore di moti browniani correlati rispetto ad $(\Omega, \mathcal{F}_{T_1}, Q)$. Se esprimiamo l'equazione precedente in forma integrale, per ogni $t \in I$ otteniamo

$$X_i^h(t) = X_i^h(T_0) - \frac{1}{2} \int_{T_0}^t \Sigma_i^h(s)^2 ds + \int_{T_0}^t \sigma_{i1}^h(s) dW_1^h(s) + \int_{T_0}^t \sigma_{i2}^h(s) dW_2^h(s)$$

Osserviamo che vale la [Proposizione 2.13](#) per le funzioni $\sigma_{i1}^h, \sigma_{i2}^h \in L^2(I) \subseteq \mathbb{L}^2(I, \Omega)$, quindi la relazione [\(2.3\)](#) garantisce che l'aspettazione dei due integrali stocastici nel membro di destra sia nulla, da cui segue l'equazione desiderata [\(3.12\)](#). Consideriamo infine la varianza del log-prezzo, applicando questa volta la relazione [\(2.4\)](#) e la

generalizzazione a moti browniani correlati della (2.5). Si dimostra in questo modo:

$$\begin{aligned}
 \text{Var}^Q(X_i^h(t)) &= \text{Var}\left(\int_{T_0}^t \sigma_{i1}^h(s) dW_1^h(s) + \int_{T_0}^t \sigma_{i2}^h(s) dW_2^h(s)\right) = \\
 &= \text{Var}\left(\int_{T_0}^t \sigma_{i1}^h(s) dW_1^h(s)\right) + \text{Var}\left(\int_{T_0}^t \sigma_{i2}^h(s) dW_2^h(s)\right) + \\
 &\quad + 2 \text{Cov}\left(\int_{T_0}^t \sigma_{i1}^h(s) dW_1^h(s), \int_{T_0}^t \sigma_{i2}^h(s) dW_2^h(s)\right) = \\
 &= \int_{T_0}^t \sigma_{i1}^h(s)^2 ds + \int_{T_0}^t \sigma_{i2}^h(s)^2 ds + 2\rho^h \int_{T_0}^t \sigma_{i1}^h(s)\sigma_{i2}^h(s) ds \stackrel{\text{Def. 3.4}}{=} \\
 &= \int_{T_0}^t \Sigma_i^h(s)^2 ds
 \end{aligned}$$

■

Applichiamo ora la definizione di variazione e covariazione quadratica al caso dei log-prezzi, occupandoci di provare che, poiché il modello ha volatilità deterministica, questi si possono rappresentare come integrali classici. Ricordiamo che abbiamo indicato l'insieme delle *partizioni* dell'intervallo $I = [T_0, T_1]$ con

$$\text{Prt}(I) := \{\pi = (t_0, \dots, t_N) \in \mathbb{R}_{N+1} \mid N \geq 1, T_0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T_1\}$$

e con $|\pi| := \max_{l \in \underline{N}} (t_l - t_{l-1})$ l'*ampiezza* o *passo* della partizione π . Abbiamo rappresentato poi l'insieme delle partizioni *equispaziate* di passo $\varepsilon > 0$ con

$$\text{Prt}(I, \varepsilon) := \{\pi = (t_0, \dots, t_N) \in \text{Prt}(I) \mid \forall l \in \underline{N} : t_l - t_{l-1} = \varepsilon\}$$

Definizione 3.7. Siano \mathcal{M} un \mathcal{C} -MET su I ed $(h, i), (k, j) \in \underline{n} \times \underline{m}$. Data $\pi = (t_0, \dots, t_N) \in \text{Prt}(I)$ ed $l \in \underline{N}$, definiamo

$$\Delta X_i^h(t_l) := X_i^h(t_l) - X_i^h(t_{l-1}) = \log\left(\frac{F_i^h(t_l)}{F_i^h(t_{l-1})}\right)$$

il *log-rendimento* del futures h -esimo con consegna in J_i nell'intervallo $[t_{l-1}, t_l]$. Se $t_l - t_{l-1}$ è uguale ad un giorno, $\Delta X_i^h(t_l)$ è detto *log-rendimento giornaliero*. Chiamiamo *covariazione quadratica* di X_i^h ed X_j^k in I rispetto ad (Ω, P)

$$\langle X_i^h, X_j^k \rangle_I := \langle X_i^h, X_j^k \rangle_{T_1} = \lim_{|\pi| \rightarrow 0} \sum_{\pi \in \text{Prt}(I)} \sum_{l \in \underline{N}} \Delta X_i^h(t_l) \Delta X_j^k(t_l) \quad \text{q.c. in } (\Omega, P)$$

e *variazione quadratica* di X_i^h in I rispetto ad (Ω, P)

$$\langle X_i^h \rangle_I := \langle X_i^h \rangle_{T_1} = \langle X_i^h, X_i^h \rangle_I = \lim_{|\pi| \rightarrow 0} \sum_{\pi \in \text{Prt}(I)} \sum_{l \in \underline{N}} \Delta X_i^h(t_l)^2 \quad \text{q.c. in } (\Omega, P)$$

Per ottenere la caratterizzazione delle covariazioni quadratiche che desideriamo, dobbiamo introdurre i seguenti strumenti.

Definizione 3.8. Se \mathcal{M} è un \mathcal{C} -MET su I ed $(h, i), (k, j) \in \underline{n} \times \underline{m}$, allora siano

$$\mathbf{R}^{hk} := \begin{pmatrix} \rho^{hh} & \rho^{hk} \\ \rho^{kh} & \rho^{kk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \rho^h & \rho_{11}^{hk} & \rho_{12}^{hk} \\ \rho^h & 1 & \rho_{21}^{hk} & \rho_{22}^{hk} \\ \rho_{11}^{kh} & \rho_{12}^{kh} & 1 & \rho^k \\ \rho_{21}^{kh} & \rho_{22}^{kh} & \rho^k & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_4^4$$

$$\sigma_{ij}^{hk} := (\sigma_{i1}^h, \sigma_{i2}^h, \sigma_{j1}^k, \sigma_{j2}^k) \in (\mathbb{R}_4)^I$$

$$\Sigma_{ij}^{hk} := \sqrt{\sigma_{ij}^{hk} \mathbf{R}^{hk} (\sigma_{ij}^{hk})^T} \in \mathbb{R}^I, \quad \Sigma_{ij}^h := \Sigma_{ij}^{hh} \in \mathbb{R}^I$$

$$\Lambda_{ij}^{hk} := \frac{1}{2} [(\Sigma_{ij}^{hk})^2 - (\Sigma_i^h)^2 - (\Sigma_j^k)^2] \in \mathbb{R}^I, \quad \Lambda_{ij}^h := \Lambda_{ij}^{hh} \in \mathbb{R}^I$$

In seguito sarà necessario disporre di una espressione esplicita per le Λ_{ij}^{hk} , quindi ci occupiamo subito del calcolo.

Proposizione 3.9. Se \mathcal{M} è un \mathcal{C} -MET su I ed $(h, i), (k, j) \in \underline{n} \times \underline{m}$, allora

$$\Lambda_{ij}^h = \sigma_{i1}^h \sigma_{j1}^h + \rho^h (\sigma_{i1}^h \sigma_{j2}^h + \sigma_{i2}^h \sigma_{j1}^h) + \sigma_{i2}^h \sigma_{j2}^h \quad (3.16)$$

$$\Lambda_{ij}^{hk} = \rho_{11}^{hk} \sigma_{i1}^h \sigma_{j1}^k + \rho_{12}^{hk} \sigma_{i1}^h \sigma_{j2}^k + \rho_{21}^{hk} \sigma_{i2}^h \sigma_{j1}^k + \rho_{22}^{hk} \sigma_{i2}^h \sigma_{j2}^k \quad (3.17)$$

Dimostrazione: Proviamo per prima la relazione (3.17). Osserviamo che la matrice reale \mathbf{R}^{hk} è simmetrica poiché $\rho_{a,b}^{hk} = \text{Cor}(W_a^h, W_b^k) = \text{Cor}(W_b^k, W_a^h) = \rho_{b,a}^{kh}$ per ogni $a, b \in \underline{2}$. Dalla definizione di Σ_{ij}^{hk} otteniamo dunque

$$\begin{aligned} (\Sigma_{ij}^{hk})^2 &= \sigma_{ij}^{hk} \mathbf{R}^{hk} (\sigma_{ij}^{hk})^T = \sum_{r,s \in \underline{4}} (\mathbf{R}^{hk})_{rs} (\sigma_{ij}^{hk})_r (\sigma_{ij}^{hk})_s = \\ &= \sum_{r \in \underline{4}} (\mathbf{R}^{hk})_{rr} [(\sigma_{ij}^{hk})_r]^2 + 2 \sum_{r < s} (\mathbf{R}^{hk})_{rs} (\sigma_{ij}^{hk})_r (\sigma_{ij}^{hk})_s = \\ &= \sum_{r \in \underline{4}} [(\sigma_{ij}^{hk})_r]^2 + 2(\sigma_{ij}^{hk})_1 \sum_{s=2}^4 (\mathbf{R}^{hk})_{1,s} (\sigma_{ij}^{hk})_s + 2(\sigma_{ij}^{hk})_2 \sum_{s=3}^4 (\mathbf{R}^{hk})_{2,s} (\sigma_{ij}^{hk})_s + \\ &\quad + 2(\mathbf{R}^{hk})_{3,4} (\sigma_{ij}^{hk})_3 (\sigma_{ij}^{hk})_4 = \\ &= (\sigma_{i1}^h)^2 + (\sigma_{i2}^h)^2 + (\sigma_{j1}^k)^2 + (\sigma_{j2}^k)^2 + 2\sigma_{i1}^h (\rho^h \sigma_{i2}^h + \rho_{11}^{hk} \sigma_{j1}^k + \rho_{12}^{hk} \sigma_{j2}^k) + \\ &\quad + 2\sigma_{i2}^h (\rho_{21}^{hk} \sigma_{j1}^k + \rho_{22}^{hk} \sigma_{j2}^k) + 2\rho^k \sigma_{j1}^k \sigma_{j2}^k \end{aligned}$$

Sostituendo quanto calcolato in Λ_{ij}^{hk} e ricordando le definizioni di Σ_i^h, Σ_j^k , segue

$$\begin{aligned} \Lambda_{ij}^{hk} &= \frac{1}{2} [(\Sigma_{ij}^{hk})^2 - (\Sigma_i^h)^2 - (\Sigma_j^k)^2] = \frac{1}{2} [(\sigma_{i1}^h)^2 + (\sigma_{i2}^h)^2 + (\sigma_{j1}^k)^2 + (\sigma_{j2}^k)^2 + \\ &\quad + 2\sigma_{i1}^h (\rho^h \sigma_{i2}^h + \rho_{11}^{hk} \sigma_{j1}^k + \rho_{12}^{hk} \sigma_{j2}^k) + 2\sigma_{i2}^h (\rho_{21}^{hk} \sigma_{j1}^k + \rho_{22}^{hk} \sigma_{j2}^k) + 2\rho^k \sigma_{j1}^k \sigma_{j2}^k - \\ &\quad - (\sigma_{i1}^h)^2 - 2\rho^h \sigma_{i1}^h \sigma_{i2}^h - (\sigma_{i2}^h)^2 - (\sigma_{j1}^k)^2 - 2\rho^k \sigma_{j1}^k \sigma_{j2}^k - (\sigma_{j2}^k)^2] = \\ &= \rho_{11}^{hk} \sigma_{i1}^h \sigma_{j1}^k + \rho_{12}^{hk} \sigma_{i1}^h \sigma_{j2}^k + \rho_{21}^{hk} \sigma_{i2}^h \sigma_{j1}^k + \rho_{22}^{hk} \sigma_{i2}^h \sigma_{j2}^k \end{aligned}$$

Per dimostrare la relazione (3.16) è sufficiente applicare la precedente e ricordare che, per definizione, $\Lambda_{ij}^h = \Lambda_{ij}^{hh}$ e $\rho_{11}^{hh} = \rho_{22}^{hh} = 1, \rho_{12}^{hh} = \rho_{21}^{hh} = \rho^h$. ■

Dimostriamo che variazione e covariazione quadratica si possono esprimere come integrali delle funzioni Σ_i^h e Λ_{ij}^{hk} definite sopra.

Proposizione 3.10 (Rappresentazione integrale delle covariazioni quadratiche). *Se \mathcal{M} è un C-MET su I ed $(h, i), (k, j) \in \underline{n} \times \underline{m}$, allora*

$$\langle X_i^h \rangle_I = \int_I \Sigma_i^h(s)^2 ds \quad (3.18)$$

$$\langle X_i^h, X_j^k \rangle_I = \int_I \Lambda_{ij}^{hk}(s) ds \quad (3.19)$$

Dimostrazione: Proviamo l'equazione (3.18). Per la Proposizione 3.6, la dinamica di X_i^h rispetto alla misura oggettiva, al variare di t in I , è data da

$$dX_i^h(t) = \eta_i^h(t) dt + \sigma_{i1}^h(t) d\overline{W}_1^h(t) + \sigma_{i2}^h(t) d\overline{W}_2^h(t)$$

Poiché $\overline{W}^h := (\overline{W}_1^h, \overline{W}_2^h)^T$ è un vettore di moti browniani correlati, per definizione esistono $\widetilde{W}^h := (\widetilde{W}_1^h, \widetilde{W}_2^h)^T$ un vettore di moti browniani indipendenti e Γ^h una matrice 2×2 con righe a norma unitaria tali che $\overline{W}^h = \Gamma^h \widetilde{W}^h$. Dunque, se poniamo $\sigma_i^h := (\sigma_{i1}^h, \sigma_{i2}^h)$, si ha

$$\begin{aligned} dX_i^h(t) &= \eta_i^h(t) dt + \sigma_i^h(t) d\overline{W}^h(t) = \eta_i^h(t) dt + \sigma_i^h(t) \Gamma^h d\widetilde{W}^h(t) = \\ &= \eta_i^h(t) dt + |\sigma_i^h(t) \Gamma^h| dW^*(t) \end{aligned}$$

dove W^* è un moto browniano rispetto ad (Ω, \mathcal{F}, P) . Ora osserviamo

$$\begin{aligned} |\sigma_i^h \Gamma^h|^2 &= (\sigma_i^h \Gamma^h)(\sigma_i^h \Gamma^h)^T = \sigma_i^h \Gamma^h (\Gamma^h)^T (\sigma_i^h)^T = \sigma_i^h \text{Cor}(\overline{W}^h) (\sigma_i^h)^T = \\ &= \sigma_i^h \begin{pmatrix} 1 & \rho^h \\ \rho^h & 1 \end{pmatrix} (\sigma_i^h)^T = \sigma_i^h \begin{pmatrix} \sigma_{i1}^h + \rho^h \sigma_{i2}^h \\ \rho^h \sigma_{i1}^h + \sigma_{i2}^h \end{pmatrix} = (\sigma_{i1}^h)^2 + 2\rho^h \sigma_{i1}^h \sigma_{i2}^h + (\sigma_{i2}^h)^2 = \\ &= (\Sigma_i^h)^2 \end{aligned}$$

Segue perciò che $dX_i^h(t) = \eta_i^h(t) dt + \Sigma_i^h(t) dW^*(t)$, da cui deriviamo l'equazione (3.18) per la Proposizione 2.21.

Per dimostrare la seconda relazione, applichiamo l'identità di polarizzazione della Proposizione 2.27 ai log-prezzi ottenendo

$$\langle X_i^h, X_j^k \rangle_I = \frac{1}{2} [\langle X_i^h + X_j^k \rangle_I - \langle X_i^h \rangle_I - \langle X_j^k \rangle_I] \quad (3.20)$$

Dobbiamo quindi calcolare la variazione quadratica della somma $X_i^h + X_j^k$. Siano $\eta_{ij}^{hk} := \eta_i^h + \eta_j^k$ e $\overline{W}^{hk} := (\overline{W}_1^h, \overline{W}_2^h, \overline{W}_1^k, \overline{W}_2^k)^T$. Poiché quest'ultimo è un vettore di moti browniani correlati, esistono $\widetilde{W}^{hk} := (\widetilde{W}_1^h, \widetilde{W}_2^h, \widetilde{W}_1^k, \widetilde{W}_2^k)^T$ un vettore di moti browniani indipendenti e Γ^{hk} una matrice 4×4 con righe a norma unitaria tali che $\overline{W}^{hk} = \Gamma^{hk} \widetilde{W}^{hk}$. Per la Proposizione 3.6, la dinamica di $X_i^h + X_j^k$ rispetto alla misura oggettiva, per ogni $t \in I$, è data da

$$\begin{aligned} d(X_i^h + X_j^k) &= \eta_{ij}^{hk}(t) dt + \sigma_{ij}^{hk}(t) d\overline{W}^{hk}(t) = \eta_{ij}^{hk}(t) dt + \sigma_{ij}^{hk}(t) \Gamma^{hk} d\widetilde{W}^{hk}(t) = \\ &= \eta_{ij}^{hk}(t) dt + |\sigma_{ij}^{hk}(t) \Gamma^{hk}| dW^{**}(t) \end{aligned}$$

dove W^{**} è un moto browniano rispetto ad (Ω, \mathcal{F}, P) . In analogia con la prima parte della dimostrazione, osserviamo che

$$\begin{aligned} |\sigma_{ij}^{hk} \Gamma^{hk}|^2 &= (\sigma_{ij}^{hk} \Gamma^{hk})(\sigma_{ij}^{hk} \Gamma^{hk})^\top = \sigma_{ij}^{hk} \Gamma^{hk} (\Gamma^{hk})^\top (\sigma_{ij}^{hk})^\top = \\ &= \sigma_{ij}^{hk} \text{Cor}(\overline{W}^{hk})(\sigma_{ij}^{hk})^\top = \sigma_{ij}^{hk} R^{hk} (\sigma_{ij}^{hk})^\top = (\Sigma_{ij}^{hk})^2 \end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione precedente, si ottiene

$$d(X_i^h + X_j^k) = \eta_{ij}^{hk}(t) dt + \Sigma_{ij}^{hk} dW^{**}(t)$$

Se applichiamo la Proposizione 2.21 ad $X_i^h + X_j^k$ ed utilizziamo il risultato, insieme con (3.18), nell'equazione (3.20), deriviamo l'espressione desiderata

$$\langle X_i^h, X_j^k \rangle_I = \frac{1}{2} \left[\int_I \Sigma_{ij}^{hk}(s)^2 ds - \int_I \Sigma_i^h(s)^2 ds - \int_I \Sigma_j^k(s)^2 ds \right] = \int_I \Lambda_{ij}^{hk}(s) ds$$

■

Un'ultima proprietà generale del modello che sarà utile in seguito è una caratterizzazione della varianza dei log-rendimenti rispetto alla misura oggettiva, ancora in termini dell'integrale della varianza locale.

Proposizione 3.11 (Rappresentazione integrale della varianza dei log-rendimenti). *Siano \mathcal{M} un C-MET su I ed $(h, i) \in \underline{n} \times \underline{m}$. Se $\pi = (t_0, \dots, t_N) \in \text{Prt}(I)$, allora*

$$\forall l \in \underline{N} : \text{Var}^P(\Delta X_i^h(t_l)) = \int_{t_{l-1}}^{t_l} \Sigma_i^h(s)^2 ds$$

Dimostrazione: Ricordiamo che la dinamica rispetto alla misura oggettiva dei log-prezzi futures è descritta, per la Proposizione 3.6, dall'equazione

$$dX_i^h(t) = \eta_i^h(t) dt + \sigma_{i1}^h(t) d\overline{W}_1^h(t) + \sigma_{i2}^h(t) d\overline{W}_2^h(t) \quad \text{in } I$$

Rileggendo in termini di integrali la precedente per $t = t_{l-1}, t_l$, si deriva

$$\begin{aligned} \Delta X_i^h(t_l) &= X_i^h(t_l) - X_i^h(t_{l-1}) = \\ &= \int_{t_{l-1}}^{t_l} \eta_i^h(s) ds + \int_{t_{l-1}}^{t_l} \sigma_{i1}^h(s) d\overline{W}_1^h(s) + \int_{t_{l-1}}^{t_l} \sigma_{i2}^h(s) d\overline{W}_2^h(s) \end{aligned}$$

Osserviamo che $\int_{t_{l-1}}^{t_l} \eta_i^h(s) ds$ è una costante reale, per cui la varianza del log-rendimento si riduce alla varianza della somma dei due integrali stocastici. Applicando la formula sulla varianza della somma di due variabili casuali, la relazione (2.4) della Proposizione 2.13 e la generalizzazione della (2.5) al caso di moti browniani

correlati della stessa Proposizione, dimostriamo

$$\begin{aligned}
 \text{Var}^P(\Delta X_i^h(t_l)) &= \text{Var}\left(\int_{t_{l-1}}^{t_l} \sigma_{i1}^h(s) d\bar{W}_1^h(s) + \int_{t_{l-1}}^{t_l} \sigma_{i2}^h(s) d\bar{W}_2^h(s)\right) = \\
 &= \text{Var}\left(\int_{t_{l-1}}^{t_l} \sigma_{i1}^h(s) d\bar{W}_1^h(s)\right) + \text{Var}\left(\int_{t_{l-1}}^{t_l} \sigma_{i2}^h(s) d\bar{W}_2^h(s)\right) + \\
 &\quad + 2 \text{Cov}\left(\int_{t_{l-1}}^{t_l} \sigma_{i1}^h(s) d\bar{W}_1^h(s), \int_{t_{l-1}}^{t_l} \sigma_{i2}^h(s) d\bar{W}_2^h(s)\right) = \\
 &= \int_{t_{l-1}}^{t_l} \sigma_{i1}^h(s)^2 ds + \int_{t_{l-1}}^{t_l} \sigma_{i2}^h(s)^2 ds + 2\rho^h \int_{t_{l-1}}^{t_l} \sigma_{i1}^h(s)\sigma_{i2}^h(s) ds \stackrel{\text{Def. 3.4}}{=} \\
 &= \int_{t_{l-1}}^{t_l} \Sigma_i^h(s)^2 ds
 \end{aligned}$$

■

3.3 Mercati energetici a termine di tipo 1

Presentiamo ora due possibili strutture di volatilità per il nostro modello, specificando altrettante scelte delle funzioni σ_{i1}^h e σ_{i2}^h . Abbiamo implementato le tecniche di cui discuteremo nei restanti paragrafi attraverso function MATLAB, raccolte e descritte nel capitolo 5.

Ricordiamo che è stato fissato $I = [T_0, T_1]$ l'intervallo temporale in cui sono osservati i prezzi dei futures e $\mathcal{C} = \{J_i\}_{i \in \underline{m}}$ una struttura di consegna posteriore ad I . Iniziamo, dunque, introducendo il primo tipo di mercato energetico a termine di cui ci occupiamo.

Definizione 3.12. Siano \mathcal{M} un \mathcal{C} -MET su I ed $(h, i) \in \underline{n} \times \underline{m}$. Il prezzo F_i^h del futures sulla commodity h -esima con consegna in J_i è il processo di Itô che soddisfa l'equazione

$$\frac{dF_i^h(t)}{F_i^h(t)} = \sigma_{i1}^h(t) dW_1^h(t) + \sigma_{i2}^h(t) dW_2^h(t) \quad \text{in } I$$

dove $W^h := (W_1^h, W_2^h)$ è un moto browniano 2-dimensionale correlato su (Ω, \mathcal{F}, Q) con coefficiente di correlazione $\rho^h := \text{Cor}(W_1^h, W_2^h) \in [-1, 1]$.

Diciamo che \mathcal{M} è di tipo 1 se

$$\begin{aligned}
 \sigma_{i1}^h(t) &:= [\alpha_0^h + \alpha_1^h \cos(\omega\tau_i + \varphi^h)] e^{-\lambda^h(\tau_i - t)} \quad \text{in } I \\
 \sigma_{i2}^h(t) &:= \alpha_2^h \quad \text{in } I
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

con $\omega := 2\pi/365$, $\alpha_0^h, \alpha_1^h, \alpha_2^h, \varphi^h \in \mathbb{R}$ e $\lambda^h \in \mathbb{R}^+$. Definiamo il vettore dei *parametri* di \mathcal{M} relativi alla commodity h -esima $\mathbf{p}^h := (\alpha_0^h, \alpha_1^h, \alpha_2^h, \rho^h, \varphi^h, \lambda^h)$, mentre ricordiamo che la matrice dei parametri sulle correlazioni tra commodity è $\rho^{hk} := (\rho_{ab}^{hk})_{a,b \in \underline{2}}$. Chiamiamo σ_{i1}^h e σ_{i2}^h *componenti della volatilità* di F_i^h .

Esempio 3.13. Per fissare le idee sul comportamento dei futures relativi alla generica commodity h -esima, consideriamo una specifica assegnazione dei parametri

e visualizziamo una traiettoria di F_i^h per ogni $i \in \underline{m}$. Sia $I = [T_0, T_1]$ l'intervallo di osservazione con estremi $T_0 = 01\text{-gen-2012}$, $T_1 = 31\text{-dic-2012}$ e supponiamo la struttura di consegna \mathcal{C} sia costituita dai tre mesi $J_1 = \text{gen-2013}$, $J_2 = \text{feb-2013}$, $J_3 = \text{mar-2013}$. Fissiamo i parametri per la commodity h -esima:

$$\begin{array}{l|l} \alpha_0^h=0.0080 & \varphi^h=3\pi/2 \\ \alpha_1^h=0.0080 & \lambda^h=0.80/365 \\ \alpha_2^h=0.0100 & \rho^h=0.10 \end{array} \quad (3.22)$$

e stabiliamo che i prezzi iniziali siano gli stessi $F_1^h(T_0) = F_2^h(T_0) = F_3^h(T_0) = 60 \text{ €/MWh}$ (scegliamo l'unità di misura per futures elettrici). Chiediamo le osservazioni siano giornaliere, dunque che avvengano sulla partizione equispaziata (t_0, \dots, t_N) di I con $N = 251$ (adottiamo la convenzione finanziaria sul numero di giornate lavorative). Possiamo applicare la Function 5.4, così da generare, per ogni $i \in \underline{3}$, una traiettoria neutrale al rischio dei prezzi con consegna in J_i osservati nelle date specificate. I tre grafici delle funzioni $t_l \mapsto F_i^h(t_l)(\bar{\omega})$, con $\bar{\omega} \in \Omega$, sono in Figura 3.5. ■

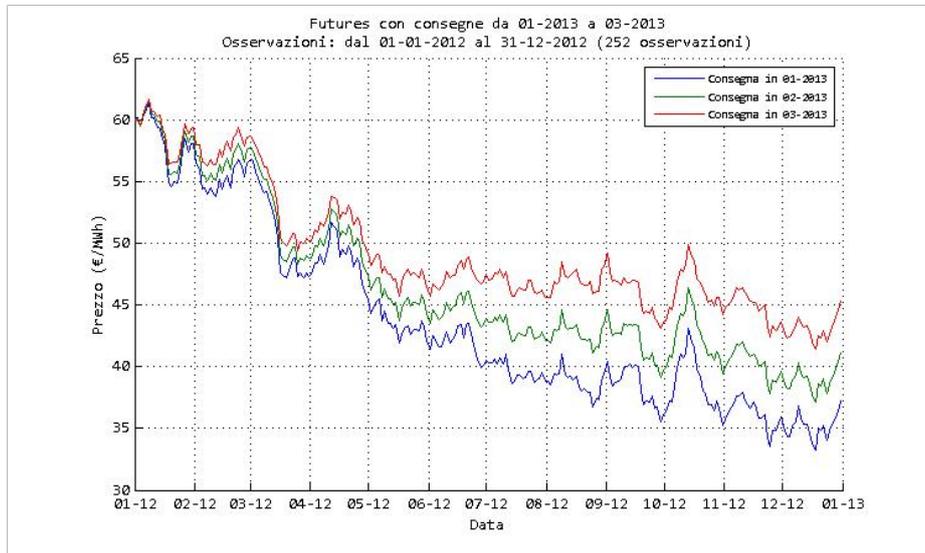


Figura 3.5: Simulazione delle traiettorie dei prezzi futures su una singola commodity dell'Esempio 3.13.

Torniamo al modello e notiamo che la scelta delle componenti della volatilità è in accordo con quanto anticipato sul significato delle sorgenti di rischio. Il primo fattore, infatti, rappresenta shock di breve periodo, variazioni improvvise e temporanee dei prezzi causate da eventi inattesi. Poiché le informazioni disponibili sul periodo di consegna aumentano al trascorrere del tempo, ci aspettiamo che queste fasi di grande incertezza siano più frequenti in prossimità della regolazione, causando un aumento della volatilità. La funzione σ_{i1}^h , coerentemente, per la presenza dell'esponenziale determina un effetto di questo genere. In più, il coseno consente di descrivere la stagionalità di futures sulla stessa commodity, ma con intervalli di consegna differenti (e.g. futures elettrici con consegna in gennaio ed agosto più volatili di quelli relativi ai restanti mesi).

Il secondo fattore, invece, rappresenta cambiamenti di lungo periodo, variazioni strutturali nei prezzi. In accordo con questo significato, la funzione σ_{i2}^h è una costante che definisce il valore a cui tende la volatilità quando ci si allontana dalla consegna, una grandezza caratteristica della commodity in questione.

Queste considerazioni, per il momento soltanto intuitive, suggeriscono che il modello soddisfi sia l'effetto *Samuelson* che la *stagionalità della volatilità*, due importanti proprietà sperimentali anticipate nel paragrafo 1.4. Nella Proposizione 3.19, più avanti, avremo una conferma formale di tale comportamento, specificando sotto quali ipotesi si verifica.

3.3.1 Proprietà elementari

Il nostro obiettivo è calibrare i parametri $(p^h)_{h \in \underline{n}}$ e $\rho = (\rho^{hk})_{h,k \in \underline{n}}$ sui dati osservati. Siamo interessati, in particolare, ad ottenere una buona approssimazione delle *volatilità storiche* dei futures del mercato reale attraverso le *volatilità teoriche* dedotte dal modello calibrato. Una buona previsione consente di utilizzare il metodo per risolvere problemi di gestione del rischio, come il calcolo del VaR di un portafoglio di futures su commodity, o di valutazione delle opzioni su questi contratti.

Nella Proposizione 3.10 abbiamo dimostrato che, poiché il coefficiente di diffusione dei log-prezzi X_i^h è deterministico, lo sono anche le loro covariazioni quadratiche rispetto alla misura oggettiva. Questo fornisce l'idea per la strategia di calibrazione che adotteremo. Ricordando la definizione

$$\langle X_i^h, X_j^k \rangle_I = \lim_{\substack{|\pi| \rightarrow 0 \\ \pi \in \text{Prt}(I)}} \sum_{l \in \underline{N}} \Delta X_i^h(t_l) \Delta X_j^k(t_l) \quad \text{q.c. in } (\Omega, P)$$

osserviamo che il membro di sinistra può essere considerato, per la Proposizione 3.10, come una funzione deterministica dei parametri del modello, mentre quello di destra è approssimato dalla *covarianza quadratica empirica* dei dati di mercato $\sum_{l \in \underline{N}} \Delta x_i^h(t_l) \Delta x_j^k(t_l)$, dove $\pi = (t_0, \dots, t_N)$ è la partizione di I su cui sono osservati i prezzi. L'approssimazione sarà tanto migliore quanto più frequenti saranno le osservazioni. Determinando i parametri che minimizzano una qualche distanza tra le covarianze quadratiche teoriche e quelle empiriche, potremo dunque calibrare il modello.

Con questo obiettivo, calcoliamo gli integrali che consentono di esplicitare la dipendenza di $\langle X_i^h, X_j^k \rangle_I$ da $(p^h)_{h \in \underline{n}}$ e ρ . Iniziamo dal caso di futures scritti sulla stessa commodity, i.e. $h = k$, mostrando la relazione funzionale che lega $\langle X_i^h, X_j^h \rangle_I$ a p^h . Prima di dare l'enunciato, introduciamo i coefficienti che compariranno in questa formula.

Definizione 3.14. Siano \mathcal{M} un C-MET di tipo 1 su I , $h \in \underline{n}$ ed $i, j \in \underline{m}$. Per ogni $t \in I$, poniamo

$$G_1^{hij}(t) := \frac{e^{-\lambda^h(\tau_i - t)}}{\lambda^h}, \quad G_2^{hij}(t) := \frac{e^{-\lambda^h(\tau_j - t)}}{\lambda^h}, \quad G_3^{hij}(t) := \frac{e^{-\lambda^h(\tau_i + \tau_j - 2t)}}{2\lambda^h}$$

Definiamo poi i coefficienti

$$\begin{aligned}
 a_{ij}^h &:= G_3^{hij}(T_1) - G_3^{hij}(T_0) \\
 b_{ij}^h &:= \cos(\omega\tau_i + \varphi^h) \cos(\omega\tau_j + \varphi^h) \left[G_3^{hij}(T_1) - G_3^{hij}(T_0) \right] \\
 c_{ij}^h &:= T_1 - T_0 \\
 d_{ij}^h &:= [\cos(\omega\tau_i + \varphi^h) + \cos(\omega\tau_j + \varphi^h)] \left[G_3^{hij}(T_1) - G_3^{hij}(T_0) \right] \\
 e_{ij}^h &:= \left[G_1^{hij}(T_1) - G_1^{hij}(T_0) \right] + \left[G_2^{hij}(T_1) - G_2^{hij}(T_0) \right] \\
 f_{ij}^h &:= \cos(\omega\tau_i + \varphi^h) \left[G_1^{hij}(T_1) - G_1^{hij}(T_0) \right] + \cos(\omega\tau_j + \varphi^h) \left[G_2^{hij}(T_1) - G_2^{hij}(T_0) \right]
 \end{aligned}$$

È importante fare attenzione perché, nonostante sia stata omessa per semplicità di notazione, esiste una dipendenza (non polinomiale) dei coefficienti $a_{ij}^h, \dots, f_{ij}^h$ dai parametri φ^h, λ^h . Dimostriamo che $\langle X_i^h, X_j^h \rangle_I$ è, invece, una funzione polinomiale dei parametri $\alpha_0^h, \alpha_1^h, \alpha_2^h, \rho^h$ ed, in particolare, una forma quadratica rispetto ad $\alpha_0^h, \alpha_1^h, \alpha_2^h$.

Proposizione 3.15 (Covarianza quadratica di X_i^h, X_j^h). *Se \mathcal{M} è un C-MET di tipo 1 su I , $h \in \underline{n}$ ed $i, j \in \underline{m}$, allora*

$$\langle X_i^h, X_j^h \rangle_I = a_{ij}^h (\alpha_0^h)^2 + b_{ij}^h (\alpha_1^h)^2 + c_{ij}^h (\alpha_2^h)^2 + d_{ij}^h \alpha_0^h \alpha_1^h + e_{ij}^h \rho^h \alpha_0^h \alpha_2^h + f_{ij}^h \rho^h \alpha_1^h \alpha_2^h$$

Dimostrazione: Per alleggerire la notazione, poiché ci concentriamo su una singola commodity, omettiamo la dipendenza da h . Ricordando le Proposizioni 3.9 e 3.10, possiamo esprimere la covarianza quadratica rispetto alla misura oggettiva come

$$\begin{aligned}
 \langle X_i, X_j \rangle_I &\stackrel{\text{Prp. 3.10}}{=} \int_I \Lambda_{ij}^{hh}(s) \, ds \stackrel{\text{Def. 3.8}}{=} \int_I \Lambda_{ij}^h(s) \, ds \stackrel{\text{Prp. 3.9}}{=} \\
 &= \int_I \sigma_{i1}(s) \sigma_{j1}(s) + \rho [\sigma_{i1}(s) \sigma_{j2}(s) + \sigma_{i2}(s) \sigma_{j1}(s)] + \sigma_{i2}(s) \sigma_{j2}(s) \, ds \stackrel{\text{Def. 3.12}}{=} \\
 &= [\alpha_0 + \alpha_1 \cos(\omega\tau_i + \varphi)] [\alpha_0 + \alpha_1 \cos(\omega\tau_j + \varphi)] \int_I e^{-\lambda(\tau_i + \tau_j - 2s)} \, ds + \\
 &\quad + \rho \alpha_2 [\alpha_0 + \alpha_1 \cos(\omega\tau_i + \varphi)] \int_I e^{-\lambda(\tau_i - s)} \, ds + \\
 &\quad + \rho \alpha_2 [\alpha_0 + \alpha_1 \cos(\omega\tau_j + \varphi)] \int_I e^{-\lambda(\tau_j - s)} \, ds + \\
 &\quad + \alpha_2^2 \int_I \, ds = \\
 &= \alpha_0^2 \int_I e^{-\lambda(\tau_i + \tau_j - 2s)} \, ds + \alpha_1^2 \cos(\omega\tau_i + \varphi) \cos(\omega\tau_j + \varphi) \int_I e^{-\lambda(\tau_i + \tau_j - 2s)} \, ds + \\
 &\quad + \alpha_2^2 \int_I \, ds + \alpha_0 \alpha_1 [\cos(\omega\tau_i + \varphi) + \cos(\omega\tau_j + \varphi)] \int_I e^{-\lambda(\tau_i + \tau_j - 2s)} \, ds + \\
 &\quad + \rho \alpha_0 \alpha_2 \left(\int_I e^{-\lambda(\tau_i - s)} \, ds + \int_I e^{-\lambda(\tau_j - s)} \, ds \right) + \\
 &\quad + \rho \alpha_1 \alpha_2 \left(\cos(\omega\tau_i + \varphi) \int_I e^{-\lambda(\tau_i - s)} \, ds + \cos(\omega\tau_j + \varphi) \int_I e^{-\lambda(\tau_j - s)} \, ds \right)
 \end{aligned}$$

Se definiamo $\bar{a}_{ij}, \bar{b}_{ij}, \bar{c}_{ij}, \bar{d}_{ij}, \bar{e}_{ij}, \bar{f}_{ij}$ rispettivamente con i coefficienti di $\alpha_0^2, \alpha_1^2, \alpha_2^2, \alpha_0\alpha_1, \rho\alpha_0\alpha_2$ e $\rho\alpha_1\alpha_2$ nell'ultimo membro dell'equazione precedente, possiamo riscrivere la covarianza quadratica come

$$\langle X_i, X_j \rangle_I = \alpha_0^2 \bar{a}_{ij} + \alpha_1^2 \bar{b}_{ij} + \alpha_2^2 \bar{c}_{ij} + \alpha_0 \alpha_1 \bar{d}_{ij} + \rho \alpha_0 \alpha_2 \bar{e}_{ij} + \rho \alpha_1 \alpha_2 \bar{f}_{ij} \quad (3.23)$$

Le primitive degli integrali che compaiono nei coefficienti segnati sono le funzioni G_a^{ij} . Infatti si osserva facilmente

$$\begin{aligned} \int e^{-\lambda(\tau_i-s)} ds &= \frac{e^{-\lambda(\tau_i-s)}}{\lambda} = G_1^{ij}(s), & \int e^{-\lambda(\tau_j-s)} ds &= \frac{e^{-\lambda(\tau_j-s)}}{\lambda} = G_2^{ij}(s) \\ \int e^{-\lambda(\tau_i+\tau_j-2s)} ds &= \frac{e^{-\lambda(\tau_i+\tau_j-2s)}}{2\lambda} = G_3^{ij}(s) \end{aligned}$$

Applicando il teorema fondamentale del calcolo, mostriamo che i coefficienti segnati coincidono con quelli della Definizione 3.14

$$\begin{aligned} \bar{a}_{ij} &= \int_I e^{-\lambda(\tau_i+\tau_j-2s)} ds = G_3^{ij}(T_1) - G_3^{ij}(T_0) = a_{ij} \\ \bar{b}_{ij} &= \cos(\omega\tau_i + \varphi) \cos(\omega\tau_j + \varphi) \int_I e^{-\lambda(\tau_i+\tau_j-2s)} ds = \\ &= \cos(\omega\tau_i + \varphi) \cos(\omega\tau_j + \varphi) [G_3^{ij}(T_1) - G_3^{ij}(T_0)] = b_{ij} \\ \bar{c}_{ij} &= T_1 - T_0 = c_{ij} \\ \bar{d}_{ij} &= [\cos(\omega\tau_i + \varphi) + \cos(\omega\tau_j + \varphi)] \int_I e^{-\lambda(\tau_i+\tau_j-2s)} ds = \\ &= [\cos(\omega\tau_i + \varphi) + \cos(\omega\tau_j + \varphi)] [G_3^{ij}(T_1) - G_3^{ij}(T_0)] = d_{ij} \\ \bar{e}_{ij} &= \int_I e^{-\lambda(\tau_i-s)} ds + \int_I e^{-\lambda(\tau_j-s)} ds = \\ &= [G_1^{ij}(T_1) - G_1^{ij}(T_0)] + [G_2^{ij}(T_1) - G_2^{ij}(T_0)] = e_{ij} \\ \bar{f}_{ij} &= \cos(\omega\tau_i + \varphi) \int_I e^{-\lambda(\tau_i-s)} ds + \cos(\omega\tau_j + \varphi) \int_I e^{-\lambda(\tau_j-s)} ds = \\ &= \cos(\omega\tau_i + \varphi) [G_1^{ij}(T_1) - G_1^{ij}(T_0)] + \cos(\omega\tau_j + \varphi) [G_2^{ij}(T_1) - G_2^{ij}(T_0)] = \\ &= f_{ij} \end{aligned}$$

Se utilizziamo le precedenti uguaglianze nell'equazione (3.23), otteniamo il risultato desiderato

$$\langle X_i, X_j \rangle_I = \alpha_0^2 a_{ij} + \alpha_1^2 b_{ij} + \alpha_2^2 c_{ij} + \alpha_0 \alpha_1 d_{ij} + \rho \alpha_0 \alpha_2 e_{ij} + \rho \alpha_1 \alpha_2 f_{ij}$$

■

Passiamo, poi, al caso di futures scritti su due commodity differenti, mettendo in evidenza la dipendenza di $\langle X_i^h, X_j^k \rangle_I$ da $\rho^{hk} = (\rho_{ab}^{hk})_{a,b \in \underline{2}}$. Definiamo in anticipo i coefficienti che compariranno nella covarianza quadratica.

Definizione 3.16. Siano \mathcal{M} un \mathcal{C} -MET di tipo 1 su I ed $(h, i), (k, j) \in \underline{n} \times \underline{m}$. Per ogni $t \in I$, poniamo

$$G_1^{hki j}(t) := \frac{e^{-\lambda^h(\tau_i - t)}}{\lambda^h}, \quad G_2^{hki j}(t) := \frac{e^{-\lambda^k(\tau_j - t)}}{\lambda^k}$$

$$G_3^{hki j}(t) := \frac{e^{-\lambda^h(\tau_i - t) - \lambda^k(\tau_j - t)}}{\lambda^h + \lambda^k}$$

Definiamo poi i coefficienti

$$A_{ij}^{hk} := [\alpha_0^h + \alpha_1^h \cos(\omega\tau_i + \varphi^h)] [\alpha_0^k + \alpha_1^k \cos(\omega\tau_j + \varphi^k)] [G_3^{hki j}(T_1) - G_3^{hki j}(T_0)]$$

$$B_{ij}^{hk} := \alpha_2^k [\alpha_0^h + \alpha_1^h \cos(\omega\tau_i + \varphi^h)] [G_1^{hki j}(T_1) - G_1^{hki j}(T_0)]$$

$$C_{ij}^{hk} := \alpha_2^h [\alpha_0^k + \alpha_1^k \cos(\omega\tau_j + \varphi^k)] [G_2^{hki j}(T_1) - G_2^{hki j}(T_0)]$$

$$D_{ij}^{hk} := \alpha_2^h \alpha_2^k (T_1 - T_0)$$

A differenza di quanto osservato per la Definizione 3.14, nei coefficienti $A_{ij}^{hk}, B_{ij}^{hk}, C_{ij}^{hk}, D_{ij}^{hk}$ compaiono i parametri delle due commodity coinvolte $\mathbf{p}^h, \mathbf{p}^k$, ma nessuna delle variabili che vogliamo esplicitare ρ_{ab}^{hk} con $a, b \in \underline{2}$. Proviamo, dunque, che $\langle X_i^h, X_j^k \rangle_I$ è una funzione lineare di queste ultime.

Proposizione 3.17 (Covarianza quadratica di X_i^h, X_j^k). *Se \mathcal{M} è un \mathcal{C} -MET di tipo 1 su I ed $(h, i), (k, j) \in \underline{n} \times \underline{m}$, allora*

$$\langle X_i^h, X_j^k \rangle_I = A_{ij}^{hk} \rho_{11}^{hk} + B_{ij}^{hk} \rho_{12}^{hk} + C_{ij}^{hk} \rho_{21}^{hk} + D_{ij}^{hk} \rho_{22}^{hk}$$

Dimostrazione: Applichiamo le Proposizioni 3.10 e 3.9 alla covarianza quadratica rispetto alla misura oggettiva per ottenere

$$\begin{aligned} \langle X_i^h, X_j^k \rangle_I &= \int_I \Lambda_{ij}^{hk}(s) ds = \\ &= \int_I \rho_{11}^{hk} \sigma_{i1}^h(s) \sigma_{j1}^k(s) + \rho_{12}^{hk} \sigma_{i1}^h(s) \sigma_{j2}^k(s) + \rho_{21}^{hk} \sigma_{i2}^h(s) \sigma_{j1}^k(s) + \rho_{22}^{hk} \sigma_{i2}^h(s) \sigma_{j2}^k(s) ds \stackrel{\text{Def 3.12}}{=} \\ &= \rho_{11}^{hk} [\alpha_0^h + \alpha_1^h \cos(\omega\tau_i + \varphi^h)] [\alpha_0^k + \alpha_1^k \cos(\omega\tau_j + \varphi^k)] \int_I e^{-\lambda^h(\tau_i - s) - \lambda^k(\tau_j - s)} ds + \\ &\quad + \rho_{12}^{hk} \alpha_2^k [\alpha_0^h + \alpha_1^h \cos(\omega\tau_i + \varphi^h)] \int_I e^{-\lambda^h(\tau_i - s)} ds + \\ &\quad + \rho_{21}^{hk} \alpha_2^h [\alpha_0^k + \alpha_1^k \cos(\omega\tau_j + \varphi^k)] \int_I e^{-\lambda^k(\tau_j - s)} ds + \\ &\quad + \rho_{22}^{hk} \alpha_2^h \alpha_2^k \int_I ds \stackrel{\text{Def 3.16}}{=} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \rho_{11}^{hk} [\alpha_0^h + \alpha_1^h \cos(\omega\tau_i + \varphi^h)] [\alpha_0^k + \alpha_1^k \cos(\omega\tau_j + \varphi^k)] [G_3^{hki j}(T_1) - G_3^{hki j}(T_0)] + \\
 &\quad + \rho_{12}^{hk} \alpha_2^k [\alpha_0^h + \alpha_1^h \cos(\omega\tau_i + \varphi^h)] [G_1^{hki j}(T_1) - G_1^{hki j}(T_0)] + \\
 &\quad + \rho_{21}^{hk} \alpha_2^h [\alpha_0^k + \alpha_1^k \cos(\omega\tau_j + \varphi^k)] [G_2^{hki j}(T_1) - G_2^{hki j}(T_0)] + \\
 &\quad + \rho_{22}^{hk} \alpha_2^h \sigma_2^k (T_1 - T_0) \stackrel{\text{Def 3.16}}{=} \\
 &= \rho_{11}^{hk} A_{ij}^{hk} + \rho_{12}^{hk} B_{ij}^{hk} + \rho_{21}^{hk} C_{ij}^{hk} + \rho_{22}^{hk} D_{ij}^{hk}
 \end{aligned}$$

Nella precedente espressione abbiamo sfruttato il fatto che le funzioni $G_a^{hki j}$ sono le primitive dei rispettivi integrali. ■

Completiamo questa rassegna di proprietà elementari del modello dimostrando che, sotto opportune ipotesi, i futures sono in accordo con l'*effetto Samuelson*. Verifichiamo, infatti, che in questo caso la volatilità dei log-rendimenti cresce esponenzialmente al trascorrere del tempo (i.e. al diminuire del TTD), mentre tende ad un valore fissato strettamente positivo quando ci si allontana dall'inizio della consegna. Fissiamo una partizione equispaziata dell'intervallo di osservazione, che interpretiamo come l'insieme delle date in cui i prezzi sono osservati.

Definizione 3.18. Siano \mathcal{M} un \mathcal{C} -MET di tipo 1 su I , $(h, i) \in \underline{n} \times \underline{m}$, $\pi = (t_0, \dots, t_N) \in \text{Prt}(I, \varepsilon)$ ed $l \in \underline{N}$. Definiamo

$$\begin{aligned}
 u_i^h &:= [\alpha_0^h + \alpha_1^h \cos(\omega\tau_i + \varphi^h)]^2 \frac{1 - e^{-2\lambda^h \varepsilon}}{2\lambda^h} \\
 v_i^h &:= 2\rho^h \alpha_2^h [\alpha_0^h + \alpha_1^h \cos(\omega\tau_i + \varphi^h)] \frac{1 - e^{-\lambda^h \varepsilon}}{\lambda^h} \\
 w_i^h &:= \varepsilon(\alpha_2^h)^2
 \end{aligned}$$

Notiamo che i coefficienti non dipendono dalle date di osservazione t_l , ma soltanto dalla loro frequenza, attraverso ε . Calcoliamo ora la varianza rispetto alla misura oggettiva dei log-rendimenti.

Proposizione 3.19 (Varianza dei log-rendimenti). *Se \mathcal{M} è un \mathcal{C} -MET di tipo 1 su I , $(h, i) \in \underline{n} \times \underline{m}$, $\pi = (t_0, \dots, t_N) \in \text{Prt}(I, \varepsilon)$ ed $l \in \underline{N}$, allora*

$$\text{Var}^P(\Delta X_i^h(t_l)) = u_i^h e^{-2\lambda^h(\tau_i - t_l)} + v_i^h e^{-\lambda^h(\tau_i - t_l)} + w_i^h \quad (3.24)$$

Dimostrazione: Per semplicità di notazione, poiché consideriamo una singola commodity, omettiamo la dipendenza da h . Utilizziamo la Proposizione 3.11 per ricondurre il problema a quello di calcolare l'integrale della funzione deterministica $(\Sigma_i)^2$, ovvero di Λ_{ii} per la Proposizione 3.9. A questo punto, possiamo ragionare in modo del tutto analogo a quanto visto nella dimostrazione della Proposizione 3.15. Si ha dunque

$$\begin{aligned}
 \text{Var}^P(\Delta X_i^h(t_l)) &\stackrel{\text{Prp. 3.11}}{=} \int_{t_{l-1}}^{t_l} \Sigma_i(s)^2 ds \stackrel{\text{Prp. 3.9}}{=} \int_{t_{l-1}}^{t_l} \Lambda_{ii}(s) ds = \\
 &= a_{ii} \alpha_0^2 + b_{ii} \alpha_1^2 + c_{ii} \alpha_2^2 + d_{ii} \alpha_0 \alpha_1 + e_{ii} \rho \alpha_0 \alpha_2 + f_{ii} \rho \alpha_1 \alpha_2
 \end{aligned}$$

dove i coefficienti a_{ii}, \dots, f_{ii} si ottengono da quelli della Definizione 3.14, sostituendo soltanto t_{l-1}, t_l rispettivamente a T_0, T_1 . Esplicitando il loro significato, deduciamo

$$\begin{aligned} \text{Var}^P(\Delta X_i^h(t_l)) &= \alpha_0^2 \frac{e^{-2\lambda(\tau_i - t_l)} - e^{-2\lambda(\tau_i - t_{l-1})}}{2\lambda} + \\ &+ \alpha_1^2 \cos(\omega\tau_i + \varphi)^2 \frac{e^{-2\lambda(\tau_i - t_l)} - e^{-2\lambda(\tau_i - t_{l-1})}}{2\lambda} + \alpha_2^2(t_l - t_{l-1}) + \\ &+ 2\alpha_0\alpha_1 \cos(\omega\tau_i + \varphi) \frac{e^{-2\lambda(\tau_i - t_l)} - e^{-2\lambda(\tau_i - t_{l-1})}}{2\lambda} + \\ &+ \rho \left[2\alpha_0\alpha_2 \frac{e^{-\lambda(\tau_i - t_l)} - e^{-\lambda(\tau_i - t_{l-1})}}{\lambda} + \right. \\ &\left. + 2\alpha_1\alpha_2 \cos(\omega\tau_i + \varphi) \frac{e^{-\lambda(\tau_i - t_l)} - e^{-\lambda(\tau_i - t_{l-1})}}{\lambda} \right] \end{aligned}$$

Raccogliamo opportunamente nella precedente espressione ed osserviamo che, poiché $\varepsilon = t_l - t_{l-1}$, si ha $\tau_i - t_{l-1} = \tau_i - t_l + \varepsilon$. In questo modo si dimostra

$$\begin{aligned} \text{Var}^P(\Delta X_i^h(t_l)) &= [\alpha_0 + \alpha_1 \cos(\omega\tau_i + \varphi)]^2 \frac{e^{-2\lambda(\tau_i - t_l)} - e^{-2\lambda(\tau_i - t_{l-1})}}{2\lambda} + \\ &+ 2\rho\alpha_2 [\alpha_0 + \alpha_1 \cos(\omega\tau_i + \varphi)] \frac{e^{-\lambda(\tau_i - t_l)} - e^{-\lambda(\tau_i - t_{l-1})}}{\lambda} + \varepsilon\alpha_2^2 = \\ &= [\alpha_0 + \alpha_1 \cos(\omega\tau_i + \varphi)]^2 \frac{1 - e^{-2\lambda\varepsilon}}{2\lambda} e^{-2\lambda(\tau_i - t_l)} + \\ &+ 2\rho\alpha_2 [\alpha_0 + \alpha_1 \cos(\omega\tau_i + \varphi)] \frac{1 - e^{-\lambda\varepsilon}}{\lambda} e^{-\lambda(\tau_i - t_l)} + \varepsilon\alpha_2^2 \stackrel{\text{Def. 3.18}}{=} \\ &= u_i e^{-2\lambda(\tau_i - t_l)} + v_i e^{-\lambda(\tau_i - t_l)} + w_i \end{aligned}$$

■

Osservazione 3.20. Dall'equazione (3.24) si osserva che, se $v_i^h \geq 0$, la varianza del log-rendimento di F_i^h decresce rispetto al TTD ed, in particolare, converge ad un valore fissato $w_i^h = \varepsilon(\alpha_2^h)^2$ al tendere del TTD a $+\infty$. Infatti, supponendo che $T_0 \ll \tau_i$ e posto $s := \tau_i - t_l$, vale

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} u_i^h e^{-2\lambda^h s} + v_i^h e^{-\lambda^h s} + w_i^h = w_i^h$$

Se indichiamo con $\text{Vol}(X) := \sqrt{\text{Var}(X)}$ la volatilità di una generica variabile casuale X per cui sia possibile il calcolo della varianza, possiamo riscrivere la precedente come

$$\lim_{t \rightarrow T_0} \text{Vol}^P(\Delta X_i^h(t)) = \varepsilon |\alpha_2^h|$$

dove $\Delta X_i^h(t)$ è il log-rendimento nell'intervallo $[t - \varepsilon, t]$. Questo comportamento, come anticipato, è in accordo con l'effetto Samuelson. La volatilità a lungo termine, che si osserva quando la consegna è molto distante dalla data attuale, dipende in modo decisivo dal parametro α_2^h , che definisce la seconda componente della volatilità σ_{i2}^h . Ciò giustifica l'interpretazione che abbiamo dato del secondo fattore di rischio. ■

In genere, per rendere più leggibile il valore della volatilità dei log-rendimenti giornalieri, si preferisce sostituirlo con quello della *volatilità annualizzata*, ottenuto moltiplicando il primo per $\sqrt{252}$. Dunque poniamo $\text{Vol}_a(\Delta X_i^h(t_l)) := \sqrt{252} \text{Vol}(\Delta X_i^h(t_l))$ ed osserviamo che si tratta della volatilità che avrebbe il log-rendimento annuo se tutti i log-rendimenti giornalieri fossero uguali a quello in questione.

Esempio 3.21. Consideriamo il mercato dell'Esempio 3.13, estendendo però l'intervallo di osservazione ai tre anni compresi tra il 01-gen-2010 ed il 31-dic-2012. Applicando la Function 5.5, otteniamo i grafici delle volatilità annualizzate dei log-rendimenti giornalieri relativi alla commodity h -esima. In Figura 3.6 osserviamo il risultato, le tre funzioni $t_i \mapsto \text{Vol}_a^P(\Delta X_i^h(t_i))$, con $i \in \underline{3}$, calcolate attraverso la formula della Proposizione 3.19. Si nota la crescita esponenziale della volatilità dei futures e la presenza di un asintoto orizzontale comune, insieme con la stagionalità nell'incertezza relativa ai prezzi: il contratto 01-2013 più volatile di 02-2013 e la stessa relazione tra 02-2013 e 03-2013.

Per verificare la correttezza del risultato della Proposizione 3.19, poi, simuliamo ulteriori 10000 traiettorie del futures 01-2013, tornando a considerare soltanto un anno di prezzi. Per ogni data di osservazione, dunque, disponiamo di 10000 realizzazioni della variabile casuale log-rendimento giornaliero relativo a quella data. Calcolando la volatilità campionaria di questi 10000 valori ed annualizzando il risultato, si ricava il grafico in Figura 3.7, che conferma l'esattezza del calcolo. ■

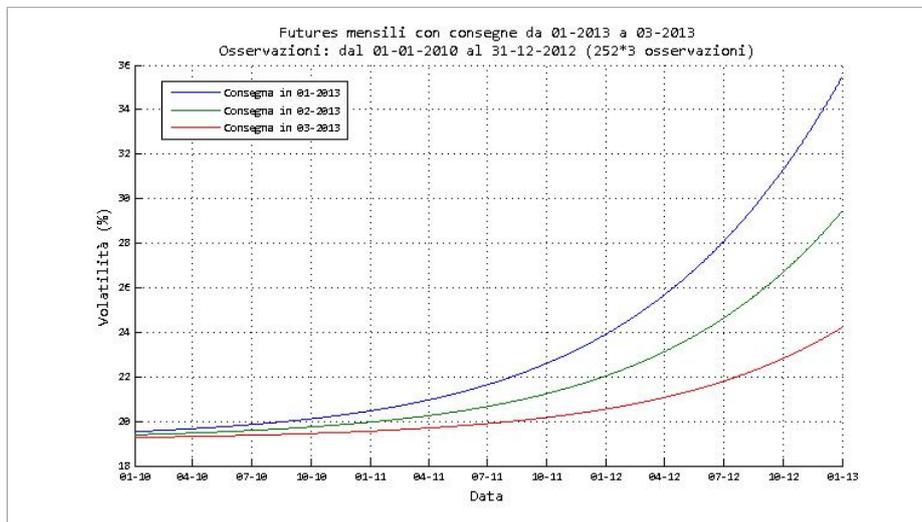


Figura 3.6: Volatilità annualizzata dei log-rendimenti giornalieri dei futures dell'Esempio 3.21.

Esempio 3.22. Supponiamo che i futures sulla commodity h -esima del mercato siano ancora definiti dai parametri (3.22), ma questa volta siano disponibili i prezzi relativi ai 36 mesi di consegna gen-2013, ..., dic-2015 osservati giornalmente dal 01-gen-2012 al 31-dic-2012. Rappresentiamo quindi la struttura a termine della volatilità dei log-rendimenti nel giorno $t = 03$ -dic-2012. Attraverso la routine 5.6, si ottiene il grafico della funzione $\tau_i - t \mapsto \text{Vol}_a^P(\Delta X_i^h(t))$ definita sull'insieme $\{\tau_i - t\}_{i \in \underline{36}}$ dei tempi alla consegna in t rispetto ai 36 futures, che rappresentiamo in Figura 3.8. Sono evidenti anche in questo caso, come nell'Esempio 3.21, le conseguenze dell'effetto Samuelson e della stagionalità della volatilità: da un lato, al crescere del TTD la volatilità dei futures tende a diminuire convergendo ad un valore fissato, dall'altro si osserva un andamento stagionale nella variabilità dei prezzi, per cui i contratti

con consegna nei mesi invernali sono caratterizzati da maggiore volatilità rispetto a quelli con consegna estiva. ■

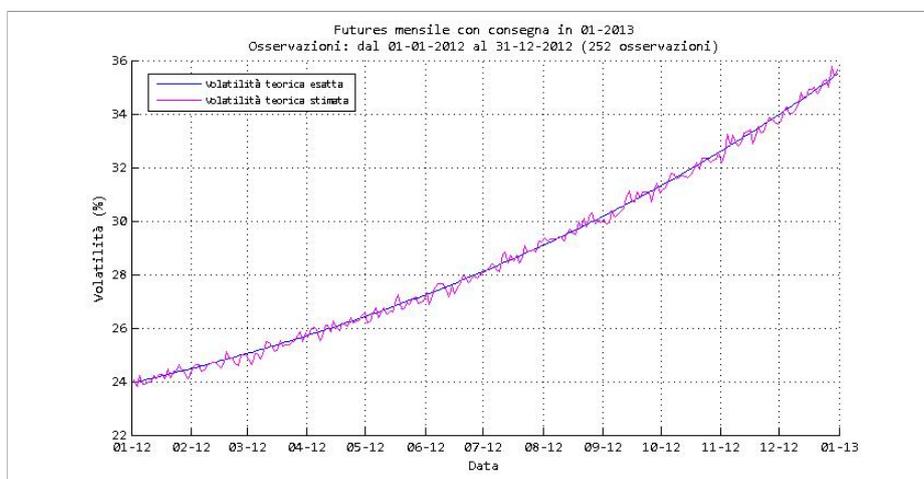


Figura 3.7: Stima della volatilità annualizzata dei log-rendimenti giornalieri dei futures dell'Esempio 3.21.

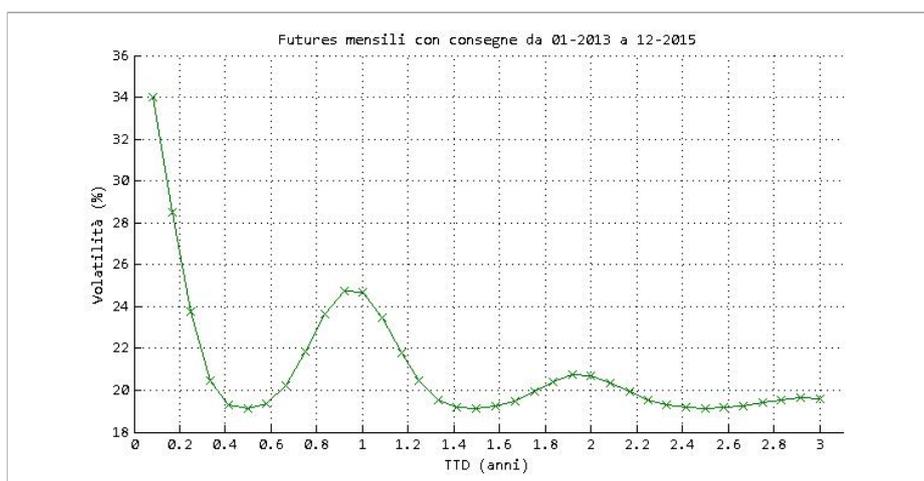


Figura 3.8: Struttura a termine osservata il 03-dic-2012 della volatilità annualizzata dei log-rendimenti relativi ai futures dell'Esempio 3.22.

3.3.2 Calibrazione

Come anticipato, la nostra strategia per l'identificazione dei parametri consiste nello sceglierli, sfruttando le Proposizioni 3.15 e 3.17, in modo da rendere le covarianze quadratiche *teoriche* rispetto alla misura oggettiva il più vicine possibile alle covarianze quadratiche *empiriche*. Ricordiamo che, per distinguere variabili casuali da loro realizzazioni, usiamo rispettivamente lettere maiuscole e minuscole. In particolare, dunque, se è dato \mathcal{M} un C-MET su I e $\pi = (t_0, t_1, \dots, t_N) \in \text{Pr}(I)$

contiene le date dell'intervallo in cui sono osservati i prezzi, indichiamo con $f_i^h(t_l)$ e $\Delta x_i^h(t_l) = \log\left(\frac{f_i^h(t_l)}{f_i^h(t_{l-1})}\right)$ rispettivamente le realizzazioni delle variabili casuali $F_i^h(t_l)$ e $\Delta X_i^h(t_l)$, per ogni $h \in \underline{n}$, $i \in \underline{m}$ ed $l \in \underline{N}$. Definiamo la *matrice dei prezzi dei futures sulla commodity h -esima osservati in π* come la matrice $(N+1) \times m$

$$\mathbf{f}^h := (\mathbf{f}_1^h, \dots, \mathbf{f}_m^h) := \begin{pmatrix} f_1^h(t_0) & \cdots & f_m^h(t_0) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^h(t_N) & \cdots & f_m^h(t_N) \end{pmatrix}$$

dove $h \in \underline{n}$ ed indichiamo con $\mathbf{f} := (\mathbf{f}^h)_{h \in \underline{n}}$ una *osservazione di \mathcal{M} in π* . In altre parole, \mathbf{f} rappresenta i prezzi di mercato reali che studiamo attraverso il modello \mathcal{M} .

Definizione 3.23. Siano \mathcal{M} un \mathcal{C} -MET su I ed $(h, i), (k, j) \in \underline{n} \times \underline{m}$. Dati $\pi = (t_0, \dots, t_N) \in \text{Pr}(I)$ ed \mathbf{f} un'osservazione di \mathcal{M} in π , chiamiamo

$$\text{cv}_{ij}^{hk}(\pi) := \sum_{l \in \underline{N}} \Delta x_i^h(t_l) \Delta x_j^k(t_l)$$

covarianza quadratica empirica di X_i^h ed X_j^k osservata in π rispetto ad (Ω, P) e poniamo $\text{cv}_{ij}^h(\pi) := \text{cv}_{ij}^{hh}(\pi)$. Introduciamo, infine, le matrici

$$\text{cv}^{hk}(\pi) := (\text{cv}_{ij}^{hk}(\pi))_{i,j \in \underline{m}}, \quad \text{cv}^h(\pi) := \text{cv}^{hh}(\pi), \quad \text{cv}(\pi) := (\text{cv}^{hk}(\pi))_{h,k \in \underline{n}}$$

Se ricordiamo che la covarianza quadratica teorica è il limite, rispetto alla misura oggettiva, delle covarianze quadratiche osservate in una partizione dell'intervallo I , al tendere dell'ampiezza di quest'ultima a zero

$$\langle X_i^h, X_j^k \rangle_I = \lim_{\substack{|\pi| \rightarrow 0 \\ \pi \in \text{Pr}(I)}} \sum_{l \in \underline{N}} \Delta X_i^h(t_l) \Delta X_j^k(t_l) \quad \text{q.c. in } (\Omega, P)$$

segue che è possibile ottenerne una stima con la covarianza quadratica empirica

$$\langle X_i^h, X_j^k \rangle_I \approx \text{cv}_{ij}^{hk}(\pi) \tag{3.25}$$

dove l'approssimazione è tanto migliore quanto più piccolo è il passo di π . Poiché siamo interessati ad avere maggiore precisione nella caratterizzazione del comportamento dei futures su ciascuna commodity rispetto alla descrizione delle correlazioni tra contratti su commodity differenti, procediamo a stimare prima i parametri $(\mathbf{p}^h)_{h \in \underline{n}}$ e, poi, $\boldsymbol{\rho} = (\boldsymbol{\rho}^{hk})_{h,k \in \underline{n}}$.

Parametri relativi ad una commodity

Consideriamo la commodity h -esima ed occupiamoci di identificare il vettore $\mathbf{p}^h := (\alpha_0^h, \alpha_1^h, \alpha_2^h, \rho^h, \varphi^h, \lambda^h)$. Applicando la Proposizione 3.15, possiamo scrivere $\langle X_i^h, X_j^h \rangle_I$ in funzione di \mathbf{p}^h per ogni $i, j \in \underline{m}$. Definiamo esplicitamente queste applicazioni.

Definizione 3.24. Siano \mathcal{M} un \mathcal{C} -MET di tipo 1 su I ed $h \in \underline{n}$. Poniamo

$$P^h := \{(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \rho, \varphi, \lambda) \in \mathbb{R}_6 \mid -1 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi < 2\pi, \lambda > 0\}$$

l'insieme dei *parametri relativi alla commodity h -esima* di \mathcal{M} e, per ogni $\mathbf{p}^h \in P^h$, sia

$$\Phi^h(\mathbf{p}^h) := (a_{ij}\alpha_0^2 + b_{ij}\alpha_1^2 + c_{ij}\alpha_2^2 + d_{ij}\alpha_0\alpha_1 + e_{ij}\rho\alpha_0\alpha_2 + f_{ij}\rho\alpha_1\alpha_2)_{i,j \in \underline{m}} \in \mathbb{R}_m^m$$

funzione a valori nelle matrici $m \times m$. Ricordiamo che i coefficienti a_{ij}, \dots, f_{ij} , introdotti nella Definizione 3.14, dipendono in modo non polinomiale da φ e λ .

Se adottiamo questa notazione, applicando la Proposizione 3.15 alla relazione (3.25) si ottiene che, per $|\boldsymbol{\pi}| \approx 0$, vale

$$\forall i, j \in \underline{m} : \Phi_{ij}^h(\mathbf{p}^h) \approx \text{cv}_{ij}^h(\boldsymbol{\pi})$$

con $\mathbf{p}^h \in P^h$. Il nostro obiettivo è risolvere le precedenti m^2 equazioni nell'incognita vettoriale \mathbf{p}^h , costituita da 6 incognite scalari. Osserviamo, però, che quando $m \geq 3$ questo sistema $m^2 \times 6$ è sovradeterminato. Per superare questa difficoltà, determiniamo \mathbf{p}^h attraverso una *stima ai minimi quadrati*. Data \mathbf{f} un'osservazione di \mathcal{M} in $\boldsymbol{\pi}$, diciamo che $\hat{\mathbf{p}}^h$ è un vettore dei parametri relativi alla commodity h -esima di \mathcal{M} *calibrato* su \mathbf{f} se $\hat{\mathbf{p}}^h$ è soluzione del seguente problema di ottimizzazione

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{p}^h \in P^h} |\Phi^h(\mathbf{p}^h) - \text{cv}^h(\boldsymbol{\pi})|^2 &= \min_{\mathbf{p}^h \in P^h} \sum_{i,j \in \underline{m}} [\Phi_{ij}^h(\mathbf{p}^h) - \text{cv}_{ij}^h(\boldsymbol{\pi})]^2 = \\ &= \min_{\mathbf{p}^h \in P^h} \sum_{i,j \in \underline{m}} \Psi_{ij}^h(\mathbf{p}^h)^2 \end{aligned} \quad (3.26)$$

dove abbiamo introdotto, come è d'uso per questo tipo di stime, i *residui* del problema $\Psi_{ij}^h(\mathbf{p}^h) := \Phi_{ij}^h(\mathbf{p}^h) - \text{cv}_{ij}^h(\boldsymbol{\pi})$ per ogni $h \in \underline{n}$, $i, j \in \underline{m}$ ed indicato con $|\cdot|$ la norma euclidea su \mathbb{R}_m^m . Osserviamo che si tratta di un'ottimizzazione con insieme ammissibile P^h convesso, ma funzione obiettivo non convessa, quindi potenzialmente instabile da un punto di vista numerico e con molti minimi locali. Abbiamo implementato una soluzione attraverso la Function 5.8, che si basa sull'uso combinato di MultiStart ed lsqnonlin, due routine MATLAB per trovare soluzioni globali di problemi dei minimi quadrati non lineari. La minimizzazione converge ad una soluzione che soddisfa i vincoli, per $N = 251$ ed $m = 12$, in meno di 20 secondi. Mostriamo, comunque, che sotto opportune ipotesi è possibile ridurre il problema a quello di risolvere due ottimizzazioni successive numericamente più efficienti, la prima quadratica in 4 variabili e la seconda non convessa in 2 variabili.

Per semplificare la notazione, omettiamo la dipendenza da h nei parametri. Il metodo si basa su una minimizzazione in due passi, giustificata dalla seguente osservazione

$$\min_{\mathbf{p} \in P} \sum_{i,j \in \underline{m}} \Psi_{ij}(\mathbf{p})^2 = \min_{\mathbf{y} \in Y} \min_{\mathbf{x} \in X} \sum_{i,j \in \underline{m}} \Psi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2$$

dove abbiamo introdotto le variabili $\mathbf{x} = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \rho)$, $\mathbf{y} = (\varphi, \lambda)$ e gli insiemi $X = \mathbb{R}_3 \times [-1, 1]$, $Y = [0, 2\pi) \times (0, \infty)$. Dunque, fissiamo i parametri $\mathbf{y} = (\varphi, \lambda) \in Y$ e consideriamo la trasformazione $z_1 = \alpha_0^2$, $z_2 = \alpha_1^2$, $z_3 = \alpha_2^2$, $z_4 = \alpha_0\alpha_1$, $z_5 = \rho\alpha_0\alpha_2$,

$z_6 = \rho\alpha_1\alpha_2$. Posta $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_6)$, il problema $\min_{\mathbf{x} \in X} \sum_{i,j \in \underline{m}} \Psi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2$ si può ridurre a

$$\min_{\mathbf{z} \in Z} \sum_{i,j \in \underline{m}} (a_{ij}z_1 + b_{ij}z_2 + c_{ij}z_3 + d_{ij}z_4 + e_{ij}z_5 + f_{ij}z_6 - cv_{ij})^2 \quad (3.27)$$

con $Z = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}_6 \mid z_1, z_2, z_3 \geq 0, z_5^2 \leq z_1z_3, z_6^2 \leq z_2z_3, z_2z_5 = z_4z_6\}$, un problema di ottimizzazione quadratico con vincoli non lineari. Introduciamo le matrici $m \times m$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &:= (a_{ij})_{i,j \in \underline{m}}, & \mathbf{b} &:= (b_{ij})_{i,j \in \underline{m}}, & \mathbf{c} &:= (c_{ij})_{i,j \in \underline{m}}, & \mathbf{d} &:= (d_{ij})_{i,j \in \underline{m}} \\ \mathbf{e} &:= (e_{ij})_{i,j \in \underline{m}}, & \mathbf{f} &:= (f_{ij})_{i,j \in \underline{m}}, & \mathbf{g} &:= (cv_{ij})_{i,j \in \underline{m}} \end{aligned}$$

e la funzione da minimizzare

$$\chi(\mathbf{z}) := \sum_{i,j \in \underline{m}} (a_{ij}z_1 + b_{ij}z_2 + c_{ij}z_3 + d_{ij}z_4 + e_{ij}z_5 + f_{ij}z_6 - cv_{ij})^2$$

per ogni $\mathbf{z} \in Z$. Calcolando le derivate parziali di χ si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial z_1}(\mathbf{z}) &= 2 \sum_{i,j \in \underline{m}} (a_{ij}z_1 + b_{ij}z_2 + c_{ij}z_3 + d_{ij}z_4 + e_{ij}z_5 + f_{ij}z_6 - cv_{ij}) a_{ij} \\ \frac{\partial \chi}{\partial z_2}(\mathbf{z}) &= 2 \sum_{i,j \in \underline{m}} (a_{ij}z_1 + b_{ij}z_2 + c_{ij}z_3 + d_{ij}z_4 + e_{ij}z_5 + f_{ij}z_6 - cv_{ij}) b_{ij} \\ \frac{\partial \chi}{\partial z_3}(\mathbf{z}) &= 2 \sum_{i,j \in \underline{m}} (a_{ij}z_1 + b_{ij}z_2 + c_{ij}z_3 + d_{ij}z_4 + e_{ij}z_5 + f_{ij}z_6 - cv_{ij}) c_{ij} \\ \frac{\partial \chi}{\partial z_4}(\mathbf{z}) &= 2 \sum_{i,j \in \underline{m}} (a_{ij}z_1 + b_{ij}z_2 + c_{ij}z_3 + d_{ij}z_4 + e_{ij}z_5 + f_{ij}z_6 - cv_{ij}) d_{ij} \\ \frac{\partial \chi}{\partial z_5}(\mathbf{z}) &= 2 \sum_{i,j \in \underline{m}} (a_{ij}z_1 + b_{ij}z_2 + c_{ij}z_3 + d_{ij}z_4 + e_{ij}z_5 + f_{ij}z_6 - cv_{ij}) e_{ij} \\ \frac{\partial \chi}{\partial z_6}(\mathbf{z}) &= 2 \sum_{i,j \in \underline{m}} (a_{ij}z_1 + b_{ij}z_2 + c_{ij}z_3 + d_{ij}z_4 + e_{ij}z_5 + f_{ij}z_6 - cv_{ij}) f_{ij} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Definiamo poi la matrice 6×6 ed il vettore colonna

$$\mathbf{L} := \begin{pmatrix} |\mathbf{a}|^2 & \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle & \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle & \langle \mathbf{a}, \mathbf{d} \rangle & \langle \mathbf{a}, \mathbf{e} \rangle & \langle \mathbf{a}, \mathbf{f} \rangle \\ \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle & |\mathbf{b}|^2 & \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle & \langle \mathbf{b}, \mathbf{d} \rangle & \langle \mathbf{b}, \mathbf{e} \rangle & \langle \mathbf{b}, \mathbf{f} \rangle \\ \langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle & \langle \mathbf{c}, \mathbf{b} \rangle & |\mathbf{c}|^2 & \langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle & \langle \mathbf{c}, \mathbf{e} \rangle & \langle \mathbf{c}, \mathbf{f} \rangle \\ \langle \mathbf{d}, \mathbf{a} \rangle & \langle \mathbf{d}, \mathbf{b} \rangle & \langle \mathbf{d}, \mathbf{c} \rangle & |\mathbf{d}|^2 & \langle \mathbf{d}, \mathbf{e} \rangle & \langle \mathbf{d}, \mathbf{f} \rangle \\ \langle \mathbf{e}, \mathbf{a} \rangle & \langle \mathbf{e}, \mathbf{b} \rangle & \langle \mathbf{e}, \mathbf{c} \rangle & \langle \mathbf{e}, \mathbf{d} \rangle & |\mathbf{e}|^2 & \langle \mathbf{e}, \mathbf{f} \rangle \\ \langle \mathbf{f}, \mathbf{a} \rangle & \langle \mathbf{f}, \mathbf{b} \rangle & \langle \mathbf{f}, \mathbf{c} \rangle & \langle \mathbf{f}, \mathbf{d} \rangle & \langle \mathbf{f}, \mathbf{e} \rangle & |\mathbf{f}|^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} := \begin{pmatrix} \langle \mathbf{a}, \mathbf{g} \rangle \\ \langle \mathbf{b}, \mathbf{g} \rangle \\ \langle \mathbf{c}, \mathbf{g} \rangle \\ \langle \mathbf{d}, \mathbf{g} \rangle \\ \langle \mathbf{e}, \mathbf{g} \rangle \\ \langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle \end{pmatrix}$$

dove \mathbf{L} è detta *matrice di Gram* di $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}$ ed abbiamo indicato con $|\cdot|$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ rispettivamente la norma ed il prodotto scalare euclideo di \mathbb{R}_m^m , ovvero

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \sum_{i,j \in \underline{m}} x_{ij}y_{ij}, \quad |\mathbf{X}| = \sqrt{\langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle}$$

per ogni $\mathbf{X} = (x_{ij})_{i,j \in \underline{m}}, \mathbf{Y} = (y_{ij})_{i,j \in \underline{m}} \in \mathbb{R}_m^m$. Deriviamo rispetto a z_r con $r \in \underline{6}$ nelle equazioni (3.28) e ricaviamo in questo modo la matrice hessiana $H\chi(\mathbf{z}) = 2\mathbf{L}$. Se identifichiamo $\mathbb{R}_m^m = \mathbb{R}^{m^2}$ linearizzando le matrici $m \times m$ per colonne e definiamo $\mathbf{G} := (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}) \in \mathbb{R}_6^{m^2}$, possiamo riscrivere la matrice di Gram come $\mathbf{L} = \mathbf{G}^T \mathbf{G}$. Prima di proseguire, ricordiamo un risultato generale del calcolo matriciale.

Proposizione 3.25. *Se $h, k \in \mathbb{Z}$, $h, k \geq 1$ ed $A \in \mathbb{R}_k^h$, allora $A^T A \in \mathbb{R}_k^k$ è semidefinita positiva ed $A^T A$ è definita positiva se e solo se le colonne A_1, \dots, A_k sono linearmente indipendenti in \mathbb{R}^h .*

Supponiamo d'ora in avanti che

$$a, b, c, d, e, f \text{ sono linearmente indipendenti in } \mathbb{R}_m^m \quad (3.29)$$

Applicando la Proposizione 3.25 segue che $L = G^T G \in \mathbb{R}_6^6$ è definita positiva, per cui anche $H\chi(z) = 2L$ è definita positiva per ogni $z \in \mathbb{R}_6$ e la funzione χ è strettamente convessa in \mathbb{R}_6 . Utilizziamo le equazioni (3.28) e la regola di Cramer per trovare l'unico punto critico $z^y = (z_1^y, z_2^y, z_3^y, z_4^y, z_5^y, z_6^y)$ della funzione χ . Poiché l'ipotesi (3.29) implica che G sia invertibile, anche L è invertibile e $\det(L) \neq 0$, per cui

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial z}(z^y) = \mathbf{0}_6 &\leftrightarrow L(z_1^y, z_2^y, z_3^y, z_4^y, z_5^y, z_6^y)^T = \mathbf{v} \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow \forall r \in \underline{6} : z_r^y = \frac{\det(L_1, \dots, L_{r-1}, \mathbf{v}, L_{r+1}, \dots, L_6)}{\det(L)} \end{aligned}$$

avendo indicato con L_1, \dots, L_6 le colonne di L . Poiché χ è convessa e $H\chi(z^y)$ è definita positiva, z^y è l'unico punto di minimo globale di χ in \mathbb{R}_6 . Se si verifica che

$$\forall y \in Y : z^y \in Z \wedge z_1^y \neq 0 \wedge z_3^y \neq 0 \quad (3.30)$$

allora possiamo procedere con il secondo passo della minimizzazione, cercando un soluzione di

$$\min_{\mathbf{p} \in P} \sum_{i,j \in \underline{m}} \Psi_{ij}(\mathbf{p})^2 = \min_{\mathbf{y} \in Y} \sum_{i,j \in \underline{m}} (a_{ij}z_1^y + b_{ij}z_2^y + c_{ij}z_3^y + d_{ij}z_4^y + e_{ij}z_5^y + f_{ij}z_6^y - cv_{ij})^2$$

un problema di ottimizzazione non convesso in due sole variabili. Se $\hat{\mathbf{y}} = (\hat{\varphi}, \hat{\lambda})$ è una soluzione, ponendo

$$\hat{\alpha}_0 = \sqrt{z_1^{\hat{\mathbf{y}}}}, \quad \hat{\alpha}_1 = \sqrt{z_2^{\hat{\mathbf{y}}}}, \quad \hat{\alpha}_2 = \sqrt{z_3^{\hat{\mathbf{y}}}}, \quad \hat{\rho} = \frac{z_5^{\hat{\mathbf{y}}}}{\sqrt{z_1^{\hat{\mathbf{y}}}} \sqrt{z_3^{\hat{\mathbf{y}}}}}$$

segue che gli otto punti $\hat{\mathbf{p}}_{abc} = \left((-1)^a \hat{\alpha}_0, (-1)^b \hat{\alpha}_1, (-1)^c \hat{\alpha}_2, \hat{\rho}, \hat{\varphi}, \hat{\lambda} \right)$, con $a, b, c = 0, 1$, sono soluzioni del problema (3.26). Se una delle due ipotesi (3.29), (3.30) non è soddisfatta, bisognerà procedere diversamente utilizzando altri metodi di ottimizzazione vincolata nel caso la minimizzazione implementata nella Function 5.8 non si rivelasse soddisfacente.

Matrice di correlazione

Dopo aver calibrato i parametri $(p^h)_{h \in \underline{n}}$, passiamo alla matrice di correlazione $\rho = (\rho^{hk})_{h,k \in \underline{n}}$. In questo caso, per ogni coppia di commodity $h, k \in \underline{n}$, attraverso la Proposizione 3.17 possiamo mettere in evidenza la dipendenza di $\langle X_i^h, X_j^k \rangle_I$ dagli elementi della matrice ρ^{hk} al variare di $i, j \in \underline{m}$. Definiamo esplicitamente le funzioni che rappresentano queste relazioni.

Definizione 3.26. Siano \mathcal{M} un \mathcal{C} -MET di tipo 1 su I ed $h, k \in \underline{n}$. Introduciamo l'insieme R di tutte le matrici $\rho = (\rho^{hk})_{h,k \in \underline{n}} = (\rho_{ab}^{hk})_{a,b \in \underline{2}}^{h,k \in \underline{n}} \in \mathbb{R}_{2n}^{2n}$ tali che:

R1 ρ è simmetrica e semidefinita positiva

R2 $\forall h, k \in \underline{n} : \forall a, b \in \underline{2} : \rho_{ab}^{hk} \in [-1, 1]$

R3 $\forall h \in \underline{n} : \rho_{11}^{hh} = \rho_{22}^{hh} = 1, \rho_{12}^{hh} = \rho^h$

e lo chiamiamo insieme delle *matrici di correlazione* di \mathcal{M} . Per ogni $\rho \in R$, sia

$$\Phi^{hk}(\rho) := (A_{ij}^{hk} \rho_{11}^{hk} + B_{ij}^{hk} \rho_{12}^{hk} + C_{ij}^{hk} \rho_{21}^{hk} + D_{ij}^{hk} \rho_{22}^{hk})_{i,j \in \underline{m}} \in \mathbb{R}_m^m$$

funzione a valori nella matrici reali $m \times m$. I coefficienti $A_{ij}^{hk}, B_{ij}^{hk}, C_{ij}^{hk}, D_{ij}^{hk}$ sono stati definiti in 3.16 e dipendono soltanto dai parametri delle commodity h -esima e k -esima p^h, p^k , calibrati al passo precedente. Poniamo, infine, per ogni $\rho \in R$,

$$\Phi(\rho) := (\Phi^{hk}(\rho))_{h,k \in \underline{n}} \in (\mathbb{R}_m^m)_n = \mathbb{R}_{nm}^{nm}$$

funzione con valori nelle matrici $nm \times nm$.

Utilizzando questa definizione, la Proposizione 3.17 consente di dedurre dalla relazione (3.25) che, per $|\pi| \approx 0$, vale

$$\forall h, k \in \underline{n} : \forall i, j \in \underline{m} : \Phi_{ij}^{hk}(\rho) \approx cv_{ij}^{hk}(\pi) \quad (3.31)$$

con $\rho \in R$. Anche in questo caso il nostro obiettivo è risolvere le $n^2 m^2$ equazioni nell'incognita vettoriale ρ . Poiché chiediamo che quest'ultima sia una matrice $2n \times 2n$ simmetrica e $\rho_{11}^{hh} = \rho_{22}^{hh} = 1, \rho_{12}^{hh} = \rho^h$ per ogni $h \in \underline{n}$, le sue componenti indipendenti restano gli elementi delle sottomatrici $\rho^{hk} \in \mathbb{R}_2^2$ con $h, k \in \underline{n}$ ed $h < k$. Il numero di incognite scalari indipendenti nelle equazioni (3.31), quindi, si riduce da $4n^2$ a $4 \binom{n}{2} = 2n(n-1)$. Dunque si tratta di un sistema $n^2 m^2 \times 2n(n-1)$, che per $m \geq 2$ è sovradeterminato. Infatti, ricordando di aver supposto $n, m \in \mathbb{Z}$ ed $n, m \geq 2$, si osserva

$$m \geq 2 \rightarrow m^2 \geq 2 \rightarrow m^2 > 2 \frac{n-1}{n} \rightarrow m^2 n^2 > 2n(n-1)$$

Come per l'identificazione dei parametri relativi ad una commodity, superiamo l'ostacolo con una stima ai minimi quadrati. Data f un'osservazione di \mathcal{M} in π , diciamo che $\hat{\rho}$ è una matrice di correlazione di \mathcal{M} calibrata su f se $\hat{\rho}$ è soluzione del seguente problema di ottimizzazione

$$\begin{aligned} \min_{\rho \in R} |\Phi(\rho) - cv(\pi)|^2 &= \min_{\rho \in R} \sum_{h,k \in \underline{n}} \sum_{i,j \in \underline{m}} [\Phi_{ij}^{hk}(\rho) - cv_{ij}^{hk}(\pi)]^2 = \\ &= \min_{\rho \in R} \sum_{h,k \in \underline{n}} \sum_{i,j \in \underline{m}} \Psi_{ij}^{hk}(\rho)^2 \end{aligned} \quad (3.32)$$

dove abbiamo definito i *residui* del problema come $\Psi_{ij}^{hk}(\rho) := \Phi_{ij}^{hk}(\rho) - cv_{ij}^{hk}(\pi)$ per ogni $h, k \in \underline{n}, i, j \in \underline{m}$ ed indicato con $|\cdot|$ la norma euclidea su \mathbb{R}_{nm}^{nm} . L'insieme ammissibile R è caratterizzato, oltre che dalle richieste relative alla diagonale unitaria, la coerenza rispetto alle calibrizioni delle singole commodity e la simmetria, dalla proprietà che la matrice ρ sia semidefinita positiva. Poiché la funzione obiettivo è lineare, questo vincolo rende (3.32) un problema di programmazione semidefinita non standard, la cui soluzione è molto dispendiosa da un punto di vista computazionale.

Per evitare tale difficoltà, possiamo sfruttare la decomposizione di Cholesky di ρ e trasformare la minimizzazione in modo da semplificarne i vincoli. Poiché $\rho \in R$ è una matrice reale simmetrica e semidefinita positiva, infatti, per la Proposizione 2.4 esiste una matrice reale triangolare inferiore $T \in \mathbb{R}_{2n}^{2n}$ (non necessariamente unica) tale che $\rho = TT^T$. Vediamo come si traducono i vincoli sulla matrice di correlazione in termini di T . Data una generica matrice A , indicheremo l'elemento di riga i e colonna j con A_j^i , la riga i -esima con A^i e la colonna j -esima con A_j . La proprietà R1 è soddisfatta da qualsiasi T per la Proposizione 3.25, poiché TT^T è sempre una matrice simmetrica e semidefinita positiva. Riguardo ad R3, la richiesta che gli elementi sulla diagonale siano unitari è equivalente ad imporre che le righe di T abbiano norma unitaria. Per ogni $l \in \underline{2n}$, infatti, si verifica

$$\rho_l^l = 1 \leftrightarrow (TT^T)_l^l = 1 \leftrightarrow T^l (T^l)^T = 1 \leftrightarrow |T^l| = 1$$

dove abbiamo indicato con $|\cdot|$ la norma euclidea su \mathbb{R}_{2n} . La coerenza rispetto alla calibrazione della commodity h -esima, invece, si traduce nella proprietà che il prodotto scalare tra le h -esime righe pari e dispari coincida con il coefficiente di correlazione tra i fattori relativi alla commodity. Più precisamente, per ogni $h \in \underline{n}$ abbiamo

$$\rho_{12}^h = \rho^h \leftrightarrow \rho_{2h-1}^{2h} = \rho^h \leftrightarrow T^{2h-1} (T^{2h})^T = \rho^h \leftrightarrow \langle T^{2h-1}, T^{2h} \rangle = \rho^h$$

con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ prodotto scalare euclideo su \mathbb{R}_{2n} . Per finire R2 è sempre vera per la disuguaglianza di Schwartz ed R3, perché per ogni $h, k \in \underline{n}$ ed $a, b \in \underline{2}$ vale

$$|\rho_{ab}^{hk}| = |\rho_{2k-b-1}^{2h-a-1}| = |T^{2h-a-1} (T^{2k-b-1})^T| \leq |T^{2h-a-1}| |T^{2k-b-1}| = 1$$

Sfruttando queste osservazioni, vediamo come ridefinire il problema di minimo in modo che i vincoli siano quadratici.

Definizione 3.27. Siano \mathcal{M} un \mathcal{C} -MET di tipo 1 su I ed $h, k \in \underline{n}$. Consideriamo l'insieme L di tutte le matrici $T \in \mathbb{R}_{2n}^{2n}$ tali che:

- L1 T è triangolare inferiore
- L2 $\forall l \in \underline{2n} : |T^l| = 1$
- L3 $\forall h \in \underline{n} : \langle T^{2h-1}, T^{2h} \rangle = \rho^h$

Per quanto osservato sopra, per ogni $T \in L$ possiamo definire

$$\Gamma^{hk}(T) := \Phi^{hk}(TT^T), \quad \Gamma(T) := (\Gamma^{hk}(T))_{h,k \in \underline{n}}$$

Il problema di ottimizzazione (3.32), dunque, si può semplificare attraverso la decomposizione di Cholesky delle matrici di correlazione come segue

$$\begin{aligned} \min_{\rho \in R} |\Phi(\rho) - \text{cv}(\pi)|^2 &= \min_{T \in L} |\Gamma(T) - \text{cv}(\pi)|^2 = \\ &= \min_{T \in L} \sum_{h,k \in \underline{n}} \sum_{i,j \in \underline{m}} [\Gamma_{ij}^{hk}(T) - \text{cv}_{ij}^{hk}(\pi)]^2 = \min_{T \in L} \sum_{h,k \in \underline{n}} \sum_{i,j \in \underline{m}} \Theta_{ij}^{hk}(T)^2 \end{aligned} \quad (3.33)$$

con $\Theta_{ij}^{hk}(T) := \Gamma_{ij}^{hk}(T) - \text{cv}_{ij}^{hk}(\pi)$, per ogni $h, k \in \underline{n}$ ed $i, j \in \underline{m}$. La calibrazione di ρ è così ricondotta a risolvere un problema quadratico con vincoli quadratici, la cui soluzione è stata implementata nella Function 5.9. Per migliorare la convergenza

del metodo numerico adottato, abbiamo sostituito in (3.33) la funzione obiettivo con la sua radice. In questo modo, una soluzione che soddisfa i vincoli è calcolata, per $N = 251$, $n = 3$ ed $m = 12$, in meno di 20 secondi.

3.3.3 Test numerici di calibrazione

Verifichiamo la correttezza del metodo proposto per la calibrazione dei futures su una singola commodity applicandolo a prezzi simulati.

Esempio 3.28. Consideriamo come intervallo di osservazione I il periodo che va dal 01-gen-2012 al 31-dic-2012 e la struttura di consegna costituita dai mesi gen-2013, feb-2013, mar-2013. Assegniamo i parametri relativi alla commodity h -esima:

$$\begin{array}{l|l} \alpha_0^h=0.0120 & \varphi^h=3\pi/2 \\ \alpha_1^h=0.0100 & \lambda^h=1.00/365 \\ \alpha_2^h=0.0080 & \rho^h=0.30 \end{array} \quad (3.34)$$

e fissiamo i prezzi iniziali $F_1^h(T_0) = F_2^h(T_0) = F_3^h(T_0) = 60 \text{ €/MWh}$. Supponiamo le osservazioni siano giornaliere, quindi avvengano nelle date della partizione equispaziata (t_0, \dots, t_N) di I con $N = 251$, ed applichiamo la Function 5.4 per generare i prezzi futures su questa commodity. Nel grafico in alto a sinistra della Figura 3.9 è riportata la volatilità teorica dei log-rendimenti relativi al modello definito, descritta dall'equazione (3.24). Eseguendo la calibrazione sui dati simulati attraverso la Function 5.8, si ottengono i parametri \hat{p}^h che consentono di calcolare le volatilità dei log-rendimenti relativi al modello approssimato, rappresentate in basso a sinistra. Osserviamo che l'errore relativo, in alto a destra, si mantiene per i tre futures sotto il 4%. Nell'ultimo grafico, in basso a destra, riportiamo l'errore relativo medio ottenuto ripetendo 100 calibrazioni analoghe alla precedente ed, anche in questo caso, non è superato il 5.7%.

Per verificare la convergenza a zero dell'errore al crescere della frequenza delle osservazioni, ripetiamo quanto sopra, generando questa volta 50 prezzi al giorno. In Figura 3.10 notiamo come l'errore relativo, in alto a destra, si mantenga ora sotto lo 0.4% e ripetendo ancora 100 calibrazioni la media sia comunque inferiore all'1% circa, in basso a destra. ■

Ricordiamo che il modello proposto è un'estensione di quello trattato in Edoli, Tasinato, Vargiolu [ETV13]. Infatti, se nella prima componente della volatilità in (3.21) poniamo a zero il coefficiente del coseno $\alpha_1^h = 0$, ritroviamo l'equazione (3.5) dell'articolo. Testiamo dunque la tecnica di calibrazione anche su questo modello, semplificando le routine con alcune semplici modifiche del codice, così da minimizzare su due parametri in meno, α_1^h e φ^h .

Esempio 3.29. Fissiamo le stesse specifiche dell'Esempio 3.28, per cui prendiamo come intervallo di osservazione I il periodo dal 01-gen-2012 al 31-dic-2012 e come struttura di consegna i mesi gen-2013, feb-2013, mar-2013. Stabiliamo i seguenti parametri per la commodity h -esima

$$\begin{array}{l|l} \alpha_0^h=0.0120 & \lambda^h=1.00/365 \\ \alpha_2^h=0.0080 & \rho^h=0.30 \end{array}$$

dove abbiamo ommesso $\alpha_1^h = 0$ e φ^h , a questo punto senza significato. Se fissiamo i prezzi iniziali $F_1^h(T_0) = F_2^h(T_0) = F_3^h(T_0) = 60 \text{ €/MWh}$ e supponiamo le osservazioni

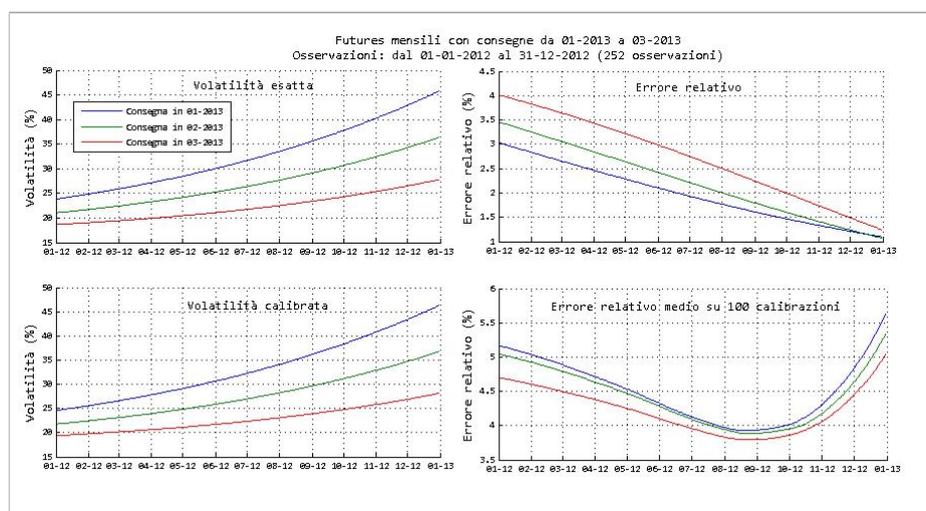


Figura 3.9: A sinistra, i due grafici della volatilità teorica, esatta e calibrata, dei futures dell'Esempio 3.28. A destra, in alto il grafico dell'errore relativo della volatilità calibrata rispetto a quella esatta, in basso l'errore relativo medio su 100 calibrazioni.

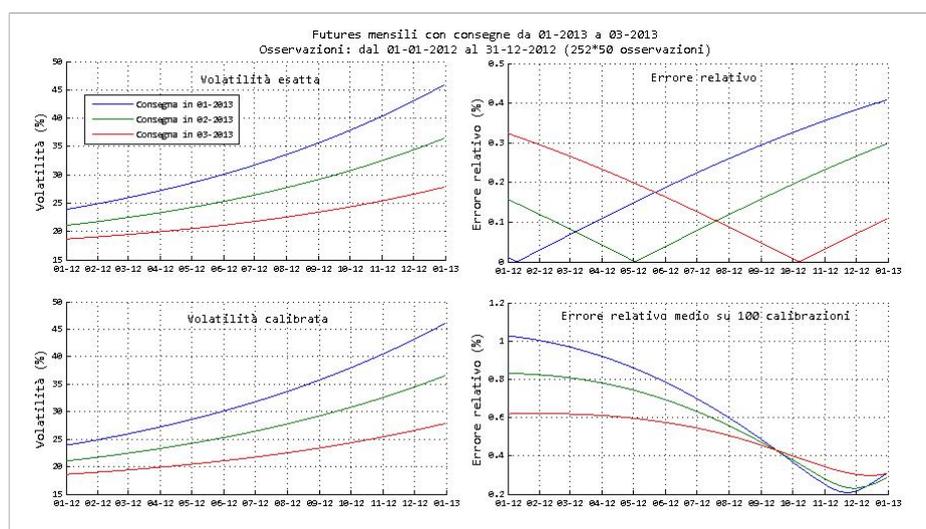


Figura 3.10: A sinistra, confronto tra volatilità teorica esatta e calibrata, nel caso di 50 osservazioni al giorno, per i futures dell'Esempio 3.28. A destra, gli errori relativi commessi dalla calibrazione.

siano giornaliere, possiamo simulare i prezzi futures per questa commodity e calibrare su questi dati il modello. Otteniamo in questo modo la Figura 3.11, da cui emerge come l'errore relativo sia sotto il 3% (in alto a destra), mentre anche ripetendo 100 calibrazioni analoghe, la media resta comunque vicina a questo valore (in basso a destra). La calibrazione risulta più efficiente rispetto al caso generale, essendoci due parametri in meno da stimare. ■

Con l'Esempio 3.28 abbiamo fissato un modello di MET, simulato i prezzi dei futures scritti sulla commodity h -esima e calibrato su queste osservazioni i parametri

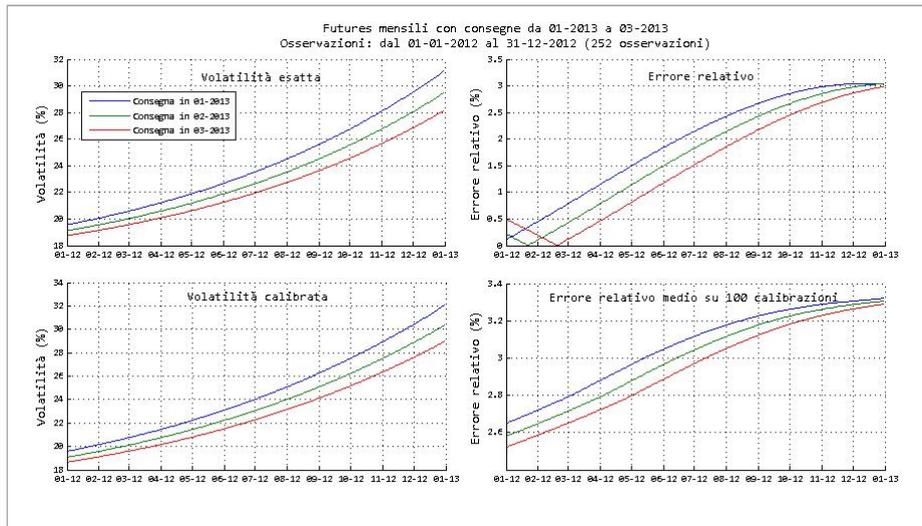


Figura 3.11: A sinistra, confronto tra volatilità teorica esatta e calibrata nel caso $\alpha_1^h = 0$ dell'Esempio 3.29. A destra, gli errori relativi commessi dalla calibrazione.

relativi ad essa. Quindi sono state confrontate le volatilità teoriche del modello dato e di quello calibrato per misurare la bontà della stima ottenuta. Quando si applica la tecnica di identificazione dei parametri a prezzi reali, però, si deve procedere diversamente e una valida alternativa consiste nel paragonare la volatilità storica dei prezzi osservati e quella teorica del modello calibrato. Vediamo con un esempio il risultato di questo confronto, impiegando ancora serie storiche simulate. Nel paragrafo 3.6, poi, lo ripeteremo trattando invece dati reali.

Esempio 3.30. Consideriamo l'intervallo di osservazione I compreso tra il 01-gen-2012 ed il 31-dic-2012. Supponiamo siano disponibili i 24 futures mensili scritti sulla commodity h -esima gen-2013, ..., dic-2014 e che i parametri relativi ad essa siano quelli definiti in tabella (3.34). Chiediamo che i prezzi iniziali siano, al solito, $F_1^h(T_0) = \dots = F_{24}^h(T_0) = 60 \text{ €/MWh}$ e che le osservazioni siano giornaliere. Applicando la Function 5.4, simuliamo i prezzi futures. Calibrati i parametri relativi alla commodity h -esima attraverso la routine 5.8, riportiamo in Figura 3.12 il confronto tra la volatilità storica a 20 giorni e quella teorica del modello calibrato per i primi 6 contratti. Nella Figura 3.13, poi, consideriamo un esempio delle due strutture a termine della volatilità storica e della volatilità teorica calibrata in un giorno fissato. Si osserva che la calibrazione consente di cogliere l'andamento stagionale della volatilità dei prezzi, evidenziando picchi in corrispondenza delle consegne invernali e minimi locali su quelle estive. Riguardo al coefficiente di correlazione calibrato, infine, si ottiene che $\hat{\rho}^h = 0.3195$ è una stima di ρ^h con un errore relativo del 6.5%. ■

Dopo aver testato il metodo per la calibrazione dei parametri relativi a ciascuna commodity, verifichiamo la tecnica proposta per identificare la matrice di correlazione. A questo scopo, abbiamo esteso il simulatore `sim_1met` con la Function 5.7 in modo da generare i prezzi di tutti i futures del MET attraverso $2n$ moti browniani correlati.

Esempio 3.31. Al solito, chiediamo che nell'intervallo di osservazione compreso tra il 01-gen-2012 ed il 31-dic-2012 siano negoziati futures con consegne nei mesi gen-

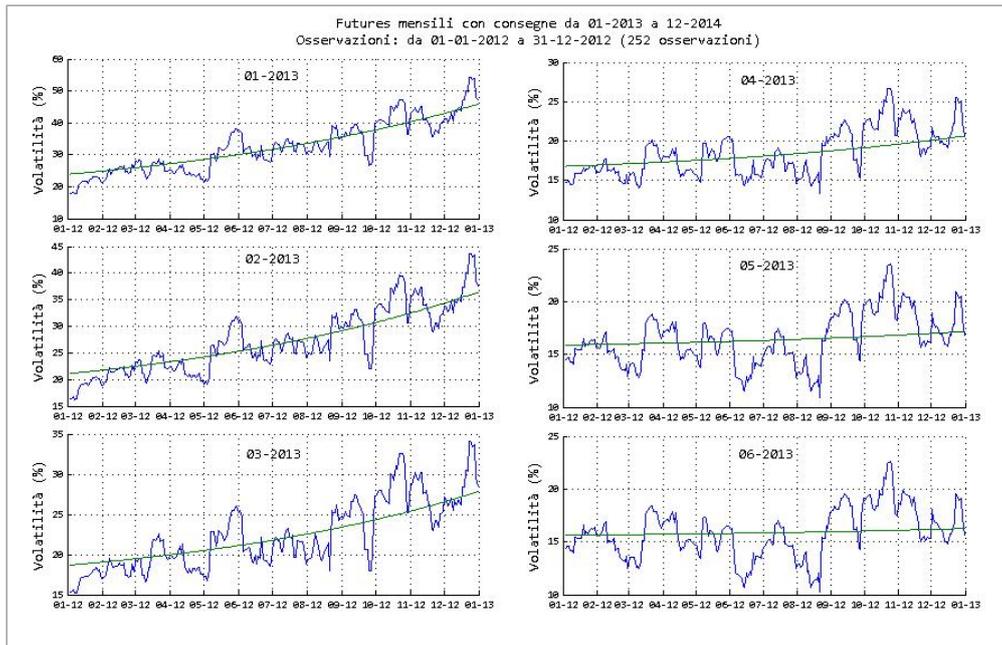


Figura 3.12: Confronto tra volatilità storica a 20 giorni (in blu) e volatilità teorica calibrata (in verde) dei log-rendimenti giornalieri dei futures dell'Esempio 3.30. Osservazioni: dal 01-gen-2012 al 31-dic-2012 (252 osservazioni).

2013, feb-2013, mar-2013. Consideriamo il MET composto da contratti scritti su tre commodity differenti, definito dai parametri in tabella.

h	α_0^h	α_1^h	α_2^h	φ^h	λ^h	ρ^h
1	0.0080	0.0080	0.0100	$3\pi/2$	0.80/365	0.10
2	0.0120	0.0100	0.0080	$3\pi/2$	1.00/365	0.30
3	0.0180	0.0010	0.0001	$7\pi/4$	0.45/365	0.80

Chiediamo, infine, che la struttura di correlazione tra sorgenti di rischio sia quella rappresentata dalla seguente matrice simmetrica e semidefinita positiva:

$$\rho = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0.1000 & 0.6000 & 0.4000 & 0.5000 & 0.5000 \\ 0.1000 & 1.0000 & 0.4000 & 0.6000 & 0.5000 & 0.5000 \\ 0.6000 & 0.4000 & 1.0000 & 0.3000 & 0.6000 & 0.4000 \\ 0.4000 & 0.6000 & 0.3000 & 1.0000 & 0.4000 & 0.6000 \\ 0.5000 & 0.5000 & 0.6000 & 0.4000 & 1.0000 & 0.8000 \\ 0.5000 & 0.5000 & 0.4000 & 0.6000 & 0.8000 & 1.0000 \end{pmatrix}$$

Con un'applicazione della Function 5.7 generiamo i prezzi osservati giornalmente nell'intervallo considerato, sotto l'ipotesi che siano inizialmente tutti uguali a 60 €/MWh . Abbiamo implementato la calibrazione della matrice di correlazione

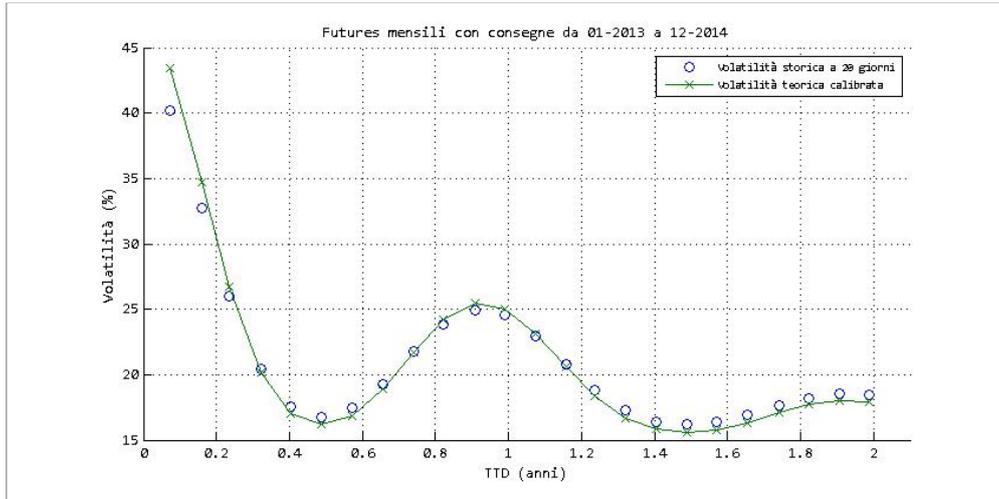


Figura 3.13: Confronto tra le strutture a termine della volatilità storica a 20 giorni e della volatilità teorica calibrata osservate il 03-dic-2012 per i futures dell'Esempio 3.30.

nella routine 5.9 e, per questi dati, il risultato è:

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \begin{array}{cc|cc|cc} 1.0000 & 0.1000 & 0.6113 & 0.3728 & 0.5206 & 0.4942 \\ 0.1000 & 1.0000 & 0.4031 & 0.6068 & 0.4827 & 0.4946 \\ \hline 0.6113 & 0.4031 & 1.0000 & 0.3000 & 0.5799 & 0.3918 \\ 0.3728 & 0.6068 & 0.3000 & 1.0000 & 0.4349 & 0.5960 \\ \hline 0.5206 & 0.4827 & 0.5799 & 0.4349 & 1.0000 & 0.8000 \\ 0.4942 & 0.4946 & 0.3918 & 0.5960 & 0.8000 & 1.0000 \end{array} \end{pmatrix}$$

Osserviamo che l'errore relativo commesso da ciascuno dei 12 parametri calibrati non supera l'8.7%, raggiunto nel caso di $\hat{\rho}_{21}^{23}$, ed è in media il 2.9%. ■

3.4 Mercati energetici a termine di tipo 2

Introduciamo una seconda struttura di volatilità per il modello, specificando una nuova scelta delle funzioni σ_{i1}^h e σ_{i2}^h nell'equazione (3.8). Ricordiamo che è stato fissato $I = [T_0, T_1]$ l'intervallo temporale in cui sono osservati i prezzi dei futures e $\mathcal{C} = \{J_i\}_{i \in m}$ una struttura di consegna posteriore ad I .

Definizione 3.32. Siano \mathcal{M} un \mathcal{C} -MET su I ed $(h, i) \in \underline{n} \times \underline{m}$. Il prezzo F_i^h del futures sulla commodity h -esima con consegna in J_i è il processo di Itô che soddisfa l'equazione

$$\frac{dF_i^h(t)}{F_i^h(t)} = \sigma_{i1}^h(t) dW_1^h(t) + \sigma_{i2}^h(t) dW_2^h(t) \quad \text{in } I$$

dove $W^h := (W_1^h, W_2^h)$ è un moto browniano 2-dimensionale correlato su (Ω, \mathcal{F}, Q) con coefficiente di correlazione $\rho^h := \text{Cor}(W_1^h, W_2^h) \in [-1, 1]$.

Diciamo che \mathcal{M} è di tipo 2 se

$$\begin{aligned} \sigma_{i1}^h(t) &:= [\alpha_0^h + \alpha_1^h \cos(\omega(\tau_i - t) + \varphi^h)] e^{-\lambda^h(\tau_i - t)} \quad \text{in } I \\ \sigma_{i2}^h(t) &:= \alpha_2^h \quad \text{in } I \end{aligned} \quad (3.35)$$

con $\omega := 2\pi/365$, $\alpha_0^h, \alpha_1^h, \alpha_2^h, \varphi^h \in \mathbb{R}$ e $\lambda^h \in \mathbb{R}^+$. Definiamo il vettore dei parametri di \mathcal{M} relativi alla commodity h -esima $p^h := (\alpha_0^h, \alpha_1^h, \alpha_2^h, \rho^h, \varphi^h, \lambda^h)$, mentre ricordiamo che la matrice dei parametri sulle correlazioni tra commodity è $\rho^{hk} := (\rho_{ab}^{hk})_{a,b \in \underline{2}}$. Chiamiamo σ_{i1}^h e σ_{i2}^h componenti della volatilità di F_i^h .

Esempio 3.33. Consideriamo un'assegnazione specifica dei parametri relativi alla commodity h -esima e visualizziamo, per ogni $i \in \underline{m}$, una traiettoria dei prezzi F_i^h . Supponiamo che l'intervallo di osservazione vada dal 01-gen-2012 al 31-dic-2012 e la struttura di consegna sia costituita dai tre mesi consecutivi gen-2013, feb-2013, mar-2013. Dopo aver fissato i parametri:

$$\begin{array}{l|l} \alpha_0^h=0.0080 & \varphi^h=5.9690 \\ \alpha_1^h=0.0080 & \lambda^h=0.80/365 \\ \alpha_2^h=0.0100 & \rho^h=0.10 \end{array} \quad (3.36)$$

stabiliamo che i prezzi iniziali siano $F_1^h(T_0) = F_2^h(T_0) = F_3^h(T_0) = 60 \text{ €/MWh}$ e le osservazioni siano giornaliere. Attraverso la Function 5.4 generiamo le tre traiettorie neutrali al rischio dei prezzi futures sulla commodity h -esima $t_l \mapsto F_i^h(t_l)(\bar{\omega})$, con $\bar{\omega} \in \Omega$ ed $i \in \underline{3}$, rappresentate in Figura 3.14. ■

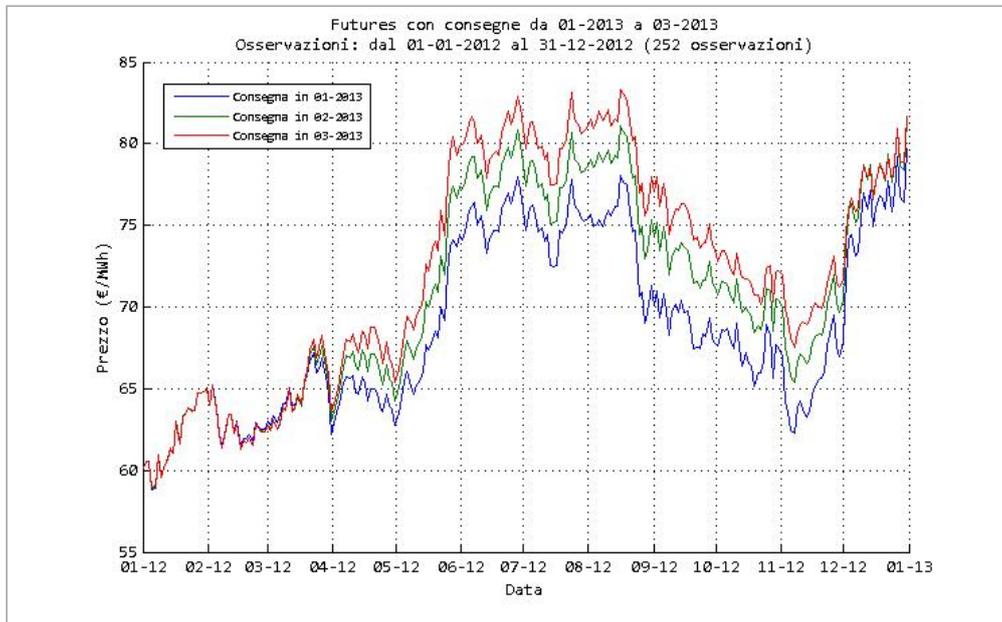


Figura 3.14: Simulazione delle traiettorie dei prezzi futures su una singola commodity dell'Esempio 3.33.

Anche in questo modello di mercato la scelta delle componenti della volatilità è in accordo con quanto anticipato sul significato delle sorgenti di rischio. Con considerazioni analoghe a quelle svolte nel paragrafo 3.3, si osserva che il primo fattore rappresenta shock di breve periodo, mentre il secondo comporta variazioni strutturali nei prezzi. Allo stesso modo, la presenza dell'esponenziale in σ_{i1}^h ed il fatto che σ_{i2}^h sia costante, suggeriscono un comportamento coerente con l'effetto Samuelson.

La novità principale introdotta dalle equazioni (3.35), invece, consiste nella dipendenza in σ_{i1}^h del coseno dal tempo alla consegna $\tau_i - t$ piuttosto che dall'inizio della consegna τ_i . Ciò impedisce al modello di soddisfare uno delle proprietà sperimentali dei futures energetici, la stagionalità della volatilità. Se si considerano due contratti sulla stessa commodity con consegne differenti, infatti, la relazione tra le volatilità dei due prezzi si inverte ogni sei mesi, rendendo impossibile l'emergere di un pattern stagionale. Nonostante questo limite, è interessante mettere in evidenza le differenze con il primo modello e, quindi, procediamo al suo studio.

3.4.1 Proprietà elementari

Il nostro obiettivo è ancora quello di calibrare i parametri $(p^h)_{h \in \underline{n}}$ e $\rho = (\rho^{hk})_{h,k \in \underline{n}}$ sui dati osservati. Poiché possiamo adottare la stessa strategia impiegata per i MET del primo tipo, calcoliamo gli integrali che consentono di esplicitare la dipendenza di $\langle X_i^h, X_j^k \rangle_I$ da $(p^h)_{h \in \underline{n}}$ e ρ . Iniziamo considerando futures scritti sulla stessa commodity, i.e. $h = k$, e troviamo la relazione funzionale che lega $\langle X_i^h, X_j^h \rangle_I$ a p^h . Prima di dare l'enunciato, definiamo i coefficienti che compariranno in questa formula.

Definizione 3.34. Siano \mathcal{M} un C-MET di tipo 2 su I , $h \in \underline{n}$ ed $i, j \in \underline{m}$. Per ogni $t \in I$, poniamo

$$\begin{aligned} G_1^{hij}(t) &:= \frac{e^{-\lambda^h(\tau_i + \tau_j - 2t)}}{2\lambda^h}, & G_2^{hij}(t) &:= \frac{e^{-\lambda^h(\tau_i - t)} + e^{-\lambda^h(\tau_j - t)}}{\lambda^h} \\ G_3^{hij}(t) &:= \left[\lambda^h \cos(\omega(\tau_i - t) + \varphi^h) - \omega \sin(\omega(\tau_i - t) + \varphi^h) \right] \frac{e^{-\lambda^h(\tau_i - t)}}{(\lambda^h)^2 + \omega^2} \\ G_4^{hij}(t) &:= \left[2\lambda^h \cos(\omega(\tau_i - t) + \varphi^h) - \omega \sin(\omega(\tau_i - t) + \varphi^h) \right] \frac{e^{-\lambda^h(\tau_i + \tau_j - 2t)}}{4(\lambda^h)^2 + \omega^2} \\ G_5^{hij}(t) &:= \left[2\lambda^h \cos(\omega(\tau_j - t) + \varphi^h) - \omega \sin(\omega(\tau_j - t) + \varphi^h) \right] \frac{e^{-\lambda^h(\tau_i + \tau_j - 2t)}}{4(\lambda^h)^2 + \omega^2} \\ G_6^{hij}(t) &:= \left[\lambda^h \cos(\omega(\tau_i + \tau_j - 2t) + 2\varphi^h) - \omega \sin(\omega(\tau_i + \tau_j - 2t) + 2\varphi^h) \right] \frac{e^{-\lambda^h(\tau_i + \tau_j - 2t)}}{2(\lambda^h)^2 + 2\omega^2} \end{aligned}$$

Definiamo poi i coefficienti

$$\begin{aligned} a_{ij}^h &:= G_1^{hij}(T_1) - G_1^{hij}(T_0) \\ b_{ij}^h &:= \frac{1}{2} \cos(\omega(\tau_i - \tau_j)) \left[G_1^{hij}(T_1) - G_1^{hij}(T_0) \right] + \frac{1}{2} \left[G_6^{hij}(T_1) - G_6^{hij}(T_0) \right] \\ c_{ij}^h &:= T_1 - T_0 \\ d_{ij}^h &:= \left[G_4^{hij}(T_1) - G_4^{hij}(T_0) \right] + \left[G_5^{hij}(T_1) - G_5^{hij}(T_0) \right] \\ e_{ij}^h &:= G_2^{hij}(T_1) - G_2^{hij}(T_0) \\ f_{ij}^h &:= \left[G_3^{hij}(T_1) - G_3^{hij}(T_0) \right] + \left[G_3^{hij}(T_1 + (\tau_i - \tau_j)) - G_3^{hij}(T_0 + (\tau_i - \tau_j)) \right] \end{aligned}$$

Come nella Definizione 3.14, è importante fare attenzione perché, nonostante sia stata omessa per semplicità di notazione, esiste una dipendenza (non polinomiale) dei coefficienti $a_{ij}^h, \dots, f_{ij}^h$ dai parametri φ^h, λ^h . Dimostriamo che $\langle X_i^h, X_j^h \rangle_I$ è la stessa funzione polinomiale dei parametri $\alpha_0^h, \alpha_1^h, \alpha_2^h, \rho^h$ individuata nella Proposizione 3.15 ed, in particolare, una forma quadratica rispetto ad $\alpha_0^h, \alpha_1^h, \alpha_2^h$.

Proposizione 3.35 (Covarianza quadratica di X_i^h, X_j^h). *Se \mathcal{M} è un C-MET di tipo 2 su I , $h \in \underline{n}$ ed $i, j \in \underline{m}$, allora*

$$\langle X_i^h, X_j^h \rangle_I = a_{ij}^h (\alpha_0^h)^2 + b_{ij}^h (\alpha_1^h)^2 + c_{ij}^h (\alpha_2^h)^2 + d_{ij}^h \alpha_0^h \alpha_1^h + e_{ij}^h \rho^h \alpha_0^h \alpha_2^h + f_{ij}^h \rho^h \alpha_1^h \alpha_2^h$$

Dimostrazione: Per alleggerire la notazione, poiché ci concentriamo su una singola commodity, omettiamo la dipendenza da h . Ricordando le Proposizioni 3.9 e 3.10, possiamo esprimere la covarianza quadratica rispetto alla misura oggettiva come

$$\begin{aligned} \langle X_i, X_j \rangle_I &\stackrel{\text{Prp. 3.10}}{=} \int_I \Lambda_{ij}^{hh}(s) ds \stackrel{\text{Def. 3.8}}{=} \int_I \Lambda_{ij}^h(s) ds \stackrel{\text{Prp. 3.9}}{=} \\ &= \int_I \sigma_{i1}(s)\sigma_{j1}(s) + \rho[\sigma_{i1}(s)\sigma_{j2}(s) + \sigma_{i2}(s)\sigma_{j1}(s)] + \sigma_{i2}(s)\sigma_{j2}(s) ds \stackrel{\text{Def. 3.32}}{=} \\ &= \int_I [\alpha_0 + \alpha_1 \cos(\omega(t_i - s) + \varphi)] [\alpha_0 + \alpha_1 \cos(\omega(t_j - s) + \varphi)] e^{-\lambda(\tau_i + \tau_j - 2s)} ds + \\ &\quad + \rho \alpha_2 \int_I [\alpha_0 + \alpha_1 \cos(\omega(t_i - s) + \varphi)] e^{-\lambda(\tau_i - s)} ds + \\ &\quad + \rho \alpha_2 \int_I [\alpha_0 + \alpha_1 \cos(\omega(t_j - s) + \varphi)] e^{-\lambda(\tau_j - s)} ds + \\ &\quad + \alpha_2^2 \int_I ds = \\ &= \alpha_0^2 \int_I e^{-\lambda(\tau_i + \tau_j - 2s)} ds + \alpha_1^2 \int_I \cos(\omega(\tau_i - s) + \varphi) \cos(\omega(\tau_j - s) + \varphi) e^{-\lambda(\tau_i + \tau_j - 2s)} ds + \\ &\quad + \alpha_2^2 \int_I ds + \alpha_0 \alpha_1 \left(\int_I \cos(\omega(\tau_i - s) + \varphi) e^{-\lambda(\tau_i + \tau_j - 2s)} ds + \right. \\ &\quad \left. + \int_I \cos(\omega(\tau_j - s) + \varphi) e^{-\lambda(\tau_i + \tau_j - 2s)} ds \right) + \rho \alpha_0 \alpha_2 \int_I [e^{-\lambda(\tau_i - s)} + e^{-\lambda(\tau_j - s)}] ds + \\ &\quad + \rho \alpha_1 \alpha_2 \left(\int_I \cos(\omega(\tau_i - s) + \varphi) e^{-\lambda(\tau_i - s)} ds + \int_I \cos(\omega(\tau_j - s) + \varphi) e^{-\lambda(\tau_j - s)} ds \right) \end{aligned}$$

Se definiamo $\bar{a}_{ij}, \bar{b}_{ij}, \bar{c}_{ij}, \bar{d}_{ij}, \bar{e}_{ij}, \bar{f}_{ij}$ rispettivamente con i coefficienti di $\alpha_0^2, \alpha_1^2, \alpha_2^2, \alpha_0 \alpha_1, \rho \alpha_0 \alpha_2$ e $\rho \alpha_1 \alpha_2$ nell'ultimo membro dell'equazione precedente, possiamo riscrivere la covarianza quadratica come

$$\langle X_i, X_j \rangle_I = \alpha_0^2 \bar{a}_{ij} + \alpha_1^2 \bar{b}_{ij} + \alpha_2^2 \bar{c}_{ij} + \alpha_0 \alpha_1 \bar{d}_{ij} + \rho \alpha_0 \alpha_2 \bar{e}_{ij} + \rho \alpha_1 \alpha_2 \bar{f}_{ij} \quad (3.37)$$

Le primitive degli integrali che compaiono nei coefficienti segnati sono le funzioni G_a^{ij} . Iniziamo a calcolarle dalle più semplici

$$\begin{aligned} \int e^{-\lambda(\tau_i + \tau_j - 2s)} ds &= \frac{e^{-\lambda(\tau_i + \tau_j - 2s)}}{2\lambda} = G_1^{ij}(s) \\ \int [e^{-\lambda(\tau_i - s)} + e^{-\lambda(\tau_j - s)}] ds &= \frac{e^{-\lambda(\tau_i - s)} + e^{-\lambda(\tau_j - s)}}{\lambda} = G_2^{ij}(s) \end{aligned}$$

Per integrare il prodotto del coseno per l'esponenziale, applichiamo due volte l'integrazione per parti

$$\begin{aligned}
 & \int \cos(\omega(\tau_i - s) + \varphi) e^{-\lambda(\tau_i - s)} ds = \\
 & = \cos(\omega(\tau_i - s) + \varphi) \frac{e^{-\lambda(\tau_i - s)}}{\lambda} - \frac{\omega}{\lambda} \int \sin(\omega(\tau_i - s) + \varphi) e^{-\lambda(\tau_i - s)} ds = \\
 & = \cos(\omega(\tau_i - s) + \varphi) \frac{e^{-\lambda(\tau_i - s)}}{\lambda} - \frac{\omega}{\lambda} \left[\sin(\omega(\tau_i - s) + \varphi) \frac{e^{-\lambda(\tau_i - s)}}{\lambda} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\omega}{\lambda} \int \cos(\omega(\tau_i - s) + \varphi) e^{-\lambda(\tau_i - s)} ds \right] = \\
 & = \left[\cos(\omega(\tau_i - s) + \varphi) - \frac{\omega}{\lambda} \sin(\omega(\tau_i - s) + \varphi) \right] \frac{e^{-\lambda(\tau_i - s)}}{\lambda} - \\
 & \quad - \frac{\omega^2}{\lambda^2} \int \cos(\omega(\tau_i - s) + \varphi) e^{-\lambda(\tau_i - s)} ds
 \end{aligned}$$

Portando l'integrale del membro di destra a sinistra, raccogliendo e dividendo opportunamente, si ottiene

$$\begin{aligned}
 & \int \cos(\omega(\tau_i - s) + \varphi) e^{-\lambda(\tau_i - s)} ds = \\
 & = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \omega^2} \left[\cos(\omega(\tau_i - s) + \varphi) - \frac{\omega}{\lambda} \sin(\omega(\tau_i - s) + \varphi) \right] \frac{e^{-\lambda(\tau_i - s)}}{\lambda} = G_3^{ij}(s)
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

In modo analogo si ottengono anche le seguenti primitive

$$\begin{aligned}
 & \int \cos(\omega(\tau_i - s) + \varphi) e^{-\lambda(\tau_i + \tau_j - 2s)} ds = G_4^{ij}(s) \\
 & \int \cos(\omega(\tau_j - s) + \varphi) e^{-\lambda(\tau_i + \tau_j - 2s)} ds = G_5^{ij}(s)
 \end{aligned}$$

Nel caso del prossimo integrale, invece, dobbiamo prima sfruttare la formula di prostaferesi per trasformare il prodotto dei due coseni in una somma. A questo scopo, per ogni $s \in I$ poniamo $p := \omega(\tau_i + \tau_j - 2s) + 2\varphi$ e $q := \omega(\tau_i - \tau_j)$, in modo che valgano

$$\frac{p+q}{2} = \omega(\tau_i - s) + \varphi, \quad \frac{p-q}{2} = \omega(\tau_j - s) + \varphi$$

Per la formula di prostaferesi, dunque, otteniamo

$$\begin{aligned}
 2 \cos(\omega(\tau_i - s) + \varphi) \cos(\omega(\tau_j - s) + \varphi) & = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) = \\
 & = \cos(p) + \cos(q) = \cos(\omega(\tau_i + \tau_j - 2s) + 2\varphi) + \cos(\omega(\tau_i - \tau_j))
 \end{aligned}$$

Sostituendo la precedente relazione nel prossimo integrale, possiamo dividerlo in due parti e trovare le rispettive primitive

$$\begin{aligned}
 & \int \cos(\omega(\tau_i - s) + \varphi) \cos(\omega(\tau_j - s) + \varphi) e^{-\lambda(\tau_i + \tau_j - 2s)} ds = \\
 & = \frac{1}{2} \int \cos(\omega(\tau_i + \tau_j - 2s) + 2\varphi) e^{-\lambda(\tau_i + \tau_j - 2s)} ds + \\
 & \quad + \frac{1}{2} \cos(\omega(\tau_i - \tau_j)) \int e^{-\lambda(\tau_i + \tau_j - 2s)} ds = \\
 & = \frac{1}{2} G_6^{ij}(s) + \frac{1}{2} \cos(\omega(\tau_i - \tau_j)) G_1^{ij}(s)
 \end{aligned}$$

Per finire, applichiamo il teorema fondamentale del calcolo e mostriamo che i coefficienti segnati coincidono con quelli desiderati

$$\begin{aligned}
 \bar{a}_{ij} &= \int_I e^{-\lambda(\tau_i + \tau_j - 2s)} ds = G_1^{ij}(T_1) - G_1^{ij}(T_0) = a_{ij} \\
 \bar{b}_{ij} &= \int_I \cos(\omega(\tau_i - s) + \varphi) \cos(\omega(\tau_j - s) + \varphi) e^{-\lambda(\tau_i + \tau_j - 2s)} ds = \\
 &= \frac{1}{2} \left[G_6^{ij}(T_1) - G_6^{ij}(T_0) \right] + \frac{1}{2} \cos(\omega(\tau_i - \tau_j)) \left[G_1^{ij}(T_1) - G_1^{ij}(T_0) \right] = b_{ij} \\
 \bar{c}_{ij} &= T_1 - T_0 = c_{ij} \\
 \bar{d}_{ij} &= \int_I \cos(\omega(\tau_i - s) + \varphi) e^{-\lambda(\tau_i + \tau_j - 2s)} ds + \int_I \cos(\omega(\tau_j - s) + \varphi) e^{-\lambda(\tau_i + \tau_j - 2s)} ds = \\
 &= \left[G_4^{ij}(T_1) - G_4^{ij}(T_0) \right] + \left[G_5^{ij}(T_1) - G_5^{ij}(T_0) \right] = d_{ij} \\
 \bar{e}_{ij} &= \int_I [e^{-\lambda(\tau_i - s)} + e^{-\lambda(\tau_j - s)}] ds = G_2^{ij}(T_1) - G_2^{ij}(T_0) = e_{ij} \\
 \bar{f}_{ij} &= \int_I \cos(\omega(\tau_i - s) + \varphi) e^{-\lambda(\tau_i - s)} ds + \int_I \cos(\omega(\tau_j - s) + \varphi) e^{-\lambda(\tau_j - s)} ds = \\
 &= G_3^{ij}(T_1) - G_3^{ij}(T_0) + \int_{T_0 + (\tau_i - \tau_j)}^{T_1 + (\tau_i - \tau_j)} \cos(\omega(\tau_i - t) + \varphi) e^{-\lambda(\tau_i - t)} dt = \\
 &= \left[G_3^{ij}(T_1) - G_3^{ij}(T_0) \right] + \left[G_3^{ij}(T_1 + (\tau_i - \tau_j)) - G_3^{ij}(T_0 + (\tau_i - \tau_j)) \right] = f_{ij}
 \end{aligned}$$

Se utilizziamo le precedenti uguaglianze nell'equazione (3.37), otteniamo il risultato desiderato

$$\langle X_i, X_j \rangle_I = \alpha_0^2 a_{ij} + \alpha_1^2 b_{ij} + \alpha_2^2 c_{ij} + \alpha_0 \alpha_1 d_{ij} + \rho \alpha_0 \alpha_2 e_{ij} + \rho \alpha_1 \alpha_2 f_{ij}$$

■

Il passo successivo consiste nel considerare futures scritti su due commodity differenti, esplicitando la dipendenza di $\langle X_i^h, X_j^k \rangle_I$ da $\rho^{hk} = (\rho_{ab}^{hk})_{a,b \in \underline{2}}$. Introduciamo i coefficienti che compariranno nella covarianza quadratica.

Definizione 3.36. Siano \mathcal{M} un \mathcal{C} -MET di tipo 2 su I ed $(h, i), (k, j) \in \underline{n} \times \underline{m}$. Per ogni $t \in I$, poniamo

$$\begin{aligned}
 G_1^{hki j}(t) &:= \frac{e^{-\lambda^h(\tau_i - t)}}{\lambda^h}, \quad G_2^{hki j}(t) := \frac{e^{-\lambda^k(\tau_j - t)}}{\lambda^k}, \quad G_3^{hki j}(t) := \frac{e^{-\lambda^h(\tau_i - t) - \lambda^k(\tau_j - t)}}{\lambda^h + \lambda^k} \\
 G_4^{hki j}(t) &:= \left[\lambda^h \cos(\omega(\tau_i - t) + \varphi^h) - \omega \sin(\omega(\tau_i - t) + \varphi^h) \right] \frac{e^{-\lambda^h(\tau_i - t)}}{(\lambda^h)^2 + \omega^2} \\
 G_5^{hki j}(t) &:= \left[\lambda^k \cos(\omega(\tau_j - t) + \varphi^k) - \omega \sin(\omega(\tau_j - t) + \varphi^k) \right] \frac{e^{-\lambda^k(\tau_j - t)}}{(\lambda^k)^2 + \omega^2} \\
 G_6^{hki j}(t) &:= \left[(\lambda^h + \lambda^k) \cos(\omega(\tau_i - t) + \varphi^h) - \omega \sin(\omega(\tau_i - t) + \varphi^h) \right] \frac{e^{-\lambda^h(\tau_i - t)} + e^{-\lambda^k(\tau_j - t)}}{(\lambda^h + \lambda^k)^2 + \omega^2} \\
 G_7^{hki j}(t) &:= \left[(\lambda^h + \lambda^k) \cos(\omega(\tau_j - t) + \varphi^k) - \omega \sin(\omega(\tau_j - t) + \varphi^k) \right] \frac{e^{-\lambda^h(\tau_i - t)} + e^{-\lambda^k(\tau_j - t)}}{(\lambda^h + \lambda^k)^2 + \omega^2} \\
 G_8^{hki j}(t) &:= \left[(\lambda^h + \lambda^k) \cos(\omega(\tau_i + \tau_j - 2t) + \varphi^h + \varphi^k) - 2\omega \sin(\omega(\tau_i + \tau_j - 2t) + \varphi^h + \varphi^k) \right] \cdot \\
 &\quad \cdot \frac{e^{-\lambda^h(\tau_i - t)} + e^{-\lambda^k(\tau_j - t)}}{(\lambda^h + \lambda^k)^2 + 4\omega^2}
 \end{aligned}$$

Definiamo poi i coefficienti

$$\begin{aligned}
 A_{ij}^{hk} &:= \alpha_0^h \alpha_0^k \left[G_3^{hkij}(T_1) - G_3^{hkij}(T_0) \right] + \alpha_1^h \alpha_0^k \left[G_6^{hkij}(T_1) - G_6^{hkij}(T_0) \right] + \alpha_0^h \alpha_1^k \left[G_7^{hkij}(T_1) - G_7^{hkij}(T_0) \right] + \\
 &\quad + \alpha_1^h \alpha_1^k \left[\frac{1}{2} \left(G_8^{hkij}(T_1) - G_8^{hkij}(T_0) \right) + \frac{1}{2} \cos \left(\omega(\tau_i - \tau_j) + \varphi^h - \varphi^k \right) \left(G_3^{hkij}(T_1) - G_3^{hkij}(T_0) \right) \right] \\
 B_{ij}^{hk} &:= \alpha_0^h \alpha_2^k \left[G_1^{hkij}(T_1) - G_1^{hkij}(T_0) \right] + \alpha_1^h \alpha_2^k \left[G_4^{hkij}(T_1) - G_4^{hkij}(T_0) \right] \\
 C_{ij}^{hk} &:= \alpha_2^h \alpha_0^k \left[G_2^{hkij}(T_1) - G_2^{hkij}(T_0) \right] + \alpha_2^h \alpha_1^k \left[G_5^{hkij}(T_1) - G_5^{hkij}(T_0) \right] \\
 D_{ij}^{hk} &:= \alpha_2^h \alpha_2^k (T_1 - T_0)
 \end{aligned}$$

Mentre nella Definizione 3.34 alcune delle variabili da esplicitare comparivano nei coefficienti, ora A_{ij}^{hk} , B_{ij}^{hk} , C_{ij}^{hk} , D_{ij}^{hk} dipendono solo dai parametri delle due commodity coinvolte \mathbf{p}^h , \mathbf{p}^k e non contengono nessuno dei ρ_{ab}^{hk} con $a, b \in \underline{2}$. Proviamo, dunque, che $\langle X_i^h, X_j^k \rangle_I$ è una funzione lineare di questi ultimi.

Proposizione 3.37 (Covarianza quadratica di X_i^h, X_j^k). *Se \mathcal{M} è un C-MET di tipo 2 su I ed $(h, i), (k, j) \in \underline{n} \times \underline{m}$, allora*

$$\langle X_i^h, X_j^k \rangle_I = A_{ij}^{hk} \rho_{11}^{hk} + B_{ij}^{hk} \rho_{12}^{hk} + C_{ij}^{hk} \rho_{21}^{hk} + D_{ij}^{hk} \rho_{22}^{hk}$$

Dimostrazione: Applichiamo le Proposizioni 3.10 e 3.9 alla covarianza quadratica rispetto alla misura oggettiva per ottenere

$$\begin{aligned}
 \langle X_i^h, X_j^k \rangle_I &= \int_I \Lambda_{ij}^{hk}(s) ds = \\
 &= \int_I \rho_{11}^{hk} \sigma_{i1}^h(s) \sigma_{j1}^k(s) + \rho_{12}^{hk} \sigma_{i1}^h(s) \sigma_{j2}^k(s) + \rho_{21}^{hk} \sigma_{i2}^h(s) \sigma_{j1}^k(s) + \rho_{22}^{hk} \sigma_{i2}^h(s) \sigma_{j2}^k(s) ds \stackrel{\text{Def 3.32}}{=} \\
 &= \rho_{11}^{hk} \int_I \left[\alpha_0^h + \alpha_1^h \cos(\omega(\tau_i - s) + \varphi^h) \right] \left[\alpha_0^k + \alpha_1^k \cos(\omega(\tau_j - s) + \varphi^k) \right] e^{-\lambda^h(\tau_i - s) - \lambda^k(\tau_j - s)} ds + \\
 &\quad + \rho_{12}^{hk} \alpha_2^k \int_I \left[\alpha_0^h + \alpha_1^h \cos(\omega(\tau_i - s) + \varphi^h) \right] e^{-\lambda^h(\tau_i - s)} ds + \\
 &\quad + \rho_{21}^{hk} \alpha_2^h \int_I \left[\alpha_0^k + \alpha_1^k \cos(\omega(\tau_j - s) + \varphi^k) \right] e^{-\lambda^k(\tau_j - s)} ds + \\
 &\quad + \rho_{22}^{hk} \alpha_2^h \alpha_2^k \int_I ds = \\
 &= \rho_{11}^{hk} \overline{A}_{ij}^{hk} + \rho_{12}^{hk} \overline{B}_{ij}^{hk} + \rho_{21}^{hk} \overline{C}_{ij}^{hk} + \rho_{22}^{hk} \overline{D}_{ij}^{hk}
 \end{aligned}$$

dove abbiamo definito i coefficienti segnati come

$$\begin{aligned}
 \overline{A}_{ij}^{hk} &= \alpha_0^h \alpha_0^k \int_I e^{-\lambda^h(\tau_i - s) - \lambda^k(\tau_j - s)} ds + \\
 &\quad + \alpha_1^h \alpha_0^k \int_I \cos(\omega(\tau_i - s) + \varphi^h) e^{-\lambda^h(\tau_i - s) - \lambda^k(\tau_j - s)} ds +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \alpha_0^h \alpha_1^k \int_I \cos(\omega(\tau_j - s) + \varphi^k) e^{-\lambda^h(\tau_i - s) - \lambda^k(\tau_j - s)} ds + \\
 & + \alpha_1^h \alpha_1^k \int_I \cos(\omega(\tau_i - s) + \varphi^h) \cos(\omega(\tau_j - s) + \varphi^k) e^{-\lambda^h(\tau_i - s) - \lambda^k(\tau_j - s)} ds \\
 \overline{B}_{ij}^{hk} & = \alpha_0^h \alpha_2^k \int_I e^{-\lambda^h(\tau_i - s)} ds + \alpha_1^h \alpha_2^k \int_I \cos(\omega(\tau_i - s) + \varphi^h) e^{-\lambda^h(\tau_i - s)} ds \\
 \overline{C}_{ij}^{hk} & = \alpha_2^h \alpha_0^k \int_I e^{-\lambda^k(\tau_j - s)} ds + \alpha_2^h \alpha_1^k \int_I \cos(\omega(\tau_j - s) + \varphi^k) e^{-\lambda^k(\tau_j - s)} ds \\
 \overline{D}_{ij}^{hk} & = \alpha_2^h \alpha_2^k \int_I ds
 \end{aligned}$$

Mostriamo come le primitive degli integrali che compaiono nella precedenti espressioni siano le funzioni G_a^{hkij} . Infatti si prova facilmente che

$$\begin{aligned}
 \int e^{-\lambda^h(\tau_i - s)} ds & = G_1^{hkij}(s), \quad \int e^{-\lambda^k(\tau_j - s)} ds = G_2^{hkij}(s) \\
 \int e^{-\lambda^h(\tau_i - s) - \lambda^k(\tau_j - s)} ds & = G_3^{hkij}(s)
 \end{aligned}$$

In modo analogo a come calcolato la primitiva (3.38), otteniamo anche

$$\begin{aligned}
 \int \cos(\omega(\tau_i - s) + \varphi^h) e^{-\lambda^h(\tau_i - s)} ds & = G_4^{hkij}(s) \\
 \int \cos(\omega(\tau_j - s) + \varphi^k) e^{-\lambda^k(\tau_j - s)} ds & = G_5^{hkij}(s) \\
 \int \cos(\omega(\tau_i - s) + \varphi^h) e^{-\lambda^h(\tau_i - s) - \lambda^k(\tau_j - s)} ds & = G_6^{hkij}(s) \\
 \int \cos(\omega(\tau_j - s) + \varphi^k) e^{-\lambda^h(\tau_i - s) - \lambda^k(\tau_j - s)} ds & = G_7^{hkij}(s)
 \end{aligned}$$

Per l'ultimo integrale, invece, dobbiamo prima sfruttare la formula di prostaferesi e trasformare il prodotto dei due coseni che compaiono in una somma. A questo scopo, per ogni $s \in I$ poniamo $p := \omega(\tau_i + \tau_j - 2s) + \varphi^h + \varphi^k$ e $q := \omega(\tau_i - \tau_j) + \varphi^h - \varphi^k$, in modo che valgano

$$\frac{p+q}{2} = \omega(\tau_i - s) + \varphi^h, \quad \frac{p-q}{2} = \omega(\tau_j - s) + \varphi^k$$

Per la formula di prostaferesi, dunque, otteniamo

$$\begin{aligned}
 2 \cos(\omega(\tau_i - s) + \varphi^h) \cos(\omega(\tau_j - s) + \varphi^k) & = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) = \\
 & = \cos(p) + \cos(q) = \cos(\omega(\tau_i + \tau_j - 2s) + \varphi^h + \varphi^k) + \cos(\omega(\tau_i - \tau_j) + \varphi^h - \varphi^k)
 \end{aligned}$$

Sostituendo questa relazione nel prossimo integrale, possiamo dividerlo in due parti e trovare le rispettive primitive

$$\begin{aligned}
 & \int \cos(\omega(\tau_i - s) + \varphi^h) \cos(\omega(\tau_j - s) + \varphi^k) e^{-\lambda^h(\tau_i - s) - \lambda^k(\tau_j - s)} ds = \\
 & = \frac{1}{2} \int \cos(\omega(\tau_i + \tau_j - 2s) + \varphi^h + \varphi^k) e^{-\lambda^h(\tau_i - s) - \lambda^k(\tau_j - s)} ds + \\
 & \quad + \frac{1}{2} \cos(\omega(\tau_i - \tau_j) + \varphi^h - \varphi^k) \int_I e^{-\lambda^h(\tau_i - s) - \lambda^k(\tau_j - s)} ds = \\
 & = \frac{1}{2} G_8^{hkij}(s) + \frac{1}{2} \cos(\omega(\tau_i - \tau_j) + \varphi^h - \varphi^k) G_3^{hkij}(s)
 \end{aligned}$$

Grazie a questi risultati, per il teorema fondamentale del calcolo si ottiene che i coefficienti segnati coincidono con quelli desiderati

$$\begin{aligned}\bar{A}_{ij}^{hk} &:= \alpha_0^h \alpha_0^k \left[G_3^{hki j}(T_1) - G_3^{hki j}(T_0) \right] + \alpha_1^h \alpha_0^k \left[G_6^{hki j}(T_1) - G_6^{hki j}(T_0) \right] + \\ &\quad + \alpha_0^h \alpha_1^k \left[G_7^{hki j}(T_1) - G_7^{hki j}(T_0) \right] + \alpha_1^h \alpha_1^k \left[\frac{1}{2} \left(G_8^{hki j}(T_1) - G_8^{hki j}(T_0) \right) \right] + \\ &\quad + \frac{1}{2} \cos(\omega(\tau_i - \tau_j) + \varphi^h - \varphi^k) \left(G_3^{hki j}(T_1) - G_3^{hki j}(T_0) \right) \Big] = A_{ij}^{hk} \\ \bar{B}_{ij}^{hk} &:= \alpha_0^h \alpha_2^k \left[G_1^{hki j}(T_1) - G_1^{hki j}(T_0) \right] + \alpha_1^h \alpha_2^k \left[G_4^{hki j}(T_1) - G_4^{hki j}(T_0) \right] = B_{ij}^{hk} \\ \bar{C}_{ij}^{hk} &:= \alpha_2^h \alpha_0^k \left[G_2^{hki j}(T_1) - G_2^{hki j}(T_0) \right] + \alpha_2^h \alpha_1^k \left[G_5^{hki j}(T_1) - G_5^{hki j}(T_0) \right] = C_{ij}^{hk} \\ \bar{D}_{ij}^{hk} &:= \alpha_2^h \alpha_2^k (T_1 - T_0) = D_{ij}^{hk}\end{aligned}$$

■

A differenza dei MET del primo tipo, in questo caso la dipendenza della varianza del log-rendimento $\text{Var}^P(\Delta X_i^h(t_l))$ dalla data t_l ha una forma più complessa, poiché compaiono prodotti tra esponenziali e coseni in funzione del tempo alla consegna $\tau_i - t_l$. Se fissiamo una partizione dell'intervallo I , che interpretiamo come l'insieme delle date in cui i prezzi sono osservati, possiamo definire i coefficienti:

Definizione 3.38. Siano \mathcal{M} un \mathcal{C} -MET di tipo 2 su I , $(h, i) \in \underline{n} \times \underline{m}$, $\pi = (t_0, \dots, t_N) \in \text{Pr}t(I)$ ed $l \in \underline{N}$. Utilizziamo le funzioni G_a^{hij} della Definizione 3.34 prendendo quelle per cui $j = i$. Poniamo quindi

$$\begin{aligned}a_i^h &:= G_1^{hii}(t_l) - G_1^{hii}(t_{l-1}) \\ b_i^h &:= \frac{1}{2} \cos(\omega(\tau_i - \tau_j)) \left[G_1^{hii}(t_l) - G_1^{hii}(t_{l-1}) \right] + \frac{1}{2} \left[G_6^{hii}(t_l) - G_6^{hii}(t_{l-1}) \right] \\ c_i^h &:= t_l - t_{l-1} \\ d_i^h &:= \left[G_4^{hii}(t_l) - G_4^{hii}(t_{l-1}) \right] + \left[G_5^{hii}(t_l) - G_5^{hii}(t_{l-1}) \right] \\ e_i^h &:= G_2^{hii}(t_l) - G_2^{hii}(t_{l-1}) \\ f_i^h &:= \left[G_3^{hii}(t_l) - G_3^{hii}(t_{l-1}) \right] + \left[G_3^{hii}(t_l + (\tau_i - \tau_j)) - G_3^{hii}(t_{l-1} + (\tau_i - \tau_j)) \right]\end{aligned}$$

Notiamo che, diversamente dalla Definizione 3.18, i coefficienti adesso dipendono dalle date di osservazione t_l . Calcoliamo la varianza dei log-rendimenti rispetto alla misura oggettiva.

Proposizione 3.39 (Varianza dei log-rendimenti). *Se \mathcal{M} è un \mathcal{C} -MET di tipo 2 su I , $(h, i) \in \underline{n} \times \underline{m}$, $\pi = (t_0, \dots, t_N) \in \text{Pr}t(I)$ ed $l \in \underline{N}$, allora*

$$\text{Var}^P(\Delta X_i^h(t_l)) = a_i^h (\alpha_0^h)^2 + b_i^h (\alpha_1^h)^2 + c_i^h (\alpha_2^h)^2 + d_i^h \alpha_0^h \alpha_1^h + e_i^h \rho^h \alpha_0^h \alpha_2^h + f_i^h \rho^h \alpha_1^h \alpha_2^h$$

Dimostrazione: Con lo stesso ragionamento adottato nella dimostrazione della Proposizione 3.19, proviamo che

$$\begin{aligned}\text{Var}^P(\Delta X_i^h(t_l)) &\stackrel{\text{Prp. 3.11}}{=} \int_{t_{l-1}}^{t_l} \Sigma_i^h(s)^2 ds \stackrel{\text{Prp. 3.9}}{=} \int_{t_{l-1}}^{t_l} \Lambda_{ii}^h(s) ds = \\ &= a_i^h (\alpha_0^h)^2 + b_i^h (\alpha_1^h)^2 + c_i^h (\alpha_2^h)^2 + d_i^h \alpha_0^h \alpha_1^h + e_i^h \rho^h \alpha_0^h \alpha_2^h + f_i^h \rho^h \alpha_1^h \alpha_2^h\end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio è conseguenza di calcoli analoghi a quelli svolti per ottenere la Proposizione 3.35. ■

Utilizziamo la formula appena ricavata per visualizzare la volatilità annualizzata del modello che stiamo studiando e fare alcune osservazioni sulle sue proprietà.

Esempio 3.40. Consideriamo il mercato dell'Esempio 3.33, ma estendiamo l'intervallo temporale su cui è definito in modo che comprenda i tre anni tra il 01-gen-2010 ed il 31-dic-2012. Se applichiamo la Function 5.5, otteniamo i grafici delle volatilità dei log-rendimenti giornalieri relativi alla commodity h -esima, raccolti in Figura 3.15. Dalla rappresentazione delle tre funzioni $t_l \mapsto \text{Vol}_a^P(\Delta X_i^h(t_l))$, con $i \in \underline{3}$, calcolate attraverso la formula della Proposizione 3.39, si può notare la differenza principale tra modelli del primo e secondo tipo, anticipata all'inizio del paragrafo. Poiché il coseno nella componente σ_{i1}^h dipende ora dal tempo alla consegna, ogni sei mesi la relazione tra le volatilità di due contratti sulla stessa commodity si inverte: mentre a dicembre 2012 i prezzi di 01-2013 sono più volatili di quelli di 02-2013, a giugno 2012 si verifica l'opposto. Dunque una delle proprietà sperimentali dei futures energetici, la *stagionalità della volatilità*, non è soddisfatta. Osserviamo, invece, che la crescita esponenziale delle tre funzioni e la presenza di un asintoto orizzontale comune sono in accordo con l'effetto Samuelson.

Verifichiamo la correttezza del risultato della Proposizione 3.39 simulando ulteriori 10000 traiettorie del futures 01-2013 relative ad un anno di prezzi. Per ogni data di osservazione, dunque, disponiamo di 10000 realizzazioni della variabile casuale log-rendimento giornaliero relativo a quella data. Calcolando la volatilità campionaria di questi 10000 valori ed annualizzando il risultato, si ricava il grafico in Figura 3.16, che conferma l'esattezza del calcolo. ■

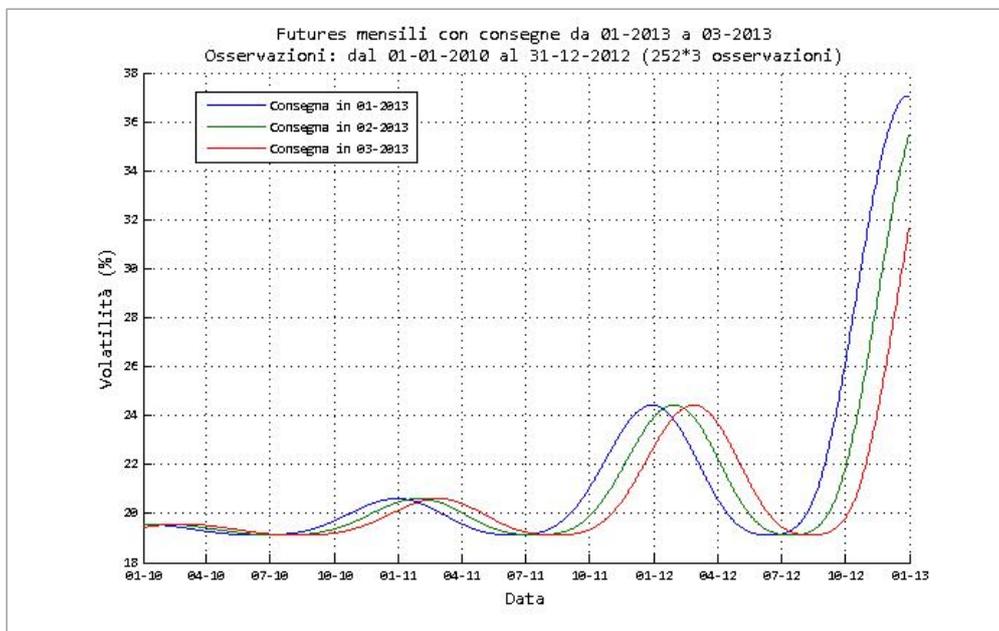


Figura 3.15: Volatilità annualizzata dei log-rendimenti giornalieri dei futures dell'Esempio 3.40.

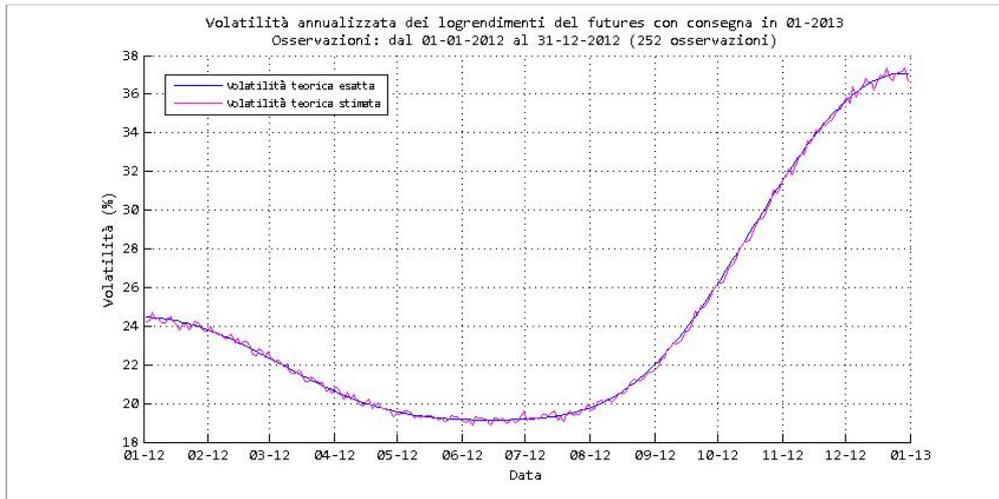


Figura 3.16: Stima della volatilità annualizzata dei log-rendimenti giornalieri dei futures dell'Esempio 3.40.

Esempio 3.41. Nonostante l'assenza di stagionalità nella volatilità, la struttura a termine in ciascuna giornata di contrattazione presenta un andamento periodico. Prendiamo ancora un mercato in cui i futures sulla commodity h -esima sono definiti dai parametri (3.36), ma questa volta supponiamo siano scambiate le 36 scadenze gen-2013, ..., dic-2015 nell'intervallo temporale che va dal 01-gen-2012 al 31-dic-2012. Rappresentiamo quindi la struttura a termine della volatilità dei log-rendimenti nel giorno $t = 03$ -dic-2012. Attraverso la routine 5.6, si ottiene il grafico della funzione $\tau_i - t \mapsto \text{Vol}_a^P(\Delta X_i^h(t))$ definita sull'insieme $\{\tau_i - t\}_{i \in 36}$ dei tempi alla consegna in t rispetto ai 36 futures, visualizzato in Figura 3.17. Come nell'esempio precedente è evidente l'effetto Samuelson, poiché al crescere del TTD la volatilità del futures tende a diminuire convergendo ad un valore fissato. Si osservano, inoltre, prezzi più incerti per consegne nei mesi invernali rispetto a quelle relative ai mesi estivi. Tuttavia ciò non è conseguenza di una stagionalità nella volatilità. Se considerassimo la struttura a termine in un giorno di giugno 2012, infatti, il comportamento sarebbe invertito, con consegne estive più volatili di quelle invernali. ■

3.4.2 Test numerici di calibrazione

Nelle Proposizioni 3.35 e 3.37 abbiamo dimostrato che le forme funzionali delle covarianze quadratiche $\langle X_i^h, X_j^k \rangle$ coincidono con quelle identificate per modelli del primo tipo. Le due tecniche di calibrazione introdotte nel sottoparagrafo 3.3.2, dunque, si applicano anche ai parametri $(p^h)_{h \in \mathcal{N}}$ e $\rho = (\rho^{hk})_{h,k \in \mathcal{N}}$ relativi al nuovo caso. Sarà sufficiente sostituire, nelle definizioni delle funzioni da minimizzare, i coefficienti $a_{ij}^h, \dots, f_{ij}^h$ ed $A_{ij}^{hk}, B_{ij}^{hk}, C_{ij}^{hk}, D_{ij}^{hk}$ del paragrafo 3.3 con quelli introdotti in quest'ultimo. Eseguiamo gli stessi test numerici svolti per il primo modello, così da verificare se i metodi proposti siano ancora efficaci.

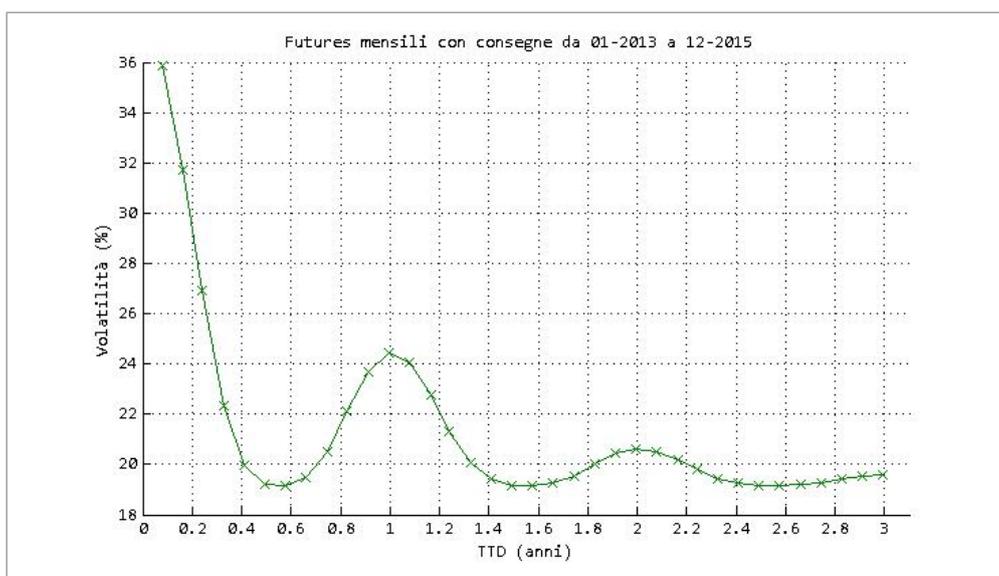


Figura 3.17: Struttura a termine osservata il 03-dic-2012 della volatilità annualizzata dei log-rendimenti relativi ai futures dell'Esempio 3.41.

Esempio 3.42. Supponiamo che l'intervallo di osservazione sia il periodo che va dal 01-gen-2012 al 31-dic-2012 e la struttura di consegna sia costituita dai mesi gen-2013, feb-2013, mar-2013. Consideriamo un mercato del secondo tipo per il quale i parametri relativi alla commodity h -esima sono:

$$\begin{array}{l|l}
 \alpha_0^h=0.0120 & \varphi^h=5.9690 \\
 \alpha_1^h=0.0100 & \lambda^h=1.00/365 \\
 \alpha_2^h=0.0080 & \rho^h=0.30
 \end{array} \quad (3.39)$$

e stabiliamo i prezzi iniziali $F_1^h(T_0) = F_2^h(T_0) = F_3^h(T_0) = 60 \text{ €/MWh}$. Nell'ipotesi che le osservazioni siano giornaliere, simuliamo i prezzi futures su questa commodity attraverso la Function 5.4 ed applichiamo la tecnica di calibrazione descritta per stimare p^h con la routine 5.8. Nei grafici a sinistra della Figura 3.18, riportiamo in alto la volatilità teorica dei log-rendimenti del modello dato ed in basso quella del modello approssimato. In entrambi i casi le funzioni rappresentate sono calcolate attraverso la formula della Proposizione 3.39, utilizzando rispettivamente i parametri esatti p^h e stimati \hat{p}^h . Osserviamo che l'errore relativo, in alto a destra, si mantiene per i tre futures sotto il 4%. Nell'ultimo grafico in basso a destra, infine, riportiamo l'errore relativo medio ottenuto ripetendo 100 calibrazioni analoghe alla precedente ed, anche in questo caso, non è superato il 6%.

Verifichiamo la convergenza a zero dell'errore al crescere della frequenza delle osservazioni ripetendo il precedente test, ma simulando questa volta 50 prezzi al giorno. In Figura 3.19 notiamo come l'errore relativo, in alto a destra, si mantenga ora sotto l'1.4% e, ripetendo ancora 100 calibrazioni, la media sia comunque inferiore all'1.6%, in basso a destra. ■

Nell'esempio precedente abbiamo potuto testare la bontà della calibrazione confrontando le due volatilità teoriche, esatta e calibrata, poiché le serie storiche usate

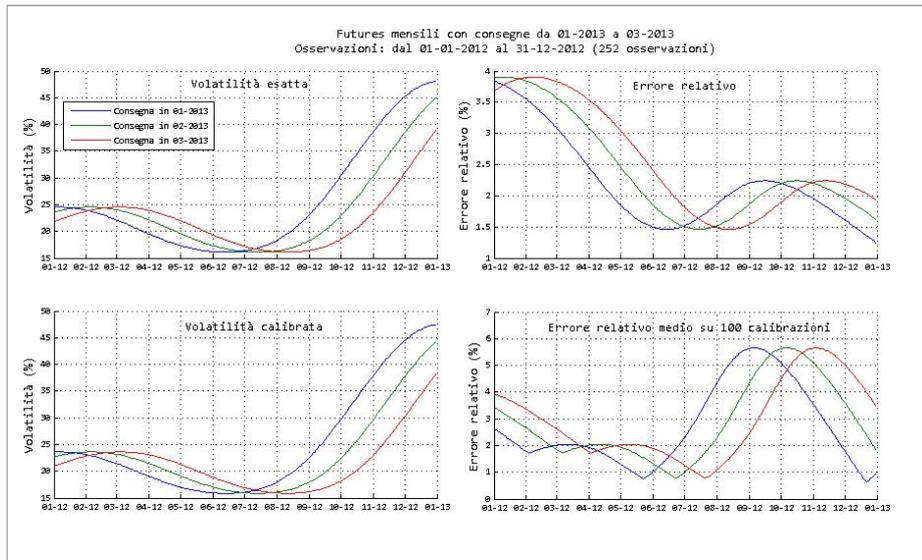


Figura 3.18: A sinistra, i due grafici della volatilità teorica, esatta e calibrata, dei futures dell'Esempio 3.28. A destra, in alto il grafico dell'errore relativo della volatilità calibrata rispetto a quella esatta, in basso l'errore relativo medio su 100 calibrazioni.

nella stima dei parametri erano simulate in base al modello dato. Quando si parte da prezzi reali, però, non è più possibile procedere in questo modo e, come visto in precedenza, un'alternativa consiste nel paragonare la volatilità storica dei prezzi osservati con quella teorica del modello calibrato. Vediamo con un esempio il risultato di questo confronto, impiegando ancora serie storiche simulate.

Esempio 3.43. Consideriamo i 24 futures mensili scritti sulla commodity h -esima gen-2013, ..., dic-2014 osservati giornalmente dal 01-gen-2012 al 31-dic-2012 e chiediamo che i parametri in p^h siano quelli definiti nella tabella (3.39). Se supponiamo che i prezzi iniziali siano, al solito, $F_1^h(T_0) = \dots = F_{24}^h(T_0) = 60 \text{ €/MWh}$ possiamo applicare la Function 5.4 per generare i prezzi dei futures su questa commodity nell'intervallo considerato. Calibrati i parametri attraverso la routine 5.8, riportiamo in Figura 3.20 il confronto tra la volatilità storica a 20 giorni e quella teorica del modello calibrato per i primi 6 contratti. Nella Figura 3.21, poi, presentiamo un esempio delle due strutture a termine della volatilità storica e della volatilità teorica calibrata che si osservano in un giorno fissato. Il coefficiente di correlazione calibrato ottenuto, infine, è $\hat{\rho}^h = 0.2753$, una stima di ρ^h con errore relativo dell'8.2%. ■

Verifichiamo, infine, il metodo sviluppato per la calibrazione della matrice di correlazione applicandolo, anche in questo caso, a dati simulati. Ne misuriamo l'efficacia confrontando i parametri del modello che genera le serie storiche con le stime ottenute.

Esempio 3.44. Supponiamo che siano osservati dal 01-gen-2012 al 31-dic-2012 i prezzi dei futures mensili gen-2013, feb-2013, mar-2013 scritti su tre commodity

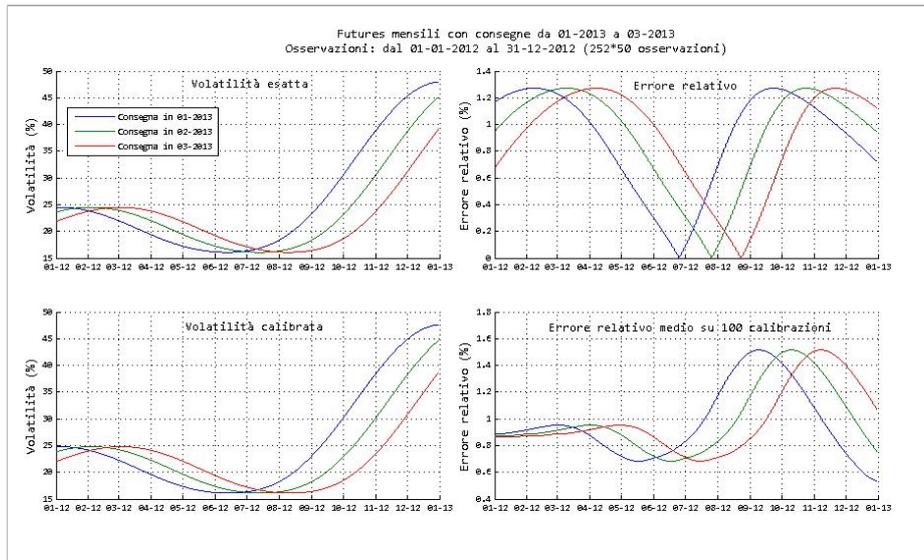


Figura 3.19: A sinistra, confronto tra volatilità teorica esatta e calibrata, nel caso di 50 osservazioni al giorno, per i futures dell'Esempio 3.42. A destra, gli errori relativi commessi dalla calibrazione.

differenti. Definiamo il modello fissando i seguenti parametri:

h	α_0^h	α_1^h	α_2^h	φ^h	λ^h	ρ^h
1	0.0080	0.0080	0.0100	5.9690	0.80/365	0.10
2	0.0120	0.0100	0.0080	5.9690	1.00/365	0.30
3	0.0180	0.0010	0.0001	5.8905	0.45/365	0.80

e chiedendo che le correlazioni tra i fattori di rischio siano descritte dalla matrice simmetrica e semidefinita positiva:

$$\rho = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0.1000 & 0.6000 & 0.4000 & 0.5000 & 0.5000 \\ 0.1000 & 1.0000 & 0.4000 & 0.6000 & 0.5000 & 0.5000 \\ 0.6000 & 0.4000 & 1.0000 & 0.3000 & 0.6000 & 0.4000 \\ 0.4000 & 0.6000 & 0.3000 & 1.0000 & 0.4000 & 0.6000 \\ 0.5000 & 0.5000 & 0.6000 & 0.4000 & 1.0000 & 0.8000 \\ 0.5000 & 0.5000 & 0.4000 & 0.6000 & 0.8000 & 1.0000 \end{pmatrix}$$

Supponiamo i prezzi iniziali siano tutti uguali a 60 €/MWh e simuliamo i prezzi osservati giornalmente nell'intervallo considerato applicando la Function 5.7. Se calibriamo la matrice di correlazione su questi dati con la routine 5.9, il risultato è:

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0.1000 & 0.6179 & 0.3766 & 0.5374 & 0.5094 \\ 0.1000 & 1.0000 & 0.3823 & 0.6030 & 0.4331 & 0.5044 \\ 0.6179 & 0.3823 & 1.0000 & 0.3000 & 0.6431 & 0.4048 \\ 0.3766 & 0.6030 & 0.3000 & 1.0000 & 0.3917 & 0.5820 \\ 0.5374 & 0.4331 & 0.6431 & 0.3917 & 1.0000 & 0.8000 \\ 0.5094 & 0.5044 & 0.4048 & 0.5820 & 0.8000 & 1.0000 \end{pmatrix}$$

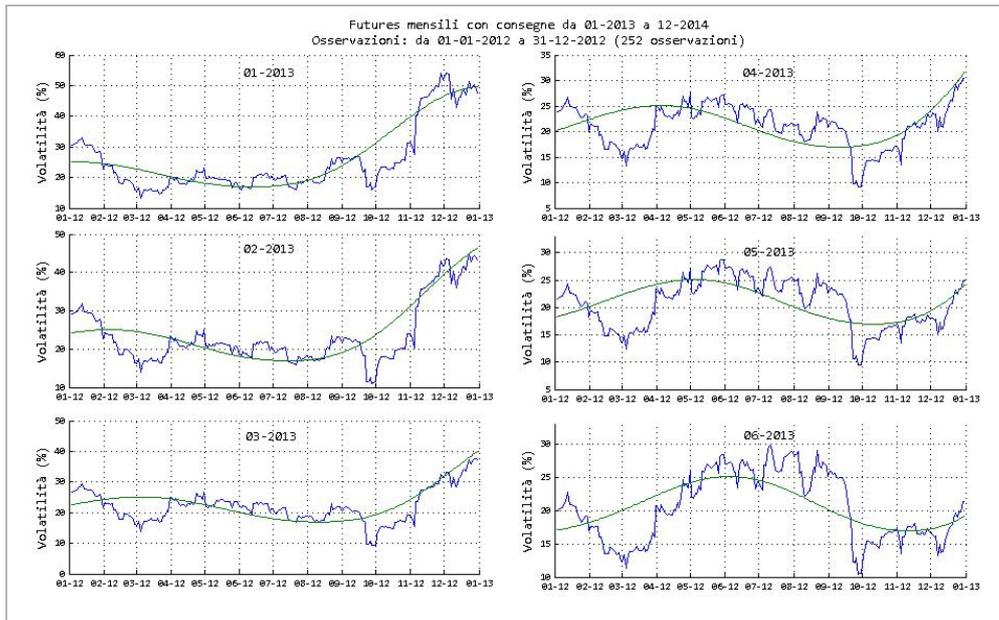


Figura 3.20: Confronto tra volatilità storica a 20 giorni (in blu) e volatilità teorica calibrata (in verde) dei log-rendimenti giornalieri dei futures dell'Esempio 3.43. Osservazioni: dal 01-gen-2012 al 31-dic-2012 (252 osservazioni).

L'errore relativo commesso da ciascuno dei 12 parametri calibrati non supera il 13.4%, raggiunto nel caso di $\hat{\rho}_{11}^{1,2}$, ed è in media il 4.2%. ■

3.5 Interpolazione dei dati con un algoritmo di smoothing

Consideriamo futures finanziari su una *commodity energetica di flusso*, come elettricità o gas naturale, per i quali le difficoltà di stoccaggio impongono che la regolazione avvenga su intervalli di tempo, piuttosto che su date specifiche. Il sottostante di questi contratti è costituito dalla media dei prezzi spot orari durante il *periodo di consegna*. Poiché possono esistere differenti tipi di mercati spot, è necessario sia stabilito quale si utilizza per il prezzo di riferimento (e.g. mercato del giorno prima, nel caso dell'elettricità). Il venditore ha l'obbligo di corrispondere questo importo all'acquirente che, in cambio, deve pagare il prezzo futures concordato alla stipula. Il contratto, dunque, si configura più propriamente come uno *swap*, piuttosto che un contratto a termine, e per questo è detto anche *average-based futures*. Nel resto della discussione, dunque, è importante ricordare che con l'espressione *prezzo futures* ci riferiamo a quello che nel paragrafo 1.1 abbiamo definito *prezzo swap*, mentre con *prezzo forward* indichiamo il prezzo di un contratto che prevede la consegna in un unico giorno fissato.

In ogni data di apertura del mercato sono disponibili futures con diversi periodi di consegna che, in generale, hanno durate differenti e non sono disgiunti. Ad esempio, nel caso dei futures elettrici finanziari per l'area Germania/Austria del mercato EEX, in ciascun giorno del 2012 si sono scambiati i 15 futures scritti sui 6 mesi, 7 trimestri e 2 anni successivi (si veda la Figura 3.23). Fissiamo t una data di apertura

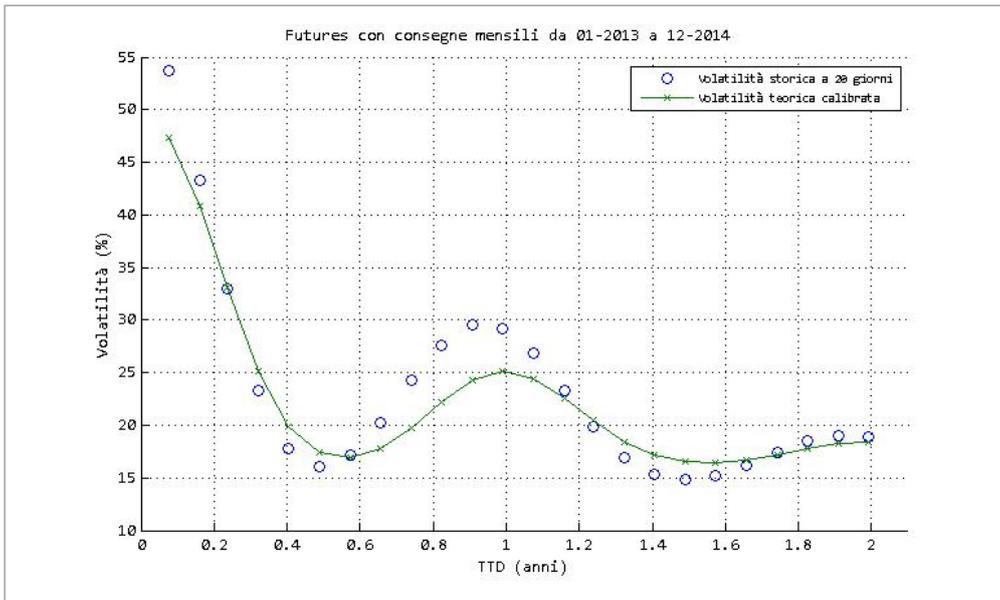


Figura 3.21: Confronto tra le strutture a termine della volatilità storica a 20 giorni e della volatilità teorica calibrata osservate il 03-dic-2012 per i futures dell'Esempio 3.43.

del mercato ed indichiamo con $\mathcal{C} = \{J_i\}_{i \in \underline{m}} = \{[\tau_i, \theta_i]\}_{i \in \underline{m}}$ la struttura di consegna dei futures disponibili in t , costituita dai periodi su cui sono regolati i contratti. Chiediamo che l'unione dei J_i per $i \in \underline{m}$ ricopra completamente l'intervallo di tempo $[\min_{i \in \underline{m}} \tau_i, \max_{i \in \underline{m}} \theta_i]$, come avviene nella pratica. Indichiamo con $f(t, J_i)$ il prezzo futures in t con consegna in J_i , per ogni $i \in \underline{m}$.

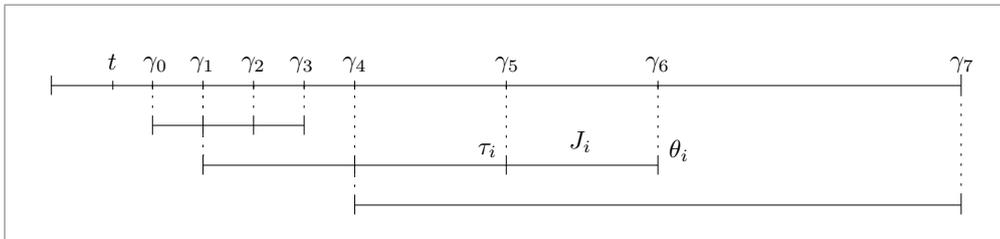


Figura 3.22: Struttura di consegna in t costituita dai 3 mesi, 3 trimestri ed 1 anno successivi.

Dati $\{f(t, J_i)\}_{i \in \underline{m}}$, in diversi contesti può essere utile derivare, sotto opportune ipotesi, i prezzi in t dei futures sulla stessa commodity, ma con struttura di consegna differente contenuta nell'intervallo di tempo ricoperto da \mathcal{C} , i.e. i prezzi $\{f(t, J_i^*)\}_{i \in \underline{m}^*}$ dove $\mathcal{C}^* = \{J_i^*\}_{i \in \underline{m}^*} = \{[\tau_i^*, \theta_i^*]\}_{i \in \underline{m}^*}$, $\min_{i \in \underline{m}} \tau_i \leq \min_{i \in \underline{m}^*} \tau_i^*$ e $\max_{i \in \underline{m}^*} \theta_i^* \leq \max_{i \in \underline{m}} \theta_i$. Nel nostro caso, in particolare, ciò consente di osservare su un intervallo di tempo sufficientemente lungo le covariazioni quadratiche empiriche di 3 o più contratti mensili, così da poter portare a termine la calibrazione dei parametri relativi alla commodity anche quando il numero di futures realmente scambiati non lo permetterebbe. Il limite di questo approccio, d'altra parte, sono le ipotesi che servono per derivare i

nuovi prezzi e che, purtroppo, possono risultare in molti casi poco realistiche. Uno dei primi lavori in questa direzione è quello di Adams et al. [AVD94], che propongono per il mercato obbligazionario un algoritmo di smoothing per ricostruire la curva dei tassi di rendimento. Successivamente, Fleten et al. [FL03] applicano questo metodo ai futures elettrici. Noi presentiamo l'algoritmo descritto da Benth et al. [BKO07], basato su questi articoli, in una versione semplificata che si adatta alle nostre esigenze.

La prima assunzione è che si possa considerare, per ogni $s \in [\min_{i \in m} \tau_i, \max_{i \in m} \theta_i]$, il prezzo forward $g(t, s)$ in t con scadenza s . Disporremo, perciò, da un lato di $f(t, J_i)$ il prezzo da pagare per ricevere la consegna della commodity nell'intervallo J_i e dall'altro di $g(t, s)$ l'importo che garantisce la consegna nella data s . Facendo opportune ipotesi sull'integrabilità di g , si può dimostrare per non arbitraggio che la relazione tra i due prezzi deve essere

$$f(t, J_i) = \frac{1}{\tau_i - \theta_i} \int_{\tau_i}^{\theta_i} g(t, u) du \quad (3.40)$$

per ogni $i \in m$, i.e. il prezzo futures deve coincidere con la media integrale dei prezzi forward sull'insieme di consegna. Per ottenere questa relazione, abbiamo implicitamente supposto che il tasso d'interesse privo di rischio sia nullo in J_i , un'approssimazione buona per tassi d'interesse ragionevoli, ma che comunque può essere rimossa senza troppe difficoltà. D'ora in avanti, omettiamo la dipendenza dalla data t in cui sono osservati i contratti per semplificare la notazione, poiché rimarrà la stessa fino alla fine del ragionamento. Definiamo dunque $f(J_i) := f(t, J_i)$ e $g(s) := g(t, s)$. Ordiniamo gli estremi degli intervalli di consegna J_i come in Figura 3.22, in modo da poter gestire le loro sovrapposizioni. Mettendo in ordine crescente questi elementi ed eliminando eventuali ripetizioni, si ottengono le date $\gamma_0 < \gamma_1 < \dots < \gamma_q$, dove q è un intero strettamente positivo. La funzione $g(s)$ sarà dunque definita nell'intervallo $[\gamma_0, \gamma_q]$.

La seconda e più forte assunzione è che $g(s)$ sia una funzione di classe C^2 in $[\gamma_0, \gamma_q]$ e polinomiale a tratti di grado 4. Naturalmente una tale regolarità e l'arbitrarietà della forma funzionale scelta rappresentano il limite principale di questo approccio, ma consentono di rendere il problema trattabile. Si chiede dunque

$$g(s) = a_j s^4 + b_j s^3 + c_j s^2 + d_j s + e_j \quad \text{in } [\gamma_{j-1}, \gamma_j] \quad (3.41)$$

dove $a_j, \dots, e_j \in \mathbb{R}$, per ogni $j \in \underline{q}$. Per finire, assumiamo che $g'(\gamma_q) = 0$, i.e. il prezzo forward sia costante vicino al termine del periodo di consegna più lontano nel tempo. Questa proprietà è motivata osservando che γ_q in genere è posteriore a t di diversi anni per cui, in quella data, l'assenza di informazioni rende il prezzo costante.

L'ultima assunzione è che la funzione $g(s)$ sia, in qualche senso, la più liscia possibile tra le funzioni con le precedenti proprietà. Se misuriamo il grado di spigolosità attraverso la norma 2 della derivata seconda, ciò equivale a chiedere che l'integrale

$$\int_{\gamma_0}^{\gamma_q} |g''(u)|^2 du$$

sia minimo. Come vedremo, in questo modo si ottiene un problema di ottimizzazione quadratico con vincoli lineari, che possiamo ridurre a quello di risolvere un sistema lineare.

Raccogliamo i $5q$ parametri da cui dipende la funzione cercata nel vettore $\mathbf{p} := (a_1, \dots, e_1, \dots, a_q, \dots, e_q)$ ed indichiamo con $g(s) = g(s, \mathbf{p})$ la funzione polinomiale a tratti definita in $[\gamma_0, \gamma_q]$ dalle equazioni (3.41). Sia P l'insieme dei vettori $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_{5q}$ che soddisfano i vincoli:

$$\text{P1 } g(\cdot, \mathbf{p}) \in C^2([\gamma_0, \gamma_q])$$

$$\text{P2 } g'(\gamma_q, \mathbf{p}) = 0$$

$$\text{P3 } \forall i \in \underline{m} : f(J_i) = \frac{1}{\tau_i - \theta_i} \int_{\tau_i}^{\theta_i} g(u, \mathbf{p}) du$$

Definiamo, infine, la funzione da minimizzare ponendo

$$\Phi(\mathbf{p}) := \|g''(\cdot, \mathbf{p})\|_2^2 = \int_{\gamma_0}^{\gamma_q} |g''(u, \mathbf{p})|^2 du$$

per ogni $\mathbf{p} \in P$. Con queste notazioni, il nostro obiettivo è individuare $\hat{\mathbf{p}} \in P$ soluzione del problema di ottimizzazione

$$\min_{\mathbf{p} \in P} \Phi(\mathbf{p}) = \min_{\mathbf{p} \in P} \int_{\gamma_0}^{\gamma_q} |g''(u, \mathbf{p})|^2 du \quad (3.42)$$

Vediamo, per cominciare, che i vincoli sono lineari. La condizione P1, infatti, è equivalente alle $3(q-1) = 3q-3$ equazioni

$$\begin{cases} (a_{j+1} - a_j) \gamma_j^4 + (b_{j+1} - b_j) \gamma_j^3 + (c_{j+1} - c_j) \gamma_j^2 + (d_{j+1} - d_j) \gamma_j + e_{j+1} - e_j = 0 \\ 4(a_{j+1} - a_j) \gamma_j^3 + 3(b_{j+1} - b_j) \gamma_j^2 + 2(c_{j+1} - c_j) \gamma_j + (d_{j+1} - d_j) = 0 \\ 12(a_{j+1} - a_j) \gamma_j^2 + 6(b_{j+1} - b_j) \gamma_j + 2(c_{j+1} - c_j) = 0 \end{cases}$$

per ogni $j = 1, \dots, q-1$. La condizione P2, invece, si può esprimere con la seguente equazione

$$4a_q \gamma_q^3 + 3b_q \gamma_q^2 + 2c_q \gamma_q + d_q = 0$$

Per esplicitare la condizione P3, definiamo $\Delta_j := \gamma_j - \gamma_{j-1}$ per ogni $j \in \underline{q}$. Se $i \in \underline{m}$, l'intervallo $[\tau_i, \theta_i]$ si può partizionare con $\tau_i = \gamma_{h_i} < \gamma_{h_i+1} < \dots < \gamma_{k_i} = \theta_i$ per come sono stati definiti i γ_j . Abbiamo dunque

$$\begin{aligned} \int_{\tau_i}^{\theta_i} g(u, \mathbf{p}) du &= \sum_{j=h_i+1}^{k_i} \int_{\gamma_{j-1}}^{\gamma_j} (a_j u^4 + b_j u^3 + c_j u^2 + d_j u + e_j) du = \\ &= \sum_{j=h_i+1}^{k_i} \left[a_j \frac{(\Delta_j)^5}{5} + b_j \frac{(\Delta_j)^4}{4} + c_j \frac{(\Delta_j)^3}{3} + d_j \frac{(\Delta_j)^2}{2} + e_j \Delta_j \right] \end{aligned}$$

Segue che la condizione P3 è equivalente alle m equazioni

$$\sum_{j=h_i+1}^{k_i} \left[a_j \frac{(\Delta_j)^5}{5} + b_j \frac{(\Delta_j)^4}{4} + c_j \frac{(\Delta_j)^3}{3} + d_j \frac{(\Delta_j)^2}{2} + e_j \Delta_j \right] = (\tau_i - \theta_i) f(J_i)$$

per ogni $i \in \underline{m}$. Per rappresentare in forma matriciale i vincoli lineari P1-P3, definiamo i vettori $\mathbf{u}^j = (\gamma_j^4, \gamma_j^3, \gamma_j^2, \gamma_j, 1)$, $\mathbf{v}^j = (4\gamma_j^3, 3\gamma_j^2, 2\gamma_j, 1, 0)$, $\mathbf{w}^j = (12\gamma_j^2, 6\gamma_j, 2, 0, 0)$, per ogni $j = 1, \dots, q-1$ e $\mathbf{z} = (4\gamma_q^3, 3\gamma_q^2, 2\gamma_q, 1, 0)$. Per ogni $i \in \underline{m}$, introduciamo anche $\mathbf{x}^i = (x_l^i)_{l \in \underline{5q}}$ il vettore riga $5q$ -dimensionale che si ottiene definendo

$$(x_{5j-4}^i, \dots, x_{5j}^i) = \left(\frac{(\Delta_j)^5}{5}, \frac{(\Delta_j)^4}{4}, \frac{(\Delta_j)^3}{3}, \frac{(\Delta_j)^2}{2}, \Delta_j \right)$$

per ogni $j = h_i + 1, \dots, k_i$ e ponendo i restanti elementi uguali a zero. Sia X la matrice $m \times 5q$ la cui righe sono x^1, \dots, x^m . Consideriamo, infine, la matrice $(3q + m - 3) \times 5q$ ed il vettore colonna di dimensione $3q + m - 3$

$$A := \begin{pmatrix} -\mathbf{u}^1 & \mathbf{u}^1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{u}^2 & \mathbf{u}^2 & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & -\mathbf{u}^{q-1} & \mathbf{u}^{q-1} \\ \hline -\mathbf{v}^1 & \mathbf{v}^1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{v}^2 & \mathbf{v}^2 & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & -\mathbf{v}^{q-1} & \mathbf{v}^{q-1} \\ \hline -\mathbf{w}^1 & \mathbf{w}^1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{w}^2 & \mathbf{w}^2 & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & -\mathbf{w}^{q-1} & \mathbf{w}^{q-1} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{z} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline (\tau_1 - \theta_1)f(J_1) \\ \vdots \\ (\tau_m - \theta_m)f(J_m) \end{pmatrix}$$

dove abbiamo indicato con $\mathbf{0}$ il vettore riga 5-dimensionale nullo. Per quanto osservato in precedenza, P è l'insieme dei vettori $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_{5q}$ soluzioni del sistema lineare $A\mathbf{p}^T = \mathbf{b}$.

Proviamo che la funzione obiettivo del problema di ottimizzazione è una forma quadratica. Infatti, ponendo $\Delta_j^l := (\gamma_j)^l - (\gamma_{j-1})^l$ per ogni $j \in \underline{q}$ ed $l \in \underline{5}$, si ha

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{p}) &= \int_{\gamma_0}^{\gamma_q} |g''(u, \mathbf{p})|^2 du = \sum_{j \in \underline{q}} \int_{\gamma_{j-1}}^{\gamma_j} (12a_j u^2 + 6b_j u + 2c_j)^2 du = \\ &= \sum_{j \in \underline{q}} \int_{\gamma_{j-1}}^{\gamma_j} (144a_j^2 u^4 + 36b_j^2 u^2 + 4c_j^2 + 144a_j b_j u^3 + 48a_j c_j u^2 + 24b_j c_j u) du = \\ &= \sum_{j \in \underline{q}} \left[\frac{144}{5} a_j^2 u^5 + 12b_j^2 u^3 + 4c_j^2 u + 36a_j b_j u^4 + 16a_j c_j u^3 + 12b_j c_j u^2 \right]_{\gamma_{j-1}}^{\gamma_j} = \\ &= \sum_{j \in \underline{q}} \left(\frac{144}{5} \Delta_j^5 a_j^2 + 12\Delta_j^3 b_j^2 + 4\Delta_j^1 c_j^2 + 36\Delta_j^4 a_j b_j + 16\Delta_j^5 a_j c_j + 12\Delta_j^2 b_j c_j \right) \end{aligned}$$

con $\mathbf{p} \in P$. Se definiamo, per ogni $j \in \underline{q}$, le matrici

$$\mathbf{h}_j := \begin{pmatrix} \frac{144}{5} \Delta_j^5 & 18\Delta_j^4 & 8\Delta_j^3 & 0 & 0 \\ 18\Delta_j^4 & 12\Delta_j^3 & 6\Delta_j^2 & 0 & 0 \\ 8\Delta_j^3 & 6\Delta_j^2 & 4\Delta_j^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{5,5}^5, \quad \mathbf{H} := \begin{pmatrix} \mathbf{h}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{h}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{h}_q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{5q,5q}^{5q}$$

possiamo riscrivere la funzione da minimizzare come $\Phi(\mathbf{p}) = \mathbf{p}\mathbf{H}\mathbf{p}^T$ per ogni $\mathbf{p} \in P$ ed il problema di ottimizzazione (3.42) diventa

$$\min_{\mathbf{p} \in P} \mathbf{p}\mathbf{H}\mathbf{p}^T, \quad P = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}_{5q} \mid A\mathbf{p}^T = \mathbf{b}\}$$

Applicando il teorema dei moltiplicatori di Lagrange, possiamo ridurre il precedente alla minimizzazione non vincolata

$$\min_{(\mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda}) \in L} \mathbf{p}H\mathbf{p}^T + \boldsymbol{\lambda}(A\mathbf{p}^T - \mathbf{b}) = \min_{(\mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda}) \in L} \Psi(\mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda})$$

dove abbiamo posto $L := \mathbb{R}_{5q} \times \mathbb{R}_{3q+m-2}$ e $\Psi(\mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda}) := \mathbf{p}H\mathbf{p}^T + \boldsymbol{\lambda}(A\mathbf{p}^T - \mathbf{b})$ in L . Si può verificare che

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda}) = 2H\mathbf{p}^T + A^T\boldsymbol{\lambda}^T, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda}) = A\mathbf{p}^T - \mathbf{b}$$

da cui segue che le condizioni necessarie del prim'ordine sui punti di minimo consistono nel seguente sistema lineare $(8q + m - 2) \times (8q + m - 2)$

$$\begin{pmatrix} 2H & A^T \\ A & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}^T \\ \boldsymbol{\lambda}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b}^T \end{pmatrix}$$

Se la matrice associata al sistema è invertibile, esiste un'unica soluzione $\hat{\mathbf{p}} \in P$ del problema (3.42), con cui otteniamo la funzione dei prezzi forward $g(s) = g(s, \hat{\mathbf{p}})$ polinomiale a tratti, di classe C^2 in $[\gamma_0, \gamma_q]$, localmente costante in γ_q e coerente con i prezzi futures $f(J_1), \dots, f(J_m)$. Abbiamo implementato questo algoritmo di smoothing attraverso la Function 5.3. Nella Figura 3.23 presentiamo l'applicazione al caso dei futures elettrici relativi all'area Germania/Austria del mercato EEX osservati il giorno 01-nov-2012. Come anticipato, sono scambiati i contratti scritti sui 6 mesi, 7 trimestri e 2 anni successivi. In blu si può osservare la curva dei prezzi forward $g(s)$ derivata con l'algoritmo di smoothing.

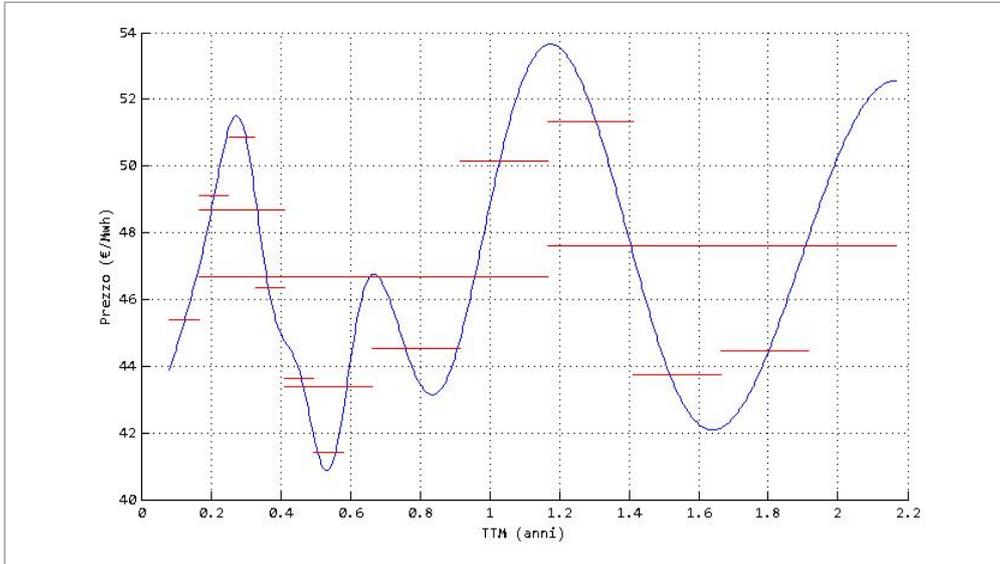


Figura 3.23: Prezzi dei futures elettrici relativi all'area Germania/Austria del mercato EEX osservati in $t = 01\text{-nov-}2012$ (in rosso) e prezzi forward derivati attraverso l'algoritmo di smoothing (in blu).

Torniamo al nostro problema iniziale, derivare i prezzi futures $\{f(t, J_i^*)\}_{i \in m^*}$ associati alla struttura di consegna C^* , dati i prezzi $\{f(t, J_i)\}_{i \in m}$ associati a C . Se

$g(t, s)$ sono i prezzi forward ottenuti applicando l'algoritmo di smoothing, possiamo utilizzare la relazione (3.40) per trovare la soluzione

$$f(t, J_i^*) = \frac{1}{\tau_i^* - \theta_i^*} \int_{\tau_i^*}^{\theta_i^*} g(t, u) du$$

per ogni $i \in m^*$. Nel caso rappresentato in figura, ad esempio, potremmo integrare la curva dei prezzi forward per ottenere i prezzi dei futures mensili relativi ai 25 mesi successivi al mese di $t = 01\text{-nov-2012}$. I primi 6 prezzi, per il vincolo R3, coinciderebbero con quelli osservati sul mercato, mentre i restanti 19 sarebbero conseguenza delle ipotesi assunte sulla funzione g .

3.6 Esempi di calibrazione di mercati energetici a termine

Calibriamo su prezzi reali i due modelli di mercato studiati nei paragrafi 3.3 e 3.4. Iniziamo stimando i parametri relativi alle singole commodity, occupandoci in seguito di determinare la matrice di correlazione. Per ciascun futures, confrontiamo la volatilità storica a 20 giorni dei log-rendimenti con quella teorica prevista dal modello calibrato. Si ricorda che la volatilità storica ad n giorni in una data fissata è la volatilità degli n log-rendimenti più recenti. Cominciamo da contratti per i quali non è necessaria alcuna interpolazione dei dati. Nel caso dell'elettricità, ci occuperemo soltanto di futures *base-load* e per questo ometteremo di specificarlo ogni volta.

Esempio 3.45. Consideriamo *futures elettrici mensili* relativi all'area Germania/Austria del mercato EEX, detti futures Phelix mensili (PHE), e concentriamoci sui prezzi dei 3 contratti *gen-2013*, *feb-2013*, *mar-2013* osservati dal 01-ott-2012 al 21-dic-2012. Ciò è possibile poiché ogni giorno sono scambiati i futures con consegne nei 6 mesi seguenti. Calibriamo i parametri di entrambi i modelli su questa serie storica con il metodo proposto nel paragrafo 3.3.2, risolvendo il problema di minimizzazione (3.26) attraverso la Function 5.8 e riportando i risultati nella Tabella 3.1. In Figura 3.24 presentiamo il confronto tra le volatilità storiche a 20 giorni e quelle teoriche del modello calibrato per i due casi sviluppati. Possiamo notare che la curva della volatilità teorica in entrambi fornisce un'approssimazione di quella storica, che tuttavia è poco precisa negli intervalli in cui quest'ultima presenta forti variazioni, come nel mese di ottobre 2012. La Figura 3.25, infine, mostra un esempio di paragone tra le due strutture a termine della volatilità storica e di quella calibrata in un giorno fissato dell'intervallo di osservazione, il 03-dic-2012. ■

h	MET	$\hat{\alpha}_0^h$	$\hat{\alpha}_1^h$	$\hat{\alpha}_2^h$	$\hat{\varphi}^h$	$\hat{\lambda}^h$	$\hat{\rho}^h$
Elettricità PHE	1	-0.0043	-0.0095	-0.0051	1.4346	0.0036	-0.2326
	2	0.0040	0.0075	0.0052	6.1869	0.0043	-0.4210

Tabella 3.1: Parametri relativi ai futures elettrici mensili Phelix ottenuti con le calibrazioni descritte nell'Esempio 3.45.

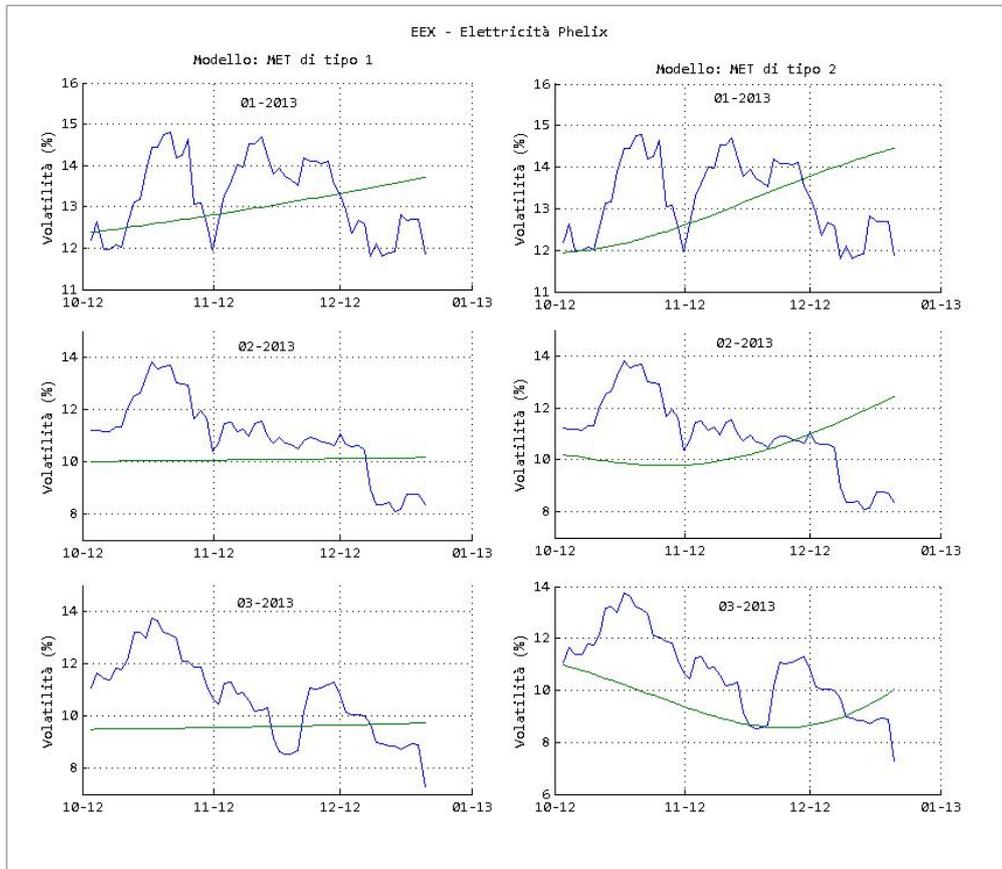


Figura 3.24: Futures elettrici mensili Phelix presentati nell'Esempio 3.45. Confronto tra volatilità storica a 20 giorni (in blu) e volatilità teorica calibrata (in verde) dei log-rendimenti giornalieri.

Esempio 3.46. Studiamo *futures su gas naturale mensili* Henry Hub (HH) del mercato NYMEX. Ogni giorno sono negoziati i contratti con consegne nei 36 mesi seguenti, quindi è possibile osservare i 24 futures *gen-2013, ..., dic-2014* dal 03-gen-2012 al 27-dic-2012. Applicando la *Function 5.8* per calibrare i parametri del primo e del secondo modello su questi prezzi, otteniamo i valori della *Tabella 3.2*. Nelle figure 3.26 e 3.27 riportiamo i confronti tra le volatilità relative ai primi sei contratti *gen-2013, ..., giu-2013* per entrambi i tipi di MET, mentre nella *Figura 3.28* rappresentiamo le strutture a termine della volatilità storica e di quella calibrata osservate il 03-dic-2012. Analogamente a quanto visto per i futures Phelix, anche ora la stima ottenuta della volatilità storica è migliore nei periodi in cui questa non presenta forti variazioni, mentre viceversa comporta errori consistenti, come risulta nei mesi di gennaio e febbraio 2012. ■

Nel paragrafo 3.4 abbiamo osservato che i modelli del secondo tipo presentano il difetto di non poter descrivere il comportamento stagionale della volatilità dei prezzi di futures su commodity energetiche. Dalle figure 3.24, 3.26 e 3.27 emerge che entrambi i modelli hanno limiti nel fornire una buona approssimazione della volatilità storica, specialmente in quegli intervalli di tempo in cui questa è caratterizzata da

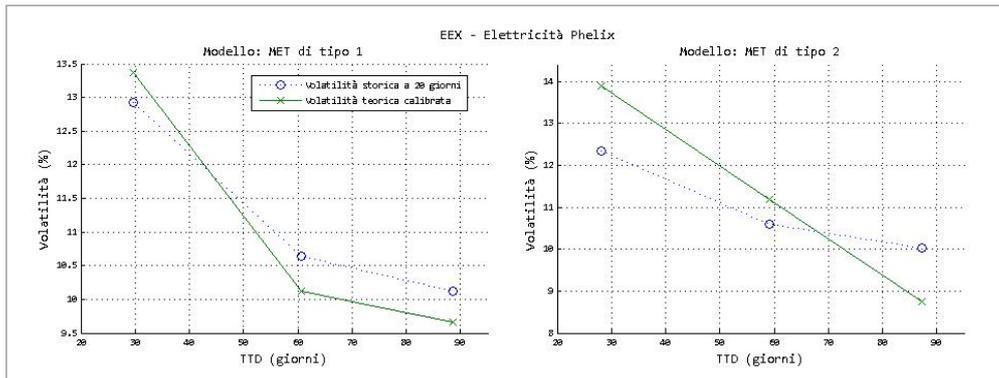


Figura 3.25: Futures elettrici mensili Phelix presentati nell'Esempio 3.45. Confronto tra le strutture a termine della volatilità storica a 20 giorni e della volatilità teorica calibrata osservate il 03-dic-2012.

h	MET	$\hat{\alpha}_0^h$	$\hat{\alpha}_1^h$	$\hat{\alpha}_2^h$	$\hat{\varphi}^h$	$\hat{\lambda}^h$	$\hat{\rho}^h$
Gas Naturale HH	1	0.0147	0.0010	0.0067	6.2338	0.0019	0.8012
	2	0.0179	-0.0049	0.0069	3.7326	0.0019	0.7523

Tabella 3.2: Parametri relativi ai futures su gas naturale mensili Henry Hub ottenuti con le calibrazioni descritte nell'Esempio 3.46.

violenti picchi, come i mesi di gennaio e febbraio 2012 per i futures Henry Hub. Tuttavia il secondo sembra comportarsi peggio, introducendo nella volatilità teorica di ciascun futures una periodicità, già rappresentata bene nel corso del nostro studio attraverso la Figura 3.15, che non si riscontra nei dati di mercato reali.

Completiamo dunque la rassegna di calibrazioni concentrandoci sul primo modello per ottenere le stime desiderate. A differenza dell'Esempio 3.45, per i prossimi contratti sarà necessario interpolare i dati utilizzando l'algoritmo di smoothing proposto nel paragrafo 3.5, poiché in ogni giornata di contrattazione non sono negoziate un numero sufficiente di consegne per poter applicare la nostra tecnica di identificazione dei parametri.

Esempio 3.47. Consideriamo *futures elettrici mensili* del mercato OTC italiano e *futures su gas naturale mensili* PSV del mercato italiano Punto di Scambio Virtuale. Ogni giorno sono disponibili soltanto i contratti con consegne nei 3 mesi a seguire, quindi, per avere i prezzi di *gen-2013*, *feb-2013*, *mar-2013* nell'intervallo di tempo che va dal 01-ott-2012 al 21-dic-2012, dobbiamo interpolare i dati con l'algoritmo di smoothing. Calibrando i parametri su questi valori attraverso la tecnica usuale, si ricavano le prime due righe della Tabella 3.3. In Figura 3.29 presentiamo il confronto tra le volatilità storiche a 20 giorni e quelle teoriche del modello calibrato, a sinistra per l'elettricità, a destra per il gas naturale.

Occupiamoci, quindi, di *futures su gas naturale mensili* NCG (NetConnect Germany) del mercato EEX e di *futures su gas naturale mensili* TTF (Title Transfer Facility) del mercato IceEndex. Ricordiamo che nel caso dei primi il prezzo spot sottostante è

3.6. Esempi di calibrazione di mercati energetici a termine

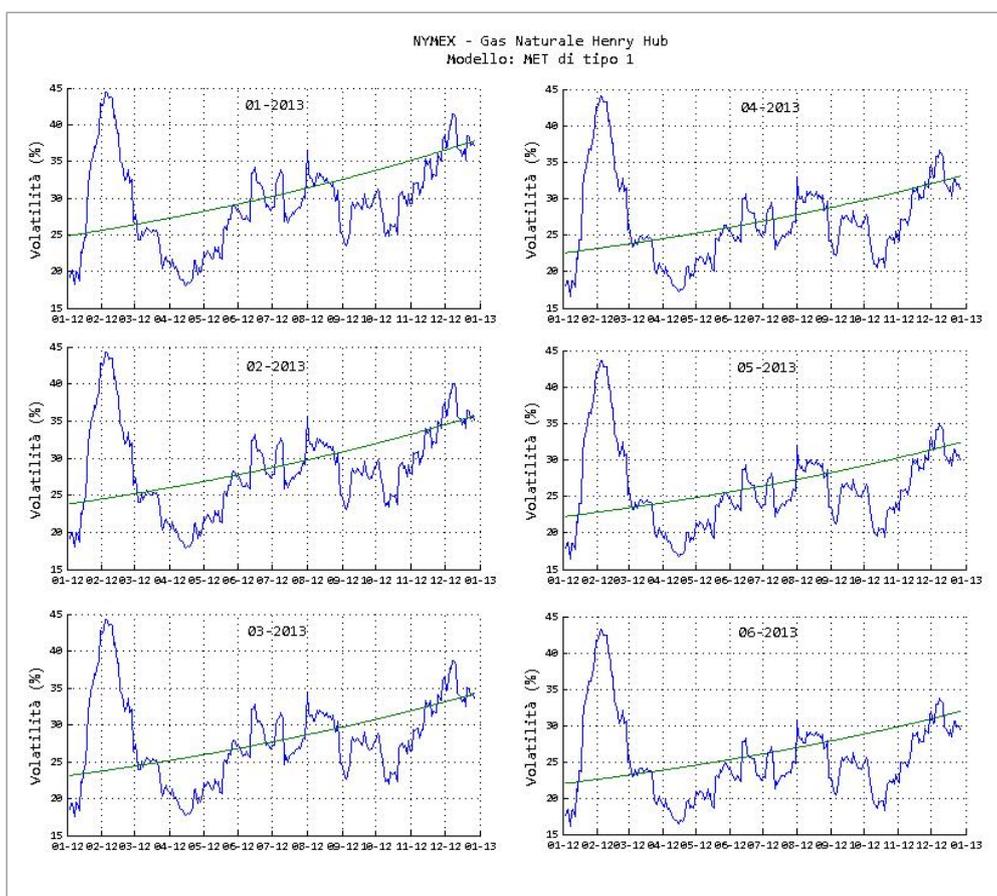


Figura 3.26: Futures su gas naturale mensili Henry Hub presentati nell'Esempio 3.46. Confronto tra volatilità storica a 20 giorni (in blu) e volatilità teorica calibrata (in verde) dei log-rendimenti giornalieri.

quello del gas distribuito sulla rete tedesca, mentre per gli altri su quella olandese. Poiché in ogni giornata di contrattazione anche per questi non disponiamo di un numero sufficiente di consegne, per ottenere i prezzi dei futures *gen-2013*, *feb-2013*, *mar-2013* nel periodo compreso tra il 01-ott-2012 ed il 21-dic-2012, dobbiamo interpolare come descritto nel paragrafo 3.5. I parametri che si ottengono calibrando come in precedenza sono riportati nelle ultime due righe della Tabella 3.3. La Figura 3.30 mostra il confronto tra le volatilità storiche a 20 giorni e quelle teoriche del modello calibrato, a sinistra per NCG, a destra per TTF. Le curve delle volatilità teoriche relative alle quattro commodity considerate forniscono approssimazioni delle rispettive volatilità storiche per le quali valgono considerazioni analoghe a quelle svolte nell'Esempio 3.45. ■

Concentriamoci adesso sulla matrice di correlazione tra i fattori di rischio che caratterizzano un mercato energetico a termine e vediamo un esempio di calibrazione attraverso il metodo sviluppato nel paragrafo 3.3.2. Per le considerazioni svolte in precedenza, poiché l'identificazione di ρ richiede che siano prima individuati i parametri $\{p^h\}_{h \in m}$, ci limitiamo al caso del primo tipo di MET studiato.

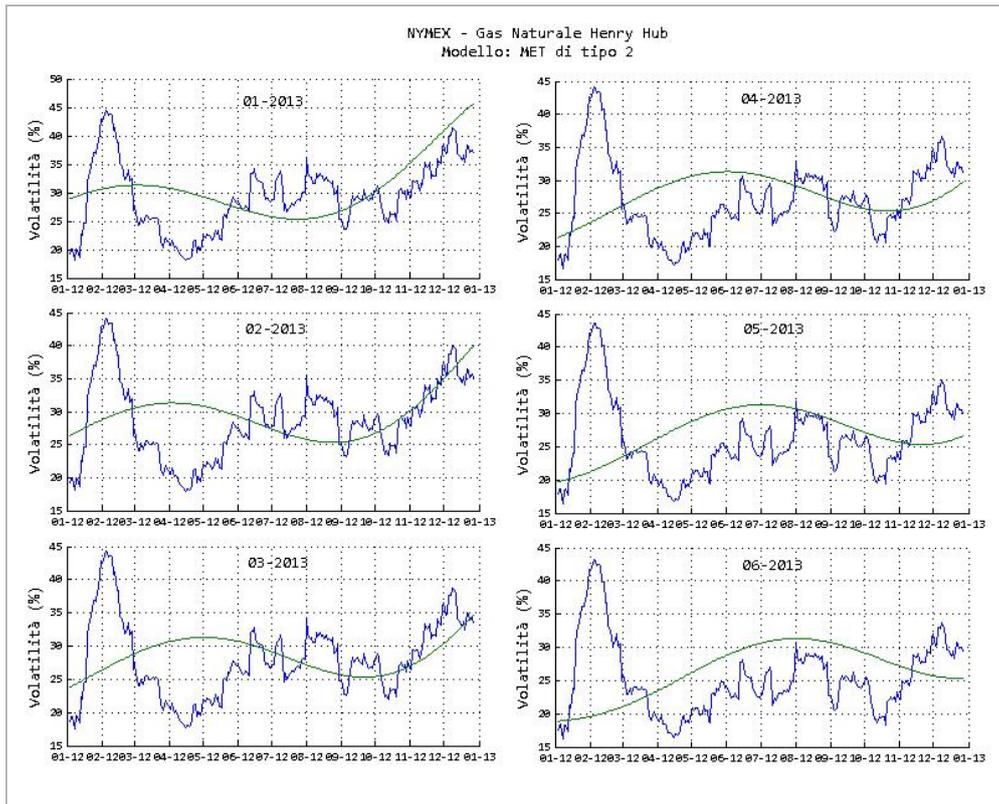


Figura 3.27: Futures su gas naturale mensili Henry Hub presentati nell'Esempio 3.46. Confronto tra volatilità storica a 20 giorni (in blu) e volatilità teorica calibrata (in verde) dei log-rendimenti giornalieri.

h	$\hat{\alpha}_0^h$	$\hat{\alpha}_1^h$	$\hat{\alpha}_2^h$	$\hat{\varphi}^h$	$\hat{\lambda}^h$	$\hat{\rho}^h$
Elettricità OTC Italia	-0.0061	0.0101	0.0032	4.4915	0.0077	-0.3080
Gas Naturale PSV	0.0167	0.0219	0.0050	0.8986	0.0093	0.1097
Gas Naturale NCG	0.0964	0.1023	0.0060	0.7523	0.0057	0.2173
Gas Naturale TTF	0.0108	0.0173	0.0064	0.7078	0.0038	0.4437

Tabella 3.3: Parametri relativi ai futures dell'Esempio 3.47 ottenuti con la calibrazione di un MET del primo tipo.

Esempio 3.48. Consideriamo un mercato costituito da futures scritti su tre commodity differenti: futures elettrici mensili Phelix, futures elettrici mensili del mercato OTC italiano e futures su gas naturale NCG. L'intervallo di osservazione sia il periodo dal 01-ott-2012 al 21-dic-2012 ed i prezzi quelli dei contratti *gen-2013*, *feb-2013*, *mar-2013*. Come discusso negli Esempi 3.45 e 3.47, disponiamo di questi dati soltanto per il primo tipo di futures, mentre per gli altri è necessario interpolare quelli reali con l'algoritmo di smoothing. Abbiamo già calibrato i parametri relativi a ciascuna delle commodity, quindi possiamo ricordare il risultato. Se associamo $h = 1, 2, 3$ alle tre

3.6. Esempi di calibrazione di mercati energetici a termine

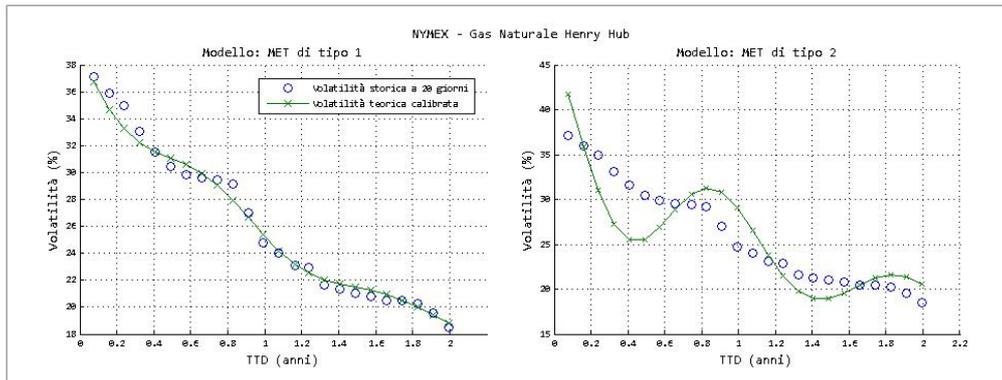


Figura 3.28: Futures su gas naturale mensili Henry Hub studiati nell'Esempio 3.46. Confronto tra le strutture a termine della volatilità storica a 20 giorni e della volatilità teorica calibrata osservate il 03-dic-2012.

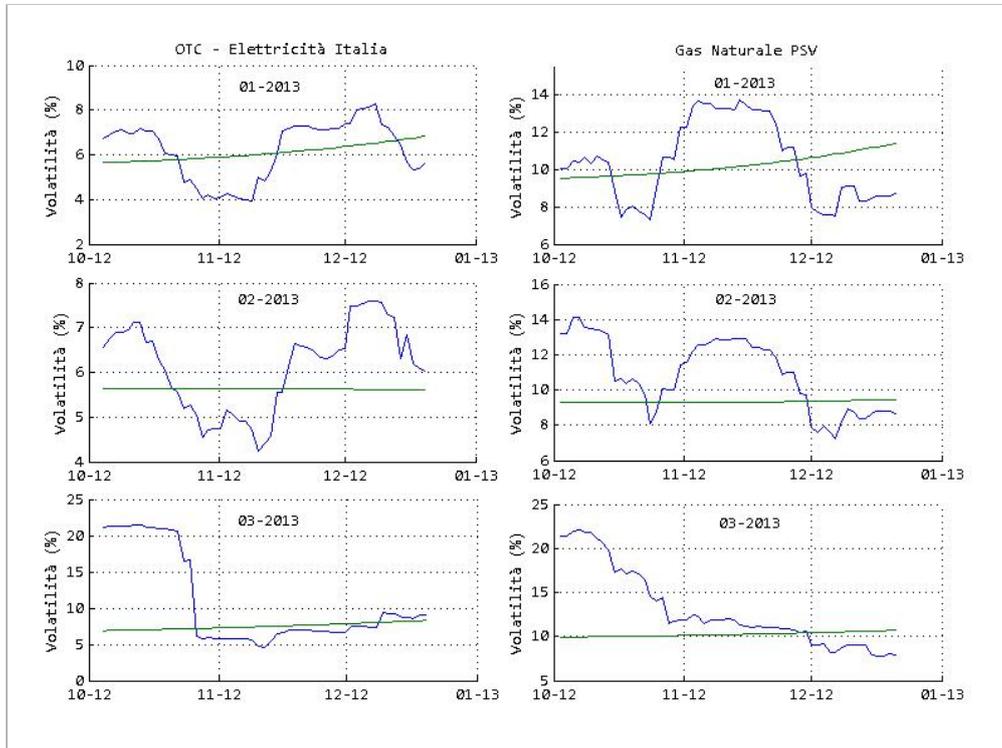


Figura 3.29: Futures studiati nell'Esempio 3.47. Confronto tra volatilità storica a 20 giorni (in blu) e volatilità teorica calibrata (in verde) dei log-rendimenti giornalieri.

commodity nell'ordine in cui le abbiamo introdotte, sappiamo

h	α_0^h	α_1^h	α_2^h	φ^h	λ^h	ρ^h
1 - Elettricità PHE	-0.0043	-0.0095	-0.0051	1.4346	0.0036	-0.2326
2 - Elettricità OTC Italia	-0.0061	0.0101	0.0032	4.4915	0.0077	-0.3080
3 - Gas Naturale NCG	0.0964	0.1023	0.0060	0.7523	0.0057	0.2173

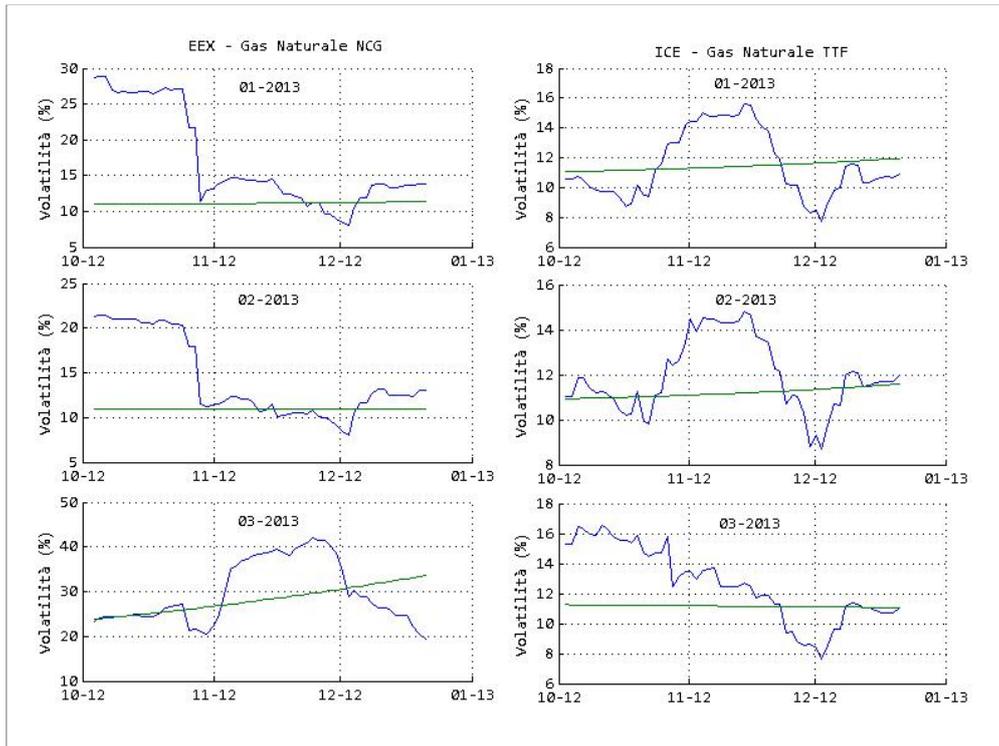


Figura 3.30: Futures studiati nell'Esempio 3.47. Confronto tra volatilità storica a 20 giorni (in blu) e volatilità teorica calibrata (in verde) dei log-rendimenti giornalieri.

Calibriamo la matrice di correlazione su questi dati con il metodo proposto nel paragrafo 3.3.2, risolvendo il problema di minimizzazione (3.32) attraverso la Function 5.9. Si ottiene in questo modo la matrice simmetrica e semidefinita positiva

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} 1.0000 & -0.2326 & -0.2080 & 0.2023 & -0.0802 & 0.2657 \\ -0.2326 & 1.0000 & 0.1346 & -0.2502 & -0.2971 & -0.5166 \\ -0.2080 & 0.1346 & 1.0000 & -0.3080 & 0.1546 & -0.1173 \\ 0.2023 & -0.2502 & -0.3080 & 1.0000 & -0.0573 & 0.2063 \\ -0.0802 & -0.2971 & 0.1546 & -0.0573 & 1.0000 & 0.2173 \\ 0.2657 & -0.5166 & -0.1173 & 0.2063 & 0.2173 & 1.0000 \end{pmatrix}$$

■

Per la maggior parte dei futures che abbiamo considerato, il basso numero di scadenze contrattate giornalmente rende necessario l'impiego di una qualche tecnica di interpolazione per consentirci di applicare il metodo di calibrazione sviluppato. Questa situazione è tipica di molti futures elettrici e su gas naturale, per i quali in genere si scambiano in ogni giornata di apertura del mercato i 3-4 mesi di consegna successivi. Anche quando siano disponibili un numero maggiore di contratti, inoltre, le consegne superiori al quarto mese registrano in genere volumi molto bassi, come nel caso dei futures elettrici mensili Phelix del mercato EEX, rendendo i loro prezzi poco indicativi. Per concludere la nostra rassegna di esempi, dunque, verifichiamo la correttezza della tecnica di interpolazione dei dati proposta nel paragrafo 3.5

applicandola ai prezzi dei futures Phelix e confrontiamo i risultati di due calibrazioni, una su serie storiche reali e l'altra su dati interpolati.

Esempio 3.49. Consideriamo i tre *futures elettrici mensili* Phelix del mercato EEX *gen-2013*, *feb-2013*, *mar-2013*. Ricordiamo che in ogni giornata sono scambiati i 15 futures scritti sui 6 mesi, 7 trimestri e 2 anni successivi. Ciascuno dei contratti in esame, perciò, è negoziato nei sei mesi che li precedono: *gen-2013*, in particolare, da lug-2012 a dic-2012, *feb-2013* da ago-2012 a gen-2013 e *mar-2013* da set-2012 a feb-2013. Questo permette di considerare le tre serie storiche dei loro prezzi nell'ultimo trimestre del 2012, dal 01-ott-2012 al 21-dic-2012 (ed in realtà anche nel mese set-2012), rappresentate a sinistra in Figura 3.31 con la linea blu continua. Contemporaneamente, siamo in grado di calcolare la volatilità storica a 20 giorni relativa ai tre contratti nello stesso intervallo di tempo, poiché i loro prezzi sono osservati nei 20 giorni che precedono il 01-ott-2012 e fino al 21-dic-2012. Il risultato si trova a destra in Figura 3.31 con la linea blu continua.

Ora supponiamo che, a differenza di quanto accade realmente, in ogni giornata di apertura del mercato siano scambiati solo i 9 futures scritti sui 3 mesi, 7 trimestri e 2 anni successivi. In questo caso, *gen-2013* è negoziato da ott-2012 a dic-2012, *feb-2013* da nov-2012 a gen-2013 e *mar-2013* da dic-2012 a feb-2012. Ciò non consentirebbe più di osservare i prezzi dei tre futures durante l'ultimo trimestre del 2012, ma soltanto nell'ultimo mese, dic-2012. Possiamo utilizzare l'interpolazione dei dati proposta nel paragrafo 3.5 per sfruttare le informazioni fornite dai prezzi dei contratti trimestrali e dedurre quelli mancanti, applicando la Function 5.3. A sinistra in Figura 3.31 sono rappresentate le tre serie storiche interpolate con la linea rossa tratteggiata. Notiamo che, coerentemente con la tecnica impiegata, i prezzi interpolati di *gen-2013* e *feb-2013* coincidono con quelli reali rispettivamente da ott-2012 a dic-2012 e da nov-2012 a dic-2012. Riguardo al futures *mar-2013*, si osserva che i prezzi interpolati sono uguali a quelli reali non soltanto per il mese che ci aspettiamo, dic-2012, ma anche per nov-2012. Questo dipende dal fatto che durante nov-2012 sono scambiati contemporaneamente il trimestre *Q1-2013* ed i mesi *gen-2013*, *feb-2013*. Il prezzo di *mar-2013*, quindi, risulta univocamente determinato per arbitraggio ed il vincolo P3 del paragrafo 3.5 implica che il prezzo interpolato coincida con quello reale. A destra, nella stessa figura, la linea rossa tratteggiata indica la volatilità storica a 20 giorni relativa ai tre contratti.

Completiamo quest'analisi calibrando il modello del primo tipo sia sulle serie storiche reali che su quelle interpolate. Nell'Esempio 3.45 abbiamo già ottenuto il risultato della prima delle due calibrazioni, che riportiamo nella prima riga della Tabella 3.4. Se applichiamo la tecnica di identificazione dei parametri descritta nel paragrafo 3.3.2 anche ai dati interpolati, otteniamo la seconda riga. Nella Figura 3.32 confrontiamo le volatilità teoriche calcolate con la formula della Proposizione 3.19 per entrambi i casi considerati. ■

Esempio 3.50. Prendiamo i 24 *futures su gas naturale mensili* Henry Hub del mercato NYMEX *gen-2013*, ..., *dic-2014*. Poiché in ogni giornata sono scambiati i contratti con consegne nei 36 mesi seguenti, ciascuno dei futures in questione è negoziato nei 3 anni che lo precedono. Ciò permette di considerare le 24 serie storiche dei loro prezzi nell'anno 2012, dal 03-gen-2012 al 27-dic-2012 (ed in più anche nel mese dic-2011). Come nell'esempio precedente, supponiamo quindi che, a differenza di quanto accade

3. MERCATI ENERGETICI A TERMINE

Serie storica	$\hat{\alpha}_0^h$	$\hat{\alpha}_1^h$	$\hat{\alpha}_2^h$	$\hat{\varphi}^h$	$\hat{\lambda}^h$	$\hat{\rho}^h$
Reale	-0.0043	-0.0095	-0.0051	1.4346	0.0036	-0.2326
Interpolata	0.0175	0.0235	-0.0053	0.8196	0.0025	-0.2266

Tabella 3.4: Parametri relativi ai futures elettrici mensili Phelix dell'Esempio 3.49 ottenuti calibrando un MET del primo tipo su serie storiche reali ed interpolate.

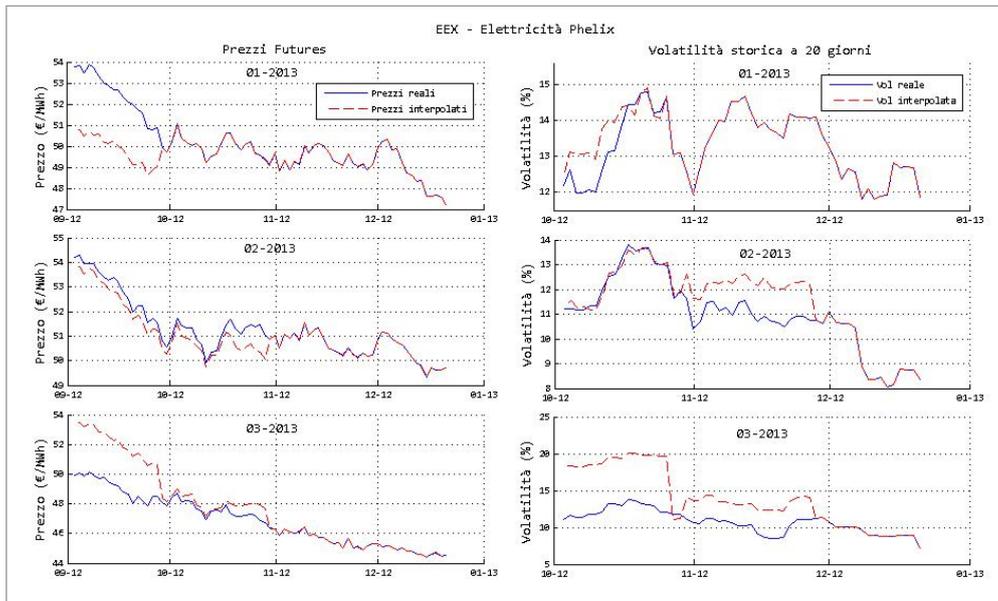


Figura 3.31: Futures elettrici mensili del mercato EEX discussi nell'Esempio 3.49. A sinistra, confronto tra prezzi reali ed interpolati. A destra, confronto tra volatilità storiche a 20 giorni dei log-rendimenti reali ed interpolati.

realmente, in ogni giornata siano scambiati i 24 contratti con consegne nei 12 mesi e 12 trimestri successivi. Utilizzando i prezzi dei 36 futures mensili reali, possiamo derivare per arbitraggio quelli dei 12 futures trimestrali che non sono effettivamente scambiati. In questo secondo caso non è più possibile osservare i 24 futures *gen-2013, ..., dic-2014* nell'arco dell'intero 2012 poiché, ad esempio, *dic-2014* è negoziato soltanto da *dic-2013* a *nov-2014*. Possiamo utilizzare l'interpolazione dei dati proposta nel paragrafo 3.5 ed implementata attraverso la Function 5.3 per dedurre i prezzi mancanti, sfruttando le informazioni fornite dai contratti trimestrali. Otteniamo in questo modo le 24 serie storiche dei prezzi, questa volta interpolati, nell'anno 2012. Come nell'esempio precedente, calibriamo infine il modello del primo tipo su entrambe le collezioni di serie storiche considerate. Nell'Esempio 3.46 abbiamo già ottenuto il risultato per la calibrazione sui prezzi reali, che riportiamo nella prima riga della Tabella 3.5. Stimando i parametri sulla base dei dati interpolati attraverso la tecnica introdotta nel paragrafo 3.3.2, si ricava la seconda riga. Nella Figura 3.33 confrontiamo, per entrambi i casi trattati, le volatilità teoriche calcolate con la formula della Proposizione 3.19 relative ai contratti *gen-2013, ..., apr-2013, set-2014, ..., dic-2014*. Possiamo infine rappresentare in Figura 3.34 le due strutture a termine

3.6. Esempi di calibrazione di mercati energetici a termine

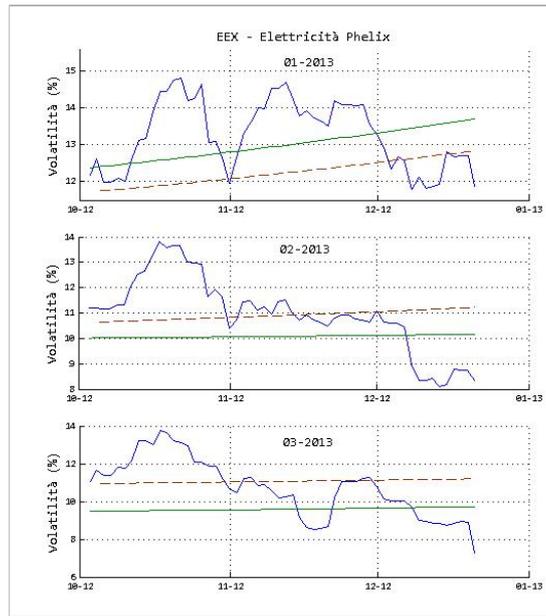


Figura 3.32: Futures elettrici mensili del mercato EEX discussi nell'Esempio 3.49. La linea continua blu indica la volatilità storica a 20 giorni dei log-rendimenti reali, la linea continua verde la volatilità teorica del modello calibrato sui dati reali, la linea tratteggiata marrone la volatilità teorica del modello calibrato sui dati interpolati.

relative al giorno 03-dic-2013 delle volatilità teoriche ottenute con le calibrazioni su dati reali ed interpolati. ■

Serie storica	$\hat{\alpha}_0^h$	$\hat{\alpha}_1^h$	$\hat{\alpha}_2^h$	$\hat{\varphi}^h$	$\hat{\lambda}^h$	$\hat{\rho}^h$
Reale	0.0147	0.0010	0.0067	6.2338	0.0019	0.8012
Interpolata	0.0175	0.0010	0.0075	6.1046	0.0017	0.7133

Tabella 3.5: Parametri relativi ai futures su gas naturale mensili Henry Hub dell'Esempio 3.50 ottenuti calibrando un MET del primo tipo su serie storiche reali ed interpolate.

3. MERCATI ENERGETICI A TERMINE

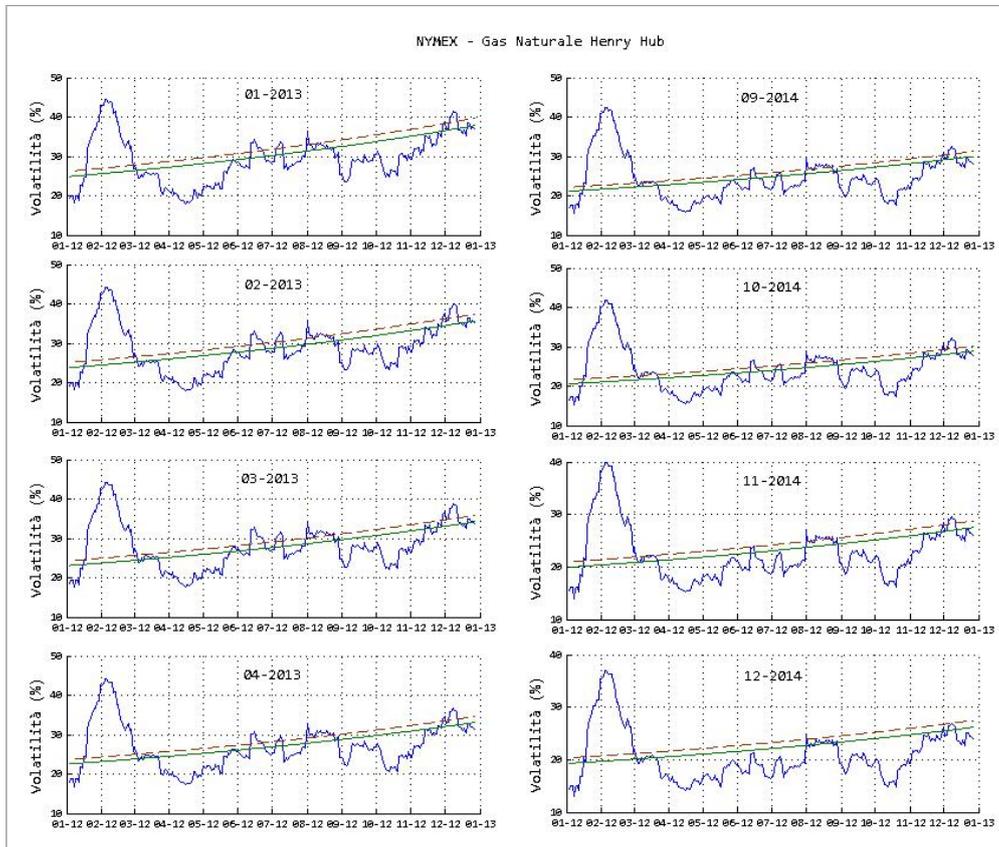


Figura 3.33: Futures su gas naturale mensili Henry Hub discussi nell'Esempio 3.50. La linea continua blu indica la volatilità storica a 20 giorni dei log-rendimenti reali, la linea continua verde la volatilità teorica del modello calibrato sui dati reali, la linea tratteggiata marrone la volatilità teorica del modello calibrato sui dati interpolati.

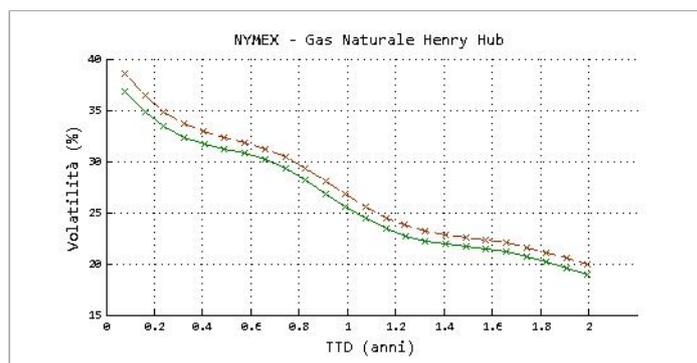


Figura 3.34: Futures su gas naturale mensili Henry Hub discussi nell'Esempio 3.50. Confronto tra le strutture a termine della volatilità teorica relativa al modello calibrato sui dati reali (in verde) e su quelli interpolati (in marrone).

Capitolo 4

Mercati energetici a termine cointegrati

In questo capitolo introduciamo due ulteriori modelli stocastici per mercati energetici a termine basati sui lavori di Benmenzer, Gobet, Jérusalem [BGJ07] e Aïd, Campi, Langrené, Pham [ACLP12]. Mentre finora ci siamo concentrati sulla struttura a termine della volatilità, qui ci occupiamo di descrivere il comportamento sul lungo periodo dei prezzi futures considerando due diverse scelte per i *drift* dei processi che li rappresentano e sfruttando la nozione di *cointegrazione* presentata nel capitolo 2. Il primo paragrafo è dedicato allo studio di un modello in cui chiediamo che i moti browniani che guidano la dinamica neutrale al rischio siano cointegrati rispetto alla misura oggettiva, mentre nel secondo sono i prezzi dei futures sulla stessa commodity, ma con periodi di consegna differente, ad esserlo. In entrambi i casi proponiamo una tecnica di calibrazione dei parametri basata su una stima di massima verosimiglianza.

Prima di iniziare, richiamiamo il modello generale di mercato energetico a termine che abbiamo definito nel capitolo 3 e le notazioni adottate.

Mercati energetici a termine

Indichiamo con $I = [T_0, T_1]$ l'intervallo temporale in cui sono osservati i futures, ricordando che abbiamo stabilito di misurare il tempo in giorni, e con \mathcal{C} una struttura di consegna posteriore ad I costituita da m periodi. Fissiamo inoltre per semplicità $T_0 = 0$. Se \mathcal{M} è un \mathcal{C} -MET su I composto da futures su n commodity ed $(h, i) \in \underline{n} \times \underline{m}$, ricordiamo che la dinamica rispetto alla misura oggettiva e quella rispetto alla misura neutrale al rischio di F_i^h sono descritte dalle equazioni

$$\frac{dF_i^h(t)}{F_i^h(t)} = \mu_i^h(t) dt + \sigma_i^h(t) d\overline{\mathbf{W}}^h(t) \quad \text{in } I \quad (4.1)$$

$$\frac{dF_i^h(t)}{F_i^h(t)} = \sigma_i^h(t) d\mathbf{W}^h(t) \quad \text{in } I \quad (4.2)$$

dove $\overline{\mathbf{W}}^h = (\overline{W}_1^h, \overline{W}_2^h)^\top$ e $\mathbf{W}^h = (W_1^h, W_2^h)^\top$ sono vettori bidimensionali di moti browniani correlati rispettivamente su (Ω, \mathcal{F}, P) ed (Ω, \mathcal{F}, Q) , mentre $\mu_i^h \in \mathbb{L}_{\text{loc}}^1(I, \Omega)$

e $\sigma_i^h := (\sigma_{i1}^h, \sigma_{i2}^h) \in L^2(I; \mathbb{R}_2)$ è una funzione deterministica. Consideriamo quindi i processi stocastici

$$\bar{W} = \begin{pmatrix} \bar{W}^1 \\ \vdots \\ \bar{W}^n \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} W^1 \\ \vdots \\ W^n \end{pmatrix}$$

ed osserviamo che si tratta di vettori $2n$ -dimensionali di moti browniani correlati rispettivamente su (Ω, \mathcal{F}, P) ed (Ω, \mathcal{F}, Q) . Con una dimostrazione analoga a quella della Proposizione 3.5 si mostra che possiamo scegliere W in modo che esistano Γ una matrice invertibile $2n \times 2n$ con righe a norma unitaria e $\varphi \in \mathbb{L}_{\text{loc}}^2(I, \Omega; \mathbb{R}^{2n})$ tali che

$$\bar{W} = \Gamma \widetilde{W}, \quad W = \Gamma \widehat{W} \quad (4.3)$$

$$d\widehat{W}(t) = \varphi(t) dt + d\widetilde{W}(t) \quad \text{in } I \quad (4.4)$$

dove $\widetilde{W}, \widehat{W}$ sono vettori $2n$ -dimensionali di moti browniani indipendenti rispettivamente su (Ω, \mathcal{F}, P) ed (Ω, \mathcal{F}, Q) . Il processo φ è detto *prezzo di mercato del rischio* associato alle commodity di \mathcal{M} e misura la propensione al rischio del soggetto finanziario che acquista i futures del mercato.

Ricordiamo che si indicano, per ogni $n, m \geq 1$, con \mathbb{R}_m^n l'algebra delle matrici reali $n \times m$ e con $\mathbb{R}^n := \mathbb{R}_1^n$, $\mathbb{R}_m := \mathbb{R}_m^1$ rispettivamente lo spazio dei vettori colonna n -dimensionali e dei vettori riga m -dimensionali. Abbiamo adottato inoltre la convenzione $\underline{n} := \{1, \dots, n\}$ per ogni $n \geq 1$.

4.1 Mercati energetici a termine cointegrati di tipo A

Nel paragrafo 2.4 abbiamo introdotto la nozione di processi stocastici *cointegrati*, processi non stazionari per i quali è possibile trovare una combinazione lineare che li renda tali. Ciò intuitivamente significa che, mentre presi singolarmente questi non manifestano regolarità di comportamento sul lungo periodo, esiste tuttavia tra di essi una relazione di equilibrio per cui tendono a muoversi insieme al trascorrere del tempo.

Seguendo Benmenzer et al. [BGJ07], consideriamo ora mercati energetici a termine in cui i moti browniani che guidano la dinamica neutrale al rischio siano cointegrati rispetto alla misura oggettiva. Questa proprietà si traduce in una relazione che deve essere soddisfatta dal prezzo di mercato del rischio e che utilizziamo per definirli.

Definizione 4.1. Dato \mathcal{M} un \mathcal{C} -MET su I , diciamo che \mathcal{M} è *cointegrato di tipo A* se esistono $\xi \in \mathbb{R}^{2n}$ e $\Pi \in \mathbb{R}_{2n}^{2n}$ tali che

$$\varphi(t) = \Gamma^{-1} [\xi + \Pi W(t)] \quad \text{in } I \quad (4.5)$$

Chiamiamo ξ *fattore centrante* di \mathcal{M} e Π *matrice di cointegrazione* di \mathcal{M} . Possiamo scrivere $\xi = (\xi_1^1, \xi_2^1, \dots, \xi_1^n, \xi_2^n)^\top$ e definire $\xi^h := (\xi_1^h, \xi_2^h)^\top$ per ogni $h \in \underline{n}$. Fissati $h, k \in \underline{n}$ ed $a, b \in \underline{2}$, indichiamo con Π_{ab}^{hk} l'elemento di Π di riga $2h - 2 + a$ e colonna

$2k - 2 + b$ e consideriamo

$$\begin{aligned}\mathbf{\Pi}^{hk} &:= (\Pi_{ab}^{hk})_{a,b \in \underline{2}} = \begin{pmatrix} \Pi_{11}^{hk} & \Pi_{12}^{hk} \\ \Pi_{21}^{hk} & \Pi_{22}^{hk} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_2^2 \\ \mathbf{\Pi}^h &:= (\Pi_{ab}^{hk})_{a,b \in \underline{2}}^{k \in \underline{n}} = \begin{pmatrix} \Pi_{11}^{h1} & \Pi_{12}^{h1} & \cdots & \Pi_{11}^{hn} & \Pi_{12}^{hn} \\ \Pi_{21}^{h1} & \Pi_{22}^{h1} & \cdots & \Pi_{21}^{hn} & \Pi_{22}^{hn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{2n}^2 \\ \mathbf{\Pi} &= (\Pi_{ab}^{hk})_{a,b \in \underline{2}}^{h,k \in \underline{n}} = (\mathbf{\Pi}^{hk})_{h,k \in \underline{n}} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Pi}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{\Pi}^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{2n}^{2n}\end{aligned}$$

Diciamo infine che \mathcal{M} è un \mathcal{C} -MET cointegrato di tipo A1 se \mathcal{M} è anche di tipo 1 (cfr. Definizione 3.12), mentre è cointegrato di tipo A2 se è anche di tipo 2 (cfr. Definizione 3.32).

Vediamo come dalla relazione (4.5) segua che \mathbf{W} deve soddisfare un'equazione differenziale stocastica che generalizza, per la presenza del fattore centrante, quella di Ornstein-Uhlenbeck multivariata *a tempo continuo*. Mostriamo inoltre quali siano i drift dei processi dei prezzi futures corrispondenti alla scelta effettuata per il prezzo di mercato del rischio.

Proposizione 4.2. *Se \mathcal{M} è un \mathcal{C} -MET cointegrato di tipo A su I , allora*

$$d\mathbf{W}(t) = [\boldsymbol{\xi} + \mathbf{\Pi}\mathbf{W}(t)] dt + d\overline{\mathbf{W}}(t) \quad \text{in } I \quad (4.6)$$

Segue che, per ogni $(h, i) \in \underline{n} \times \underline{m}$, valgono

$$\mu_i^h(t) = \sigma_i^h(t) [\boldsymbol{\xi}^h + \mathbf{\Pi}^h \mathbf{W}(t)] \quad \text{in } I \quad (4.7)$$

$$dF_i^h(t) = F_i^h(t) \sigma_i^h(t) [\boldsymbol{\xi}^h + \mathbf{\Pi}^h \mathbf{W}(t)] dt + F_i^h(t) \sigma_i^h(t) d\overline{\mathbf{W}}^h(t) \quad \text{in } I \quad (4.8)$$

Dimostrazione: Osserviamo che, per ogni $t \in I$, utilizzando le equazioni (4.3), (4.4) ed applicando la definizione di mercato cointegrato si ottiene

$$\begin{aligned}d\mathbf{W}(t) &= \mathbf{\Gamma} d\widehat{\mathbf{W}}(t) = \mathbf{\Gamma} [\boldsymbol{\varphi}(t) dt + d\widetilde{\mathbf{W}}(t)] = \mathbf{\Gamma} [\mathbf{\Gamma}^{-1} (\boldsymbol{\xi} + \mathbf{\Pi}\mathbf{W}(t)) dt + d\widetilde{\mathbf{W}}(t)] = \\ &= (\boldsymbol{\xi} + \mathbf{\Pi}\mathbf{W}(t)) dt + \mathbf{\Gamma} d\widetilde{\mathbf{W}}(t) = (\boldsymbol{\xi} + \mathbf{\Pi}\mathbf{W}(t)) dt + d\overline{\mathbf{W}}(t)\end{aligned}$$

come desiderato.

Se $(h, i) \in \underline{n} \times \underline{m}$ e $t \in I$, allora la precedente equazione diventa

$$d\mathbf{W}^h(t) = [\boldsymbol{\xi}^h + \mathbf{\Pi}^h \mathbf{W}(t)] dt + d\overline{\mathbf{W}}^h(t)$$

Sostituendo in (4.2) si ottiene

$$\begin{aligned}dF_i^h(t) &= F_i^h(t) \sigma_i^h(t) d\mathbf{W}^h(t) = \\ &= F_i^h(t) \sigma_i^h(t) [\boldsymbol{\xi}^h + \mathbf{\Pi}^h \mathbf{W}(t)] dt + F_i^h(t) \sigma_i^h(t) d\overline{\mathbf{W}}^h(t)\end{aligned}$$

In virtù dell'unicità della rappresentazione differenziale di un processo di Itô, l'equazione (4.1) implica infine

$$\mu_i^h(t) = \sigma_i^h(t) [\boldsymbol{\xi}^h + \mathbf{\Pi}^h \mathbf{W}(t)]$$

■

Se (t_0, \dots, t_N) è una partizione equispaziata dell'intervallo di osservazione $I = [T_0, T_1]$ di passo pari ad 1 giorno con $|T_1 - T_0| \gg 1$, allora il moto browniano W soddisfa approssimativamente una generalizzazione dell'equazione di Ornstein-Uhlenbeck multivariata a tempo discreto che, come sappiamo, caratterizza particolari processi cointegrati. Per ogni $t \in \{t_1, \dots, t_N\}$ vale infatti

$$\Delta W_t \approx \xi + \Pi W_{t-1} + \Delta \bar{W}_t \quad (4.9)$$

dove abbiamo posto $\Delta W_t := W_t - W_{t-1}$ e $\Delta \bar{W}_t := \bar{W}_t - \bar{W}_{t-1}$. Se ξ e Π soddisfano opportune ipotesi, di cui qui non ci occupiamo, allora il processo discreto $\{W_{t_l}\}_{l \in \underline{N}}$ risulta cointegrato. Questa osservazione giustifica l'aggettivo cointegrati scelto per definire processi di questo tipo.

Vediamo un esempio delle traiettorie dei prezzi futures di un mercato energetico a termine cointegrato di tipo A1 fissando i valori dei parametri $\{p^h\}_{h \in \underline{n}}$, ρ , ξ , Π ed applicando la Function 5.10.

Esempio 4.3. Supponiamo che siano osservati dal 01-gen-2010 al 31-dic-2012 i prezzi dei futures mensili *gen-2013, feb-2013, mar-2013* scritti su tre commodity differenti. Definiamo il modello cointegrato di tipo A1 fissando i seguenti parametri:

h	α_0^h	α_1^h	α_2^h	φ^h	λ^h	ρ^h
1	0.0080	0.0080	0.0100	5.9690	0.80/365	0.10
2	0.0120	0.0100	0.0080	5.9690	1.00/365	0.30
3	0.0180	0.0010	0.0001	5.8905	0.45/365	0.80

e chiedendo che le correlazioni tra i fattori di rischio siano descritte dalla matrice simmetrica e semidefinita positiva:

$$\rho = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1.0000 & 0.1000 & 0.6000 & 0.4000 & 0.5000 & 0.5000 \\ 0.1000 & 1.0000 & 0.4000 & 0.6000 & 0.5000 & 0.5000 \\ \hline 0.6000 & 0.4000 & 1.0000 & 0.3000 & 0.6000 & 0.4000 \\ 0.4000 & 0.6000 & 0.3000 & 1.0000 & 0.4000 & 0.6000 \\ \hline 0.5000 & 0.5000 & 0.6000 & 0.4000 & 1.0000 & 0.8000 \\ 0.5000 & 0.5000 & 0.4000 & 0.6000 & 0.8000 & 1.0000 \end{array} \right)$$

Supponiamo che il fattore centrante e la matrice di cointegrazione siano rispettivamente:

$$\xi = 0.001 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Pi = 0.001 \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ 1 & -1 & | & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & | & -1 & 0 & | & 0 & 0 \\ 1 & 1 & | & 1 & -1 & | & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & | & -1 & 1 & | & 1 & 0 \\ 1 & -1 & | & 1 & -1 & | & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e che i prezzi iniziali siano tutti uguali a 60 €/MWh . Simuliamo i prezzi osservati giornalmente nell'intervallo considerato applicando la Function 5.10 e rappresentiamo in Figura 4.1 il risultato ottenuto. ■

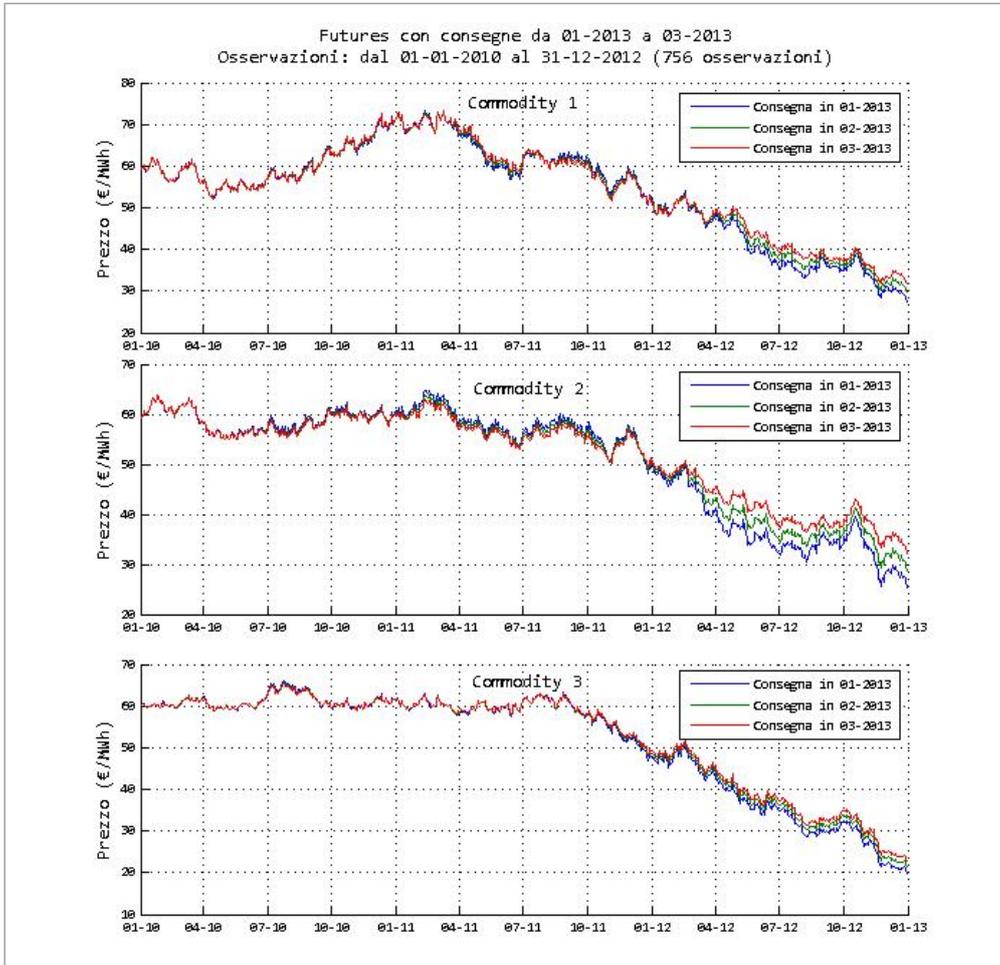


Figura 4.1: Simulazione delle traiettorie dei prezzi futures dell'Esempio 4.3.

4.1.1 Calibrazione

Dati \mathcal{M} un \mathcal{C} -MET su I ed f un'osservazione di \mathcal{M} sulle date di $\pi = (t_0, \dots, t_N)$ un partizione di I , nel capitolo 3 abbiamo considerato due possibili scelte per le funzioni σ_i^h , calibrando poi i loro parametri e la matrice di correlazione $\rho = \text{Cor}(W) = \Gamma\Gamma^T$ su f . Ora supponiamo che il MET sia cointegrato di tipo A ed occupiamoci di stimare anche il fattore centrante ξ e la matrice di cointegrazione Π attraverso i prezzi osservati f .

Ricordiamo che abbiamo scelto di indicare con lettere maiuscole le variabili casuali e con minuscole le loro realizzazioni. In particolare, dunque, con $f_i^h(t_l)$ e $w_a^h(t_l)$ rappresentiamo rispettivamente realizzazioni delle variabili casuali $F_i^h(t_l)$ e $W_a^h(t_l)$. Abbiamo chiamato $f = (f^h)_{h \in \underline{n}}$ un'osservazione di \mathcal{M} in π se f è una n -upla di matrici

$$f^h := (f_1^h, \dots, f_m^h) := \begin{pmatrix} f_1^h(t_0) & \cdots & f_m^h(t_0) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^h(t_N) & \cdots & f_m^h(t_N) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_m^{N+1}$$

con $h \in \underline{n}$. Definiamo infine per ogni $l \in \underline{N}$

$$\mathbf{w}_l := \mathbf{w}(t_l) = (w_1^1(t_l), w_2^1(t_l), \dots, w_1^n(t_l), w_2^n(t_l))^T \in \mathbb{R}^{2n}$$

una realizzazione di $\mathbf{W}(t_l)$.

Moto browniano rispetto alla misura neutrale al rischio

Per cominciare ricostruiamo con una stima ai minimi quadrati $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N$ i valori osservati in t_1, \dots, t_N di \mathbf{W} utilizzando l'equazione (4.2). Se $h \in \underline{n}$ ed $l \in \underline{N}$, infatti, sappiamo che

$$\forall i \in \underline{m} : \frac{dF_i^h(t_l)}{F_i^h(t_l)} = \sigma_{i1}^h(t_l) dW_1^h(t_l) + \sigma_{i2}^h(t_l) dW_2^h(t_l)$$

Indicando con Δ l'operatore *differenza prima*, sono definiti $\Delta f_i^h(t_l) := f_i^h(t_l) - f_i^h(t_{l-1})$ per ogni $i \in \underline{m}$ e $\Delta w_a^h(t_l) := w_a^h(t_l) - w_a^h(t_{l-1})$ per ogni $a \in \underline{2}$, per cui valgono le m relazioni approssimate

$$\forall i \in \underline{m} : \frac{\Delta f_i^h(t_l)}{f_i^h(t_{l-1})} \approx \sigma_{i1}^h(t_{l-1}) \Delta w_1^h(t_l) + \sigma_{i2}^h(t_{l-1}) \Delta w_2^h(t_l)$$

nelle $2m$ incognite $u_{l1}^h := \Delta w_1^h(t_l)$ ed $u_{l2}^h := \Delta w_2^h(t_l)$. Poiché questo sistema è sovra-determinato, per ottenere una soluzione utilizziamo una stima ai minimi quadrati risolvendo il problema di ottimizzazione

$$\min_{u_{l1}^h, u_{l2}^h \in \mathbb{R}} \sum_{i \in \underline{m}} \left(\frac{\Delta f_i^h(t_l)}{f_i^h(t_{l-1})} - \sigma_{i1}^h(t_{l-1}) u_{l1}^h - \sigma_{i2}^h(t_{l-1}) u_{l2}^h \right)^2 \quad (4.10)$$

che vedremo essere un problema convesso. Definiamo per brevità $u_1 := u_{l1}^h$, $u_2 := u_{l2}^h$ ed introduciamo per ogni $i \in \underline{m}$ i coefficienti

$$a_i := \sigma_{i1}^h(t_{l-1}), \quad b_i := \sigma_{i2}^h(t_{l-1}), \quad c_i := \frac{\Delta f_i^h(t_l)}{f_i^h(t_{l-1})}$$

$$\mathbf{a} := (a_1, \dots, a_m)^T, \quad \mathbf{b} := (b_1, \dots, b_m)^T, \quad \mathbf{c} := (c_1, \dots, c_m)^T$$

in modo da poter riscrivere la funzione da minimizzare come

$$\Psi(u_1, u_2) := \sum_{i \in \underline{m}} (a_i u_1 + b_i u_2 - c_i)^2$$

per ogni $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}_2$. Calcolando le derivate parziali di Ψ si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial u_1}(u_1, u_2) &= 2 \sum_{i \in \underline{m}} (a_i u_1 + b_i u_2 - c_i) a_i \\ \frac{\partial \Psi}{\partial u_2}(u_1, u_2) &= 2 \sum_{i \in \underline{m}} (a_i u_1 + b_i u_2 - c_i) b_i \end{aligned} \quad (4.11)$$

mentre le derivate seconde di Ψ sono

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial^2 u_1}(u_1, u_2) &= 2 \sum_{i \in \underline{m}} a_i^2 = 2 |\mathbf{a}|^2 \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u_1 \partial u_2}(u_1, u_2) &= 2 \sum_{i \in \underline{m}} a_i b_i = 2 \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial^2 u_2}(u_1, u_2) &= 2 \sum_{i \in \underline{m}} b_i^2 = 2 |\mathbf{b}|^2\end{aligned}\tag{4.12}$$

dove abbiamo indicato con $|\cdot|$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ rispettivamente la norma ed il prodotto scalare euclideo su \mathbb{R}^m . Definiamo poi \mathbf{L} la matrice di Gram di \mathbf{a}, \mathbf{b} ed il vettore colonna \mathbf{v} ponendo

$$\mathbf{L} := \begin{pmatrix} |\mathbf{a}|^2 & \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \\ \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle & |\mathbf{b}|^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} := \begin{pmatrix} \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \\ \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle \end{pmatrix}$$

Le equazioni (4.12) implicano che $\mathbf{H}\Psi(u_1, u_2) = 2\mathbf{L}$. Si osserva inoltre come $\det(\mathbf{L}) = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2$, perciò dalla disuguaglianza di Schwarz si deriva che

$$\det(\mathbf{L}) \geq 0, \quad \det(\mathbf{L}) = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$$

Per entrambi le scelte delle funzioni σ_i^h considerate nel capitolo 3 e presentate nelle Definizioni 3.12 e 3.32, le componenti del vettore \mathbf{b} sono identiche tra loro, poiché $\mathbf{b} = \alpha_2^h(1, \dots, 1)^\top$, mentre quelle di \mathbf{a} non lo sono. Segue che \mathbf{a} e \mathbf{b} non sono proporzionali e $\det(\mathbf{L}) > 0$. Poiché \mathbf{L} è una matrice simmetrica ed i suoi minori principali sono $|\mathbf{a}|^2$ e $\det(\mathbf{L})$, entrambi strettamente positivi, applicando il criterio di Sylvester si ottiene che \mathbf{L} è definita positiva. Dunque anche $\mathbf{H}\Psi(u_1, u_2) = 2\mathbf{L}$ è definita positiva per ogni $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}_2$, per cui Ψ è una funzione strettamente convessa. Utilizziamo ora le equazioni (4.11) insieme con la regola di Cramer per trovare l'unico punto critico di Ψ

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{u}}(\hat{u}_1, \hat{u}_2) = (0, 0) &\Leftrightarrow \mathbf{L}(\hat{u}_1, \hat{u}_2)^\top = \mathbf{v} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{u}_1 = \frac{\det(\mathbf{v}, \mathbf{L}_2)}{\det(\mathbf{L})} \\ \hat{u}_2 = \frac{\det(\mathbf{L}_1, \mathbf{v})}{\det(\mathbf{L})} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \hat{u}_1 = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle |\mathbf{b}|^2 - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle}{\det(\mathbf{L})} \\ \hat{u}_2 = \frac{|\mathbf{a}|^2 \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\det(\mathbf{L})} \end{cases}\end{aligned}$$

avendo indicato con \mathbf{L}_1 ed \mathbf{L}_2 le colonne di \mathbf{L} . Poiché Ψ è convessa e $\mathbf{H}\Psi(\hat{u}_1, \hat{u}_2)$ è definita positiva, $(\hat{u}_1, \hat{u}_2) = (\hat{u}_{l_1}^h, \hat{u}_{l_2}^h)$ è l'unica soluzione del problema di ottimizzazione (4.10).

Definiamo quindi per ogni $l \in \underline{N}$ il vettore

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{u}}_l &:= (\hat{u}_{l_1}^1, \hat{u}_{l_2}^1, \dots, \hat{u}_{l_1}^n, \hat{u}_{l_2}^n)^\top = (\Delta w_1^1(t_l), \Delta w_2^1(t_l), \dots, \Delta w_1^n(t_l), \Delta w_2^n(t_l))^\top = \\ &= \Delta \mathbf{w}(t_l) \in \mathbb{R}^{2n}\end{aligned}$$

Ricordando che abbiamo assunto $T_0 = t_0 = 0$ e $\mathbf{W}(0) = \mathbf{0}^{2n}$, segue che $\mathbf{w}(t_0) = \mathbf{0}^{2n}$ e siamo in grado di ricavare i valori di \mathbf{W} osservati in t_1, \dots, t_N

$$\mathbf{w}_l = \mathbf{w}(t_l) = \Delta \mathbf{w}(t_l) + \Delta \mathbf{w}(t_{l-1}) + \dots + \Delta \mathbf{w}(t_1) + \mathbf{w}(t_0) = \hat{\mathbf{u}}_l + \hat{\mathbf{u}}_{l-1} + \dots + \hat{\mathbf{u}}_1$$

per ogni $l \in \underline{N}$.

Fattore centrante e matrice di cointegrazione

Occupiamoci ora di stimare il fattore centrante ξ e la matrice di cointegrazione Π attraverso i prezzi osservati f . Supponiamo che la partizione $\pi = (t_0, \dots, t_N)$ sia equispaziata con passo pari ad 1 giorno e che $|T_1 - T_0| \gg 1$. Poniamo per ogni $l \in \underline{N}$

$$W_l := W(t_l), \quad \bar{W}_l := \bar{W}(t_l)$$

$$\Delta W_l := W_l - W_{l-1}, \quad \varepsilon_l := \Delta \bar{W}_l := \bar{W}_l - \bar{W}_{l-1}$$

e ricordiamo che abbiamo osservato come W soddisfi approssimativamente l'equazione (4.9), che possiamo riscrivere

$$\Delta W_l = \xi + \Pi W_{l-1} + \varepsilon_l \quad (4.13)$$

per ogni $l \in \underline{N}$. Sappiamo che $\varepsilon_l = \Delta \bar{W}_l = \Gamma \Delta \tilde{W}_l$ e $\Delta \tilde{W}_l \sim N(\mathbf{0}^{2n}, \delta_{2n})$ dove $\mathbf{0}^{2n}$ è il vettore nullo di \mathbb{R}^{2n} e δ_{2n} è la matrice identità di \mathbb{R}_{2n}^{2n} . Poiché $\rho = \Gamma \Gamma^T = \Gamma \delta_{2n} \Gamma^T$, segue dunque che $\varepsilon_l \sim N(\mathbf{0}^{2n}, \rho)$. Per definizione di moto browniano gli ε_l sono anche indipendenti, perciò $\{\varepsilon_l\}_{l \in \underline{N}}$ è un processo *rumore bianco gaussiano* su (Ω, \mathcal{F}, P) . Se indichiamo con $\Phi := \delta_{2n} + \Pi \in \mathbb{R}_{2n}^{2n}$, l'equazione (4.13) diventa

$$W_l = \xi + \Phi W_{l-1} + \varepsilon_l \quad (4.14)$$

per ogni $l \in \underline{N}$.

Sia $\Lambda := (\xi, \Phi)^T \in \mathbb{R}_{2n}^{2n+1}$ la *matrice dei parametri di cointegrazione* di \mathcal{M} che dobbiamo calibrare sulla serie storica dei prezzi f e ricordiamo che disponiamo dei valori w_1, \dots, w_N osservati in t_1, \dots, t_N del moto browniano W . Procediamo determinando Λ attraverso una *stima di massima verosimiglianza*. Il primo passo consiste nel calcolare $f_{W_1, \dots, W_N}(w_1, \dots, w_N; \Lambda)$ il valore assunto dalla densità di probabilità congiunta delle variabili casuali W_1, \dots, W_N in w_1, \dots, w_N , una grandezza che è funzione della matrice dei parametri Λ e che può essere interpretata intuitivamente come una misura della probabilità di aver osservato il campione w_1, \dots, w_N in t_1, \dots, t_N . L'applicazione

$$\Lambda \mapsto f_{W_1, \dots, W_N}(w_1, \dots, w_N; \Lambda)$$

è detta *funzione di verosimiglianza* e con il secondo passo cerchiamo un valore di Λ che la massimizzi ovvero che renda il più verosimile possibile aver osservato w_1, \dots, w_N . Diremo dunque che $\hat{\Lambda} = (\hat{\xi}, \hat{\Phi})^T$ è *calibrata* su f se $\hat{\Lambda}$ è soluzione del seguente problema di ottimizzazione

$$\max_{\Lambda \in \mathbb{R}_{2n}^{2n+1}} \log(f_{W_1, \dots, W_N}(w_1, \dots, w_N; \Lambda)) = \max_{\Lambda \in \mathbb{R}_{2n}^{2n+1}} \mathcal{L}(\Lambda) \quad (4.15)$$

dove abbiamo utilizzato $\mathcal{L}(\Lambda) := \log(f_{W_1, \dots, W_N}(w_1, \dots, w_N; \Lambda))$ la *log-funzione di verosimiglianza* perché renderà più semplice il calcolo. Ricordando infine come abbiamo definito Φ , otterremo anche $\hat{\Pi} = \hat{\Phi} - \delta_{2n}$ la stima cercata della matrice di cointegrazione.

Ricordiamo che se Y_1, Y_2 sono due generiche variabili casuali, allora vale

$$f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = f_{Y_1}(y_1) f_{Y_2|Y_1}(y_2 | y_1)$$

dove abbiamo indicato con $f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2)$ la densità di probabilità congiunta di Y_1, Y_2 , con $f_{Y_1}(y_1)$ la densità di probabilità di Y_1 e con $f_{Y_2|Y_1}(y_2 | y_1)$ la densità di probabilità condizionata di Y_2 dato l'evento $\{Y_1 = y_1\}$. Per induzione si può dunque dimostrare che nel nostro caso

$$\begin{aligned} f_{W_1, \dots, W_N}(w_1, \dots, w_N; \Lambda) &= \\ &= f_{W_1}(w_1; \Lambda) \prod_{l=2}^N f_{W_l|W_1, \dots, W_{l-1}}(w_l | w_1, \dots, w_{l-1}; \Lambda) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Vista la precedente, iniziamo determinando $f_{W_1}(w_1; \Lambda)$. Se poniamo $w_0 := \mathbf{0}^{2n} = W_0$ ed $x_l := (1, w_{l-1}^T)^T \in \mathbb{R}^{2n+1}$ al variare di l in \underline{N} , osserviamo che per l'equazione (4.14) si ha

$$W_1 = \xi + \Phi w_0 + \varepsilon_1 = \Lambda^T x_1 + \varepsilon_1$$

e dunque $W_1 \sim N(\Lambda^T x_1, \rho)$. Poiché Γ è una matrice invertibile, anche $\rho = \Gamma \Gamma^T$ è invertibile e $\det(\rho) = \det(\Gamma) \det(\Gamma^T) = \det(\Gamma)^2 > 0$. Sappiamo perciò che la densità di probabilità di W_1 è data da

$$f_{W_1}(w_1; \Lambda) = \frac{1}{(2\pi)^n \sqrt{\det(\rho)}} e^{-\frac{1}{2} \langle w_1 - \Lambda^T x_1, \rho^{-1} (w_1 - \Lambda^T x_1) \rangle}$$

in cui rappresentiamo con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare euclideo di \mathbb{R}^{2n} . In modo analogo, per ogni $l \in \{2, \dots, N\}$ la variabile casuale W_l dato l'evento $\{W_1 = w_1, \dots, W_{l-1} = w_{l-1}\}$ si scrive, per l'equazione (4.14), come

$$(W_l | W_1 = w_1, \dots, W_{l-1} = w_{l-1}) = \xi + \Phi w_{l-1} + \varepsilon_l = \Lambda^T x_l + \varepsilon_l$$

Perciò $(W_l | W_1 = w_1, \dots, W_{l-1} = w_{l-1}) \sim N(\Lambda^T x_l, \rho)$ e la densità di probabilità condizionata è data da

$$f_{W_l|W_1, \dots, W_{l-1}}(w_l | w_1, \dots, w_{l-1}; \Lambda) = \frac{1}{(2\pi)^n \sqrt{\det(\rho)}} e^{-\frac{1}{2} \langle w_l - \Lambda^T x_l, \rho^{-1} (w_l - \Lambda^T x_l) \rangle}$$

Utilizzando le espressioni ottenute per le densità e l'equazione (4.16) si ottiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Lambda) &= \log(f_{W_1, \dots, W_N}(w_1, \dots, w_N; \Lambda)) = \\ &= \log(f_{W_1}(w_1; \Lambda)) + \sum_{l=2}^N \log(f_{W_l|W_1, \dots, W_{l-1}}(w_l | w_1, \dots, w_{l-1}; \Lambda)) = \\ &= -Nn \log(2\pi) + \frac{N}{2} \log(\det(\rho^{-1})) - \frac{1}{2} \sum_{l \in \underline{N}} \langle w_l - \Lambda^T x_l, \rho^{-1} (w_l - \Lambda^T x_l) \rangle \end{aligned} \quad (4.17)$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che $\det(\rho)^{-1} = \det(\rho^{-1})$ poiché ρ è invertibile.

Il secondo passo consiste nel determinare $\hat{\Lambda} = (\hat{\xi}, \hat{\Phi})^T \in \mathbb{R}_{2n}^{2n+1}$ un punto di massimo di \mathcal{L} . Osserviamo che per ogni $l \in \underline{N}$ si ha

$$x_l x_l^T = \begin{pmatrix} 1 \\ w_{l-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & w_{l-1}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & w_{l-1}^T \\ w_{l-1} & w_{l-1} w_{l-1}^T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{2n+1}^{2n+1}$$

Possiamo dunque riscrivere la matrice $\sum_{l \in \underline{N}} x_l x_l^T \in \mathbb{R}_{2n+1}^{2n+1}$ come la seguente matrice a blocchi

$$\sum_{l \in \underline{N}} x_l x_l^T = \begin{pmatrix} N & \sum_{l \in \underline{N}} w_{l-1}^T \\ \sum_{l \in \underline{N}} w_{l-1} & \sum_{l \in \underline{N}} w_{l-1} w_{l-1}^T \end{pmatrix}$$

Supponiamo ora che la matrice dei momenti campionari $\frac{1}{N} \sum_{l \in \underline{N}} \mathbf{w}_l \mathbf{w}_l^T$ sia invertibile, da cui segue per la formula dell'inversa di una matrice partizionata che anche $\sum_{l \in \underline{N}} \mathbf{x}_l \mathbf{x}_l^T$ sia invertibile. Questa osservazione consente di definire

$$\widehat{\Lambda} := \left[\left(\sum_{l \in \underline{N}} \mathbf{w}_l \mathbf{x}_l^T \right) \left(\sum_{l \in \underline{N}} \mathbf{x}_l \mathbf{x}_l^T \right)^{-1} \right]^T \in \mathbb{R}_{2n}^{2n+1} \quad (4.18)$$

Verifichiamo adesso che $\widehat{\Lambda}$ è un punto di massimo di \mathcal{L} . Consideriamo il terzo addendo dell'espressione (4.17) trovata per \mathcal{L} , l'unico a dipendere da Λ , e definiamo per ogni $l \in \underline{N}$

$$\widehat{\varepsilon}_l := \mathbf{w}_l - \widehat{\Lambda}^T \mathbf{x}_l \in \mathbb{R}^{2n}$$

In questo modo possiamo sviluppare la sommatoria aggiungendo e togliendo il termine $\widehat{\Lambda}^T \mathbf{x}_l$ come segue

$$\begin{aligned} \sum_{l \in \underline{N}} \langle \mathbf{w}_l - \Lambda^T \mathbf{x}_l, \rho^{-1}(\mathbf{w}_l - \Lambda^T \mathbf{x}_l) \rangle &= \sum_{l \in \underline{N}} \langle \widehat{\varepsilon}_l + (\widehat{\Lambda} - \Lambda)^T \mathbf{x}_l, \rho^{-1}[\widehat{\varepsilon}_l + (\widehat{\Lambda} - \Lambda)^T \mathbf{x}_l] \rangle = \\ &= \sum_{l \in \underline{N}} \langle \widehat{\varepsilon}_l, \rho^{-1} \widehat{\varepsilon}_l \rangle + 2 \sum_{l \in \underline{N}} \langle \widehat{\varepsilon}_l, \rho^{-1}(\widehat{\Lambda} - \Lambda)^T \mathbf{x}_l \rangle + \sum_{l \in \underline{N}} \langle (\widehat{\Lambda} - \Lambda)^T \mathbf{x}_l, \rho^{-1}(\widehat{\Lambda} - \Lambda)^T \mathbf{x}_l \rangle \end{aligned} \quad (4.19)$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che, essendo $\rho^{-1} = (\mathbf{\Gamma} \mathbf{\Gamma}^T)^{-1} = (\mathbf{\Gamma}^{-1})^T \mathbf{\Gamma}^{-1}$ una matrice simmetrica, per ogni $l \in \underline{N}$ vale

$$\begin{aligned} \langle \widehat{\varepsilon}_l, \rho^{-1}(\widehat{\Lambda} - \Lambda)^T \mathbf{x}_l \rangle &= \widehat{\varepsilon}_l^T \rho^{-1}(\widehat{\Lambda} - \Lambda)^T \mathbf{x}_l = \left(\widehat{\varepsilon}_l^T \rho^{-1}(\widehat{\Lambda} - \Lambda)^T \mathbf{x}_l \right)^T = \\ &= \left((\widehat{\Lambda} - \Lambda)^T \mathbf{x}_l \right)^T (\rho^{-1})^T \widehat{\varepsilon}_l = \left((\widehat{\Lambda} - \Lambda)^T \mathbf{x}_l \right)^T \rho^{-1} \widehat{\varepsilon}_l = \\ &= \langle (\widehat{\Lambda} - \Lambda)^T \mathbf{x}_l, \rho^{-1} \widehat{\varepsilon}_l \rangle \end{aligned}$$

Consideriamo ora la sommatoria centrale dell'ultimo membro della (4.19) e proviamo che è nulla. Osserviamo infatti che tutti gli addendi sono scalari, quindi si possono utilizzare le proprietà della traccia di una matrice per ottenere

$$\begin{aligned} \sum_{l \in \underline{N}} \langle \widehat{\varepsilon}_l, \rho^{-1}(\widehat{\Lambda} - \Lambda)^T \mathbf{x}_l \rangle &= \sum_{l \in \underline{N}} \text{tr} \left(\widehat{\varepsilon}_l^T \rho^{-1}(\widehat{\Lambda} - \Lambda)^T \mathbf{x}_l \right) = \sum_{l \in \underline{N}} \text{tr} \left(\rho^{-1}(\widehat{\Lambda} - \Lambda)^T \mathbf{x}_l \widehat{\varepsilon}_l^T \right) = \\ &= \text{tr} \left(\rho^{-1}(\widehat{\Lambda} - \Lambda)^T \sum_{l \in \underline{N}} \mathbf{x}_l \widehat{\varepsilon}_l^T \right) = \text{tr}(0) = 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

La penultima uguaglianza è conseguenza della definizione (4.18) scelta per $\widehat{\Lambda}$, poiché si prova

$$\begin{aligned} \left(\sum_{l \in \underline{N}} \mathbf{x}_l \widehat{\varepsilon}_l^T \right)^T &= \sum_{l \in \underline{N}} \widehat{\varepsilon}_l \mathbf{x}_l^T = \sum_{l \in \underline{N}} \mathbf{w}_l \mathbf{x}_l^T - \sum_{l \in \underline{N}} \widehat{\Lambda}^T \mathbf{x}_l \mathbf{x}_l^T = \sum_{l \in \underline{N}} \mathbf{w}_l \mathbf{x}_l^T - \widehat{\Lambda}^T \sum_{l \in \underline{N}} \mathbf{x}_l \mathbf{x}_l^T = \\ &= \sum_{l \in \underline{N}} \mathbf{w}_l \mathbf{x}_l^T - \sum_{l \in \underline{N}} \mathbf{w}_l \mathbf{x}_l^T = \mathbf{0}_{2n}^{2n+1} \end{aligned}$$

Torniamo alla log-funzione di verosimiglianza \mathcal{L} e sostituiamo nell'equazione (4.17) i due risultati trovati (4.19), (4.20). Ponendo $\mathbf{y}_l := (\widehat{\Lambda} - \Lambda)^T \mathbf{x}_l \in \mathbb{R}^{2n}$ per ogni $l \in \underline{N}$, otteniamo in questo modo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Lambda) &= -Nn \log(2\pi) + \frac{N}{2} \log(\det(\boldsymbol{\rho}^{-1})) - \frac{1}{2} \sum_{l \in \underline{N}} \langle \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_l, \boldsymbol{\rho}^{-1} \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_l \rangle - \frac{1}{2} \sum_{l \in \underline{N}} \langle \mathbf{y}_l, \boldsymbol{\rho}^{-1} \mathbf{y}_l \rangle = \\ &= -Nn \log(2\pi) + \frac{N}{2} \log(\det(\boldsymbol{\rho}^{-1})) - \frac{1}{2} \sum_{l \in \underline{N}} \langle \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_l, \boldsymbol{\rho}^{-1} \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_l \rangle - \frac{1}{2} g(\Lambda) \end{aligned}$$

Osserviamo che l'unico termine dipendente da Λ è $-\frac{1}{2}g(\Lambda)$, avendo definito $g(\Lambda) := \sum_{l \in \underline{N}} \langle \mathbf{y}_l, \boldsymbol{\rho}^{-1} \mathbf{y}_l \rangle$. Poiché le colonne di Γ^{-1} sono linearmente indipendenti in \mathbb{R}^{2n} , la Proposizione 3.25 implica che la matrice $\boldsymbol{\rho}^{-1} = (\Gamma^{-1})^T \Gamma^{-1}$ sia definita positiva, quindi per ogni $\Lambda \in \mathbb{R}_{2n}^{2n+1}$ abbiamo

$$g(\Lambda) \geq 0, \quad g(\Lambda) = 0 \Leftrightarrow \forall l \in \underline{N} : \mathbf{y}_l = \mathbf{0}^{2n} \Leftrightarrow \forall l \in \underline{N} : (\widehat{\Lambda} - \Lambda)^T \mathbf{x}_l = \mathbf{0}^{2n}$$

In particolare dunque $g(\widehat{\Lambda}) = 0 \leq g(\Lambda)$ per ogni $\Lambda \in \mathbb{R}_{2n}^{2n+1}$, per cui $\widehat{\Lambda}$ è un punto di minimo di g e conseguentemente un punto di massimo di \mathcal{L} . Possiamo scrivere la soluzione trovata del problema (4.15) come $\widehat{\Lambda} = (\widehat{\boldsymbol{\xi}}, \widehat{\boldsymbol{\Phi}})^T$, ottenendo così $\widehat{\boldsymbol{\xi}}$ e $\widehat{\boldsymbol{\Pi}} = \widehat{\boldsymbol{\Phi}} - \delta_{2n}$ le stime del fattore centrante e della matrice di cointegrazione di \mathcal{M} che ci eravamo proposti di determinare. Abbiamo implementato questo metodo di calibrazione nella Function 5.12.

4.1.2 Test di calibrazione

Applichiamo la tecnica di calibrazione descritta ad alcune delle serie storiche già esaminate nel paragrafo 3.6.

Esempio 4.4. Consideriamo il mercato trattato nell'Esempio 3.48, costituito da futures scritti su tre commodity differenti: *futures elettrici mensili base-load Phelix*, *futures elettrici mensili base-load del mercato OTC italiano* e *futures su gas naturale NCG*. L'intervallo di osservazione è il periodo dal 01-ott-2012 al 21-dic-2012 ed i prezzi quelli dei contratti *gen-2013*, *feb-2013*, *mar-2013*. Poiché disponiamo di questi dati soltanto per il primo tipo di futures, per gli altri è necessario interpolare quelli reali con l'algoritmo di smoothing. Assumendo l'ipotesi che il mercato sia di tipo A1, nell'Esempio 3.48 abbiamo applicato la Function 5.8 per ottenere i parametri calibrati $\{p^h\}_{h \in \underline{3}}$ relativi a ciascuna delle commodity:

h	α_0^h	α_1^h	α_2^h	φ^h	λ^h	ρ^h
1 - Elettricità PHE	-0.0043	-0.0095	-0.0051	1.4346	0.0036	-0.2326
2 - Elettricità OTC Italia	-0.0061	0.0101	0.0032	4.4915	0.0077	-0.3080
3 - Gas Naturale NCG	0.0964	0.1023	0.0060	0.7523	0.0057	0.2173

Con la Function 5.9, invece, abbiamo determinato la matrice $\boldsymbol{\rho}$ dei coefficienti di

correlazione tra i moti browniani che guidano le dinamiche dei prezzi futures:

$$\rho = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1.0000 & -0.2326 & -0.2080 & 0.2023 & -0.0802 & 0.2657 \\ -0.2326 & 1.0000 & 0.1346 & -0.2502 & -0.2971 & -0.5166 \\ \hline -0.2080 & 0.1346 & 1.0000 & -0.3080 & 0.1546 & -0.1173 \\ 0.2023 & -0.2502 & -0.3080 & 1.0000 & -0.0573 & 0.2063 \\ \hline -0.0802 & -0.2971 & 0.1546 & -0.0573 & 1.0000 & 0.2173 \\ 0.2657 & -0.5166 & -0.1173 & 0.2063 & 0.2173 & 1.0000 \end{array} \right)$$

Ora calibriamo ξ e Π con il metodo proposto nel precedente paragrafo, risolvendo i problemi di ottimizzazione (4.10) e (4.15) attraverso la Function 5.12. Si ottengono in questo modo il fattore centrante:

$$\hat{\xi} = (0.5295 \quad -0.0850 \mid 0.5470 \quad -0.7315 \mid 0.5122 \quad 0.2496)^T$$

e la matrice di cointegrazione:

$$\hat{\Pi} = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} -0.1701 & -0.0808 & -0.1067 & -0.0928 & 0.0824 & 0.0233 \\ 0.1065 & -0.1008 & -0.0183 & 0.0664 & 0.2056 & 0.0589 \\ \hline -0.0283 & 0.0725 & -0.2671 & 0.2348 & 0.0422 & 0.0008 \\ -0.1340 & -0.1210 & 0.0280 & -0.2540 & -0.0421 & 0.1507 \\ \hline 0.0123 & 0.1771 & -0.0082 & 0.0615 & -0.9229 & -0.0573 \\ 0.1737 & -0.1105 & 0.1022 & -0.1311 & -0.2711 & -0.3343 \end{array} \right)$$

■

Per verificare la correttezza del metodo di calibrazione proposto, lo testiamo anche su prezzi simulati che generiamo fissando come parametri quelli ottenuti nell'esempio precedente.

Esempio 4.5. Supponiamo che siano osservati dal 01-gen-2010 al 31-dic-2012 i prezzi dei futures mensili *gen-2013*, *feb-2013*, *mar-2013* scritti su tre commodity differenti. Definiamo un modello cointegrato di tipo A1 fissando i parametri $\{p^h\}_{h \in \mathbb{3}}$, ρ , ξ e Π come quelli dell'Esempio 4.4. Se chiediamo che i prezzi iniziali siano tutti uguali a 60 €/MWh, possiamo simulare i prezzi f osservati giornalmente nell'intervallo considerato applicando la Function 5.10.

Calibriamo adesso ξ e Π sull'osservazione f risolvendo i problemi di ottimizzazione (4.10) e (4.15) attraverso la Function 5.12. Si ottengono in questo modo il fattore centrante:

$$\hat{\xi} = (0.5065 \quad -0.2224 \mid 0.6320 \quad -1.1353 \mid 0.4897 \quad 0.0710)^T$$

e la matrice di cointegrazione:

$$\hat{\Pi} = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} -0.2485 & -0.1248 & -0.1052 & -0.1488 & 0.0850 & 0.0875 \\ 0.1719 & -0.1793 & 0.0210 & 0.0488 & 0.3299 & 0.0615 \\ \hline -0.0821 & 0.0939 & -0.4151 & 0.3263 & 0.0804 & -0.0010 \\ -0.2695 & -0.1138 & -0.0078 & -0.3307 & -0.0948 & 0.2714 \\ \hline 0.0537 & 0.2333 & -0.0485 & 0.1069 & -1.2294 & -0.1271 \\ 0.2544 & -0.1648 & 0.1203 & -0.1663 & -0.3309 & -0.4688 \end{array} \right)$$

Notiamo che l'errore relativo commesso dalla stima del fattore centrante è pari a $|\hat{\xi} - \xi|/|\xi| = 0.3918$, mentre quello commesso dalla stima della matrice di cointegrazione è $|\hat{\Pi} - \Pi|/|\Pi| = 0.3584$, dove abbiamo indicato con $||$ la norma euclidea. Ripetendo 100 calibrazioni analoghe alla precedente si osserva come gli errori relativi medi siano rispettivamente 0.4275 e 0.3961.

Se aumentiamo l'ampiezza dell'intervallo di osservazione considerando prezzi dal 01-gen-2008 al 31-dic-2012, si osserva come l'errore relativo commesso dalle stime diminuisca. Ripetendo 100 calibrazione analoghe alle precedente, gli errori relativi medi ora sono rispettivamente 0.3824 e 0.3456. ■

4.2 Mercati energetici a termine cointegrati di tipo B

Consideriamo una secondo modello di mercato energetico a termine cointegrato, adattando la proposta presentata da Aid et al. [ACLP12] per i prezzi spot dei combustibili impiegati nella produzione di elettricità. Supponiamo che i prezzi dei futures sulla stessa commodity, ma con periodi di consegna differente, siano cointegrati rispetto alla misura oggettiva. In questo caso definiamo il modello fissando direttamente i drift dei processi dei prezzi.

Definizione 4.6. Dato \mathcal{M} un C-MET su I , definiamo per ogni $h \in \underline{n}$ il processo dei prezzi futures sulla commodity h -esima con $\mathbf{F}^h := (F_1^h, \dots, F_m^h)^T \in (\mathbb{R}^m)^{I \times \Omega}$. Diciamo che \mathcal{M} è *cointegrato di tipo B* se per ogni $(h, i) \in \underline{n} \times \underline{m}$ esistono $\xi_i^h \in \mathbb{R}$ e $\Pi_i^h \in \mathbb{R}_m$ tali che

$$\mu_i^h(t) = \frac{\xi_i^h + \Pi_i^h \mathbf{F}^h(t)}{F_i^h(t)} \quad \text{in } I \quad (4.21)$$

Definiamo per ogni $h \in \underline{n}$

$$\boldsymbol{\sigma}^h := \begin{pmatrix} \sigma_1^h \\ \vdots \\ \sigma_m^h \end{pmatrix} \in (\mathbb{R}_m^m)^I, \quad \boldsymbol{\xi}^h := \begin{pmatrix} \xi_1^h \\ \vdots \\ \xi_m^h \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \quad \boldsymbol{\Pi}^h := \begin{pmatrix} \Pi_1^h \\ \vdots \\ \Pi_m^h \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_m^m$$

e chiamiamo $\boldsymbol{\xi}^h$ e $\boldsymbol{\Pi}^h$ rispettivamente *fattore centrante* e *matrice di cointegrazione relativi alla commodity h -esima* di \mathcal{M} . Diciamo infine che \mathcal{M} è un C-MET *cointegrato di tipo B1* se \mathcal{M} è anche di tipo 1 (cfr. Definizione 3.12), mentre è *cointegrato di tipo B2* se è anche di tipo 2 (cfr. Definizione 3.32).

Mostriamo quale equazione differenziale stocastica deve soddisfare il prezzo di un futures nel caso considerato. Se $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)^T \in \mathbb{R}^n$ è un generico vettore colonna, indichiamo con

$$D(\mathbf{v}) := \begin{pmatrix} v_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & v_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_n^n \quad (4.22)$$

la *matrice diagonale* associata a \mathbf{v} .

Proposizione 4.7. Se \mathcal{M} è un C-MET cointegrato di tipo B su I ed $(h, i) \in \underline{n} \times \underline{m}$, allora

$$dF_i^h(t) = [\xi_i^h + \Pi_i^h F^h(t)] dt + F_i^h(t) \sigma_i^h(t) d\bar{W}^h(t) \quad \text{in } I \quad (4.23)$$

$$dF^h(t) = [\xi^h + \Pi^h F^h(t)] dt + D(F^h(t)) \sigma^h(t) d\bar{W}^h(t) \quad \text{in } I \quad (4.24)$$

dove $D(\cdot)$ è definito nell'equazione (4.22).

Dimostrazione: Applicando la definizione di μ_i^h in (4.21) all'equazione (4.1), si ottiene per ogni $t \in I$

$$\begin{aligned} dF_i^h(t) &= F_i^h(t) \mu_i^h(t) dt + F_i^h(t) \sigma_i^h(t) d\bar{W}^h(t) = \\ &= F_i^h(t) \frac{\xi_i^h + \Pi_i^h F^h(t)}{F_i^h(t)} dt + F_i^h(t) \sigma_i^h(t) d\bar{W}^h(t) = \\ &= [\xi_i^h + \Pi_i^h F^h(t)] dt + F_i^h(t) \sigma_i^h(t) d\bar{W}^h(t) \end{aligned}$$

Ricordando che $F^h := (F_1^h, \dots, F_m^h)^\top$ ed osservando

$$\begin{aligned} D(F^h(t)) \sigma^h(t) d\bar{W}^h(t) &= D(F^h(t)) \begin{pmatrix} \sigma_1^h(t) \\ \sigma_2^h(t) \\ \vdots \\ \sigma_m^h(t) \end{pmatrix} d\bar{W}^h(t) = \\ &= \begin{pmatrix} F_1^h(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & F_2^h(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & F_m^h(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^h(t) d\bar{W}^h(t) \\ \sigma_2^h(t) d\bar{W}^h(t) \\ \vdots \\ \sigma_m^h(t) d\bar{W}^h(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1^h(t) \sigma_1^h(t) d\bar{W}^h(t) \\ F_2^h(t) \sigma_2^h(t) d\bar{W}^h(t) \\ \vdots \\ F_m^h(t) \sigma_m^h(t) d\bar{W}^h(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

si prova infine come desiderato

$$dF^h(t) = [\xi^h + \Pi^h F^h(t)] dt + D(F^h(t)) \sigma^h(t) d\bar{W}^h(t)$$

per ogni $t \in I$. ■

Aïd et al. nella Proposizione B.1. di [ACLP12] hanno dimostrato che la stretta positività dei prezzi futures F^h si traduce nella richiesta che tutte le entrate della matrice di cointegrazione Π^h che non stanno sulla diagonale siano positive, per ogni $h \in \underline{n}$. Dati $p, q \in \mathbb{N}$ ed $A = (A_j^i)_{\substack{i \in \underline{p} \\ j \in \underline{q}}} \in \mathbb{R}_q^p$ una generica matrice, scriveremo $A > 0$ (risp. $A \geq 0$) quando $A_j^i > 0$ (risp. $A_j^i \geq 0$) per ogni $i \in \underline{p}$ e $j \in \underline{q}$.

Proposizione 4.8. Se \mathcal{M} è un C-MET cointegrato di tipo B su I , allora

$$\forall t \in I : F^h(t) > 0 \quad \text{q.c. in } (\Omega, P) \leftrightarrow \forall i \neq j \in \underline{m} : (\Pi^h)_j^i \geq 0$$

per ogni $h \in \underline{n}$.

Consideriamo un esempio delle traiettorie dei prezzi futures su una data commodity di un mercato energetico a termine cointegrato di tipo B1 fissando i valori dei parametri p^h , ξ^h , Π^h ed applicando la Function 5.10.

Esempio 4.9. Supponiamo che siano osservati dal 01-gen-2010 al 31-dic-2012 i prezzi dei futures mensili *gen-2013*, *feb-2013*, *mar-2013* scritti su una fissata commodity del mercato energetico a termine cointegrato di tipo B1 con parametri:

α_0^h	α_1^h	α_2^h	φ^h	λ^h	ρ^h
0.0080	0.0080	0.0100	5.9690	0.80/365	0.10

Supponiamo che il fattore centrante e la matrice di cointegrazione relativi a questa commodity siano rispettivamente:

$$\xi^h = 0.001 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Pi^h = 0.001 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e che i prezzi iniziali siano tutti uguali a 60 €/MWh . Simuliamo i prezzi osservati giornalmente nell'intervallo considerato applicando la Function 5.11 e rappresentiamo in Figura 4.2 il risultato ottenuto. ■

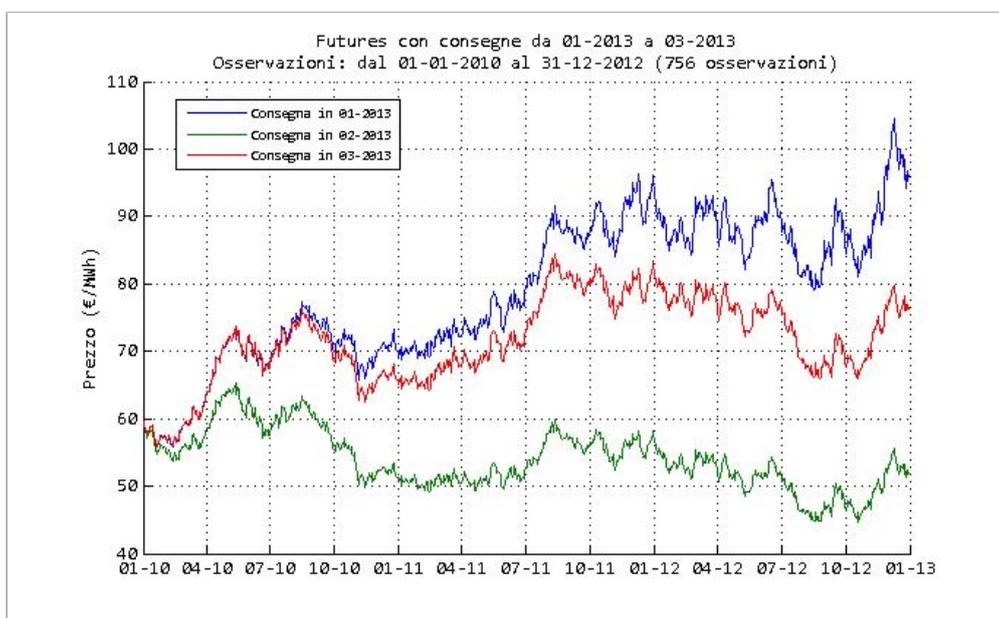


Figura 4.2: Simulazione delle traiettorie dei prezzi futures dell'Esempio 4.9.

4.2.1 Calibrazione

Come nel paragrafo 4.1.1 ci occupiamo adesso di calibrare per una generica commodity h -esima il fattore centrante ξ^h e la matrice di cointegrazione Π^h attraverso i prezzi osservati f sulle date di $\pi = (t_0, \dots, t_N)$ un partizione equispaziata di I con passo pari ad 1 giorno e $|T_1 - T_0| \gg 1$. Indichiamo per ogni $h \in \underline{n}$ con $\Lambda^h := (\xi^h, \Pi^h) \in \mathbb{R}_{m+1}^m$ la *matrice dei parametri di cointegrazione* di \mathcal{M} e determiniamo Λ^h attraverso una *stima di massima verosimiglianza* in cui, a differenza di quanto visto nel paragrafo 4.1.1, si sfrutta il fatto che il processo dei prezzi sia a tempo continuo.

Per semplificare la notazione, d'ora in avanti omettiamo nelle grandezze trattate la dipendenza dall'indice $h \in \underline{n}$ che identifica la commodity, mentre indichiamo esplicitamente la dipendenza dei prezzi futures dalla matrice dei parametri $\Lambda^h = (\xi^h, \Pi^h)$, per cui in particolare abbreviamo $\Lambda := \Lambda^h$, $F^\Lambda := F^h$ ed $f := f^h = (f_1^h, \dots, f_m^h)^T$. Fissiamo una *matrice dei parametri di riferimento* $\Lambda_0 := \mathbf{0}_{m+1}^m$, la matrice nulla di \mathbb{R}_{m+1}^m , e chiamiamo $F^0 := F^{\Lambda_0}$. Le equazioni soddisfatte da F^0 ed F^Λ si ottengono riscrivendo la (4.24) come segue

$$\begin{aligned} dF^0(t) &= D(F^0(t))\sigma(t) d\bar{W}(t) \\ dF^\Lambda(t) &= [\xi + \Pi F^\Lambda(t)] dt + D(F^\Lambda(t))\sigma(t) d\bar{W}(t) \end{aligned} \quad (4.25)$$

per ogni $t \in I$, dove ricordiamo che $\bar{W} := \bar{W}^h = (\bar{W}_1^h, \bar{W}_2^h)^T$ è il vettore bidimensionale di moti browniani correlati su (Ω, \mathcal{F}, P) relativo alla commodity h -esima e $D(\cdot)$ è definito nell'equazione (4.22). I processi F^0 ed F^Λ inducono sullo spazio delle traiettorie continue $C(I; \mathbb{R}^m)$ due misure di probabilità che chiamiamo rispettivamente P_Λ e P_0 , definite per ogni A sottoinsieme misurabile di $C(I; \mathbb{R}^m)$ da

$$P_0(A) := P(F^0 \in A), \quad P_\Lambda(A) := P(F^\Lambda \in A)$$

dove P è la misura di probabilità oggettiva su (Ω, \mathcal{F}) . Il corollario del Teorema di Girsanov enunciato nella Proposizione 2.37 consente di dimostrare che le misure P_Λ e P_0 sono equivalenti e fornisce in modo esplicito le densità di Radon-Nikodym di una rispetto all'altra.

Sia $\psi \in C(I; \mathbb{R}^m)$ una traiettoria continua di F^Λ che interpola l'osservazione f , ovvero per cui $f(t_l) = \psi(t_l)$ per ogni $l \in \underline{N}$. Indichiamo con $f_0(\psi; \Lambda) := \frac{dP_\Lambda}{dP_0}(\psi)$ il valore assunto dalla densità di Radon-Nikodym di P_Λ rispetto a P_0 in ψ , una grandezza che è funzione della matrice dei parametri Λ e che può essere interpretata intuitivamente come una densità della probabilità di aver osservato la traiettoria ψ nell'intervallo di tempo I . L'applicazione

$$\Lambda \mapsto f_0(\psi; \Lambda) = \frac{dP_\Lambda}{dP_0}(\psi)$$

è detta *funzione di verosimiglianza* ed il nostro obiettivo è individuare un valore di Λ che la massimizzi ovvero che renda il più verosimile possibile aver osservato ψ . Diremo dunque che $\hat{\Lambda} = (\hat{\xi}, \hat{\Pi})$ è *calibrata* su ψ se $\hat{\Lambda}$ è soluzione del seguente problema di ottimizzazione

$$\max_{\Lambda \in \mathbb{R}_{m+1}^m} \log(f_0(\psi; \Lambda)) = \max_{\Lambda \in \mathbb{R}_{m+1}^m} \mathcal{L}(\Lambda) \quad (4.26)$$

dove abbiamo utilizzato $\mathcal{L}(\Lambda) := \log(f_0(\psi; \Lambda))$ la *log-funzione di verosimiglianza* perché rende più semplice il calcolo.

Occupiamoci dunque di trovare $\frac{dP_\Lambda}{dP_0}(\psi)$ utilizzando la Proposizione 2.37. Per come abbiamo definito $\mathbf{W} := \mathbf{W}^h = (W_1^h, W_2^h)^T$ il vettore bidimensionale di moti browniani correlati su (Ω, \mathcal{F}, Q) relativo alla commodity h -esima, sappiamo che esistono Γ una matrice invertibile 2×2 con righe a norma unitaria e $\varphi \in \mathbb{L}_{loc}^2(I, \Omega; \mathbb{R}^2)$ tali che

$$\bar{W} = \Gamma \widetilde{W}, \quad \mathbf{W} = \Gamma \widehat{W} \quad (4.27)$$

$$d\widehat{W}(t) = \varphi(t) dt + d\widetilde{W}(t) \quad \text{in } I \quad (4.28)$$

e $\mathbb{E}^P \left(Z_{T_1}^{-\varphi, \widetilde{W}} \right) = 1$, dove $\widetilde{W}, \widehat{W}$ sono vettori bidimensionali di moti browniani indipendenti rispettivamente su (Ω, \mathcal{F}, P) ed (Ω, \mathcal{F}, Q) . Sostituendo la prima equazione delle (4.27) nelle (4.25) otteniamo

$$d\mathbf{F}^0(t) = D(\mathbf{F}^0(t))\sigma(t)\Gamma d\widetilde{W}(t) \quad (4.29)$$

$$d\mathbf{F}^\Lambda(t) = [\xi + \Pi\mathbf{F}^\Lambda(t)] dt + D(\mathbf{F}^\Lambda(t))\sigma(t)\Gamma d\widetilde{W}(t) \quad (4.30)$$

per ogni $t \in I$. Vogliamo applicare la Proposizione 2.37 prendendo $\mathbf{X} := \mathbf{F}^0$, $\mathbf{Y} := \mathbf{F}^\Lambda$, $\mathbf{b} := \mathbf{0}$, $\beta(t, \mathbf{x}) := \xi + \Pi\mathbf{x}$ e $\sigma(t, \mathbf{x}) := D(\mathbf{x})\sigma(t)\Gamma$ per ogni $t \in I$ ed $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$. A questo scopo mostriamo che sono soddisfatte le ipotesi (2.14) e (2.15). Notiamo che la dinamica neutrale al rischio di \mathbf{F}^Λ è descritta per la (4.2) e la seconda delle (4.27) dall'equazione

$$d\mathbf{F}^\Lambda(t) = D(\mathbf{F}^\Lambda(t))\sigma(t)\Gamma d\widehat{W}(t) \quad \text{in } I \quad (4.31)$$

Osserviamo che il processo φ soddisfa l'ipotesi (2.14) sostituendo $d\widehat{W}(t)$ nella precedente attraverso l'espressione (4.28). Si ha infatti

$$\begin{aligned} d\mathbf{F}^\Lambda(t) &= D(\mathbf{F}^\Lambda(t))\sigma(t)\Gamma d\widehat{W}(t) = D(\mathbf{F}^\Lambda(t))\sigma(t)\Gamma \left[\varphi(t) dt + d\widetilde{W}(t) \right] = \\ &= D(\mathbf{F}^\Lambda(t))\sigma(t)\Gamma \varphi(t) dt + D(\mathbf{F}^\Lambda(t))\sigma(t)\Gamma d\widetilde{W}(t) \end{aligned}$$

per ogni $t \in I$. Per l'unicità della rappresentazione differenziale di un processo di Itô, il drift nell'ultimo membro e quello della (4.30) debbono essere uguali, perciò

$$D(\mathbf{F}^\Lambda(t))\sigma(t)\Gamma \varphi(t) = \xi + \Pi\mathbf{F}^\Lambda(t) \quad (4.32)$$

e l'ipotesi (2.14) è soddisfatta. Ora notiamo che, per le scelte delle funzioni $\sigma := \sigma^h \in (\mathbb{R}_2^m)^I$ considerate nel capitolo 3 e presentate nelle Definizioni 3.12 e 3.32, si ha $\text{rg}(\sigma(t)) = 2$ per ogni $t \in I$ poiché le componenti della seconda colonna sono identiche tra loro, mentre quelle della prima non lo sono. Segue perciò che $\text{rg}(\sigma(t)^\top \sigma(t)) = 2$ e la matrice $\sigma(t)^\top \sigma(t) \in \mathbb{R}_2^2$ è invertibile per ogni $t \in I$. Possiamo dunque definire

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_t &:= \Gamma^{-1} (\sigma(t)^\top \sigma(t))^{-1} \sigma(t)^\top \in \mathbb{R}_m^2 \\ \kappa(t, \mathbf{x}) &:= \mathbf{A}_t D(\mathbf{x})^{-1} \in \mathbb{R}_m^2 \end{aligned}$$

per ogni $t \in I$ ed $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)^\top \in \mathbb{R}^m$ tale che $x_i \neq 0$ per ogni $i \in \underline{m}$. Ricordando che $F_i^\Lambda > 0$ per ogni $i \in \underline{m}$, si ottiene

$$\begin{aligned} \kappa(t, \mathbf{F}^\Lambda(t)) D(\mathbf{F}^\Lambda(t))\sigma(t)\Gamma &= \mathbf{A}_t D(\mathbf{F}^\Lambda(t))^{-1} D(\mathbf{F}^\Lambda(t))\sigma(t)\Gamma = \\ &= \mathbf{A}_t \sigma(t)\Gamma = \Gamma^{-1} (\sigma(t)^\top \sigma(t))^{-1} \sigma(t)^\top \sigma(t)\Gamma = \delta_2 \end{aligned}$$

per ogni $t \in I$, dove δ_2 è la matrice identità di \mathbb{R}_2^2 . Perciò anche l'ipotesi (2.15) è soddisfatta e possiamo applicare la Proposizione 2.37, da cui segue che $P_0 \sim P_\Lambda$. Per esplicitare la densità di Radon-Nikodym di P_0 rispetto a P_Λ , definiamo

$$\begin{aligned} \kappa_t &:= \kappa(t, \mathbf{F}^\Lambda(t)) = \mathbf{A}_t D(\mathbf{F}^\Lambda(t))^{-1} \in \mathbb{R}_m^2 \\ \gamma_t &:= \kappa_t (\xi + \Pi\mathbf{F}^\Lambda(t)) = \mathbf{A}_t D(\mathbf{F}^\Lambda(t))^{-1} (\xi + \Pi\mathbf{F}^\Lambda(t)) \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

per ogni $t \in I$. Dall'equazione (2.16) della Proposizione 2.37 segue perciò che

$$\begin{aligned} \frac{dP_0}{dP_\Lambda}(\mathbf{F}^\Lambda) &= \exp\left(-\int_I \gamma_s^\top \boldsymbol{\kappa}_s d\mathbf{F}_s^\Lambda + \frac{1}{2} \int_I |\gamma_s|^2 ds\right) = \\ &= \exp\left(-\int_I [\mathbf{A}_s D(\mathbf{F}_s^\Lambda)^{-1} (\boldsymbol{\xi} + \mathbf{\Pi} \mathbf{F}_s^\Lambda)]^\top \mathbf{A}_s D(\mathbf{F}_s^\Lambda)^{-1} d\mathbf{F}_s^\Lambda + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \int_I |\mathbf{A}_s D(\mathbf{F}_s^\Lambda)^{-1} (\boldsymbol{\xi} + \mathbf{\Pi} \mathbf{F}_s^\Lambda)|^2 ds\right) \end{aligned} \quad (4.33)$$

Ricordando che ψ è una traiettoria continua di \mathbf{F}^Λ che interpola l'osservazione \mathbf{f} , abbiamo $\psi = \mathbf{F}^\Lambda(\omega)$ per qualche $\omega \in \Omega$. Poiché la densità di P_0 rispetto a P_Λ è strettamente positiva, possiamo dunque ricavare la log-funzione di verosimiglianza

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Lambda) &= \log(f_0(\psi; \Lambda)) = \log\left(\frac{dP_\Lambda}{dP_0}(\psi)\right) = \log\left(\left(\frac{dP_0}{dP_\Lambda}(\psi)\right)^{-1}\right) = -\log\left(\frac{dP_0}{dP_\Lambda}(\mathbf{F}^\Lambda)\right) = \\ &= \int_I [\mathbf{A}_s D(\mathbf{F}_s^\Lambda)^{-1} (\boldsymbol{\xi} + \mathbf{\Pi} \mathbf{F}_s^\Lambda)]^\top \mathbf{A}_s D(\mathbf{F}_s^\Lambda)^{-1} d\mathbf{F}_s^\Lambda - \frac{1}{2} \int_I |\mathbf{A}_s D(\mathbf{F}_s^\Lambda)^{-1} (\boldsymbol{\xi} + \mathbf{\Pi} \mathbf{F}_s^\Lambda)|^2 ds \end{aligned}$$

per ogni $\Lambda = (\boldsymbol{\xi}, \mathbf{\Pi}) \in \mathbb{R}_{m+1}^m$, dove ricordiamo che $D(\cdot)$ è definito nell'equazione (4.22). Poniamo ora

$$\mathbf{F}_l^\Lambda := \mathbf{F}^\Lambda(t_l), \quad \mathbf{f}_l := \mathbf{f}(t_l), \quad \mathbf{A}_l := \mathbf{A}_{t_l}$$

per ogni $l = 0, \dots, N$ e

$$\Delta \mathbf{F}_l^\Lambda := \mathbf{F}_l^\Lambda - \mathbf{F}_{l-1}^\Lambda, \quad \Delta \mathbf{f}_l := \mathbf{f}_l - \mathbf{f}_{l-1}$$

per ogni $l \in \underline{N}$. Poiché $|T_1 - T_0| \gg 1$ e $t_l - t_{l-1} = 1$ per ogni $l \in \underline{N}$, siamo in grado di approssimare gli integrali in $\mathcal{L}(\Lambda)$ con

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Lambda) &= \sum_{l \in \underline{N}} [\mathbf{A}_{l-1} D(\mathbf{F}_{l-1}^\Lambda)^{-1} (\boldsymbol{\xi} + \mathbf{\Pi} \mathbf{F}_{l-1}^\Lambda)]^\top \mathbf{A}_{l-1} D(\mathbf{F}_{l-1}^\Lambda)^{-1} \Delta \mathbf{F}_l^\Lambda - \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{l \in \underline{N}} |\mathbf{A}_{l-1} D(\mathbf{F}_{l-1}^\Lambda)^{-1} (\boldsymbol{\xi} + \mathbf{\Pi} \mathbf{F}_{l-1}^\Lambda)|^2 \end{aligned}$$

Osserviamo che $\mathbf{F}_l^\Lambda(\omega) = \boldsymbol{\Psi}(t_l) = \mathbf{f}_l$ per ogni $l \in \underline{N}$, per cui

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Lambda) &= \sum_{l \in \underline{N}} [\mathbf{A}_{l-1} D(\mathbf{f}_{l-1})^{-1} (\boldsymbol{\xi} + \mathbf{\Pi} \mathbf{f}_{l-1})]^\top \mathbf{A}_{l-1} D(\mathbf{f}_{l-1})^{-1} \Delta \mathbf{f}_l - \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{l \in \underline{N}} |\mathbf{A}_{l-1} D(\mathbf{f}_{l-1})^{-1} (\boldsymbol{\xi} + \mathbf{\Pi} \mathbf{f}_{l-1})|^2 \end{aligned} \quad (4.34)$$

Per rendere più leggibile la precedente espressione, definiamo

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_l &:= \mathbf{A}_{l-1} D(\mathbf{f}_{l-1})^{-1} = \boldsymbol{\Gamma}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}(t_{l-1})^\top \boldsymbol{\sigma}(t_{l-1}))^{-1} \boldsymbol{\sigma}(t_{l-1})^\top D(\mathbf{f}_{l-1})^{-1} \in \mathbb{R}_m^2 \\ \mathbf{C}_l &:= \mathbf{B}_l^\top \mathbf{B}_l \in \mathbb{R}_m^m \\ \mathbf{x}_l &:= (1, \mathbf{f}_{l-1}^\top)^\top \in \mathbb{R}^{m+1} \end{aligned}$$

per ogni $l \in \underline{N}$. Essendo $\Lambda = (\boldsymbol{\xi}, \mathbf{\Pi})$, si ottiene dunque $\Lambda \mathbf{x}_l = \boldsymbol{\xi} + \mathbf{\Pi} \mathbf{f}_{l-1}$ per ogni $l \in \underline{N}$ e la log-funzione di verosimiglianza diventa

$$\mathcal{L}(\Lambda) = \sum_{l \in \underline{N}} (\mathbf{B}_l \Lambda \mathbf{x}_l)^\top \mathbf{B}_l \Delta \mathbf{f}_l - \frac{1}{2} \sum_{l \in \underline{N}} |\mathbf{B}_l \Lambda \mathbf{x}_l|^2$$

Il nostro obiettivo è determinare $\hat{\Lambda} = (\hat{\xi}, \hat{\Pi}) \in \mathbb{R}_{m+1}^m$ che massimizzi la precedente espressione. Notiamo che gli addendi della prima sommatoria sono funzioni lineari di Λ , mentre quelli della seconda sono funzioni strettamente convesse di Λ , poiché la norma euclidea è strettamente convessa. Segue perciò che \mathcal{L} è una funzione strettamente concava e, se ammette un punto di massimo, questo deve essere unico. Riscriviamo ancora \mathcal{L} utilizzando le matrici C_l definite sopra

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Lambda) &= \sum_{l \in \underline{N}} (\Lambda x_l)^\top B_l^\top B_l \Delta f_l - \frac{1}{2} \sum_{l \in \underline{N}} (\Lambda x_l)^\top B_l^\top B_l \Lambda x_l = \\ &= \sum_{l \in \underline{N}} (\Lambda x_l)^\top C_l \Delta f_l - \frac{1}{2} \sum_{l \in \underline{N}} (\Lambda x_l)^\top C_l \Lambda x_l \end{aligned} \quad (4.35)$$

Se definiamo $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Lambda} \in \mathbb{R}_{m+1}^m$ ponendo

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Lambda} \right)_a^i := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Lambda_a^i}$$

per ogni $i = 1, \dots, m$ ed $a = 1, \dots, m+1$, si prova facilmente che

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Lambda}(\Lambda) = \sum_{l \in \underline{N}} (C_l \Delta f_l) x_l^\top - \frac{1}{2} \sum_{l \in \underline{N}} 2(C_l \Lambda x_l) x_l^\top = \sum_{l \in \underline{N}} C_l \Delta f_l x_l^\top - C_l \Lambda x_l x_l^\top$$

per ogni $\Lambda \in \mathbb{R}_{m+1}^m$. Definiamo $I := \underline{m} \times \underline{m+1}$ l'insieme degli indici degli elementi delle matrici di \mathbb{R}_{m+1}^m ed utilizziamo la convenzione di indicare con A^i , A_j rispettivamente la riga i -esima e la colonna j -esima di una generica matrice A . Segue dunque che $\hat{\Lambda} \in \mathbb{R}_{m+1}^m$ è un punto critico di \mathcal{L} quando

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Lambda}(\hat{\Lambda}) = \mathbf{0}_{m+1}^m &\Leftrightarrow \sum_{l \in \underline{N}} C_l \hat{\Lambda} x_l x_l^\top = \sum_{l \in \underline{N}} C_l \Delta f_l x_l^\top \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \forall (i, a) \in I : \sum_{l \in \underline{N}} (C_l)^i \hat{\Lambda} x_l(x_l)^a = \sum_{l \in \underline{N}} (C_l)^i \Delta f_l(x_l)^a \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \forall (i, a) \in I : \sum_{l \in \underline{N}} \sum_{(j,b) \in I} (C_l)^i_j \hat{\Lambda}_b^j(x_l)^b(x_l)^a = \sum_{l \in \underline{N}} (C_l)^i \Delta f_l(x_l)^a \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \forall (i, a) \in I : \sum_{(j,b) \in I} \hat{\Lambda}_b^j \sum_{l \in \underline{N}} (C_l)^i_j(x_l)^b(x_l)^a = \sum_{l \in \underline{N}} (C_l)^i \Delta f_l(x_l)^a \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \forall (i, a) \in I : \sum_{(j,b) \in I} L_{jb}^{ia} \hat{\Lambda}_b^j = v^{ia} \end{aligned}$$

dove abbiamo posto

$$\begin{aligned} L_{jb}^{ia} &:= \sum_{l \in \underline{N}} (C_l)^i_j(x_l)^b(x_l)^a \in \mathbb{R} \\ v^{ia} &:= \sum_{l \in \underline{N}} (C_l)^i \Delta f_l(x_l)^a \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

per ogni $(i, a), (j, b) \in I$. Ora identifichiamo $\mathbb{R}_{m+1}^m = \mathbb{R}^{m(m+1)}$ linearizzando le matrici $m \times (m+1)$ per colonne e poniamo $J := \{1, \dots, m(m+1)\}$ l'insieme dei nuovi indici.

Possiamo dunque definire la matrice $m(m+1) \times m(m+1)$ ed il vettore colonna $m(m+1)$ -dimensionale

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &:= (L_{jb}^{ia})_{(j,b) \in I}^{(i,a) \in I} = (L_q^p)_{q \in J}^{p \in J} \in \mathbb{R}_{m(m+1)}^{m(m+1)} \\ \mathbf{v} &:= (v^{ia})_{(i,a) \in I} = (v^p)_{p \in J} \in \mathbb{R}^{m(m+1)} \end{aligned}$$

che utilizziamo per riscrivere la relazione trovata per i punti critici di \mathcal{L}

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \hat{\Lambda}}(\hat{\Lambda}) = \mathbf{0}_{m+1}^m \leftrightarrow \forall p \in J: \sum_{q \in J} L_q^p \hat{\Lambda}^q = v^p \leftrightarrow \mathbf{L} \hat{\Lambda} = \mathbf{v}$$

dove abbiamo riguardato $\hat{\Lambda} \in \mathbb{R}_{m+1}^m = \mathbb{R}^{m(m+1)}$ come un vettore colonna $m(m+1)$ -dimensionale. Se supponiamo che \mathbf{L} sia invertibile, otterremo dunque che $\hat{\Lambda} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{v}$ è l'unico punto critico di \mathcal{L} . Poiché sappiamo che questa funzione è concava, $\hat{\Lambda} = (\hat{\xi}, \hat{\Pi})$ è anche l'unico punto di massimo di \mathcal{L} , come desiderato. Abbiamo così identificato $\hat{\xi}^h = \hat{\xi}$ e $\hat{\Pi}^h = \hat{\Pi}$ le stime del fattore centrante e della matrice di cointegrazione relativi alla commodity h -esima di \mathcal{M} che ci eravamo proposti di determinare. Nella Function 5.13 implementiamo questo metodo di calibrazione.

4.2.2 Test di calibrazione

Utilizziamo la tecnica proposta stimando i parametri di un mercato energetico a termine cointegrato di tipo B su una delle serie storiche analizzate nel paragrafo 3.6.

Esempio 4.10. Consideriamo i *futures su gas naturale mensili Henry Hub* del mercato NYMEX, trattati nell'Esempio 3.46. Ogni giorno sono negoziati i contratti con consegne nei 36 mesi seguenti, quindi è possibile osservare i *futures gen-2013, feb-2013, mar-2013* dal 01-mar-2010 al 27-dic-2012. Assumendo l'ipotesi che il modello sia di tipo B1, nell'Esempio 3.46 abbiamo applicato la Function 5.8 per ottenere i parametri calibrati p^h relativi a questa commodity:

α_0^h	α_1^h	α_2^h	φ^h	λ^h	ρ^h
0.0147	0.0010	0.0067	6.2338	0.0019	0.8012

Ora calibriamo ξ^h e Π^h con il metodo proposto nel precedente paragrafo, risolvendo il problema di ottimizzazione (4.26) attraverso la Function 5.13. Si ottengono in questo modo il fattore centrante:

$$\hat{\xi}^h = (2.8695 \quad -2.6738 \quad 3.5108)^T$$

e la matrice di cointegrazione:

$$\hat{\Pi}^h = \begin{pmatrix} 7.2247 & 3.2843 & 0.8867 \\ 4.8955 & -34.2059 & 4.6420 \\ 4.0163 & 5.2434 & 13.0813 \end{pmatrix}$$

■

Verifichiamo la correttezza della stima di massima verosimiglianza descritta applicandola anche a prezzi simulati. Generiamo i dati osservati fissando come parametri quelli che caratterizzando il modello dell'Esempio 4.9.

Esempio 4.11. Supponiamo che siano osservati dal 01-gen-2010 al 31-dic-2012 i prezzi dei futures mensili *gen-2013, feb-2013, mar-2013* scritti su una fissata commodity. Definiamo un modello cointegrato di tipo B1 fissando i parametri p^h , ξ^h e Π^h come quelli dell'Esempio 4.9. Se chiediamo che i prezzi iniziali siano tutti uguali a 60 €/MWh, possiamo simulare i prezzi f osservati giornalmente nell'intervallo considerato applicando la Function 5.11.

Calibriamo adesso ξ^h e Π^h sull'osservazione f risolvendo il problema di ottimizzazione (4.26) attraverso la Function 5.13. Si ottengono in questo modo il fattore centrante:

$$\hat{\xi}^h = (0.0010 \quad 0.0110 \quad 0.0008)^T$$

e la matrice di cointegrazione:

$$\hat{\Pi}^h = \begin{pmatrix} 0.0002 & 0.0002 & 0.0002 \\ 0.0009 & -0.0020 & 0.0004 \\ 0.0002 & 0.0003 & -0.0003 \end{pmatrix}$$

Notiamo che l'errore relativo commesso dalla stima del fattore centrante è pari a $|\hat{\xi}^h - \xi^h|/|\xi^h| = 10.9814$, mentre quello commesso dalla stima della matrice di cointegrazione è $|\hat{\Pi}^h - \Pi^h|/|\Pi^h| = 0.8501$, dove abbiamo indicato con $|\cdot|$ la norma euclidea. Ripetendo 100 calibrazioni analoghe alla precedente si osserva come gli errori relativi medi siano rispettivamente 12.1375 e 0.9961.

Se aumentiamo l'ampiezza dell'intervallo di osservazione considerando prezzi dal 01-gen-2008 al 31-dic-2012, si osserva come l'errore relativo commesso dalle stime diminuisca. Ripetendo 100 calibrazione analoghe alle precedente, gli errori relativi medi ora sono rispettivamente 5.4292 e 0.7527. ■

Capitolo 5

Implementazione

In questo capitolo forniamo il codice MATLAB generato per implementare le tecniche descritte nei capitoli precedenti. Il primo paragrafo contiene le function utilizzate per analizzare i prezzi futures osservati, mentre i due successivi si occupano di mettere in atto la calibrazione dei modelli studiati rispettivamente nei capitoli 3 e 4. In diversi casi ometteremo alcuni dei dettagli non importanti del codice, per brevità. La versione di MATLAB utilizzata per testare le function è stata la R2012b su un processore Intel Core 2 con frequenza di clock 2.40 GHz.

5.1 Analisi di mercati energetici a termine empirici

Prima di iniziare a descrivere il codice, presentiamo la convenzione adottata per rappresentare i dati di mercato. Indichiamo i prezzi futures $f_i^h(t_l)$ sulla commodity h -esima osservati nelle $N + 1$ date t_0, \dots, t_N con consegne nei periodi J_1, \dots, J_m , attraverso una matrice $(N + 2) \times (m + 1)$. Nella prima riga poniamo le date iniziali dei periodi di consegna τ_1, \dots, τ_m , mentre nella prima colonna le date di osservazione t_0, \dots, t_N . L'elemento di indice $(l + 1, i + 1)$ sarà, dunque, il prezzo $f_i^h(t_l)$.

	τ_1	\dots	τ_m
t_0	$f_1^h(t_0)$	\dots	$f_m^h(t_0)$
t_1	$f_1^h(t_1)$	\dots	$f_m^h(t_1)$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
t_N	$f_1^h(t_N)$	\dots	$f_m^h(t_N)$

Nel codice, in seguito, faremo riferimento a questa matrice con l'array F .

Function 5.1 (`emp_plot`). Data la matrice dei prezzi, tracciamo i grafici. Per brevità, omettiamo parte dei dettagli.

```
1 % SINTASSI:  
  % emp_plot(F)  
  % emp_plot(F, i)  
  %  
  % INPUT:
```

5. IMPLEMENTAZIONE

```
6 % - F -> (N+2)x(m+1)-matrice dei prezzi futures
% - i -> Numero ordinale del mese di consegna
%
% OUTPUT:
% Traccia il grafico dei prezzi con consegna in J_i se i è fornito , altrimenti
11 % traccia i grafici dei prezzi futures su tutti i mesi di consegna
%

function emp_plot(F,varargin)

16 if nargin == 1
    % Grafico di tutti i prezzi futures
    figure , hold on
    font = 'Consolas';
    plot(F(2:end,1),F(2:end,2:end))
```

Function 5.2 (`emp_pca`). Data la matrice dei prezzi, ricaviamo la matrice dei log-rendimenti X , detta *matrice dei dati di mercato*, e tracciamo il grafico della percentuale di varianza spiegata da ciascuno dei fattori. Una volta individuati il numero dei fattori k che consentono di spiegare il 95% della varianza, grafichiamo i pesi di ciascuno di questi. Un esempio dell'output generato si trova in Figura 3.2.

```
% SINTASSI:
% T = emp_pca(F)
% T = emp_pca(F,1)
%
5 % INPUT:
% - F -> (N+2)x(m+1)-matrice dei prezzi futures
% - 1 -> Grafico 1: delle percentuali di varianza spiegate dai fattori e della
% percentuale di varianza cumulativa spiegata dai primi fattori; Grafico 2:
% Pesi dei fattori che consentono di spiegare il 95% della varianza totale
10 %
% OUTPUT:
% T -> mx3-matrice dove T(:,1) è la colonna con il numero del fattore ,
% T(:,2) è la colonna con le percentuali di varianza spiegate dai fattori p_i,
% T(:,3) è la colonna con la percentuale di varianza cumulativa spiegata dai
15 % primi fattori p^c_i.
%

function T = emp_pca(F,varargin)

20 N = size(F,1)-2;
m = size(F,2)-1;
X = diff(log(F(2:end,2:end)));

% Calcolo la matrice E dei pesi dei fattori e il vettore p delle percentuali
25 % di varianza spiegate dai fattori. Raccolgo i dati nella tabella T.
[E,~,~,p] = pca(X);
T = zeros(m,3);
T(:,1) = 1:m;
T(:,2) = p;
30 T(:,3) = cumsum(p);

if nargin == 2
    opt = cell2mat(varargin(1));
    if opt == 1
35 % Grafico della percentuale di varianza spiegata
```

```

figure, hold on
font='Consolas';
bar(p)
plot(1:m,cumsum(p), 'r-o')
40 p_legend = legend('Varianza spiegata', 'Varianza cumulativa spiegata');
set(p_legend, 'FontSize', 8)
plot(0:m+1, ones(m+2,1)*95, '—')
title(['Percentuale di varianza spiegata dai fattori'];...
45 ['Futures con consegne da ', datestr(F(1,2), 'mm-yyyy'), ' a ', ...
datestr(F(1,end), 'mm-yyyy')];...
['Osservazioni: dal ', datestr(F(2,1), 'dd-mm-yyyy'), ' al ', ...
datestr(F(N+2,1), 'dd-mm-yyyy'), ' (', num2str(N+1), ' osservazioni)']...
, 'FontName', font)
set(gca, 'FontName', font, 'XTick', 1:m, 'YGrid', 'on')
50 xlabel('Fattore (#)'), ylabel('Varianza spiegata (%)')

```

Function 5.3 (`s2fsingle`). Dati i prezzi futures di contratti con periodi di consegna mensili, trimestrali ed annuali, deriviamo i prezzi forward associati attraverso l'algoritmo di smoothing descritto nel paragrafo 3.5. Un esempio dell'output generato si trova in Figura 3.23.

```

% SINTASSI:
% p = s2fsingle(t,h,F)
% p = s2fsingle(t,h,F,1)
%
5 % INPUT:
% - t -> Data di osservazione dei prezzi futures
% - h -> 3-vettore con: h(1)/h(2)/h(3) numero di futures mensili/
% trimestrali/annuali osservati in t
% - F -> m-vettore dei prezzi futures osservati in t
10 % Se i=1,...,h(1), allora F(i) è il prezzo futures con periodo di consegna
% il mese successivo i-esimo del mese di t. Se i=1,...,h(2), allora F(h(1)+i)
% è il prezzo futures con periodo di consegna il trimestre successivo
% i-esimo del trimestre di t. Se i=1,...,h(3), allora F(h(1)+h(2)+i) è
% il prezzo futures con periodo di consegna l'anno successivo i-esimo
15 % dell'anno di t.
% - 1 -> grafici dei prezzi futures dati e dei prezzi forward dedotti
% attraverso l'algoritmo di smoothing
%
% OUTPUT:
20 % - p -> 5*q-vettore dei coefficienti dei polinomi della funzione
% dei prezzi forward, dove q è il numero degli intervalli della
% partizione associata ai periodi di consegna.
%
25 function p = s2fsingle(t,h,F,varargin)

    [T,tau] = settlementdays(t,h);
    % Unità di misura temporale: anni
    T = T/365; tau = tau/365;
30 q = length(tau)-1;
m = sum(h);

    % Costruisco la matrice H
    Delta = zeros(5,q);
35 for l=1:5
        for j=1:q

```

5. IMPLEMENTAZIONE

```

    Delta(1,j) = tau(j+1)^1-tau(j)^1;
end
end
40 H = zeros(5*q,5*q);
    for j=1:q
        H(5*j-4:5*j,5*j-4:5*j) = [144/5*Delta(5,j) 18*Delta(4,j) 8*Delta(3,j) 0 0;
            18*Delta(4,j) 12*Delta(3,j) 6*Delta(2,j) 0 0;
            8*Delta(3,j) 6*Delta(2,j) 4*Delta(1,j) 0 0
45         0 0 0 0 0;
            0 0 0 0 0];
    end

% Costruisco la matrice A
50 A = zeros(3*q+m-2,5*q);
    U = zeros(q-1,5);
    V = zeros(q-1,5);
    W = zeros(q-1,5);
    X = zeros(q,5);
55 for j=1:q-1
        U(j,:) = [tau(j+1)^4 tau(j+1)^3 tau(j+1)^2 tau(j+1) 1];
        V(j,:) = [4*tau(j+1)^3 3*tau(j+1)^2 2*tau(j+1) 1 0];
        W(j,:) = [12*tau(j+1)^2 6*tau(j+1) 2 0 0];
    end
60 for j=1:q
        X(j,:) = [Delta(5,j)/5 Delta(4,j)/4 Delta(3,j)/3 Delta(2,j)/2 Delta(1,j)];
    end
    z = [4*tau(q+1)^3 3*tau(q+1)^2 2*tau(q+1) 1 0];

65 for j=1:q-1
        A(j,5*j-4:5*j+5) = horzcat(-U(j,:),U(j,:));
        A(q-1+j,5*j-4:5*j+5) = horzcat(-V(j,:),V(j,:));
        A(2*q-2+j,5*j-4:5*j+5) = horzcat(-W(j,:),W(j,:));
    end
70 A(3*q-2,5*q-4:5*q) = z;

    for i=1:m
        for j=1:q
            if (T(i,1) < tau(j+1)) && (tau(j+1) <= T(i,2))
75                 A(3*q-2+i,5*j-4:5*j) = X(j,:);
            end
        end
    end

80 % Costruisco il vettore colonna b
    b = zeros(3*q+m-2,1);
    for i=1:m
        b(3*q-2+i) = (T(i,2)-T(i,1))*F(i);
        % si può aggiungere al membro di destra '-integral(fnz,T(i,1),T(i,2));' con
        % 'fnz' la funzione che rappresenta la stagionalità.
85    end

% Trovo p
% Alternativa 1: soluzione diretta
    y = [2*H A'; A zeros(3*q+m-2,3*q+m-2)]\[zeros(5*q,1); b];
90    p = y(1:5*q)';

% % Alternativa 2: decomposizione QR
% E = [2*H A'; A zeros(3*n+m-2,3*n+m-2)];
% g = [zeros(5*n,1); b];

```

```

95 % [Q,R] = qr(E);
% D = Q'*Q;
% y = inv(D)*(Q'*g);
% x = R\y;
% x = x(1:5*n)';

```

5.2 Calibrazione di mercati energetici a termine

Consideriamo il modello di MET di tipo 1 introdotto nella Definizione 3.12 e sviluppiamo gli strumenti necessari per studiarne le proprietà e calibrarlo sulle serie storiche dei prezzi futures. Le routine per i MET di tipo 2 si ottengono in modo analogo, con alcuni aggiustamenti minori, e per questo le omettiamo.

5.2.1 Proprietà elementari

Function 5.4 (`sim_1met`). Concentriamoci sui contratti scritti sulla commodity h -esima. La function genera, per ogni $i \in \underline{m}$, una traiettoria dei prezzi futures con consegna in J_i osservati nelle date della partizione equispaziata $\pi = (t_0, \dots, t_N)$ di $[T_0, T_1]$. La Figura 3.5 fornisce un esempio dei grafici generati.

```

1 % SINTASSI:
% F = sim_1met(T0,T1,N,tau,p,F0)
% F = sim_1met(T0,T1,N,tau,p,F0,i)
%
% INPUT:
6 % - T0 -> data di inizio osservazione
% - T1 -> data di fine osservazione
% - N -> numero di osservazioni
% - tau -> m-vettore delle date di inizio consegna
% - p=[alfa0, alfa1, alfa2, rho, phi, lambda] -> 6-vettore dei parametri calibrati
11 % - F0 -> m-vettore dei prezzi osservati in T0
% - i=0 -> Traccia i grafici dei futures
% - i>0 -> Traccia il grafico del futures con consegna in J_i
%
% OUTPUT:
16 % - F -> (N+2)x(m+1)-matrice dei prezzi futures
%

function F = sim_1met(T0,T1,N,tau,p,F0,varargin)

21 m = length(tau);

% Definisco i parametri del moto browniano geometrico (gbm)
dt = (T1-T0)/N;
T = (T0:dt:T1)';
26 rho = [1 p(4); p(4) 1];

% Genero il gbm
mu = @(t,F) zeros(m,1);
sigma = @(t,F) diag(F)*sim_1sigma(tau,p,t+T0);
31 SDE = sde(mu,sigma,'StartState',F0,'Correlation',rho);

% Eseguo un test del gbm
% rng(142857,'twister')
Y = SDE.simulate(N,'DeltaTime',dt,'nTrials',1);

```

5. IMPLEMENTAZIONE

```
36 % Costruisco la matrice output
F = zeros(N+2,m+1);
F(1,2:end) = tau;
F(2:end,1) = T;
41 F(2:end,2:end) = Y(:, :, 1);

if nargin == 7
    opt = cell2mat(varargin(1));
    if opt == 0
46     emp_plot(F);
    else
        emp_plot(F, opt);
    end
51 end
end
```

Nella precedente, abbiamo utilizzato il generatore di MATLAB per processi di Itô sde, che richiede il calcolo delle componenti della volatilità $\sigma_{i1}^h, \sigma_{i2}^h$. Ciò è stato svolto separatamente in `sim_1sigma`. Sarà possibile utilizzare `sim_1met` per simulare i prezzi di mercati del secondo tipo modificando la riga 25 di questa routine aggiungendo, nel coseno, la dipendenza da t .

```
% SINTASSI:
% sigmat = sim_1sigma(tau,p,t)
3 %
% INPUT:
% - tau -> m-vettore delle date di inizio della consegna
% - p=[alfa0, alfa1, alfa2, rho, phi, lambda] -> 6-vettore dei parametri calibrati
% - t -> data nell'intervallo [T_0, T_1]
8 %
% OUTPUT:
% - sigmat -> mx2-matrice dei valori di
% sigma=(sigma_{i,1}, sigma_{i,2})_{i=1,...,m} in t
%
13 function sigmat = sim_1sigma(tau,p,t)

    m = length(tau);

18    alfa0 = p(1); alfa1 = p(2); alfa2 = p(3);
    phi = p(5); lambda = p(6);

    % Calcolo sigma in t
    sigmat = zeros(m,2);
    omega = 2*pi/365;
23    for i=1:m
        sigmat(i,:) = [(alfa0+alfa1.*cos(omega.*tau(i)+phi)).*exp(-lambda.*...
            (tau(i)-t)), alfa2];
    end
28 end
```

Function 5.5 (`met_1vol`). La Proposizione 3.19 descrive la dipendenza della volatilità dei log-rendimenti dalla data di osservazione. Il codice genera i grafici delle

funzioni $t_i \mapsto \text{Vol}_a^P(\Delta X_i^h(t_i))$ per ogni $i \in \underline{m}$. Un esempio dell'output si trova in Figura 3.6.

```

1 % SINTASSI:
% V = met_1vol(F,p)
% V = met_1vol(F,p,1)
%
% INPUT:
6 % - F -> (N+2)x(m+1)-matrice dei prezzi futures
% - p=[alfa0, alfa1, alfa2, rho, phi, lambda] -> 6-vettore dei parametri calibrati
% - 1 -> grafico della volatilità annualizzata (data di osservazione vs
% volatilità)
%
11 % OUTPUT:
% - vol -> Nxm-matrice delle volatilità annualizzate dei logrendimenti;
% vol(l,i) volatilità annualizzata della vc logrendimento del futures con
% consegna in J_i nel giorno t_l.
%
16 function vol = met_1vol(F,p,varargin)

    N = size(F,1)-2;
    m = size(F,2)-1;

21    alfa0 = p(1); alfa1 = p(2); alfa2 = p(3); rho = p(4);
    phi = p(5); lambda = p(6); y = p(5:6);

    % Alternativa 1: Calcolo la varianza dei logrendimenti con la formula
26 % per la covariazione quadratica
%   var = zeros(N,m);
%   for l=1:N
%       t0 = F(l+1,1); t1 = F(l+2,1);
%       [a,b,c,d,e,f,~] = met_1vol1(F,y,t0,t1);
31 %       for i=1:m
%           var(l,i) = a(i,i)*alfa0^2+b(i,i)*alfa1^2+c(i,i)*alfa2^2+d(i,i)*...
%                   alfa0*alfa1+(e(i,i)*alfa0*alfa2+f(i,i)*alfa1*alfa2)*rho;
%       end
%   end

36 % Alternativa 2: Calcolo la varianza dei logrendimenti con l'espressione
% dimostrata
var = zeros(N,m);
for l=1:N
41    t0 = F(l+1,1); t1 = F(l+2,1);
    epsilon = t1-t0;
    omega = 2*pi/365;
    for i=1:m
46        tau_i = F(1,i+1);
        u_i = (( alfa0+alfa1*cos(omega*tau_i+phi) )^2)*(1-exp(-2*lambda*epsilon))/...
            (2*lambda);
        v_i = ( alfa0+alfa1*cos(omega*tau_i+phi) )*2*rho*alfa2*(1-exp(-lambda*...
            epsilon))/lambda;
        w_i = epsilon*alfa2^2;
51        var(l,i) = u_i*exp(-2*lambda*(tau_i-t1))+v_i*exp(-lambda*(tau_i-t1))+w_i;
    end
end

% Calcolo la volatilità annualizzata dei logrendimenti
56 vol = sqrt(var)*sqrt(252)*100;

```

```

if nargin == 3
    opt = cell2mat(varargin(1));

```

Function 5.6 (`met_1ter`). Utilizzando ancora la Proposizione 3.19, la routine genera la struttura a termine della volatilità in una data specifica t dell'intervallo di osservazione, ovvero il grafico della funzione $\tau_i - t \mapsto \text{Vol}_a^P(\Delta X_i^h(t))$ definita sull'insieme $\{\tau_i - t\}_{i \in m}$ contenente i TTD in t rispetto agli m futures. Un esempio dell'output si trova in Figura 3.8.

```

1 % SINTASSI:
  % avol = met_1ter(F,t,p)
  % avol = met_1ter(F,t,p,1)
  %
  % INPUT:
6  % - F -> (N+2)x(m+1)-matrice dei prezzi futures
  % - t -> data di osservazione (viene calcolata la struttura a termine
  % nel primo giorno lavorativo uguale o successivo a t)
  % - p=[alfa0, alfa1, alfa2, rho, phi, lambda] -> 6-vettore dei parametri del modello
  % - 1 -> grafico delle volatilità annualizzate (TTD vs volatilità)
  %
11 % OUTPUT:
  % - avol -> m-vettore delle volatilità annualizzate ANALITICHE
  % dei logrendimenti in t relativi ai futures con consegna in J_1, ..., J_m
  %
16
function avol = met_1ter(F,t,p,varargin)

  l = find(F(2:end,1)>=t,1)+1;
  if l == 2
21     error(['Non è definito il log-rendimento in ',datestr(F(1,1))])
  end
  vol = met_1vol(F,p);
  avol = vol(l-2,:);
  % Unità di misura temporale: giorni
26 %   udm = '(giorni)';
  %   tau = (F(1,2:end)-t)';
  % Unità di misura temporale: anni
  udm = '(anni)';
  tau = ((F(1,2:end)-t)/365)';
31
  if nargin == 4
    opt = cell2mat(varargin(1));
    if opt == 1
36       figure, hold on
        font = 'Consolas';
        plot(tau,avol,'x-')

```

Function 5.7 (`sim_met`). La routine 5.4 simula i prezzi dei futures scritti su una particolare commodity del modello. Passiamo a considerare il caso generale, introducendo $2n$ moti browniani correlati con cui generare i prezzi futures su n commodity energetiche. Ora indicheremo con F l'array MATLAB $(N+2) \times (m+1) \times n$ tale che, per ogni $h \in \underline{n}$, la matrice $F(:, :, h)$ contiene i prezzi relativi alla commodity h -esima.

```

% SINTASSI:
% F = sim_met(T0,T1,N,tau,p,F0)
3 % F = sim_met(T0,T1,N,tau,p,F0,0)
%
% INPUT:
% - T0 -> data di inizio osservazione
% - T1 -> data di fine osservazione
8 % - N -> numero di osservazioni
% - tau -> m-vettore delle date di inizio consegna
% - p -> nx6-matrice dei parametri delle n commodity con
% p(h,:)=[alfa0, alfa1, alfa2, rho, phi, lambda]
% - rho -> (2*n)x(2*n)-matrice dei coefficienti di correlazione tra i fattori
13 % di rischio
% - F0 -> nxm-vettore dei prezzi osservati in T0
% - 0 -> Traccia i grafici dei futures
%
% OUTPUT:
18 % - F -> (N+2)x(m+1)xn-ipermatrice dei prezzi futures sulle n commodity
%

function F = sim_met(T0,T1,N,tau,p,rho,F0,varargin)

23 m = length(tau);
n = size(p,1);

% Definisco i parametri del moto browniano geometrico (gbm)
dt = (T1-T0)/N; % Durata tra un'osservazione e la successiva
28 T = (T0:dt:T1)'; % Date di osservazione

% Riordino i prezzi osservati in T0
F0 = F0';
F0 = F0(:);

33 % Genero il gbm
mu = @(t,F) zeros(n*m,1);
sigma = @(t,F) diag(F)*sim_sigma(tau,p,t+T0);
SDE = sde(mu,sigma,'StartState',F0,'Correlation',rho);

38 % Eseguo un test del gbm, genero la (N+1)x(n*m)x1-matrice Y
%rng('default')
Y = SDE.simulate(N,'DeltaTime',dt,'nTrials',1);

43 % Riordino i prezzi simulati
F = zeros(N+2,m+1,n);
for h=1:n
    F(1,2:end,h) = tau;
    F(2:end,1,h) = T;
48    F(2:end,2:end,h) = Y(:,(h-1)*m+1:(h-1)*m+m);
end

```

Anche in questo caso, il codice si basa sulle funzioni che restituiscono le componenti della volatilità ed il compito è svolto dalla seguente:

```

% SINTASSI:
% sigmat = sim_sigma(tau,p,t)
%
% INPUT:
5 % - tau -> m-vettore delle date di inizio della consegna
% - p -> nx6-matrice dei parametri delle n commodity con

```

5. IMPLEMENTAZIONE

```
% p(h,:)=[alfa0, alfa1, alfa2, rho, phi, lambda]
% - t -> data nell'intervallo [T_0, T_1]
%
10 % OUTPUT:
% - sigmat -> (n*m)x(2*n)-matrice a blocchi diagonale associata alle
% matrici mx2 con i valori in t della funzione
% sigma^h = (sigma^h_{i1}, sigma^h_{i2})_{i=1,...,m}
%
15
function sigmat = sim_sigma(tau, p, t)

    n = size(p,1);
    m = length(tau);

20    sigmat = zeros(n*m,2*n);
    for h=1:n
        ph = p(h,:);
        sigmat((h-1)*m+1:(h-1)*m+m,2*h-1:2*h) = sim_1sigma(tau, ph, t);
25    end

end
```

5.2.2 Calibrazione

Descriviamo le due routine `cal_h` e `cal_r` con le quali abbiamo implementato le tecniche di identificazione dei parametri relativi ad una singola commodity ed alla matrice di correlazione.

Function 5.8 (`cal_h`). Il metodo per la calibrazione di $p^h = (\alpha_0^h, \alpha_1^h, \alpha_2^h, \rho^h, \varphi^h, \lambda^h)$ si basa sulla minimizzazione 3.26. La function `cal_h1` calcola i coefficienti a_{ij}, \dots, f_{ij} della Definizione 3.14 e le covariazioni quadratiche empiriche, mentre `cal_h2a` fornisce la funzione da minimizzare. Ricordo che questa è una somma di quadrati, quindi per risolvere il problema di ottimizzazione è possibile sfruttare, in alternativa ad `fmincon`, la function `lsqnonlin`. A questo scopo, però, dobbiamo introdurre anche `cal_h2b`, che restituisce i residui Ψ_{ij}^h associati alla stima ai minimi quadrati. Per finire, in `cal_h` utilizziamo l'algoritmo `MultiStart` per ottenere un punto di minimo globale attraverso l'applicazione ripetuta di `lsqnonlin` od, eventualmente, `fmincon`. Possiamo calibrare modelli del secondo tipo usando ancora `cal_h`, ma in questo caso si dovrà modificare la function `cal_h1` in modo che calcoli i coefficienti a_{ij}, \dots, f_{ij} della Definizione 3.34.

```
% SINTASSI:
% [p,minG] = cal_h(F)
3 %
% INPUT:
% - F -> (N+2)x(m+1)-matrice dei prezzi futures
%
% OUTPUT:
8 % - p=[alfa0, alfa1, alfa2, rho, phi, lambda] -> 6-vettore dei parametri calibrati
% - minG -> valore della funzione minimizzata p -> G(p)
%
function [p,minG] = cal_h(F)
13
```

5.2. Calibrazione di mercati energetici a termine

```

t = tic;
% Pto di partenza dell' algoritmo di minimizzazione
alfa0 = .0010;
alfa1 = .0150;
18 phi = 1/4*pi;
lambda = 0.60/365;
alfa2 = .0030;
rho = .20;
p0 = [ alfa0 , alfa1 , alfa2 , rho , phi , lambda ];
23 lb = [-inf; -inf; -inf; -1; -inf; 0]; % Estremi inferiori
ub = [inf; inf; inf; 1; inf; inf]; % Estremi superiori

% Minimizzo la somma dei quadrati delle funzioni in cal_h2b
Psi = @(p)cal_h2b(F,p); % Funzione da minimizzare
28

options = optimset('Display','off', ... % Display: on, off (default), iter
'MaxIter',5000, ... % Default: 400
'MaxFunEvals',5000, ... % Default: 700
'Algorithm','trust-region-reflective', ... % Algorithm: trust-region-
reflective , levenberg-marquardt
33 'TolFun',1e-12, ... % Default: 1e-6
'TolX',1e-12); % Default: 1e-9

ms = MultiStart('Display','iter', ... % Display: final, iter, off
'PlotFcns',[], ... % PlotFcns: [] (default),
@gplotbestf, @gplotfunccount
38 'TolFun',1e-6, ... % Default: 1e-6
'TolX',1e-6); % Default: 1e-6

problem = createOptimProblem('lsqnonlin','objective',Psi,'x0',p0, ...
'lb',lb,'ub',ub,'options',options);
43 [p,minG] = run(ms,problem,100);
p(5) = mod(p(5),2*pi);
toc(t)

end

```

```

% SINTASSI:
% [a,b,c,d,e,f,cv] = cal_h1(F,y)
3 %
% INPUT:
% - F -> (N+2)x(m+1)-matrice dei prezzi futures
% - y=[phi,lambda] -> 2-vettore dei parametri
%
8 % OUTPUT:
% - a -> mxm-matrice dei coefficienti di alfa0
% - b -> mxm-matrice dei coefficienti di alfa1
% - c -> mxm-matrice dei coefficienti di alfa2
% - d -> mxm-matrice dei coefficienti di alfa0*alfa1
13 % - e -> mxm-matrice dei coefficienti di rho*alfa0*alfa2
% - f -> mxm-matrice dei coefficienti di rho*alfa1*alfa2
% - cv -> mxm-matrice delle covariazioni quadratiche dei logprezzi
%

18 function [a,b,c,d,e,f,cv] = cal_h1(F,y)

    phi = y(1); lambda = y(2);

    % Definisco le date di inizio delle consegne tau_1,...,tau_m

```

5. IMPLEMENTAZIONE

```
23 T0 = F(2,1); T1 = F(end,1);
    tau = F(1,2:end);
    m = length(tau);
    [tauj,taui] = meshgrid(tau,tau);

28 % Definisco i coefficienti  $G^{i,j}_s(T_r)$  con le matrici  $G_{s_r}(i,j)$ 
    omega = 2*pi/365; % Unità di misura temporale = giorno

    % Valutazione in T_0
    G1_0 = exp(-lambda*(taui-T0))/lambda;
33 G2_0 = exp(-lambda*(tauj-T0))/lambda;
    G3_0 = exp(-lambda*(taui+tauj-2*T0))/(2*lambda);

    % Valutazione in T_1
    G1_1 = exp(-lambda*(taui-T1))/lambda;
38 G2_1 = exp(-lambda*(tauj-T1))/lambda;
    G3_1 = exp(-lambda*(taui+tauj-2*T1))/(2*lambda);

    % Definisco i coefficienti a,b,c,u,v,z
    a = G3_1-G3_0;
43 b = cos(omega*taui+phi).*cos(omega*tauj+phi).*(G3_1-G3_0);
    c = (T1-T0)*ones(m,m);
    d = (cos(omega*taui+phi)+cos(omega*tauj+phi)).*(G3_1-G3_0);
    e = G1_1-G1_0+G2_1-G2_0;
48 f = cos(omega*taui+phi).*(G1_1-G1_0)+cos(omega*tauj+phi).*(G2_1-G2_0);

    % Definisco le covariazioni quadratiche empiriche
    X = diff(log(F(2:end,2:end)));
    cv = zeros(m,m);
53 for i=1:m
        for j=1:m
            cv(i,j) = sum(X(:,i).*X(:,j));
        end
    end
58 end
```

```
1 % SINTASSI:
    % G = cal_h2a(F,p)
    %
    % INPUT:
    % - F -> (N+2)x(m+1)-matrice dei prezzi futures
6 % - p=[alfa0, alfa1, alfa2, rho, phi, lambda] -> 6-vettore dei parametri
    %
    % OUTPUT:
    % - G -> valore della funzione  $p \rightarrow G(p)$  da minimizzare
    %
11 function G = cal_h2a(F,p)

    alfa0 = p(1); alfa1 = p(2); alfa2 = p(3); rho = p(4);
    y = p(5:6);
16 [a,b,c,d,e,f,cv] = cal_h1(F,y);

    G = sum(sum((a*alfa0^2+b*alfa1^2+c*alfa2^2+d*alfa0*alfa1+...
        e*rho*alfa0*alfa2+f*rho*alfa1*alfa2-cv).^2));
21 end
```

```

% SINTASSI:
% G = cal_h2b(F,p)
%
4 % INPUT:
% - F -> (N+2)x(m+1)-matrice dei prezzi futures
% - p=[alfa0 , alfa1 , alfa2 , rho , phi , lambda] -> 6-vettore dei parametri
%
% OUTPUT:
9 % - Psi -> residui della stima ai minimi quadrati
%

function Psi = cal_h2b(F,p)

14   alfa0 = p(1); alfa1 = p(2); alfa2 = p(3); rho = p(4);
      y = p(5:6);
      [a,b,c,d,e,f,cv] = cal_h1(F,y);

      Psi = a*alfa0^2+b*alfa1^2+c*alfa2^2+d*alfa0*alfa1+e*rho*alfa0*alfa2+...
19      f*rho*alfa1*alfa2-cv;

end

```

Function 5.9 (`cal_r`). Occupiamoci di calibrare ρ , la matrice di correlazione dei fattori di rischio del modello. La function `cal_r1` calcola i coefficienti A_{ij}^{hk} , B_{ij}^{hk} , C_{ij}^{hk} , D_{ij}^{hk} della Definizione 3.16 e le covariazioni quadratiche empiriche, mentre `cal_r2` e `cal_r3` hanno lo scopo di definire la distanza di $\Gamma(W)$ da $cv(\pi)$, la funzione che deve essere minimizzata. In `cal_r3vin` sono rappresentati i vincoli quadratici del problema di ottimizzazione (3.33), mentre `cal_r` utilizza l'algoritmo `GlobalSearch` per trovare un punto di minimo globale tramite l'applicazione ripetuta di `fmincon`. La variabile W della funzione da minimizzare è una matrice triangolare inferiore. Per poter applicare `fmincon`, questa viene linearizzata per colonne, eliminando nel contempo gli elementi nulli al di sopra della diagonale, attraverso la function `trilinv`. Se consideriamo modelli del secondo tipo, la calibrazione può ancora essere condotta attraverso `cal_h`, ma modificando la function `cal_r1` in modo che fornisca i coefficienti A_{ij}^{hk} , B_{ij}^{hk} , C_{ij}^{hk} , D_{ij}^{hk} della Definizione 3.36.

```

% SINTASSI:
% rho = cal_r(F,p)
%
4 % INPUT:
% - F -> (N+2)x(m+1)xn-ipermatrice dei prezzi futures di n commodity
% - p -> nx6-matrice dei parametri delle n commodity con
% p(h,:)=[alfa0 , alfa1 , alfa2 , rho , phi , lambda]
%
9 % OUTPUT:
% - rho -> 2nx2n-matrice dei coefficienti di correlazione
% - minH -> valore della funzione da minimizzare w -> H(w)
%

14 function [rho,minH] = cal_r(F,p)

      t=tic;
      n = size(F,3);
      m = size(F,2)-1;

```

5. IMPLEMENTAZIONE

```

19 % Raccolgo i coefficienti di correlazione tra i due fattori di rischio
% di una singola commodity in rhoh
rhoh = p(:,4);

% Calcolo i parametri per definire la funzione da minimizzare cal_r3
24 A = ones(m,m,n,n);
B = ones(m,m,n,n);
C = ones(m,m,n,n);
D = ones(m,m,n,n);
cv = ones(m,m,n,n);

29 for h=1:n
    for k=1:n
        [A(:, :, h,k),B(:, :, h,k),C(:, :, h,k),D(:, :, h,k),cv(:, :, h,k)] = ...
34         cal_r1(F(:, :, h),F(:, :, k),p(h,:),p(k,:));
    end
end

% Pto di partenza del problema di ottimizzazione
39 w0 = ones(n*(2*n+1),1)*.5

% Minimizzo la funzione cal_r3 con vincoli in cal_r3vin
G = @(w)cal_r3(F,A,B,C,D,cv,w); % Funzione da minimizzare
Gvin = @(w)cal_r3vin(F,rhoh,w); % Vincoli non lineari

44 options = optimset('Display','off', ... % Display: on, off, iter
                    'MaxFunEvals',10000, ... % Default: 1000
                    'Algorithm','active-set', ... % Algorithm: active-set,
                    'trust-region-reflective','interior-point
                    'TolFun',1e-9, ... % Default: 1e-6
                    'TolX',1e-16, ... % Default: 1e-6
49                    'TolCon',1e-12 ... % Default: 1e-6
                    );

gs = GlobalSearch('Display','iter', ... % Display: final, iter, off
                 'NumTrialPoints',1000, ... % Default: 1000
                 'PlotFcns',[], ... % PlotFcns: [] (default),
54                 @gsplotbestf, @gsplotfunccount
                 'TolFun',1e-9, ... % Default: 1e-6
                 'TolX',1e-9 ... % Default: 1e-6
                 );
problem = createOptimProblem('fmincon','objective',G,'x0',w0,'nonlcon',Gvin,'
options',options);
59 [w,minH] = run(gs,problem); % Ottimizzazione

W = trilinv(w,2*n);
rho = W*W';
64 toc(t)
end

```

```

% SINTASSI:
% [A,B,C,D,cv] = cal_r1(F1,F2,p1,p2)
%
% INPUT:
5 % - F1 -> (N+2)x(m+1)-matrice dei prezzi futures della commodity 1
% - F2 -> (N+2)x(m+1)-matrice dei prezzi futures della commodity 2
% - p1=[alfa10, alfa11, alfa12, rho1, phi1, lambda1] -> 6-vettore dei parametri
% della commodity 1

```

```

% - p2=[ alfa20 , alfa21 , alfa22 , rho2 , phi2 , lambda2] -> 6-vettore dei parametri
10 % della commodity 2
%
% OUTPUT:
% - A -> mxm-matrice dei coefficienti di rho11
% - B -> mxm-matrice dei coefficienti di rho12
15 % - C -> mxm-matrice dei coefficienti di rho21
% - D -> mxm-matrice dei coefficienti di rho22
% - cv -> mxm-matrice delle covariazioni quadratiche dei logprezzi
%

20 function [A,B,C,D,cv] = cal_r1(F1,F2,p1,p2)

    T0 = F1(2,1); T1 = F1(end,1);
    m = size(F1,2)-1;
    tau = F1(1,2:end);
25 [tauj,taui] = meshgrid(tau,tau);

    % Parametri della commodity 1
    alfa10 = p1(1); alfa11 = p1(2); alfa12 = p1(3);
    phi1 = p1(5); lambda1 = p1(6);
30

    % Parametri della commodity 2
    alfa20 = p2(1); alfa21 = p2(2); alfa22 = p2(3);
    phi2 = p2(5); lambda2 = p2(6);

35 % Definisco i coefficienti  $G^{\{h,k,i,j\}}_{\{s\}}(T_r)$  con le matrici  $G_{s_r}(i,j)$ 
    omega = 2*pi/365; % Unità di misura temporale = giorno

    % Valutazione in T_0
40 G1_0 = exp(-lambda1*(taui-T0))/lambda1;
    G2_0 = exp(-lambda2*(tauj-T0))/lambda2;
    G3_0 = exp(-lambda1*(taui-T0)-lambda2*(tauj-T0))/(lambda1+lambda2);

    % Valutazione in T_1
45 G1_1 = exp(-lambda1*(taui-T1))/lambda1;
    G2_1 = exp(-lambda2*(tauj-T1))/lambda2;
    G3_1 = exp(-lambda1*(taui-T1)-lambda2*(tauj-T1))/(lambda1+lambda2);

    % Definisco i coefficienti a,b,c,u,v,z
50 A = ( alfa10+alfa11*cos(omega*taui+phi1) ).*( alfa20+alfa21 *...
    cos(omega*tauj+phi2) ).*( G3_1-G3_0 );
    B = alfa22*( alfa10+alfa11*cos(omega*taui+phi1) ).*( G1_1-G1_0 );
    C = alfa12*( alfa20+alfa21*cos(omega*tauj+phi2) ).*( G2_1-G2_0 );
    D = alfa12*alfa22*(T1-T0)*ones(m,m);

55 % Definisco le covariazioni quadratiche empiriche
    X1 = diff(log(F1(2:end,2:end)));
    X2 = diff(log(F2(2:end,2:end)));
    cv = zeros(m,m);
    for i=1:m
60     for j=1:m
        cv(i,j) = sum(X1(:,i).*X2(:,j));
    end
    end

65 end

```

```
% SINTASSI:
```

5. IMPLEMENTAZIONE

```
% G = cal_r2(F,A,B,C,D,cv,rho)
%
% INPUT:
5 % - F -> (N+2)x(m+1)xn-ipermatrice dei prezzi futures di n commodity
% - A -> mxmxnxn-ipermatrice dei coefficienti di rho11hk
% - B -> mxmxnxn-ipermatrice dei coefficienti di rho12hk
% - C -> mxmxnxn-ipermatrice dei coefficienti di rho21hk
% - D -> mxmxnxn-ipermatrice dei coefficienti di rho22hk
10 % - cv -> mxmxnxn-ipermatrice delle covariazioni quadratiche dei logprezzi
% - rho -> 2nx2n-matrice dei coefficienti di correlazione
%
% OUTPUT:
% - G -> valore della funzione ausiliaria rho->G(rho)
15 %

function G = cal_r2(F,A,B,C,D,cv,rho)

    n = size(F,3);
    m = size(F,2)-1;
    % Definisco la funzione y=G(rho)
    G = 0;
    for h=1:n
        for k=1:n
25         % Calcolo i coefficienti di rhoab e le covariazioni quadratiche
            Ahk = A(:, :, h, k);
            Bhk = B(:, :, h, k);
            Chk = C(:, :, h, k);
            Dhk = D(:, :, h, k);
30         cvhk = cv(:, :, h, k);
            % Sommo
            for i=1:m
                for j=1:m
35                 G = G+(Ahk(i, j)*rho(2*h-1,2*k-1)+Bhk(i, j)*rho(2*h-1,2*k)+Chk(i, j)...
                    *rho(2*h,2*k-1)+Dhk(i, j)*rho(2*h,2*k)-cvhk(i, j))^2;
                end
            end
        end
    end
    G = sqrt(G);
40
end
```

```
% SINTASSI:
% H = cal_r3(F,A,B,C,D,cv,w)
3 %
% INPUT:
% - F -> (N+2)x(m+1)xn-ipermatrice dei prezzi futures di n commodity
% - A -> mxmxnxn-ipermatrice dei coefficienti di rho11hk
% - B -> mxmxnxn-ipermatrice dei coefficienti di rho12hk
8 % - C -> mxmxnxn-ipermatrice dei coefficienti di rho21hk
% - D -> mxmxnxn-ipermatrice dei coefficienti di rho22hk
% - cv -> mxmxnxn-ipermatrice delle covariazioni quadratiche dei logprezzi
% - w -> n(2n+1)-vettore argomento della funzione da minimizzare
%
13 % OUTPUT:
% - H -> valore della funzione da minimizzare w->H(w)=G(trilinv(w)*trilinv(w)')
%

function H = cal_r3(F,A,B,C,D,cv,w)
```

```

18     n = size(F,3);
        % Matrice triangolare inferiore di cui w è la linearizzazione
        W = trlinv(w,2*n);
        % Valore della funzione z=G(w)
23     H = cal_r2(F,A,B,C,D,cv,W*W);

end

% SINTASSI:
% [c,ceq] = cal_r3vin(F,rhoh,w)
%
% INPUT:
5  % - F -> (N+2)x(m+1)xn-ipermatrice dei prezzi futures di n commodity
    % - rhoh -> n-vettore dei coefficienti di correlazione tra i fattori di rischio
    % della singola commodity
    % - w -> n(2n+1)-vettore argomento della funzione da minimizzare
    %
10 % OUTPUT:
    % - c -> Vincoli di disuguaglianza non lineari (c<=0)
    % - ceq -> Vincoli di uguaglianza non lineari (ceq=0)
    %
15 function [c,ceq] = cal_r3vin(F,rhoh,w)

    n = size(F,3);
    W = trlinv(w,2*n);
    % Vincoli di disuguaglianza non lineari (c<=0)
20    c=[];
    % Vincoli di uguaglianza non lineari (ceq=0)
    ceq = zeros(3*n,1);
    for l=1:2*n
        ceq(l) = norm(W(l,:))^2-1;
25    end
    for l=1:n
        ceq(2*n+1) = W(2*l-1,:)*W(2*l,:)'-rhoh(l);
    end
30 end

```

5.3 Calibrazione di mercati energetici a termine cointegrati

Consideriamo il modello di MET cointegrati introdotti nelle Definizioni 4.1, 4.6, occupandoci di implementare un simulatore delle traiettorie dei prezzi futures ed i metodi di calibrazione che sviluppati nel capitolo 4. Ci concentriamo soltanto sui modelli di tipo A1 e B1, poiché le function per quelli di tipo A2 e B2 si ottengono con modifiche minori.

5.3.1 Traiettorie

Definiamo le function con cui abbiamo generato le traiettorie dei prezzi di MET di tipo A1 e B1.

Function 5.10 (`sim_met`). Siano dati i parametri $\{p^h\}_{h \in \underline{n}}$, ρ , ξ e Π di un MET di tipo A1. Generiamo, per ogni $h \in \underline{n}$ ed $i \in \underline{m}$, una traiettoria dei prezzi futures

5. IMPLEMENTAZIONE

sulla commodity h -esima con consegna in J_i osservati nelle date della partizione equispaziata $\pi = (t_0, \dots, t_N)$ di $[T_0, T_1]$. La function, inoltre, restituisce i valori corrispondenti ai prezzi osservati dei moti browniani neutrali al rischio. La Figura 4.1 fornisce un esempio dei grafici generati.

```
% SINTASSI:
% F = sim_met(T0,T1,N,tau,p,rho,xi,Pi,F0)
% F = sim_met(T0,T1,N,tau,p,rho,xi,Pi,F0,0)
%
5 % INPUT:
% - T0 -> data di inizio osservazione
% - T1 -> data di fine osservazione
% - N -> numero di osservazioni
% - tau -> m-vettore delle date di inizio consegna
10 % - p -> nx6-matrice dei parametri delle n commodity con
% p(h,:)=[alfa0, alfa1, alfa2, rho, phi, lambda]
% - rho -> (2*n)x(2*n)-matrice dei coefficienti di correlazione tra i fattori
% di rischio
% - xi -> 2nx1-vettore del fattore centrante
15 % - Pi -> 2nx2n-matrice di cointegrazione
% - F0 -> nxm-vettore dei prezzi osservati in T0
% - 0 -> Traccia i grafici dei futures
%
% OUTPUT:
20 % - F -> (N+2)x(m+1)xn-ipermatrice dei prezzi futures sulle n commodity
% - W -> 2nx(N+1)-matrice dei valori dei moti browniani rispetto alla
% misura neutrale al rischio
%
25 function [F,W] = sim_met(T0,T1,N,tau,p,rho,xi,Pi,F0,varargin)

    m = length(tau);
    n = size(p,1);

30 % Definisco i parametri del moto browniano geometrico (gbm)
    dt = (T1-T0)/N; % Durata tra un'osservazione e la successiva
    T = (T0:dt:T1)'; % Date di osservazione

% Utilizziamo G=(F',W')' -> (nm+2n)x1-vettore dove F è l'nmx1-vettore che si
35 % ottiene linearizzando per righe la (nxm)-matrice dei prezzi futures e
% W è il 2nx1-vettore dei moti browniani rispetto alla misura neutrale
% al rischio.
% Riordino i prezzi osservati in T0
    F0 = F0';
40 % F0 = F0(:);
    G0 = [F0; zeros(2*n,1)];

% Genero il gbm
    mu = @(t,G) [diag(G(1:n*m)) zeros(n*m,2*n); zeros(2*n,n*m) eye(2*n)]*...
45 % [sim_sigma(tau,p,t+T0); eye(2*n)]*(xi+Pi*G(n*m+1:end));
    sigma = @(t,G) [diag(G(1:n*m)) zeros(n*m,2*n); zeros(2*n,n*m) eye(2*n)]*...
% [sim_sigma(tau,p,t+T0); eye(2*n)];
    SDE = sde(mu,sigma,'StartState',G0,'Correlation',rho);

50 % Eseguo un test del gbm, genero la (N+1)x(nm+2n)x1-matrice Y
%rng('default')
    Y = SDE.simulate(N,'DeltaTime',dt,'nTrials',1);
```

```

55 % Riordino i prezzi simulati
F = zeros(N+2,m+1,n);
for h=1:n
    F(1,2:end,h) = tau;
    F(2:end,1,h) = T;
    F(2:end,2:end,h) = Y(:,(h-1)*m+1:(h-1)*m+m);
60 end

% Riordino i valori assunti dai moti browniani rispetto alla misura
% neutrale al rischio
W = Y(:,n*m+1:end)';

```

Nella precedente, per definire il processo F tramite il generatore di MATLAB `sde` abbiamo sfruttato `sim_sigma`, già definita nella Function 5.7.

Vediamo ora la function che genera le traiettorie dei futures scritti su una fissata commodity di un MET di tipo B1.

Function 5.11 (`sim_1met`). Siano dati i parametri p^h , ξ^h e Π^h relativi alla commodity h -esima di un MET di tipo B1. Generiamo, per ogni $i \in \underline{m}$, una traiettoria dei prezzi futures sulla commodity h -esima con consegna in J_i osservati nelle date della partizione equispaziata $\pi = (t_0, \dots, t_N)$ di $[T_0, T_1]$. La Figura 4.2 fornisce un esempio dei grafici generati.

```

% SINTASSI:
% F = sim_1met(T0,T1,N,tau,p,xi,Pi,F0)
% F = sim_1met(T0,T1,N,tau,p,xi,Pi,F0,0)
%
5 % INPUT:
% - T0 -> data di inizio osservazione
% - T1 -> data di fine osservazione
% - N -> numero di osservazioni
% - tau -> 1xm-vettore delle date di inizio consegna
10 % - p=[alfa0,alfa1,alfa2,rho,phi,lambda] -> 6-vettore dei parametri della
% commodity
% - xi -> mx1-vettore del fattore centrante
% - Pi -> mxm-matrice di cointegrazione
% - F0 -> mx1-vettore dei prezzi osservati in T0
15 % - 0 -> Traccia i grafici dei futures
%
% OUTPUT:
% - F -> (N+2)x(m+1)-matrice dei prezzi futures
%
20
function F = sim_1met(T0,T1,N,tau,p,xi,Pi,F0,varargin)

    m = length(tau);

25 % Definisco i parametri del moto browniano geometrico (gbm)
dt = (T1-T0)/N; % Durata tra un'osservazione e la successiva
T = (T0:dt:T1)'; % Date di osservazione
rho = [1 p(4); p(4) 1];

30 % Genero il gbm
mu = @(t,F) xi+Pi*F;
sigma = @(t,F) diag(F)*sim_1sigma(tau,p,t+T0);
SDE = sde(mu,sigma,'StartState',F0,'Correlation',rho);

```

```

35 % Eseguo un test del gbm, genero la (N+1)xm+1-matrice Y
   %rng('default')
   Y = SDE.simulate(N, 'DeltaTime', dt, 'nTrials', 1);

   % Riordino i prezzi simulati
40 F = zeros(N+2,m+1);
   F(1,2:end) = tau;
   F(2:end,1) = T;
   F(2:end,2:end) = Y;

```

Nella precedente, per definire il processo F tramite il generatore di MATLAB `sde` abbiamo sfruttato `sim_1sigma`, già definita nella Function 5.4.

5.3.2 Calibrazione

Implementiamo la soluzione proposta nel paragrafo 4.1.1 per la calibrazione del fattore centrante ξ e della matrice di cointegrazione Π di un MET cointegrato di tipo A1. Supponiamo siano già stati individuati i parametri $\{p^h\}_{h \in \underline{n}}$ e ρ attraverso le tecniche descritte nel paragrafo 5.2.

Function 5.12 (`cal_xp`). Il metodo utilizzato per la stima dei parametri $\xi \in \mathbb{R}^{2n}$ e $\Pi \in \mathbb{R}_{2n}^{2n}$ di un MET di tipo A1 consiste di due passi. Con il primo ricostruiamo la realizzazione del moto browniano $2n$ -dimensionale rispetto alla misura neutrale al rischio $w = \{w_l\}_{l=0, \dots, N} \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ corrispondente alla serie storica dei prezzi futures f osservata sulle date t_0, t_1, \dots, t_N . Il secondo passo consiste nel determinare ξ e Π attraverso una stima di massima verosimiglianza risolvendo il problema di ottimizzazione (4.15). In `cal_w` abbiamo implementato il primo passo, mentre in `cal_xp` il secondo.

```

1 % SINTASSI:
   % w = cal_w(F,p)
   %
   % INPUT:
   % - F -> (N+2)x(m+1)xn-ipermatrice dei prezzi futures di n commodity
6 % - p -> nx6-matrice dei parametri delle n commodity con
   % p(h,:)=[alfa0, alfa1, alfa2, rho, phi, lambda]
   %
   % OUTPUT:
   % - w -> 2nxN-matrice delle realizzazioni del 2n-moto browniano rispetto
11 % alla misura neutrale al rischio in t_1, ..., t_N con
   % w(:,1) = w(t_1) valore del moto in t_1
   %
function w = cal_w(F,p)
16
   N = size(F,1)-2;
   n = size(F,3);

   u = zeros(2*n,N);
21 w = zeros(2*n,N);
   for l=1:N
       % Calcoliamo u(:,l)
       for h=1:n
26           % a,b,c -> mx1-vettori dei coefficienti della funzione Psi^h_l(u)
           Fh = F(:, :, h);

```

```

    ph = p(h,:);
    tau = Fh(1,2:end);
    sigmahl = sim_1sigma(tau,ph,Fh(1+1,1));
    a = sigmahl(:,1);
31    b = sigmahl(:,2);
    c = (diff(Fh(1+1:1+2,2:end))./Fh(1+1,2:end))';

    % Calcoliamo u(2*h-1:2*h,1)
    L = [a'*a, a'*b; b'*a, b'*b];
36    v = [a'*c; b'*c];
    u(2*h-1:2*h,1) = L\v;
    end
end
w(:,1) = u(:,1);
41 for l=2:N
    w(:,l) = w(:,l-1) + u(:,l);
end
end
end

```

```

% SINTASSI:
% [xi,Pi] = cal_xp(F,p)
%
% INPUT:
5 % - F -> (N+2)x(m+1)xn-ipermatrice dei prezzi futures di n commodity
% - p -> nx6-matrice dei parametri delle n commodity con
% p(h,:)=[alfa0, alfa1, alfa2, rho, phi, lambda]
%
% OUTPUT:
10 % - xi -> 2nx1-vettore del fattore centrante
% - Pi -> 2nx2n-matrice di cointegrazione
%
function [xi,Pi] = cal_xp(F,p)
15
    N = size(F,1)-2;
    n = size(F,3);
    w = cal_w(F,p);

20    x = [ones(1,N); zeros(2*n,1) w(:,1:N-1)];

    A = zeros(2*n,2*n+1);
    B = zeros(2*n+1,2*n+1);
    for l=1:N
25        A = A + w(:,l)*x(:,l)';
        B = B + x(:,l)*x(:,l)';
    end
    Lambda = (A/B)';
    xi = Lambda(1,:)';
30    Pi = Lambda(2:end,:)'-eye(2*n);

end

```

Occupiamoci ora della soluzione descritta nel paragrafo 4.2.1 per la calibrazione del fattore centrante ξ^h e della matrice di cointegrazione Π^h relativi alla commodity h -esima di un MET cointegrato di tipo B1. Supponiamo nuovamente che siano già stati individuati i parametri p^h attraverso le tecniche descritte nel paragrafo 5.2.

Function 5.13 (`cal_xp`). Il metodo proposto per la stima dei parametri $\xi^h \in \mathbb{R}^m$ e $\Pi^h \in \mathbb{R}_m^m$ di un MET di tipo B1 consiste nell'ottenere una stima di massima verosimiglianza risolvendo il problema di ottimizzazione (4.26), in cui la funzione \mathcal{L} è approssimata dall'espressione (4.34).

```

% SINTASSI:
% [xi,Pi] = cal_xp(F,p)
3 %
% INPUT:
% - F -> (N+2)x(m+1)-ipermatrice dei prezzi futures della commodity
% - p=[alfa0 , alfa1 , alfa2 ,rho ,phi ,lambda] -> 6-vettore dei parametri
%
8 % OUTPUT:
% - xi -> mx1-vettore del fattore centrante
% - Pi -> mxm-matrice di cointegrazione
%
13 function [xi,Pi] = cal_xp(F,p)

    N = size(F,1)-2;
    m = size(F,2)-1;
    tau = F(1,2:end);

18    B = zeros(2,m,N);
    C = zeros(m,m,N);
    x = [ones(1,N); F(2:end-1,2:end)'];
    Gamma = [1 0; p(4) sqrt(1-p(4))];
23    for l=1:N
        sigmat = sim_1sigma(tau,p,F(l+1,1));
        B(:, :, l) = inv(Gamma)*inv(sigmat'*sigmat)*sigmat'*...
            diag(F(l+1,2:end)).^(-1);
        C(:, :, l) = B(:, :, l)'*B(:, :, l);
28    end

    L = zeros(m*(m+1),m*(m+1));
    v = zeros(m*(m+1),1);
    for i=1:m
33        for h=1:m+1
            for l=1:N
                v(m*(h-1)+i) = v(m*(h-1)+i)+C(i, :, l)*diff(F(l+1:l+2,2:end))'*x(h,l);
            end
            for j=1:m
38                for k=1:m+1
                    for l=1:N
                        L(m*(h-1)+i,m*(k-1)+j) = L(m*(h-1)+i,m*(k-1)+j)+C(i, j, l)*x(k,l)*...
                            x(h,l);
                    end
43                end
            end
        end
    end

48    Lambda_lin = L\v;
    Lambda = zeros(m,m+1);
    for i=1:m
        for h=1:m+1
53            Lambda(i, h) = Lambda_lin(m*(h-1)+i);
        end
    end

```

5.3. Calibrazione di mercati energetici a termine cointegrati

```
end  
  
xi = Lambda(:,1);  
Pi = Lambda(:,2:end);  
58  
end
```

Bibliografia

- [ACLP12] R. Aid, L. Campi, N. Langrené e H. Pham: *A probabilistic numerical method for optimal multiple switching problem and application to investments in electricity generation*. ArXiv e-prints, 2012. [citato a p. 5, 123, 135, 136]
- [AVD94] Kenneth J Adams e Donald R Van Deventer: *Fitting yield curves and forward rate curves with maximum smoothness*. The Journal of Fixed Income, 4(1):52–62, 1994. [citato a p. 108]
- [BBK08] Fred Espen Benth, Saltyte Jurate Benth e Steen Koekebakker: *Stochastic Modelling of Electricity and Related Markets*. World Scientific, 2008. [citato a p. -]
- [BCKS08] John Breslin, Les Clewlow, Calvin Kwok e Chris Strickland: *Gaining from complexity: MFMC models*. Energy Risk, pagine 60–64, April 2008. [citato a p. 57]
- [BGJ07] Grégory Benmenzer, Emmanuel Gobet e Céline Jérusalem: *Arbitrage free cointegrated models in gas and oil future markets*. ArXiv preprint, 2007. [citato a p. 5, 123, 124]
- [BGM97] Alan Brace, Dariusz Gatarek e Marek Musiela: *The market model of interest rate dynamics*. Mathematical finance, 7(2):127–155, 1997. [citato a p. 4, 55]
- [Bjö04] Tomas Björk: *Arbitrage Theory in Continuous Time*. Oxford University Press, 2004. [citato a p. 36, 37]
- [BK05] Fred Espen Benth e Steen Koekebakker: *Stochastic Modeling of Financial Electricity Contracts*. Energy Economics, 30(3):1116–1157, 2005. [citato a p. 57]
- [BKO07] Fred Espen Benth, Steen Koekebakker e Fridthjof Ollmar: *Extracting and applying smooth forward curves from average-based commodity contracts with seasonal variation*. The Journal of Derivatives, 15(1):52–66, 2007. [citato a p. 108]
- [Bör08] Reik H Börger: *Energy-related Commodity Futures*. VDM, 2008. [citato a p. 57]
- [BRS00] Petter Bjerksund, Heine Rasmussen e Gunnar Stensland: *Valuation and risk management in the Norwegian electricity market*. Springer, 2000. [citato a p. 56]
- [Car11] Francesco Caravenna: *Moto browniano e analisi stocastica*. 2011. [citato a p. -]
- [Com04] Valeriano Comincioli: *Metodi Numerici e Statistici per le Scienze applicate*. Università degli Studi di Pavia, 2004. [citato a p. 36]
- [CS99] Les Clewlow e Chris Strickland: *Valuing Energy Options in a One Factor Model Fitted to Forward Prices*. Rapporto Tecnico, Quantitative Finance Research Centre, University of Technology, Sydney, 1999. [citato a p. 56]

- [EG99] Alexander Eydeland e Hélyette Geman: *Fundamentals of electricity derivatives*. Energy Modelling and the Management of Uncertainty, pagine 35–43, 1999. [citato a p. 56]
- [ETV13] Enrico Edoli, Davide Tasinato e Tiziano Vargiolu: *Calibration of a multifactor model for the forward markets of several commodities*. Optimization, 62(11):1553–1574, 2013. [citato a p. 4, 5, 55, 57, 61, 62, 88]
- [Fan12] Enzo Fanone: *Three Essays on Modelling of Electricity Markets*. Università degli studi di Trieste, 2012. [citato a p. 57]
- [FL03] Stein Erik Fleten e Jacob Lemming: *Constructing forward price curves in electricity markets*. Energy Economics, 25(5):409–424, 2003. [citato a p. 108]
- [FM08] Viviana Fanelli e Silvana Musti: *Modelling electricity forward curve dynamics in the Italian market*. Rapporto Tecnico, Working paper, University of Foggia, 2008. [citato a p. 57]
- [Gem05] Hélyette Geman: *Commodities and Commodity Derivatives*. John Wiley & Sons, 2005. [citato a p. 18, 25]
- [Ham94] James Douglas Hamilton: *Time series analysis*, volume 2. Princeton university press Princeton, 1994. [citato a p. 52]
- [Hea12] Patrick Heather: *Continental European gas hubs: are they fit for purpose*. Oxford Institute for Energy Studies, 2012. [citato a p. 28]
- [HJM92] David Heath, Robert Jarrow e Andrew Morton: *Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation*. Econometrica: Journal of the Econometric Society, pagine 77–105, 1992. [citato a p. 55]
- [Hul08] John Hull: *Options, Futures, and Other Derivatives*. Prentice Hall, 2008. [citato a p. -]
- [KO05] Steen Koekebakker e Fridthjof Ollmar: *Forward curve dynamics in the Nordic electricity market*. Managerial Finance, 31(6):73–94, 2005. [citato a p. 57]
- [Koe03] S Koekebakker: *An arithmetic forward curve for the electricity market*. Rapporto Tecnico, Working paper, Agder University College, 2003. [citato a p. 56]
- [KS98] Ioannis Karatzas e Steven E Shreve: *Methods of mathematical finance*, volume 39. Springer, 1998. [citato a p. 35]
- [KSB09] Ruediger Kiesel, Gero Schindlmayr e Reik H Börger: *A Two Factor Model for the Electricity Forward Market*. Quantitative Finance, 9(3):279–287, 2009. [citato a p. 57, 58, 60, 61]
- [LL08] Damien Lamberton e Bernard Lapeyre: *Introduction to stochastic calculus applied to finance*. CRC press, 2008. [citato a p. 37, 40]
- [Mas10] Giuseppe Mastropieri: *Potere di mercato, dominanza ed interazione strategica tra gli operatori elettrici: collusione tacita nel mercato elettrico italiano*. 2010. [citato a p. 18]
- [MR06] M. Musiela e M. Rutkowski: *Martingale Methods in Financial Modelling*. Applications of mathematics. Springer, 2006. [citato a p. 55]
- [Øks03] Bernt Øksendal: *Stochastic differential equations*. Springer, 2003. [citato a p. 40, 48]
- [Pas08] Andrea Pascucci: *Calcolo stocastico per la finanza*, volume 33. Springer, 2008. [citato a p. 37, 40]

- [Pil98] Dragana Pilipovic: *Energy risk: Valuing and managing energy derivatives*, volume 300. McGraw-Hill New York, 1998. [citato a p. 18, 25, 55]
- [Sam65] Paul Samuelson: *Rational theory of warrant pricing*. *Indust. Management Rev.*, 6:13–32, 1965. [citato a p. 31]
- [Sch97] Eduardo S Schwartz: *The stochastic behavior of commodity prices: Implications for valuation and hedging*. *The Journal of Finance*, 52(3):923–973, 1997. [citato a p. 55]
- [SS00] Eduardo Schwartz e James E Smith: *Short-term variations and long-term dynamics in commodity prices*. *Management Science*, 46(7):893–911, 2000. [citato a p. 56]
- [VBRR05] Mariano Ventosa, Alvaro Baillo, Andrés Ramos e Michel Rivier: *Electricity market modeling trends*. *Energy policy*, 33(7):897–913, 2005. [citato a p. 56]

Lista dei simboli e delle abbreviazioni

Simboli

$\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$	insieme dei numeri naturali
$\mathbb{N}^+ = \{1, 2, \dots\}$	insieme dei numeri naturali strettamente positivi
$\underline{n} := \{1, \dots, n\}$	insieme dei numeri naturali compresi tra 1 ed n
\mathbb{Z}	insieme dei numeri interi
\mathbb{R}	insieme dei numeri reali
$\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$	insieme dei numeri reali strettamente positivi
\mathbb{R}_m^n	algebra delle matrici reali $n \times m$
$\mathbb{R}^n := \mathbb{R}_1^n$	algebra dei vettori colonna n -dimensionali
$\mathbb{R}_m := \mathbb{R}_m^1$	algebra dei vettori riga m -dimensionali
$\mathbf{0}_m^n, \mathbf{0}^n, \mathbf{0}_m$	matrice nulla di $\mathbb{R}_m^n, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}_m$
δ_n	matrice identità di \mathbb{R}_n^n
A^i	riga i -esima di $A \in \mathbb{R}_m^n$
A_j	colonna j -esima di $A \in \mathbb{R}_m^n$
$ A $	norma euclidea di $A \in \mathbb{R}_m^n$
A^T	matrice trasposta di $A \in \mathbb{R}_m^n$
$ x $	norma euclidea di $x \in \mathbb{R}^n$ (\mathbb{R}_m)
$\langle x, y \rangle$	prodotto scalare euclideo di $x, y \in \mathbb{R}^n$ (\mathbb{R}_m)
$\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$	σ -algebra dei boreliani di \mathbb{R}^n
\mathcal{B}^I	σ -algebra prodotto su $(\mathbb{R}^n)^I$, 47
\mathcal{B}_c^I	σ -algebra prodotto su $C(I; \mathbb{R}^n)$, 47
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	distribuzione normale di media μ e varianza σ^2
χ_A	funzione indicatrice dell'insieme A
$\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$	derivata parziale rispetto ad x
H_f	matrice hessiana di f
A^B	insieme delle funzioni da B in A
C	spazio delle funzioni continue
C^k	spazio delle funzioni derivabili con derivate continue fino all'ordine $k \geq 0$
$C^{k,h}$	spazio delle funzioni $u = u(t, x)$ derivabili con derivate continue fino all'ordine $k \geq 0$ nella variabile t ed $h \geq 0$ nella variabile x
L^p	spazio delle funzioni sommabili di ordine $p \geq 1$
$\ \cdot\ _p = \ \cdot\ _{L^p}$	norma $p \geq 1$ su L^p
$L^p(I, \Omega)$	spazio dei processi progressivamente misurabili in $L^p(I \times \Omega)$, 38

$\mathbb{L}_{\text{loc}}^p(I, \Omega)$	spazio dei processi X progressivamente misurabili con $X(\omega) \in L^p(I)$ per q.o. $\omega \in \Omega$, <i>41</i>
$\text{Prt}(I)$	insieme delle partizioni dell'intervallo I , <i>41</i>
$\text{Prt}(I, \varepsilon)$	insieme delle partizioni equispaziate dell'intervallo I di passo $\varepsilon > 0$, <i>41</i>
$\langle X, Y \rangle$	covarianza quadratica dei processi di Itô X ed Y , <i>42, 43, 68</i>
$\langle X \rangle$	variazione quadratica del processo di Itô X , <i>42, 43, 68</i>
ΔX_t	differenza prima del processo discreto X , <i>51</i>
$\mathbb{I}_d(\Omega)$	spazio dei processi integrati di ordine $d \geq 1$ su Ω , <i>51</i>
$\text{CI}(\Omega)$	spazio dei processi cointegrati su Ω , <i>52</i>

Abbreviazioni

q.c.	quasi certamente
q.o.	quasi ovunque
v.c.	variabile casuale
TTM	Time To Maturity, <i>11</i>
OTC	Over The Counter, <i>12</i>
CH	Clearing House, <i>13</i>
TTD	Time To Delivery, <i>14</i>
NYMEX	New York Mercantile Exchange, <i>16</i>
TSO	Trasmission System Operator, <i>20</i>
ISO	Independent System Operator, <i>20</i>
EPEX	European Power Exchange, <i>20</i>
EEX	European Energy Exchange, <i>20</i>
MCQ	Market Clearing Quantity, <i>21</i>
MCP	Market Clearing Price, <i>21</i>
PHELIX	Physical Electricity Index, <i>22</i>
MTE	Mercato Elettrico a Termine, <i>23</i>
CEGH	Central European Gas Hub, <i>27</i>
NBP	National Balancing Point, <i>27</i>
TTF	Title Transfer Facility, <i>27</i>
NCG	NetConnect Germany, <i>27</i>
PSV	Punto di scambio virtuale, <i>28</i>
ICE	InterContinental Exchange, <i>28</i>
APX	Amsterdam Power Exchange, <i>28</i>
\mathcal{C} -MET	Mercato Energetico a Termine con struttura di consegna \mathcal{C} , <i>63, 72, 93, 124, 135</i>