Appunti del corso:

Teoria della Misura e Integrazione

Michele Miranda

Secondo Semestre, a.a. 2014/2015

Indice

Capitolo 1

Teoria della misura

In questo capitolo affrontiamo in modo sistematico la teoria della misura; inizieremo con lo studio delle algebre e delle σ–algebre, che sono i domini naturali delle misure. Vedremo poi la definizione astratta di misura positiva e passeremo quindi allo studio delle misure esterne; l'approccio è quello proposto da Lebesgue per la definizione della misura che di lui porta il nome, ma seguiremo un approccio più astratto che quindi potremo utilizzare per la definizione di misure più generali. Daremo per scontato lo studio della misura di Lebesgue con le sue principali proprietà, così come daremo per scontato vari fatti collegati alla misura di Lebesgue quali l'esistenza di insiemi non misurabili e la definizione degli spazio di funzioni integrabili secondo Lebesgue. Daremo anche per scontata la teoria dell'integrazione alla Riemann, insieme alla definizione della misura di Peano-Jordan. Ci concentreremo quindi alla generalizzione delle nozioni viste con la misura di Lebesgue nel caso di misure arbitrarie.

Il materiale contenuto in questo capitolo è preso quasi per intero dal libro di Cohn [4].

1.1 Algebre e σ–algebre

Supporremo di lavorare in uno spazio che denoteremo con Ω, che sarà semplicemente un insieme di punti, i cui esempi sono tutto la retta reale $\mathbb{R}$, lo spazio Euclideo d–dimensionale $\mathbb{R}^d$ oppure un sottoinsieme $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.

Definizione 1.1 (Algebra)**.** *Un'algebra di insiemi è una famiglia non vuota di insiemi $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ tale che:*

1. *se $A \in \mathscr{F}$, allora $A^c = \Omega \setminus A \in \mathscr{F}$;*
2. *se $A_1, A_2 \in \mathscr{F}$, allora $A_1 \cup A_2 \in \mathscr{F}$.*

Osservazione 1.2. Si noti che ogni algebra contiene sempre Ω e $\emptyset$; infatti, dato che $\mathscr{F}$ è non vuota, allora esiste $A \in \mathscr{F}$ (eventualmente l'insieme vuoto). Quindi $A^c \in \mathscr{F}$, da cui

$$\Omega = A \cup A^c \in \mathscr{F},$$

e quindi anche $\emptyset = \Omega^c \in \mathscr{F}$. Quindi $\mathscr{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ è la più piccola algebra di insiemi non vuota, mentre $\mathscr{P}(\Omega)$ è la più grande algebra di insiemi. Si nota anche che un'algebra, oltre ad essere chiusa per unioni finite, è chiusa pure per intersezioni finite in quanto

$$A_1 \cap A_2 = (A_1^c \cup A_2^c)^c.$$

Definizione 1.3 (σ–algebra)**.** *Una σ–algebra è una famiglia non vuota di insiemi $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ t.c.:*

1. *$\mathscr{F}$ è un'algebra;*
2. *se $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{F}$, allora*
$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathscr{F}.$$

Definizione 1.4 (Spazio Misurabile)**.** *Uno spazio misurabile è una coppia $(\Omega, \mathscr{F})$ con Ω insieme e $\mathscr{F}$ σ–algebra.*

Gli esempi visti precedentemente sono anche la più piccola e la più grande σ–algebra.

Osservazione 1.5. Si nota che l'intersezione arbitraria di σ–algebre è una σ–algebra; quindi data una collezione di insiemi $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ si può definire la σ–algebra generata da $\mathscr{C}$, denotata con $\sigma(\mathscr{C})$, come la più piccola σ–algebra che contiene $\mathscr{C}$, cioè
$$\sigma(\mathscr{C}) = \bigcap_{\mathscr{C}\subset\mathscr{F}} \mathscr{F}.$$

Definizione 1.6 (Insiemi Boreliani)**.** *Nel caso in cui $(\Omega, \mathscr{T})$ sia uno spazio topologico, si definisce la σ algebra dei Boreliani (o degli insiemi di Borel) come la σ–algebra generata da $\mathscr{T}$, cioè*
$$\mathscr{B}(\Omega) = \sigma(\mathscr{T}).$$

1.2 Misure

Una volta definiti i domini naturali delle misure, possiamo passare a dare la definizione di misura.

Definizione 1.7 (Misura Positiva)**.** *Dato uno spazio misurabile $(\Omega, \mathscr{F})$, una funzione d'insieme $\mu : \mathscr{F} \to [0, +\infty]$ viene detta misura positiva se:*

1. *$\mu(\emptyset) = 0$;*
2. *data una famiglia disgiunta di insiemi $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{F}$, allora*
$$\mu\left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i).$$

Uno spazio con misura è dato da una terna $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ con $(\Omega, \mathscr{F})$ spazio misurabile e μ una misura positiva su $\mathscr{F}$.

Alle volte può essere utile lavorare anche con misure finite o più in generale σ–finite, con definizioni date come segue.

Definizione 1.8 (Misura finita e σ–finita)**.** *Una misura finita è una misura μ su $(\Omega, \mathscr{F})$ a valori in $[0, +\infty)$; questo equivale a dire che $\mu : \mathscr{F} \to [0, +\infty]$ con $\mu(\Omega) < +\infty$. Una misura finita viene detta* misura di probabilità *se $\mu(\Omega) = 1$. Una misura $\mu : \mathscr{F} \to [0, +\infty]$ viene detta σ–finita se esiste una successione di insiemi $(\Omega_h)_{h\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{F}$ con $\mu(\Omega_h) < +\infty$ per ogni $h \in \mathbb{N}$ e*
$$\Omega = \bigcup_{h\in\mathbb{N}} \Omega_h.$$

Nella definizione di σ–finitezza, gli insiemi Ω_h possono anche essere presi monotoni per inclusione, cioè $\Omega_h \subset \Omega_{h+1}$, oppure disgiunti, $\Omega_h \cap \Omega_{h+1} = \emptyset$, a seconda delle esigenze.

Esempio 1.1. Abbiamo i seguenti esempi di misure.

1. Misura del *conteggio* $\mu : \mathscr{P}(\Omega) \to [0, +\infty]$ data da

$$\mu(A) = \begin{cases} \#A & \text{se } A \text{ ha cardinalità finita} \\ +\infty & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

   tale misura è finita se e solo se Ω è fatto da un numero finito di elementi, mentre è σ–finita se e solo se Ω è al più numerabile.

2. Misura Delta di Dirac concentrata in $x_0 \in \Omega$, definita come $\delta_{x_0} : \mathscr{P}(\Omega) \to [0, +\infty]$,

$$\delta_{x_0}(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in A \\ 0 & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

   tale misura è una misura di probabilità.

3. Misura *infinita*, data da $\mu : \mathscr{P}(\Omega) \to [0, +\infty]$

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{se } A = \emptyset \\ +\infty & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

   tale misura è σ–finita se e solo se $\Omega = \emptyset$.

4. Misura *zero-uno*, definita da $\mu : \{\emptyset, \Omega\} \to [0, +\infty]$, $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(\Omega) = 1$; tale misura è una misura di probabilità.

5. Misura di Lebesgue λ_d in $\mathbb{R}^d$, definita passando dalla misura dei plur–irettangoli, è una misura σ–finita ma non finita a meno che non la si restringa a sottoinsiemi di $\mathbb{R}^d$ di misura finita.

Raccogliamo nella seguente proposizione alcune proprietà delle misure.

Proposizione 1.9. *Sia $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ uno spazio con misura. Allora:*

1. *(monotonia) se $A \subset B$, allora $\mu(A) \leq \mu(B)$;*

2. *(σ–subadditività) se $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{F}$, allora*

$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i);$$

3. *(continuità per successioni crescenti) se $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{F}$ con $A_i \subset A_{i+1}$, allora*

$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \lim_{i\to+\infty} \mu(A_i);$$

4. *(continuità per successioni decrescenti) se* $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{F}$ *con* $A_{i+1} \subset A_i$*, e se esiste* $i_0 \in \mathbb{N}$ *tale che* $\mu(A_{i_0}) < +\infty$*, allora*

$$\mu\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \lim_{i\to+\infty} \mu(A_i).$$

Dimostrazione.

1. se $A \subset B$, allora

$$\mu(B) = \mu(A \sqcup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A).$$

2. Dati gli $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ costruiamo una famiglia disgiunta come segue

$$B_1 = A_1, \qquad B_{i+1} = A_{i+1} \setminus \bigcup_{j\in\underline{i}} A_j.$$

Chiaramente

$$\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} B_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i, \qquad B_i \subset A_i,$$

quindi per monotonia

$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \mu\left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} B_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(B_i) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i).$$

3. Data la successione di insiemi crescenti $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, definiamo

$$B_1 = A_1, \qquad B_i = A_i \setminus A_{i-1}, i \geq 2.$$

Allora

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} B_i, \quad \bigcup_{i\in\underline{n}} A_i = \bigsqcup_{i\in\underline{n}} B_i,$$

e quindi

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) =& \mu\left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} B_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(B_i) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in\underline{n}} \mu(B_i) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \mu\left(\bigsqcup_{i\in\underline{n}} B_i\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).\end{aligned}$$

4. Data la successione di insiemi decrescenti $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, possiamo supporre $\mu(A_1) < +\infty$, cioè $i_0 = 1$ (altrimenti sostituiamo in quanto segue A_1 con A_{i_0}). Allora poniamo per $i \geq 1$ $B_i = A_1 \setminus A_i$ in modo da ottenere una successione crescente di insiemi; dato che

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i = A_1 \setminus \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i,$$

ne deduciamo che

$$\begin{aligned}\mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) =& \mu\left(A_1 \setminus \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i\right)\\ =&\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(B_n)\\ =&\mu(A_1) - \lim_{n\to+\infty}\mu(A_n),\end{aligned}$$

semplificando ambo i membri per $\mu(A_1)$, si ottiene il risultato.

□

Chiudiamo questa sezione col seguente risultato, utile nel caso si voglia verificare che una data funzione di insieme sia una misura.

Proposizione 1.10. *Sia $\mu : \mathscr{F} \to [0, +\infty]$ una funzione di insieme finitamente additiva. Allora μ è una misura se e solo se vale equivalentemente una delle seguenti proprietà:*

1. *per ogni successione di insiemi $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{F}$ crescente, $A_i \subset A_{i+1}$, allora*
$$\lim_{i\to+\infty} \mu(A_i) = \mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right); \tag{1.1}$$
2. *per ogni successione di insiemi $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{F}$ decrescente al vuoto, $A_{i+1} \subset A_i$, $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i = \emptyset$, allora*
$$\lim_{i\to+\infty} \mu(A_i) = 0.$$

La seconda proprietà della precedente proposizione viene anche detta continuità in 0 della funzione μ.

Dimostrazione. Bisogna semplicemente dimostrare che la funzione μ sia σ-additiva; vediamo come le due proprietà la implicano.

1. Supponiamo che valga la proprietà (1.1); prendiamo quindi una successione di insiemi disgiunti $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{F}$ e definiamo $A_n = \bigcup_{i\in\underline{n}} B_i$. Dato che gli A_n sono crescenti, otteniamo che
$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i\right) =& \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu\left(\bigcup_{i\in\underline{n}} B_i\right)\\ =& \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in\underline{n}} \mu(B_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(B_i).\end{aligned}$$
2. Analogamente al punto precedente, siano $B_i \in \mathscr{F}$ disgiunti e denotiamo con $A_n = \bigcup_{i\in\underline{n}^c} B_i$; tali insiemi sono descrescenti e tendono al vuoto, quindi
$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i\in\underline{n}} B_i\right) + \mu(A_n) = \sum_{i\in\underline{n}} \mu(B_i) + \mu(A_n).$$

Passando al limite $n \to +\infty$, dalla continuità in 0, segue che

$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(B_i).$$

$\square$

Come vedremo nella sezione seguente, avere già in partenza la σ–algebra su cui è definita la misura è già una ipotesi forte; tipicamente la determinazione di tale dominio è uno dei principali problemi.

1.3 Misure esterne

In questa sezione partiamo da una situazione più generale rispetto a quella presentata nella sezione precedente; partiremo da una funzione di insieme che è definita su tutti i sottoinsiemi di Ω e da questa funzione cerchiamo di ricavare una misura. La procedura è quella che si presenta quando si cerca di definire la misura di Lebesgue, dove si parte prima dalla misura di un rettangolo, per poi definire la misura di un pluri–rettangolo, quindi la misura (esterna) di un insieme limitato arbitrario. Le difficoltà che si presentano per definire la misura di Lebesgue sono le stesse che si ritrovano per definire una misura qualsiasi partendo dalla definizione di misura esterna; faremo quindi una panoramica astratta per poi trattare qualche esempio concreto, come appunto la misura di Lebesgue, ma anche le misure di Hausdorff.

Definizione 1.11 (Misura esterna)**.** *Una funzione d'insieme* $\mu^* : \mathscr{P}(\Omega) \to [0, +\infty]$ *viene detta misura esterna se:*

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$*;*
2. *se* $A \subset B$*, allora* $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$*:*
3. *se* $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ *sono insiemi qualsiasi (non necessariamente disgiunti), allora*

$$\mu^*\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu^*(A_i).$$

Esempio 1.2. Esempi di misure esterne $\mu^* : \mathscr{P}(\Omega) \to [0, +\infty]$ sono le stesse viste nella sezione precedente, ma stavolta definite su tutto $\mathscr{P}(\Omega)$.

1. La misura del conteggio, la Delta di Dirac e la misura infinita erano già definite su tutte le parti di Ω e quindi sono anche misure esterne.
2. La misura zero-uno estesa a tutto $\mathscr{P}(\Omega)$

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{se } A = \emptyset \\ 1 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

è una misura esterna, in quanto se

$$\mu^*\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = 0,$$

allora ogni insieme A_i è vuoto e quindi anche

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \mu^*(A_i) = 0.$$

Se invece

$$\mu^*\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = 1,$$

allora almeno uno degli A_i è non nullo e quindi

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \mu^*(A_i) \geq 1.$$

3. La misura esterna di Lebesgue, definita per insiemi limitati $E \subset \mathbb{R}^d$

$$\lambda^*(E) = \inf\{|P| : P \text{ pluri–rettangolo con } E \subset P\},$$

(dove con $|P|$ abbiamo denotato la ovvia misura d–dimensionale del pluri–rettangolo P) ed estesa agli insiemi illimitati come

$$\lambda^*(E) = \sup_{R>0} \lambda^*(B_R \cap E).$$

Può essere utile usare la seguente variante della definizione della misura esterna di Lebesgue. Dato un pluri–rettangolo P, denotiamo con $\Delta(P)$ il massimo diametro dei rettangoli che compongono P, cioè se

$$P = \bigcup_{i\in\underline{n}} R_i,$$

con R_i rettangolo, allora

$$\Delta(P) = \max_{i\in\underline{n}}(\mathrm{diam}(R_i)).$$

Fissato quindi $\delta > 0$ ed $E \subset \mathbb{R}^d$ limitato, definiamo

$$\lambda^*_\delta(E) = \inf\{|P| : P \text{ pluri–rettangolo con } E \subset P, \Delta(P) < \delta\},$$

e quindi

$$\lambda^*(E) = \lim_{\delta\to 0} \lambda^*_\delta(E).$$

È facile notare che la funzione $\delta \mapsto \lambda^*_\delta(E)$ è monotona e quindi il limite esiste. L'equivalenza con la definizione precedente di misura di Lebesgue segue dal fatto che, fissato $\delta > 0$, ogni rettangolo può essere decomposto come unione finita di rettangoli (essenzialmente disgiunti) di diametro minore di δ. La definizione di misura esterna per insiemi illimitati si generalizza in modo abbastanza ovvio, o localizzando l'insieme su di un limitato, oppure considerando pluri–rettangoli costituiti da una quantità numerabile di rettangoli elementari. Osserviamo inoltre che nella definizione di misura esterna di Lebesgue, i rettangoli elementari possono equivalentemente essere presi sia chiusi che aperto, senza cambiare la definizione della misura. La misura di Lebesgue verrà nel seguito denotata con la lettera λ o, se si vuole sottolineare la dimensione dello spazio Euclideo sottostante, con λ_d.

Per arrivare a definire una misura a partire da una misura esterna, si introduce il concetto di insieme misurabile.

Definizione 1.12 (Insieme Misurabile)**.** *Data una misura esterna μ^*, un sottoinsieme $A \subset \Omega$ viene detto μ^*–misurabile se*

$$\mu^*(T) = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \setminus A), \qquad \forall T \subset \Omega.$$

L'insieme T viene detto insieme test e la famiglia degli insiemi μ^* misurabili viene denotata con $\mathscr{M}(\mu^*)$.

Osservazione 1.13. Dalla subattività di una misura esterna, la disuguaglianza

$$\mu^*(T) \leq \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \setminus A)$$

è sempre verificata; quindi, quando si deve verificare la misurabilità di un insieme A basta verificare solo la disuguaglianza

$$\mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \setminus A).$$

Si nota anche che scrivendo $T \setminus A = T \cap A^c$, A è misurabile se e solo se A^c è misurabile. Inoltre, $A = \emptyset$ è chiaramente misurabile, e quindi per ogni misura esterna

$$\{\emptyset, \Omega\} \subset \mathscr{M}(\mu^*).$$

Si nota infine che se A o A^c è trascurabile, nel senso che o $\mu^*(A) = 0$ o $\mu^*(A^c) = 0$, allora A è misurabile. Infatti, se ad esempio $\mu^*(A) = 0$, allora $\mu^*(T \cap A) = 0$ grazie all'inclusione $T \cap A \subset A$ ed alla monotonia di μ^*. Quindi, ancora grazie alla monotonia di μ^*,

$$\mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \setminus A) = \mu^*(T \setminus A) \leq \mu^*(T).$$

Abbiamo il seguente importante risultato.

Teorema 1.14. *Sia $\mu^* : \mathscr{P}(\Omega) \to [0, +\infty]$ una misura esterna; allora $\mathscr{M}(\mu^*)$ è una σ–algebra e $\mu = \mu^*_{|\mathscr{M}(\mu^*)} : \mathscr{M}(\mu^*) \to [0, +\infty]$ è una misura.*

Dimostrazione. Inziamo col dimostrare che l'unione di due insiemi misurabili A_1, A_2 è misurabile. Dalla misurabilità di A_1 con insieme test $T \cap (A_1 \cup A_2)$ si ottiene che;

$$\begin{aligned} \mu^*(T \cap (A_1 \cup A_2)) =& \mu^*(T \cap (A_1 \cup A_2) \cap A_1) + \mu^*(T \cap (A_1 \cup A_2) \cap A_1^c) \\ =& \mu^*(T \cap A_1) + \mu^*(T \cap A_1^c \cap A_2). \end{aligned}$$

Se ai precedenti termini sommiano $\mu^*(T \cap (A_1 \cup A_2)^c)$, dalla misurabilità di A_2 con insieme test $T \cap A_1^c$ e successivamente dalla misurabilità di A_1 con insieme test T si ottiene

$$\begin{aligned} \mu^*(T \cap (A_1 \cup A_2)) + & \mu^*(T \cap (A_1 \cup A_2)^c) = \\ &= \mu^*(T \cap A_1) + \mu^*(T \cap A_1^c \cap A_2) + \mu^*(T \cap (A_1 \cup A_2)^c) \\ &= \mu^*(T \cap A_1) + \mu^*(T \cap A_1^c \cap A_2) + \mu^*(T \cap A_1^c \cap A_2^c) \\ &= \mu^*(T \cap A_1) + \mu^*(T \cap A_1^c) = \mu^*(T). \end{aligned}$$

Fin qui abbiamo quindi che $\mathscr{M}(\mu^*)$ è un'algebra. Dimostriamo ora che $\mathscr{M}(\mu^*)$ è stabile per unioni numerabili disgiunte; siano quindi $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{M}(\mu^*)$ disgiunti e mostriamo preliminarmente che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\mu^*(T) = \sum_{i\in\underline{n}} \mu^*(T\cap A_i) + \mu^*\left(T\cap\bigcap_{i\in\underline{n}} A_i^c\right).$$

Tale identità si dimostra per induzione; il caso $n=1$ è la misurabilità di A_1; supponendo l'identità valida per n, grazie alla misurabilità di A_{n+1} ricaviamo che

$$\begin{aligned}\mu^*\left(T\cap\bigcap_{i\in\underline{n}} A_i^c\right) =&\mu^*\left(T\cap\Big(\bigcap_{i\in\underline{n}} A_i^c\Big)\cap A_{n+1}\right) + \mu^*\left(T\cap\bigcap_{i\in\underline{n+1}} A_i^c\right)\\ =&\mu^*\left(T\cap A_{n+1}\right) + \mu^*\left(T\cap\bigcap_{i\in\underline{n+1}} A_i^c\right)\end{aligned}$$

grazie al fatto che gli A_i sono disgiunti. Questo prova il passo induttivo. L'identità appena provata, grazie alla monotonia, implica che

$$\begin{aligned}\mu^*(T) &\geq \sum_{i\in\underline{n}} \mu^*(T\cap A_i) + \mu^*\left(T\cap\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i^c\right)\\ &= \sum_{i\in\underline{n}} \mu^*(T\cap A_i) + \mu^*\left(T\cap\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i^c\Big)\right), \quad \forall n\in\mathbb{N},\end{aligned}$$

da cui la disuguaglianza

$$\mu^*(T) \geq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu^*(T\cap A_i) + \mu^*\left(T\cap\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i^c\Big)\right) \tag{1.2}$$

$$\geq \mu^*\left(T\cap\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) + \mu^*\left(T\cap\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i^c\Big)\right), \tag{1.3}$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dalla σ–subadditività. In definitiva $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathscr{M}(\mu^*)$.

Si passa da unioni disgiunte ad unioni arbitrarie, in quanto se $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{M}(\mu^*)$, allora gli insiemi

$$B_1 = A_1, \qquad B_i = A_i \setminus \bigcup_{j\in\underline{i-1}} A_j$$

sono misurabili e disgiunti e quindi

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} B_i \in \mathscr{M}(\mu^*).$$

Il fatto che la restrizione di μ^* a $\mathscr{M}(\mu^*)$ sia una misura, e cioè che su tale insieme μ^* è σ–additiva, segue dalla σ–subadditività e da (1.3) con $T = \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$. $\square$

Esempio 1.3. Tornando agli esempi finora considerati, le misure del conteggio, la Delta di Dirac e la misura infinita sono già misure su tutto $\mathscr{P}(\Omega)$ e quindi tutti gli insiemi sono misurabili, cioè $\mathscr{M}(\mu^*) = \mathscr{P}(\Omega)$. Per quanto riguarda la misura zero-uno, se Ω è non banale, cioè se non è vuoto o non consiste di un solo elemento, possiamo prendere un insieme A che non sia nè vuoto nè tutto Ω, e quindi $\mu^*(\Omega) = \mu^*(A) = \mu^*(A^c) = 1$. Se come insieme test si prende $T = \Omega$ non può valere l'identità

$$1 = \mu^*(T) \neq \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \setminus A) = 2.$$

Quindi i soli insiemi misurabili sono $\emptyset$ e Ω.

Per quanto riguarda la misura esterna di Lebesgue, il classico esempio di Vitali mostra che non tutti gli insiemi sono misurabili secondo Lebesgue.

Se Ω è uno spazio metrico, c'è un criterio che garantisce che la σ–algebra degli insiemi μ^*–misurabili sia abbastanza ricca; tale criterio prende il nome di *Criterio di Caratheodory* che presentiamo in forma di Teorema come segue.

Definizione 1.15 (Misura Boreliana)**.** *Sia* $(\Omega, \mathscr{T})$ *uno spazio topologico: una misura esterna* $\mu^* : \mathscr{P}(\Omega) \to [0, +\infty]$ *viene detta Boreliana se* $\mathscr{B}(\Omega) \subset \mathscr{M}(\mu^*)$.

Teorema 1.16 (Criterio di Caratheodory)**.** *Sia* $\mu^* : \mathscr{P}(\Omega) \to [0, +\infty]$ *una misura esterna con* Ω *spazio metrico. Se*

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B), \qquad \forall A, B \text{ tali che } \operatorname{dist}(A, B) > 0,$$

allora gli insiemi Boreliani sono misurabili, $\mathscr{B}(\Omega) \subset \mathscr{M}(\mu^*)$*, e* $\mu = \mu^*_{|\mathscr{B}(\Omega)} : \mathscr{B}(\Omega) \to [0, +\infty]$ *è una misura.*

Dimostrazione. Dimostriamo che i chiusi sono misurabili. Sia quindi C chiuso e fissiamo $T \subset \Omega$ con $\mu^*(T) < +\infty$: definiamo quindi

$$A_n = \left\{ x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, C) \leq \frac{1}{n} \right\}.$$

Per tali insiemi si ha che, dato che C è chiuso

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n, \qquad A_{n+1} \subset A_n$$

e $\operatorname{dist}(T \setminus A_n, T \cap C) \geq \frac{1}{n}$. Quindi

$$\mu^*(T \setminus A_n) + \mu^*(T \cap C) = \mu^*((T \setminus A_n) \cup (T \cap C)) \leq \mu^*(T).$$

Mostriamo quindi che

$$\lim_{n \to +\infty} \mu^*(T \setminus A_n) = \mu^*(T \setminus C).$$

Introduciamo a tal fine gli insiemi

$$C_i = \left\{ x \in T : \frac{1}{i} < \operatorname{dist}(x, C) \leq \frac{1}{i-1} \right\};$$

dato che

$$T \setminus C = \left(\bigcup_{i \in \underline{n}^c} C_i \right) \cup (T \setminus A_n)$$

se ne deduce che

$$\mu^*(T \setminus A_n) \leq \mu^*(T \setminus C) \leq \mu^*(T \setminus A_n) + \sum_{i \in \underline{n}^c} \mu^*(C_i).$$

Basta quindi dimostrare che la serie

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \mu^*(C_i)$$

sia convergente. Notiamo che se $j \geq i+2$, allora $\mathrm{dist}(C_j, C_i) > 0$ e quindi

$$\sum_{i \in \underline{n}} \mu^*(C_{2i}) = \mu^* \left(\bigcup_{k \in \underline{n}} C_{2i} \right) \leq \mu^*(T);$$

stessa stima si ottiene per i dispari

$$\sum_{i \in \underline{n}} \mu^*(C_{2i+1}) = \mu^* \left(\bigcup_{i \in \underline{n}} C_{2i+1} \right) \leq \mu^*(T),$$

e quindi

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \mu^*(C_i) \leq 2\mu^*(T).$$

□

Osservazione 1.17. Si può vedere che sotto opportune ipotesi di regolarità sulla misura μ^* il Teorema precedente può essere invertito, nel senso che se μ^* ammette tra gli insiemi misurabili i Boreliani, allora μ^* è additiva sugli insiemi distanti.

Esempio 1.4. La misure del conteggio, la Delta di Dirac e la misura infinita sono ovviamente misure Boreliane; la misura zero-uno invece non è Boreliana a meno che Ω non sia banale. Per quanto sottolineato nell'Esempio 1.2, punto 3., la misura di Lebesgue è Boreliana. Vedremo con un esempio che per quanto riguarda la misura di Lebesgue i Boreliani non esauriscono tutti i misurabili; per la misura di Lebesgue quello che sarà vero è che i misurabili sono il completamento dei Boreliani, cioè un misurabile è un Boreliano più un insieme di misura nulla.

Esempio 1.5. Un esempio importante di misure Boreliane è dato dalle misure di Hausdorff; introduciamo qui brevemente la loro definizione, rimandando al capitolo 9 il loro studio sistematico. Fissato $\alpha > 0$ e $\delta > 0$, si definisce la pre-misura esterna di Hausdorff di dimensione α di un insieme $A \subset \mathbb{R}^d$ ponendo

$$\mathscr{H}^\alpha_\delta(A) = \inf \left\{ \omega_\alpha \sum_{i \in \mathbb{N}} \left(\frac{\mathrm{diam}(A_i)}{2} \right)^\alpha : A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i, \mathrm{diam}(A_i) < \delta \right\}.$$

Qui con ω_α si denota la costante

$$\omega_\alpha = \frac{\pi^{\frac{\alpha}{2}}}{\Gamma(1 + \frac{\alpha}{2})},$$

con Γ funzione di Eulero
$$\Gamma(t) = \int_0^\infty s^{t-1} e^{-s} ds;$$
se $\alpha = k \in \mathbb{N}$, allora ω_k altro non è che la misura di Lebesgue k–dimensionale della palla unitaria. La funzione
$$\delta \mapsto \mathscr{H}^\alpha_\delta(A)$$
è monotona per ogni $A \subset \mathbb{R}^d$ e quindi possiamo definire la misura di Hausdorff α–dimensionale di A ponendo
$$\mathscr{H}^\alpha(A) = \lim_{\delta\to 0} \mathscr{H}^\alpha(A) = \sup_{\delta>0} \mathscr{H}^\alpha_\delta(A).$$
Tale misura è una misura esterna e grazie al Criterio di Caratheodory i Boreliani sono misurabili.

1.4 Completezza e regolarità

Discutiamo brevemente in questa sezione la questione legata alla completezza e alla regolarità di una misura. Abbiamo già visto che ogni insieme che ha misura μ^* nulla è misurabile ed abbiamo accennato al fatto che la misura di Lebesgue ammette insiemi misurabili che non sono Boreliani; questo dipende dal fatto che la σ–algebra dei Boreliani non è completa, nel senso della seguente definizione.

Definizione 1.18 (Completezza)**.** *Dato uno spazio con misura $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$, diremo che la σ–algebra $\mathscr{F}$ è μ–completa se dato $A \in \mathscr{F}$ con $\mu(A) = 0$, allora per ogni $B \subset A$, $B \in \mathscr{F}$.*

Quindi, usando come nozione di *trascurabilità* per un insieme B il fatto che esista $A \in \mathscr{F}$ con $B \subset A$ e $\mu(A) = 0$, la completezza è la richiesta che ogni insieme trascurabile appartenga alla σ–algebra $\mathscr{F}$.

È sempre possibile fare in modo da avere una σ–algebra completa come mostra la seguente Proposizione.

Proposizione 1.19. *Sia $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ uno spazio con misura; allora la famiglia*
$$\widetilde{\mathscr{F}}_\mu = \{A \subset \Omega : \exists E, F \in \mathscr{F}, E \subset A \subset F, \mu(F \setminus E)\}$$
è una σ–algebra, la funzione
$$\tilde{\mu}(A) = \sup\{\mu(E) : E \subset A, E \in \mathscr{F}\} = \inf\{\mu(F) : A \subset F, F \in \mathscr{F}\}$$
è una misura su $\widetilde{\mathscr{F}}_\mu$ che coincide con μ su $\mathscr{F}$ e $\widetilde{\mathscr{F}}_\mu$ è $\tilde{\mu}$–completa.

Dimostrazione. Dall'inlcusione $\mathscr{F} \subset \widetilde{\mathscr{F}}_\mu$ segue che $\Omega \in \widetilde{\mathscr{F}}_\mu$. Se poi $A \in \widetilde{\mathscr{F}}_\mu$ ed $E \subset A \subset F$ sono insiemi di $\mathscr{F}$ con $\mu(F \setminus E)$, allora $F^c \subset A^c \subset E^c$ e $\mu(E^c \setminus F^c) = 0$, quindi $A^c \in \widetilde{\mathscr{F}}_\mu$. Infine, se $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \widetilde{\mathscr{F}}_\mu$ ed $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{F_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{F}$ sono tali che $E_i \subset A_i \subset F_i$ e $\mu(F_i \setminus E_i) = 0$ per ogni $i \in \mathbb{N}$, allora
$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i$$
e
$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i\right) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(F_i \setminus E_i) = 0,$$

quindi $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \widetilde{\mathscr{F}_\mu}$, e questo conclude la dimostrazione del fatto che $\widetilde{\mathscr{F}_\mu}$ sia una σ–algebra.

La misura $\widetilde{\mu}$ è ben definita ed è chiaramente una estensione di μ; resta da vedere che $\tilde{\mu}$ su $\widetilde{\mathscr{F}_\mu}$ sia σ–additiva. Siano quindi $\{A_i\}_{i\in N} \subset \widetilde{\mathscr{F}_\mu}$ disgiunti; allora, per come è definita $\tilde{\mu}$, se si prendono $E_i \subset A_i \subset F_i$ con $E_i, F_i \in \mathscr{F}$, $\mu(F_i \setminus E_i)$, ne consegue che

$$\tilde{\mu}\left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \mu\left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} E_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(E_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \tilde{\mu}(A_i).$$

□

Osservazione 1.20. Il completamento di una σ–algebra dipende fortemente dalla misura μ; infatti si possono dare esempi di due misure μ e ν che coincidono su di una data σ–algebra $\mathscr{F}$ ma per le quali $\widetilde{\mathscr{F}_\mu} \neq \widetilde{\mathscr{F}_\nu}$.

Gli insiemi appartenenti al completamento di una σ–algebra si possono caratterizzare come segue.

Proposizione 1.21. *Sia $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ uno spazio con misura si definiscano $\overline{\mu}, \underline{\mu} : \mathscr{P}(\Omega) \to [0, +\infty]$ ponendo*

$$\overline{\mu}(A) = \inf\{\mu(F) : A \subset F, F \in \mathscr{F}\}, \qquad \underline{\mu}(A) = \sup\{\mu(E) : E \subset A, E \in \mathscr{F}\}.$$

Allora $\overline{\mu} : \mathscr{P}(\Omega) \to [0, +\infty]$ è una misura esterna, $\underline{\mu} \leq \overline{\mu}$ e $A \in \widetilde{\mathscr{F}_\mu}$ se e solo se $\underline{\mu}(A) = \overline{\mu}(A)$.

Lasciamo come esercizio la dimostrazione della Proposizione precedente. Chiudiamo invece questo capitolo con la nozione di regolarità per una misura; tale nozione la diamo solo per misure in $\mathbb{R}^d$.

Definizione 1.22 (Borel Regolarità)**.** *Sia μ una misura su $\mathscr{F}$ con $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d) \subset \mathscr{F}$. Diremo che μ è regolare se:*

1. *$\mu(K) < +\infty$ per ogni compatto K;*
2. *per ogni $A \in \mathscr{F}$*
$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subset U, U \text{ aperto}\};$$
3. *per ogni U aperto*
$$\mu(U) = \sup\{\mu(K) : K \subset A, K \text{ compatto}\}.$$

Esempi di misure regolari sono la misura di Lebesgue, sia definita sui misurabili che sui Boreliani. Le misure di Hausdorff invece a priori non sono regolari; bisognerà restringerle su insiemi opportuni.

Ricordiamo il seguente risultato, che lasciamo come possibile approfondimento.

Proposizione 1.23. *Sia $\mu : \mathscr{B}(\mathbb{R}^d) \to [0, +\infty)$ una misura; allora μ è regolare e per ogni $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$*
$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A, K \text{ compatto}\}.$$

1.5 Esercizi

Esercizio 1.5.1. Dimostrare che una algebra di insiemi $\mathscr{F}$ è una σ–algebra se e solo se una delle seguenti condizioni è soddisfatta:

1. $\mathscr{F}$ è chiusa per unione di successioni crescenti di insiemi;
2. $\mathscr{F}$ è chiusa per intersezione di successioni decrescenti di insiemi.

Esercizio 1.5.2. Determinare tutte le σ–algebre di $\mathbb{N}$.

Esercizio 1.5.3. Sia μ la misura del conteggio su $\Omega = \mathbb{N}$; trovare una successione di insiemi monotoni decrescenti $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ per cui non valga

$$\mu\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \lim_{i\to+\infty} \mu(A_i).$$

Esercizio 1.5.4. Si definisca la misura su $\mathbb{R}$ ponendo

$$\mu(A) = \#(A \cap \mathbb{Q});$$

descrivere le proprietà di tale misura, in particolare la σ–finitezza, la completezza e la regolarità.

Esercizio 1.5.5. Si dimostri che se μ_i è una successione crescente di misure su $\mathscr{F}$, allora

$$\mu = \lim_{i\to+\infty} \mu_i$$

è una misura su $\mathscr{F}$; in particolare si studino le proprietà della misura su $\mathbb{R}$

$$\mu = \sum_{i\in\mathbb{N}} \delta_{x_i},$$

dimostrando quando è σ–finita e quando $\mu((a,b)) < +\infty$ per ogni intervallo aperto e limitato $(a,b) \subset \mathbb{R}$.

Esercizio 1.5.6. Dato $\Omega = \{a,b,c\}$, si definisca $\mu^*(\emptyset) = 0$, $\mu^*(\Omega) = 2$ e $\mu^*(A) = 1$ altrimenti; si determini $\mathscr{M}(\mu^*)$.

Esercizio 1.5.7. Si determinino condizioni sulla σ–algebra per cui $\delta_x = \delta_y$ implica $x = y$.

Esercizio 1.5.8. Dimostrare che se $\{A_i\}_{\in\mathbb{N}}$ è una successione di insiemi tali che

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i) < +\infty,$$

allora l'insieme $A = \{x : x \in A_i \text{ per infiniti indici } i\}$ è trascurabile.

Esercizio 1.5.9. Data una successione di insiemi $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, dimostrare che

$$\liminf_{i\to+\infty} \chi_{A_i} = \chi_B, \qquad \limsup_{i\to+\infty} \chi_{A_i} = \chi_C,$$

con

$$B = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \bigcap_{j\in\underline{i}^c} A_j, \qquad C = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \bigcup_{j\in\underline{i}^c} A_j.$$

Esercizio 1.5.10. Data la misura μ su $\mathscr{F}$, si definisca

$$\mu_\wedge(A) = \sup\{\mu(B) : B \subset A, \mu(B) < +\infty\}.$$

Si dimostri che $\mu_\wedge$ è una misura su $\mathscr{F}$ e che coincide con μ se μ è σ–finita; si cerchi di capire nel caso in cui μ non sia σ–finita.

Esercizio 1.5.11. Provare o trovare condizioni per cui se μ^* è una misura esterna su di uno spazio topologico $(\Omega, \mathscr{T})$ e $\mu = \mu^*_{|\mathscr{B}(\Omega)} : \mathscr{B}(\Omega) \to [0, +\infty]$ è una misura, allora $\mathscr{B}(\Omega) \subset \mathscr{M}(\mu^*)$.

1.6 Approfondimenti

1.6.1 Completamento della misura di Lebesgue.

Si potrebbe studiare il completamento della misura di Lebesgue; più precisamente, si dimostra che $(\mathbb{R}^d, \mathscr{M}(\lambda_d^*), \lambda_d)$ è il completamento di $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$. Bisogna dimostrare il seguente risultato.

Lemma 1.24. *Se $A \in \mathscr{M}(\lambda_d^*)$, allora esistono $E, F \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ con $E \subset A \subset F$ con $\lambda_d(F \setminus E) = 0$.*

1.6.2 Regolarità delle misure Boreliane.

Si potrebbe dimostrare la Proposizione 1.23, che passa per la dimostrazione del seguente risultato.

Lemma 1.25. *Sia μ una misura su $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$; allora, per ogni $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$*

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subset U \text{ aperto}\} = \sup\{\mu(C) : A \supset C \text{ chiuso}\}.$$

,

Capitolo 2

Funzioni misurabili e Integrazione

In questo capitolo introduciamo il concetto di funzione misurabile e definiremo l'integrale di una funzione misurabile. Premettiamo il seguente risultato. Il materiale di questo capitolo è quasi completamente tratto dal libro di Cohn [4].

Proposizione 2.1. *Sia $(\Omega, \mathscr{F})$ uno spazio misurabile e $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$. Sono equivalenti:*

1. $\{f \geq t\} \in \mathscr{F}$ *per ogni* $t \in \overline{\mathbb{R}}$*;*

2. $\{f > t\} \in \mathscr{F}$ *per ogni* $t \in \overline{\mathbb{R}}$*;*

3. $\{f \leq t\} \in \mathscr{F}$ *per ogni* $t \in \overline{\mathbb{R}}$*;*

4. $\{f < t\} \in \mathscr{F}$ *per ogni* $t \in \overline{\mathbb{R}}$*.*

Dimostrazione. Tali equivalenze sono ovvie grazie alle osservazioni che

$$\{f \geq t\}^c = \{f < t\}$$

e che

$$\{f > t\} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \left\{ f \geq t + \frac{1}{j} \right\}.$$

□

Possiamo quindi dare la seguente definizione.

Definizione 2.2 (Funzione misurabile)**.** *Una funzione $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ con $(\Omega, \mathscr{F})$ spazio misurabile viene detta $\mathscr{F}$–misurabile se $\{f > t\} \in \mathscr{F}$ per ogni $t \in \overline{\mathbb{R}}$. Una funzione viene detta Boreliana se $(\Omega, \mathscr{T})$ è uno spazio topologico e $\mathscr{F} = \mathscr{B}(\Omega)$.*

Nel seguito parleremo anche più semplicemente di funzione misurabile quando la σ–algebra $\mathscr{F}$ è chiara dal contesto.

Esempio 2.1. Esempi di funzioni misurabili sono:

1. le funzioni costanti;

2. le funzioni continue su spazi topoligici;

3. le funzioni semicontinue inferiormente o superiormente su spazi topologici, dove per funzione semicontinua inferiormente si intende una funzione per cui $\{f > t\} \in \mathscr{T}$ per ogni $t \in \overline{\mathbb{R}}$, e per funzione semicontinua superiormente una funzione per cui $\{f < t\} \in \mathscr{T}$ per ogni $t \in \overline{\mathbb{R}}$;

4. funzioni monotone da $\overline{\mathbb{R}}$ ad $\overline{\mathbb{R}}$;

5. le funzioni caratteristiche $f = \chi_A$ con $A \in \mathscr{F}$;

6. le funzioni semplici
$$f = \sum_{i \in \underline{n}} c_i \chi_{A_i},$$
con $c_i \in \overline{\mathbb{R}}$, $A_i \in \mathscr{F}$.

Osservazione 2.3. Per quanto riguarda le funzioni semplici non è mai restrittivo supporre che gli insiemi A_i siano disgiunti tra loro e che la loro unione sia tutto Ω. Faremo spesso questa assunzione.

2.1 Proprietà delle funzioni misurabili

Discutiamo in questa sezione alcune proprietà delle funzioni misurabili.

Proposizione 2.4. *Sia $(\Omega, \mathscr{F})$ uno spazio misurabile e $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ due funzioni misurabili; allora gli insiemi*
$$\{f < g\}, \quad \{f \leq g\}, \quad \{f = g\}$$
appartengono ad $\mathscr{F}$. Inoltre sono misurabili le funzioni
$$f \wedge g = \min\{f, g\}, \qquad f \vee g = \max\{f, g\}.$$

Dimostrazione. Basta dimostrare che il primo insieme è misurabile; notiamo a tal fine che
$$\{f < g\} = \bigcup_{p \in \mathbb{Q}} \{f < p\} \cap \{g > p\},$$
da cui il risultato dalla misurabilità di f e g.

L'ultima parte della proposizione segue notando che
$$\{f \wedge g \leq t\} = \{f \leq t\} \cup \{g \leq t\},$$
mentre
$$\{f \vee g \leq t\} = \{f \leq t\} \cap \{g \leq t\}.$$
□

Grazie alla precedente proposizione si ricava che parte positiva e parte negativa di una funzione misurabile definite ponendo
$$f^+ = f \vee 0, \qquad f^- = (-f) \vee 0 = -f \wedge 0$$
sono misurabili. Grazie alla seguente proposizione, anche la funzione valore assoluto
$$|f| = f^+ + f^-$$

risulterà misurabile. Questo segue dal fatto che per $t \leq 0$, $\{|f| > t\} = \Omega$, mentre per $t > 0$ vale la seguente identità

$$\{|f| > t\} = \{f^+ > t\} \cup \{f^- > t\}.$$

Si noti che mentre risulterà vero che f è misurabile se e solo se f^+ e f^- sono misurabili, non sarà vero che f è misurabile se e solo se $|f|$ è misurabile.

Proposizione 2.5. *Siano $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ funzioni misurabili e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; allora sono misurabili anche $\alpha f + \beta g$, $f \cdot g$ e f/g.*

Dimostrazione. Notiamo anzitutto che se f è misurabile e $\alpha > 0$ allora αf è misurabile in quanto

$$\{\alpha f \leq t\} = \{f \leq t/\alpha\}.$$

Allo stesso modo si ottiene la misurabilità di f se $\alpha < 0$. Date quindi f e g misurabili, la misurabilità di $f + g$ segue da

$$\{f + g < t\} = \{f < t - g\} = \bigcup_{p \in \mathbb{Q}} \{f < p\} \cap \{g < t - p\}.$$

Mostriamo ora la misurabilità di $f \cdot g$. Supponiamo quindi di avere h misurabile, $|h| < +\infty$; allora h^2 è misurabile in quanto

$$\{h^2 < t\} = \emptyset$$

se $t \leq 0$, mentre

$$\{h^2 < t\} = \{-\sqrt{t} < h < \sqrt{t}\}, = \{h > -\sqrt{t}\} \cup \{h < \sqrt{t}\}.$$

Quindi f^2, g^2 e $(f + g)^2$ sono misurabili e quindi

$$f \cdot g = \frac{1}{2}\Big((f + g)^2 - f^2 - g^2\Big)$$

è misurabile.

Per la misurabilità di f/g, l'insieme dove tale funzione è ben definita è dato da

$$A_0 = \{g \neq 0\} \in \mathscr{F};$$

inoltre

$$\left\{\frac{f}{g} < t\right\} = (\{g > 0\} \cap \{f < tg\}) \cup (\{g < 0\} \cap \{f > tg\}).$$

$\square$

Osservazione 2.6. Osserviamo quanto segue.

1. Se $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ è $\mathscr{F}$–misurabile e $B \in \mathscr{F}$, allora, posto

$$\mathscr{F}_B = \{A \cap B : A \in \mathscr{F}\},$$

   avremo che $f_{|B} : B \to \overline{\mathbb{R}}$ è $\mathscr{F}_B$–misurabile.

2. Se $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{F}$ è una famiglia di insiemi con

$$\Omega = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i,$$

allora se $f_{|B_i}$ sono tutte misurabili, f è misruabile dato che

$$\{f < t\} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \{f_{|B_i} < t\}.$$

Studiamo ora la stabilità del concetto di misurabilità per successioni di funzioni.

Proposizione 2.7. *Sia $(\Omega, \mathscr{F})$ uno spazio misurabile ed $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}} : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ una successione di funzioni misurabili; allora le funzioni*

$$\sup_{i\in\mathbb{N}} f_i, \quad \inf_{i\in\mathbb{N}} f_i, \quad \limsup_{i\to+\infty} f_i, \quad \liminf_{i\to+\infty} f_i$$

sono misurabili. Inoltre, nell'insieme dove il limite esiste, anche la funzione

$$\lim_{i\to+\infty} f_i$$

è misurabile.

Dimostrazione. Le dimostrazioni seguono dalle identità

$$\left\{\sup_{i\in\mathbb{N}} f_i \le t\right\} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \{f_i \le t\}, \quad \left\{\inf_{i\in\mathbb{N}} f_i < t\right\} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \{f_i < t\}$$

per dimostrare che l'estremo superiore ed inferiore di funzioni misurabili è misurabile. Per il limsup si usano le funzioni

$$g_k = \sup_{i\ge k} f_i, \qquad h_k = \inf_{i\ge k} f_i$$

per dimostrare che

$$\limsup_{i\to+\infty} f_i = \inf_{k\in\mathbb{N}} g_k, \quad \liminf_{i\to+\infty} f_i = \sup_{k\in\mathbb{N}} h_k.$$

Infine, notando che

$$A_0 = \left\{x : \exists \lim_{i\to+\infty} f_i(x)\right\} = \left\{\liminf_{i\to+\infty} f_i = \limsup_{i\to+\infty} f_i\right\}$$

è misurabile, si ricava la misurabilità di

$$\left\{x \in A_0 : \lim_{i\to+\infty} f_i(x) \le t\right\} = A_0 \cap \left\{\limsup_{i\to+\infty} f_i \le t\right\}.$$

□

Enunciamo il seguente risultato di approssimazione mediante funzioni semplici che sarà fondamentale nella definizione di integrale.

Proposizione 2.8. *Sia $f : \Omega \to [0,+\infty]$ una funzione $\mathscr{F}$–misurabile; esiste allora una successione di funzioni semplici positive $(s_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}_+$ tale che $s_i \leq s_{i+1}$ e*

$$f(x) = \lim_{i\to+\infty} s_i(x), \qquad \forall x \in \Omega.$$

Dimostrazione. Fissato $i \in \mathbb{N}$ si definisce, per ogni $j = 1, \ldots, i2^i$ l'insieme

$$A_{i,j} = \left\{ \frac{j-1}{2^i} \leq f < \frac{j}{2^i} \right\}.$$

La successione di funzioni semplici

$$s_i = \sum_{j=1}^{i2^i} \frac{j-1}{2^i} \chi_{A_{i,j}}$$

soddisfa i requisiti. □

Osservazione 2.9. Si osservi che nel caso in cui f sia limitata, allora il precedente risultato asserisce che la successione di funzioni semplici converge uniformemente alla funzione f.

Chiudiamo questa sezione con il seguente esempio, che mostra che non tutti gli insiemi misurabili secondo Lebesgue sono Boreliani.

Esempio 2.2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione di Cantor-Vitali, estesa con $f(x) = 0$ per $x \leq 0$ e $f(x) = 1$ per $x \geq 1$. Si definisca quindi la funzione $g : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$g(y) = \inf\{x : f(x) = y\}.$$

Tale funzione è strettamente monotona crescente (quindi misurabile), $g([0,1]) \subset C$ (con C l'insieme di Cantor) ed è tale che $f(g(y)) = y$. Se definiamo l'insieme $A = g(V)$ con V l'insieme di Vitali, Dato che $A \subset C$ e C è trascurabile, se ne deduce che $A \in \mathscr{M}(\lambda_1^*)$. Non può essere Boreliano; infatti notiamo che $g(x) \in A$ se e solo se esiste $y \in V$ tale che $g(x) = g(y)$, cioè, dato che g è iniettiva, $x \in V$. Quindi $V = \{g \in A\}$ sarebbe misurabile.

2.2 Proprietà valide quasi ovunque

In questa sezione discutiamo le questioni legate a proprietà che rimangono invariate per modificazioni quasi ovunque; supporremo di lavorare con una misura esterna μ^* ed una σ–algebra $\mathscr{F}$ contenuta in $\mathscr{M}(\mu^*)$. Quando si parla di una proprietà che vale μ^*–quasi ovunque (μ^*–q.o.) si sottointende l'esistenza di un insieme μ^*–trascurabile N per cui la proprietà vale ovunque in $\Omega \setminus N$. Se la σ–algebra $\mathscr{F}$ è completa, questo equivale a richiedere che esista $N \in \mathscr{F}$ con $\mu(N) = 0$ con la proprietà che vale ovunque su $\Omega \setminus N$. Se la σ–algebra non fosse completa, bisogna scrivere $(\mathscr{F}, \mu^*)$–q.o. se si richiede che $N \in \mathscr{F}$. Sarà chiaro dal contesto quale nozione di q.o. si intenderà.

Proposizione 2.10. *Sia $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione $\mathscr{F}$–misurabile e sia $g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione con $g = f$ μ–q.o. Allora se la σ–algebra $\mathscr{F}$ è μ–completa, g è $\mathscr{F}$–misurabile.*

Dimostrazione. Basta scrivere scrivere

$$\{g \leq t\} = (\{f \leq t\} \cap (\Omega \setminus N)) \cup (\{g \leq t\} \cap N)$$

per ottenere la $\mathscr{F}$–misurabilità in quanto

$$\{g \leq t\} \cap N \subset N$$

è trascurabile e quindi contenuto in $\mathscr{F}$ per completezza. □

Corollario 2.11. *Siano $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}} : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ funzioni $\mathscr{F}$–misurabili con $\mathscr{F}$ μ–completa; allora se $f_i \to f$ μ–q.o., f è $\mathscr{F}$–misurabile.*

Dimostrazione. Basta mettere insieme la Proposizione 2.10 e la Proposizione 2.7. □

Osservazione 2.12. Nella precedente Proposizione la completezza è fondamentale; infatti se N fosse μ–trascurabile ma non contenuto in $\mathscr{F}$, allora χ_N sarebbe zero μ–q.o. ma non sarebbe misurabile.

Chiudiamo con la seguente Proposizione, che tratta anche σ–algebre non complete.

Proposizione 2.13. *Una funzione $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ è $\widetilde{\mathscr{F}_\mu}$–misurabile se e solo se esistono f_1, f_2 $\mathscr{F}$–misurabili con $f_1 \leq f \leq f_2$ ovunque e $f_1 = f_2$ μ–q.o.*

2.3 Teoria dell'integrazione

Iniziamo col definire l'integrale per una funzione semplice positiva $s \in \mathcal{S}_+$

$$s = \sum_{i\in\underline{n}} a_i \chi_{A_i}, \qquad A_i \in \mathscr{F}, c_i \geq 0,$$

ponendo

$$\int_\Omega s d\mu = \sum_{i\in\underline{n}} c_i \mu(A_i).$$

Eventualmente modificando gli insiemi A_i tenendo conto delle mutue intersezioni ed estendendo eventualmente a 0 la funzione fuori dall'unione degli insiemi A_i, si può sempre supporre che

$$\Omega = \bigsqcup_{i\in\underline{n}} A_i.$$

Si nota facilmente che l'integrale di una funzione semplice è positivo e che non dipende dalla rappresentazione di s. Infatti, se si potesse scrivere in modo alternativo

$$s = \sum_{j\in\underline{m}} b_j \chi_{B_j}, \qquad B_j \in \mathscr{F}, b_j \geq 0$$

allora, dato che per ogni $i \in \underline{n}$,

$$A_i = \bigsqcup_{j\in\underline{m}} (A_i \cap B_j)$$

e che su $A_i \cap B_j$ $a_i = b_j$, otteniamo che

$$\sum_{i\in\underline{n}} a_i\mu(A_i) = \sum_{i\in\underline{n}} a_i \sum_{j\in\underline{m}} \mu(A_i\cap B_j) = \sum_{j\in\underline{m}} b_j \sum_{i\in\underline{n}} \mu(A_i\cap B_j) = \sum_{j\in\underline{m}} b_j\mu(B_j).$$

Elenchiamo nella seguente proposizioni alcune proprietà dell'integrale delle funzioni semplici che useremo in seguito.

Proposizione 2.14. *Siano $s_1, s_2 \in \mathcal{S}_+$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$. Allora:*

1. *(*linearità*)*
$$\int_\Omega (\alpha s_1 + \beta s_2) d\mu = \alpha \int_\Omega s_1 d\mu + \beta \int_\Omega s_2 d\mu;$$
2. *(*monotonia*) se $s_1 \leq s_2$ allora*
$$\int_\Omega s_1 d\mu \leq \int_\Omega s_2 d\mu;$$
3. *(*stabilità per successioni crescenti*) se $(s_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}_+$ è una successione monotona crescente di funzioni semplici convergenti a $s \in \mathcal{S}_+$, allora*
$$\int_\Omega s d\mu = \lim_{i\to+\infty} \int_\Omega s_i d\mu.$$

Dimostrazione.

1. Scriviamo
$$s_1 = \sum_{i\in\underline{n}} a_i\chi_{A_i}, \qquad s_2 = \sum_{j\in\underline{m}} b_j\chi_{B_j};$$
allora anche $\alpha s_1 + \beta s_2$ è semplice con
$$\alpha s_1 + \beta s_2 = \sum_{(i,j)\in\underline{n}\times\underline{m}} (\alpha a_i + \beta b_j)\chi_{A_i\cap B_j},$$
quindi
$$\begin{aligned}\int_\Omega (\alpha s_1 + \beta s_2) d\mu = &\sum_{(i,j)\in\underline{n}\times\underline{m}} (\alpha a_i + \beta b_j)\mu(A_i\cap B_j)\\ =&\alpha \sum_{(i,j)\in\underline{n}\times\underline{m}} a_i\mu(A_i\cap B_j) + \beta \sum_{(i,j)\in\underline{n}\times\underline{m}} b_j\mu(A_i\cap B_j)\\ =&\alpha\sum_{i\in\underline{n}} a_i\mu(A_i) + \beta\sum_{j\in\underline{m}} b_j\mu(B_j)\\ =&\alpha\int_\Omega s_1 d\mu + \beta\int_\Omega s_2 d\mu.\end{aligned}$$
2. La monotonia segue dalla positività e dalla linearità dell'integrale.

3. Grazie alla monotonia dell'integrale, si deduce che

$$\exists \lim_{i\to+\infty} \int_\Omega s_i d\mu \leq \int_\Omega s d\mu.$$

Dimostriamo la disugualianza inversa; scriviamo

$$s = \sum_{i\in \underline{n}} a_i \chi_{A_i}$$

e supponiamo che $a_i \neq 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Definiamo quindi

$$A_{k,i} = \{s_k \geq (1-\varepsilon)a_i\} \in \mathscr{F};$$

dal fatto che le s_k convergono monotonamente ad s si ricava che $A_{k,i} \subset A_{k+1,i}$ per ogni k ed ogni i e che

$$A_i = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_{k,i}.$$

Quindi, dato che

$$\lim_{k\to+\infty} \mu(A_{k,i}) = \mu(A_i), \qquad \forall i \in \underline{n},$$

se ne deduce che, posto

$$g_k = \sum_{i\in\underline{n}} (1-\varepsilon) a_i \chi_{A_{k,i}},$$

allora $g_k \leq s_k$; infine

$$\lim_{k\to+\infty} \int_\Omega g_k d\mu = \lim_{k\to+\infty} (1-\varepsilon) \sum_{i\in\underline{n}} a_i \mu(A_{k,i}) = (1-\varepsilon) \sum_{i\in\underline{n}} a_i \mu(A_i) = (1-\varepsilon) \int_\Omega s d\mu.$$

Dall'arbitrarietà di ε, la dimostrazione segue.

□

Possiamo quindi definire l'integrale di una funzione misurabile positiva $f : \Omega \to [0, +\infty]$ ponendo

$$\int_\Omega f d\mu = \sup \left\{ \int_\Omega s d\mu : 0 \leq s \leq f, s \in \mathcal{S}_+ \right\}.$$

Dobbiamo verificare la buona definizione; raccogliamo nella seguente proposizione tale risultato, dove si mostra che l'integrale di una funzione positiva è ben definito come limite di integrali fatti su una qualsiasi successione di funzioni semplici che convergono monotonamente ad f.

Proposizione 2.15. *Sia $(s_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}_+$ una successione monotona crescente di funzioni semplici positive e supponiamo che per ogni $x \in \Omega$*

$$\exists \lim_{i\to+\infty} s_i = f;$$

allora f è $\mathscr{F}$–misurabile e

$$\int_\Omega f d\mu = \lim_{i\to+\infty} \int_\Omega s_i d\mu.$$

Dimostrazione. La misurabilità di f è immediata; sappiamo inoltre che

$$\int_\Omega s_i d\mu \leq \int_\Omega s_{i+1} d\mu \leq \int_\Omega f d\mu$$

dalla monotonia della successione e dal fatto che $s_i \leq f$ ovunque per ogni $i \in \mathbb{N}$. Quindi

$$\exists \lim_{i\to+\infty} \int_\Omega s_i d\mu \leq \int_\Omega f d\mu.$$

Resta da mostrare la disuguaglianza inversa; data $s \in \mathcal{S}_+$ con $s \leq f$, abbiamo che $s \wedge s_i \in \mathcal{S}_+$ con

$$s = \lim_{i\to+\infty} s \wedge s_i$$

ovunque. Quindi, grazie alla Proposizione 2.14 (3)

$$\int_\Omega s d\mu = \lim_{i\to+\infty} \int_\Omega s \wedge s_i d\mu \leq \lim_{i\to+\infty} \int_\Omega f \wedge s_i d\mu = \lim_{i\to+\infty} \int_\Omega s_i d\mu.$$

Passando al sup sulle funzioni semplici minori di f si ottiene quindi che

$$\int_\Omega f d\mu \leq \lim_{i\to+\infty} \int_\Omega s_i d\mu.$$

□

Teorema 2.16. *Siano $f, g : \Omega \to [0, +\infty]$ funzioni $\mathscr{F}$–misurabili e $\alpha, \beta \in [0, +\infty)$; allora*

$$\int_\Omega (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_\Omega f d\mu + \beta \int_\Omega g d\mu.$$

Inoltre, se $f \leq g$, allora

$$\int_\Omega f d\mu \leq \int_\Omega g d\mu.$$

Dimostrazione. Basta notare che se $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}, (\tilde{s}_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}_+$ sono due successioni monotone crescenti di funzioni semplici con $s_i \leq f$, $\tilde{s}_i \leq g$ e

$$\int_\Omega f d\mu = \lim_{i\to+\infty} \int_\Omega s_i d\mu, \qquad \int_\Omega g d\mu = \lim_{i\to+\infty} \int_\Omega \tilde{s}_i d\mu,$$

allora $(\alpha s_i + \beta \tilde{s}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ è una successione monotona crescente di funzioni semplici convergenti a $\alpha f + \beta g$, quindi, grazie alla Proposizione 2.15 si conclude. □

Possiamo quindi dare la definizione di funzione integrabile.

Definizione 2.17 (Funzioni μ–integrabili)**.** *Data una funzione $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathscr{F}$–misurabile, scritto $f = f^+ - f^-$, diremo che f è μ–integrabile, e scriveremo $f \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$, se*

$$\int_\Omega f^+ d\mu < +\infty, \qquad \int_\Omega f^- d\mu < +\infty.$$

In tal caso poniamo

$$\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega f^+ d\mu - \int_\Omega f^- d\mu.$$

Dato $A \in \mathscr{F}$, diremo che f è μ–integrabile su A se $f \cdot \chi_A$ è μ–integrabile e porremo

$$\int_A f d\mu = \int_\Omega f \cdot \chi_A d\mu.$$

Osservazione 2.18.

1. Notiamo che la nozione di integrabilità su un insieme $A \in \mathscr{F}$ di una funzione definita solo su A, cioè $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathscr{F}_A$–misurabile, viene data in modo naturale considerando una qualsiasi estensione $\mathscr{F}$–misurabile, come ad esempio
$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{altrimenti;} \end{cases}$$
resta ovviamente da dimostrare che l'integrale non dipende dall'estensione considerata.

2. Lo spazio $\mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ è uno spazio vettoriale reale e l'integrale è un funzionale lineare monotono su di esso. Scrivendo poi $|f| = f^+ + f^-$, si nota che
$$\left| \int_\Omega f d\mu \right| = \left| \int_\Omega f^+ d\mu - \int_\Omega f^- d\mu \right| \leq \int_\Omega f^+ d\mu + \int_\Omega f^- d\mu = \int_\Omega |f| d\mu.$$
Quindi una funzione f che sia $\mathscr{F}$–misurabile è μ integrabile se e solo se
$$\int_\Omega |f| d\mu < +\infty.$$
La misurabilità di f, come abbiamo visto, implica quella di $|f|$ e quindi la condizione precedente è di facile verifica. Non basta sapere che la funzione $|f|$ sia misurabile con integrale finito per ottenere la misurabilità di f; basti pensare alla funzione
$$f = \chi_V - \chi_{V^c}$$
con V l'insieme di Vitali. In tal caso $|f| = 1$ è chiaramente misurabile con integrale finito su ogni insieme di misura finita di $\mathbb{R}$, ma la funzione f non è di per se misurabile.

Mostriamo ora che il concetto di integrabilità resta invariato per modifiche quasi ovunque.

Proposizione 2.19. *Siano $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ due funzioni $\mathscr{F}$–misurabili con $f = g$ μ–q.o.; allora f è integrabile se e solo se lo è g ed in tal caso*
$$\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega g d\mu. \tag{2.1}$$

Dimostrazione. Supponiamo anzitutto f e g non negative; in tal caso sia f che g sono integrabili e l'unica cosa da verificare è l'identità (2.1). Definiamo l'insieme μ–trascurabile $A = \{f \neq g\}$. La funzione misurabile $h_j = j\chi_A$ è una approssimazione di
$$h_A = \frac{\chi_A}{1 - \chi_A}$$
e chiaramente $f \leq g + h_A$. Approssimando poi g con funzioni semplici $s_j \nearrow g$, la funzione $\tilde{s}_j = s_j + h_j$ è una approssimazione di $g + h_A$ e vale
$$\int_\Omega (g + h_A) d\mu = \lim_{j \to +\infty} \int_\Omega (s_j + h_j) d\mu = \lim_{j \to +\infty} \int_\Omega s_j d\mu = \int_\Omega g d\mu.$$
Quindi
$$\int_\Omega f d\mu \leq \int_\Omega (g + h_A) d\mu = \int_\Omega g d\mu;$$

invertendo i ruoli tra f e g si ricava quindi che

$$\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega g d\mu.$$

Nel caso generale, si dividono f e g in parte positiva e parte negativa, $f = f^+ - f^-$ e $g = g^+ - g^-$; anche gli insiemi $A^\pm = \{f^\pm \neq g^\pm\}$ sono trascurabili e quindi

$$\int_\Omega f^\pm d\mu = \int_\Omega g^\pm d\mu;$$

se quindi una delle due funzioni f o g è integrabile, lo è pure l'altre con uguaglianza tra gli integrali. □

Chiudiamo questa sezione con un paio di risultati di facile dimostrazione.

Proposizione 2.20. *Sia $f : \Omega \to [0, +\infty]$ una funzione $\mathscr{F}$–misurabile; allora per ogni $t > 0$*

$$\mu(\{f \geq t\}) \leq \frac{1}{t} \int_\Omega f d\mu.$$

Dimostrazione. Basta considerare $A_t = \{f \geq t\}$ e notare che $f\chi_{A_t} \leq f$, quindi per monotonia

$$\int_\Omega f d\mu \geq \int_{A_t} f d\mu \geq t\mu(A_t).$$

□

Corollario 2.21. *Sia $f \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$; allora l'insieme $\{f \neq 0\}$ è μ–σ–finito.*

Dimostrazione. Basta notare che

$$\{f \neq 0\} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \left\{ |f| > \frac{1}{j} \right\}$$

e che ogni insieme $\{|f| > 1/j\}$ ha misura finita. □

Corollario 2.22. *Sia $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione $\mathscr{F}$–misurabile con*

$$\int_\Omega |f| d\mu = 0;$$

allora $f = 0$ μ–q.o.

Dimostrazione. Basta notare che

$$\mu\left(\left\{|f| > \frac{1}{j}\right\}\right) \leq j \int_\Omega |f| d\mu = 0$$

e che

$$\{f \neq 0\} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \left\{ |f| > \frac{1}{j} \right\}.$$

□

Corollario 2.23. *Sia* $f \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$*; allora* $|f| < +\infty$ μ*–q.o.*

Dimostrazione. Basta notare che

$$\mu\left(\{|f| > j\}\right) \leq \frac{1}{j}\int_\Omega |f| d\mu$$

e che quindi

$$\mu(\{|f| = \infty\}) \leq \mu(\{|f| > j\}) \leq \frac{1}{j}\int_\Omega |f| d\mu, \qquad \forall j \in \mathbb{N}.$$

□

2.4 Teoremi di convergenza

Trattiamo in questa sezione alcuni importanti teoremi di convergenza. Iniziamo col teorema di convergenza monotona.

Teorema 2.24 (Convergenza monotona)**.** *Siano* $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}} : \Omega \to [0, +\infty]$ *funzioni* $\mathscr{F}$*–misurabili tali che* $f_j \leq f_{j+1}$ *e* $f_j \to f$ μ*–q.o.; allora*

$$\int_\Omega f d\mu = \lim_{j\to+\infty}\int_\Omega f_j d\mu.$$

Dimostrazione. Supponiamo anzitutto di avere la monotonia e la convergenza ovunque; la monotonia dell'integrale implica che

$$\int_\Omega f_j d\mu \leq \int_\Omega f_{j+1} d\mu \leq \int_\Omega f d\mu,$$

quindi

$$\exists \lim_{j\to+\infty}\int_\Omega f_j d\mu \leq \int_\Omega f d\mu.$$

Mostriamo la disuguaglianza opposta; siano $s_{j,i}$ funzioni semplici con $s_{j,i} \nearrow f_j$ per ogni j. Definiamo quindi le funzioni semlici

$$h_j = \max\{s_{j,1}, \ldots, s_{j,j}\};$$

chiaramente $h_j \leq f_j$ e $h_j \nearrow f$. Quindi, grazie alla Proposizione 2.15 se ne deduce che

$$\int_\Omega f d\mu = \lim_{j\to+\infty}\int_\Omega h_j d\mu \leq \lim_{j\to+\infty}\int_\Omega f_j d\mu.$$

Infine, se denotiamo con N l'insieme dove non si ha monotonia e dove le f_j non convergono ad f, allora $\mu(N) = 0$ e le funzioni $f_j\chi_{N^c}$ convegono in modo monotono ovunque alle funzione $f\chi_{N^c}$. Dato che $f_j\chi_{N^c} = f_j$ e $f\chi_{N^c} = f$ μ–q.o., grazie alla Proposizione 2.19 si ricava che

$$\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega f\chi_{N^c} d\mu = \lim_{j\to+\infty}\int_\Omega f_j\chi_{N^c} d\mu = \lim_{j\to+\infty}\int_\Omega f_j d\mu.$$

□

Il seguente corollario è quindi a questo punto di immediata dimostrazione grazie al precedente Teorema applicato alle funzioni somme parziali.

Corollario 2.25 (Teorema di Beppo Levi). *Siano* $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}} : \Omega \to [0, +\infty]$ *funzioni* $\mathscr{F}$*–misurabili: allora*

$$\int_\Omega \sum_{j\in\mathbb{N}} f_j d\mu = \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_j d\mu.$$

Abbiamo anche il seguente importante risultato.

Teorema 2.26 (Lemma di Fatou). *Siano* $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}} : \Omega \to [0, +\infty]$ *funzioni* $\mathscr{F}$*–misurabili: allora*

$$\int_\Omega \liminf_{j\to+\infty} f_j d\mu \le \liminf_{j\to+\infty} \int_\Omega f_j d\mu.$$

Dimostrazione. È sufficiente definire le funzioni

$$g_j = \inf_{i\ge j} f_i;$$

ogni g_j è $\mathscr{F}$–misurabile, la successione delle g_j è monotona non decrescente e

$$\liminf_{j\to+\infty} f_j = \lim_{j\to+\infty} g_j.$$

Quindi, dato che $g_j \le f_j$, dalla monotonia dell'integrale e dal teorema di convergenza monotona,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \liminf_{j\to+\infty} f_j d\mu = \int_\Omega \lim_{j\to+\infty} g_j d\mu = \lim_{j\to+\infty} \int_\Omega g_j d\mu \\ \le \liminf_{j\to+\infty} \int_\Omega f_j d\mu.\end{aligned}$$

□

Chiudiamo questa sezione con il teorema di convergenza dominata.

Teorema 2.27 (Lebesgue di convergenza dominata). *Siano* $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}} : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *funzioni* $\mathscr{F}$*–misurabili; supponiamo che esista* $g : \Omega \to [0, +\infty]$ *funzione* $\mathscr{F}$*–misurabile ed integrabile tale che*

$$\exists \lim_{j\to+\infty} f_j(x) = f(x), \qquad |f_j(x)| \le g(x), \forall j \in \mathbb{N}$$

per μ*–q.o.* $x \in \Omega$*. Allora* f_j *e* f *sono integrabili e*

$$\int_\Omega f d\mu = \lim_{j\to+\infty} \int_\Omega f_j d\mu.$$

Dimostrazione. L'integrabilità di f_j e f segue da quella di g dato che anche $f \le g$ μ–q.o. Supponiamo anzitutto che le ipotesi del teorema siano valide ovunque e che $g < +\infty$ ovunque; allora le funzioni $g + f_j$ sono positive, $\mathscr{F}$–misurabili e

$$g + f = \lim_{j\to+\infty} (g + f_j)$$

ovunque. Dal Lemma di Fatou 2.26 segue quindi che

$$\int_\Omega (g+f)d\mu \leq \liminf_{j\to+\infty} \int_\Omega (g+f_j)d\mu$$

e quindi

$$\int_\Omega f d\mu \leq \liminf_{j\to+\infty} \int_\Omega f_j d\mu.$$

Mostriamo la disuguaglianza opposta; anche le funzioni $g - f_j$ sono positive, e quindi ancora grazie al Lemma di Fatou 2.26

$$\int_\Omega (g-f)d\mu \leq \liminf_{j\to+\infty} \int_\Omega (g-f_j)d\mu$$

da cui

$$\limsup_{j\to+\infty} \int_\Omega f_j d\mu \leq \int_\Omega f d\mu,$$

da cui la conclusione.

Nel caso in cui le richieste del Teorema sono valide solo quasi ovunque, basta sostituire le funzioni g, f ed f_j con $g\chi_{N^c}$, $f\chi_{N^c}$ ed $f_j\chi_{N^c}$ e procedere come nella dimostrazione del Teorema di convergenza monotona. □

2.5 Riemann vs Lebesgue

Chiudiamo questo capitolo con il confronto, data una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, tra l'integrale di Riemann che denoteremo con

$$\int_a^b f(x)dx$$

e l'integrale di Lebesgue, denotato con

$$\int_{[a,b]} f d\lambda.$$

La funzione caratteristica dei razionali è un esempio di funzione integrabile secondo Lebesgue ma non integrabile secondo Riemann. Ci poniamo quindi la questione se le funzioni integrabili secondo Riemann sono integrabili anche secondo Lebesgue. Abbiamo in effetti il seguente risultato.

Teorema 2.28. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Allora:*

1. *f è integrabile secondo Riemann se e solo se f è continua λ–q.o. in $[a, b]$;*
2. *se f è integrabile secondo Riemann, allora f è integrabile secondo Lebesgue e i due integrali coincidono.*

Dimostrazione. Supponiamo f integrabile secondo Riemann; sappiamo quindi che per ogni $j \in \mathbb{N}$ esiste una partizione $\mathcal{P}_j$ di $[a, b]$ tale che

$$S(f, \mathcal{P}_j) - s(f, \mathcal{P}_j) < \frac{1}{j}.$$

Senza ledere in generalità ed eventualmente raffinando le partizioni, possiamo supporre che $\mathcal{P}_{j+1}$ sia una sottopartizione di $\mathcal{P}_j$, $\mathcal{P}_{j+1} \le \mathcal{P}_j$. Definiamo quindi due successioni di funzioni semplici $g_j, h_j : [a,b] \to \mathbb{R}$ ponendo $g_j(a) = h_j(a) = f(a)$ e per $x \in (x_i, x_{i+1}]$

$$g_j(x) = \inf_{[x_i, x_{i+1}]} f, \qquad h_j(x) = \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f.$$

La successione $\{g_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ è una successione crescente di funzioni semplici con $g_j \le f$ e

$$\int_{[a,b]} g_j d\lambda = s(f, \mathcal{P}_j), \qquad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Analogamente la $\{h_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ è una successione decrescente di funzioni semplici con $h_j \ge f$ e

$$\int_{[a,b]} h_j d\lambda = S(f, \mathcal{P}_j), \qquad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Possiamo quindi definire i limiti puntuali di tali successioni di funzioni

$$g(x) = \lim_{j\to+\infty} g_j(x) \le f(x), \qquad h(x) = \lim_{j\to+\infty} h_j(x) \ge f(x);$$

tali funzioni sono Boreliane e grazie al Teorema di convergenza monotona

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]} g d\lambda &= \lim_{j\to+\infty} \int_{[a,b]} g_j d\lambda = \lim_{j\to+\infty} s(f, \mathcal{P}_j) = \lim_{j\to+\infty} S(f, \mathcal{P}_j) \\ &= \lim_{j\to+\infty} \int_{[a,b]} h_j d\lambda = \int_{[a,b]} h d\lambda.\end{aligned}$$

Valgono inoltre le seguenti identià

$$\int_{[a,b]} g d\lambda = \int_{[a,b]} h d\lambda = \int_a^b f(x) dx$$

e quindi

$$\int_{[a,b]} (h-g) d\lambda = 0.$$

Dato che $h - g \ge 0$, se ne deduce che $h = g$ λ–q.o.. Ne ricaviamo due fatti; se $x \in [a,b]$ è un punto tale che

$$x \notin \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_j, \qquad g(x) = h(x),$$

e quindi f è continua in x grazie alla definizione di g_j e h_j. Quindi f è continua λ–q.o. In più, dato che $g \le f \le h$, allora $f = g$ λ–q.o. e grazie alla Proposizione 2.19, f è integrabile anche secondo Lebesgue e

$$\int_{[a,b]} f d\lambda = \int_{[a,b]} g d\lambda = \int_a^b f(x) dx.$$

Resta da dimostrare che se f è continua λ–q.o., allora f è integrabile secondo Riemann; a tal fine, suddividiamo $[a,b]$ in 2^j sotto–intervalli uguali determinati dalla partizione $\mathcal{P}_j$ con vertici

$$a + \frac{i}{2^j}(b-a), \qquad i = 0, \dots, 2^j.$$

Definiamo g_j e h_j come nel passo precedente relativamente alla partizione $\mathcal{P}_j$ e si nota che

$$f(x) = \lim_{j\to+\infty} g_j(x) = \lim_{j\to+\infty} h_j(x)$$

in ogni punto x di continuità di f, e quindi λ–q.o. Se ne conclude che

$$\lim_{j\to+\infty}(h_j - g_j) = 0, \qquad \lambda - q.o.$$

Grazie al Teorema di convergenza dominata (o monotona) si deduce che

$$0 = \lim_{j\to+\infty} \int_{[a,b]} (h_j - g_j)d\lambda = \lim_{j\to+\infty} \left(S(f,\mathcal{P}_j) - s(f,\mathcal{P}_j)\right),$$

e quindi l'integrabilità di f secondo Riemann. $\square$

2.6 Funzioni tra spazi misurabili e misura immagine

Abbiamo finora considerato la nozione di misurabilità per funzioni a valori reali; esiste una nozione di misurabilità più generale, che però non garantisce a priori una buona definizione della teoria dell'integrazione.

Definizione 2.29. *Dati due spazi misurabili $(\Omega,\mathscr{F})$ e $(\Omega',\mathscr{F}')$, diremo che una funzione $f:\Omega\to\Omega'$ è $(\mathscr{F},\mathscr{F}')$–misurabile se $\{f\in A\}\in\mathscr{F}$ per ogni $A\in\mathscr{F}'$.*

La definizione precedente, grazie alla seguente Proposizione, è una generalizzazione del concetto di misurabilià vista finora, dove in tal caso si parla di funzioni $\mathscr{F}$–misurabili per intendere funzioni $(\mathscr{F},\mathscr{B}(\mathbb{R}))$–misurabile.

Proposizione 2.30. *Sia $f:\Omega\to\mathbb{R}$ un funzione con $(\Omega,\mathscr{F})$ spazio misurabile. Sono equivalenti:*

1. *f è $\mathscr{F}$–misurabile;*
2. *$\{f\in U\}\in\mathscr{F}$ per ogni aperto $U\subset\mathbb{R}$;*
3. *$\{f\in C\}\in\mathscr{F}$ per ogni chiuso $C\subset\mathbb{R}$;*
4. *$\{f\in A\}\in\mathscr{F}$ per ogni Boreliano $A\in\mathscr{B}(\mathbb{R})$.*

Dimostrazione. Basta notare che la famiglia

$$\mathscr{G} = \{A\subset\mathbb{R} : \{f\in A\}\in\mathscr{F}\}$$

è una σ–algebra grazie alle identità

$$\{f\in\mathbb{R}\} = \Omega, \qquad \{f\in A^c\} = \Omega\setminus\{f\in A\},$$
$$\left\{f\in\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right\} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{f\in A_i\}.$$

Dato che

$$\sigma(\{(t,+\infty), t\in\mathbb{R}\}) = \sigma(\{U, U\subset\mathbb{R}\text{ aperto}\}) = \sigma(\{C, C\subset\mathbb{R}\text{ chiuso}\}) = \mathscr{B}(\mathbb{R}),$$

si conclude la dimostrazione. $\square$

Il seguente risultato è di facile verifica.

Proposizione 2.31. *Siano* $(\Omega, \mathscr{F})$, $(\Omega', \mathscr{F}')$ *e* $(\Omega'', \mathscr{F}'')$ *spazi misurabili,* $f : \Omega \to \Omega'$, $g : \Omega' \to \Omega''$ *due funzioni rispettivamente* $(\mathscr{F}, \mathscr{F}')$*–misurabile e* $(\mathscr{F}', \mathscr{F}'')$*–misurabile. Allora* $g \circ f : \Omega \to \Omega''$ *è* $(\mathscr{F}, \mathscr{F}'')$*–misurabile. Inoltre,* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *e* $g : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ *sono* $\mathscr{F}$*–misurabili se e solo se sono rispettivamente* $(\mathscr{F}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ *e* $(\mathscr{F}, \mathscr{B}(\bar{\mathbb{R}}))$*–misurabili.*

Passiamo quindi alla definizione della misura immagine o legge di una misura tramite una funzione misurabile.

Definizione 2.32 (Misura immagine)**.** *Dato uno spazio di misura* $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$, *uno spazio misurabile* $(\Omega', \mathscr{F}')$ *ed una funzione* $f : \Omega \to \Omega'$ *che sia* $(\mathscr{F}, \mathscr{F}')$*–misurabile, si definisce misura immagine o legge di* μ *tramite* f *come la misura* $f_{\#}\mu$ *su* $\mathscr{F}'$ *data da*

$$f_{\#}\mu(A) = \mu \circ f^{-1}(A) = \mu(\{f \in A\}), \qquad \forall A \in \mathscr{F}'.$$

I due seguenti risultati sono di immediata verifica.

Proposizione 2.33. *Siano* $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ *spazio di misura,* $(\Omega', \mathscr{F}')$ *spazio misurabile,* $f : \Omega \to \Omega'$ *funzione* $(\mathscr{F}, \mathscr{F}')$*–misurabile e* $g : \Omega' \to \bar{\mathbb{R}}$ $\mathscr{F}'$*–misurabile; allora* g *è* $f_{\#}\mu$*–integrabile se e solo se* $g \circ f$ *è* μ*–integrabile e*

$$\int_{\Omega'} g df_{\#}\mu = \int_{\Omega} g \circ f d\mu. \tag{2.2}$$

Dimostrazione. È sufficiente verificare la formula (2.2) nel caso $g = \chi_A$ con $A \in \mathscr{F}'$; infatti in tal caso g è misuarbile e

$$\int_{\Omega'} g df_{\#}\mu = f_{\#}\mu(A) = \mu(\{f \in A\}) \int_{\Omega} \chi \circ f_A d\mu.$$

Si passa quindi a funzioni semplici e si sfrutta l'approssimazione mediante funzioni semplci di funzioni misurabili a valori reali. □

Corollario 2.34. *Sia* $g : \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ *una funzione* λ*–misurabile e* $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *date da* $f_1(x) = -x$, $f_2(x) = x + y$ *con* $y \in \mathbb{R}$ *fissato. Allora* g *è* λ*–integrabile se e solo se lo sono* $g \circ f_1$ *e* $g \circ f_2$ *e vale*

$$\int_{\bar{\mathbb{R}}} g d\lambda = \int_{\mathbb{R}} g(-x) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x + y) d\lambda(x).$$

2.7 Esercizi

Esercizio 2.7.1. Dimostrare che in generale l'estremo superiore di una famiglia arbitraria di funzioni misurabilie non è misurabile.

Esercizio 2.7.2. Dimostrare che se f è una funzione derivabile, allora f' è Boreliana.

Esercizio 2.7.3. Trovare un esempio di funzioni f e g che coincidono su un denso ma $f \neq g$ λ–q.o.; trovare invece condizioni su f e g per cui $f = g$ λ–q.o.

Esercizio 2.7.4. Dimostrare che se $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ è una successione di funzioni con $f_j \to f$ μ–q.o., allora esistono $\{g_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ e g per cui $g_j = f_j$ e $g = f$ μ–q.o. e $g_j \to g$ ovunque.

Esercizio 2.7.5. Dimostrare che nel caso in cui $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\mathbb{N})$ e μ la misura del conteggio, allora $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu) = \ell_1$.

Esercizio 2.7.6. Sia $f : \Omega \to \overline{\mathbb{N}}$ una funzione $\mathscr{F}$–misurabile; dimostrare che

$$\int_\Omega f d\mu = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(\{f \geq j\}).$$

Dedurre da questo che se $f : \Omega \to [0, +\infty]$ è $\mathscr{F}$–misurabile e μ è una misura finita, allora f è μ–integrabile se e solo se

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(\{f \geq j\}) < +\infty.$$

Esercizio 2.7.7. Trovare esempi di successioni $f_j, g_j, h_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ λ–integrabili convergenti a 0 λ–q.o. e per cui

$$\lim_{j\to+\infty} \int_\mathbb{R} f_j d\lambda = +\infty, \qquad \lim_{j\to+\infty} \int_\mathbb{R} g_j d\lambda = 1,$$

$$\liminf_{j\to+\infty} \int_\mathbb{R} h_j d\lambda = 1, \qquad \limsup_{j\to+\infty} \int_\mathbb{R} h_j d\lambda = 1;$$

spiegare dove fallisce in tali cali il Teorema di convergenza dominata.

Esercizio 2.7.8. Provare la seguente variante del Teorema di convergenza dominata: siano $f, f_t : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ funzioni $\mathscr{F}$–misurabili, $t \in [0, +\infty)$ con $f_t \to f$ per $t \to +\infty$, $|f_t| \leq g$ con g funzione μ–integrabile, allora

$$\int_\Omega f d\mu = \lim_{t\to+\infty} \int_\Omega f_t d\mu.$$

Applicare tale risultato per dimostrare che se $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione Boreliana tale che $x \mapsto e^{tx} f(x)$ λ–integrabile per ogni $t \in I$, allora la funzione

$$h(t) = \int_\mathbb{R} e^{tx} f(x) d\lambda(x)$$

è derivabile e calcolare h'.

Esercizio 2.7.9. Dimostrare che se $f_j, f : \Omega \to [0, +\infty]$ sono funzioni μ–integrabili con $f_j \to f$ μ–q.o. e

$$\int_\Omega f d\mu = \lim_{j\to+\infty} \int_\Omega f_j d\mu,$$

allora

$$\lim_{j\to+\infty} \int_\Omega |f - f_j| d\mu = 0.$$

Esercizio 2.7.10. Dimostrare che se $f : \Omega \to \Omega'$ e $\mathscr{F}$ σ–algebra su Ω, allora

$$f_\# \mathscr{F} = \{f(A) : A \in \mathscr{F}\}$$

è una σ–algebra. Analogamente, se $\mathscr{F}'$ è una σ–algebra su Ω', allora

$$f^\# \mathscr{F}' = \{f^{-1}(A) : A \in \mathscr{F}'\}$$

è una σ–algebra.

2.8 Approfondimenti

2.8.1 Misure e funzioni a valori in $\mathbb{C}$

Si potrebbe verificare che la teoria delle funzioni misurabili e dell'integrazione può estendersi anche a misure e funzioni a valori complessi; si tratta di rivedere alcune dimostrazioni e modificare il teorema di approssimazione mediante funzioni semplici.

2.8.2 Misurabilità in spazi di Banach

Si potrebbe studiare la misurabilità per funzioni $f : \Omega \to X$ con $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ spazio di misura e X spazio di Banach; esistono due nozioni principali di misurabilità, quella data usando su X la σ–algebra $\mathscr{B}(X)$, e quella usando la misurabilità debole, cioè richiedendo che f è misurabile se per ogni $x^* \in X^*$, la funzione $x^* \circ f$ è misurabile. Si dimostra che le due definizioni coincidono se X è separabile e che in tal caso il teorema di approssimazione mediante funzioni semplici è ancora valido, permettendo quindi la definizione dell'integrale, noto come integrale di Bochner.

Capitolo 3

Spazi $L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$

In questo capitolo studieremo in modo sistematico gli spazi di Lebesgue L^p; prima di arrivare a definire tali spazi, facciamo una breve panoramica sui concetti di convergenza per funzioni.

3.1 Convergenze quasi ovunque, in misura e quasi uniforme

Per successioni di funzioni si sono già viste le nozioni di convergenza puntuale e uniforme; affianchiamo a tali convergenze altre nozioni di convergenza e le confronteremo tra loro. Abbiamo in qualche modo già incontrato la convergenza quasi ovunque, intendendo che una successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge quasi ovunque ad f se esiste $N \in \mathscr{F}$ con $\mu(N) = 0$ per cui

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_(x), \qquad \forall c \in \Omega \setminus N.$$

Definizione 3.1 (Convergenza in misura)**.** *Data una successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : \Omega\mathbb{R}$ con $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ spazio con misura, diremo che f_n converge ad $f : \Omega \to \mathbb{R}$ in misura se*

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) = 0, \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

Non c'è nessuna relazione tra convergenza in misura e convergenza q.o.

Esempio 3.1. Si consideri $\Omega = [0, 1]$ e λ la misura di Lebesgue; allora la successione di funzioni data da $f_1 = \chi_{[0,1]}$ e

$$f_n = \chi_{[\frac{n-1-2^k}{2^k}, \frac{n-2^k}{2^k}]}, \qquad \text{se } 2^k < n \leq 2^k,$$

è una successione che converge in misura a 0 ma non converge in nessun punto.

Esempio 3.2. Si consideri $\Omega = \mathbb{R}$ con la misura di Lebesgue; allora la successione $f_n = \chi_{[n,+\infty)}$ converge a 0 q.o. ma non in misura; una variante è fornita anche dalla succession $f_n = \chi_{[n,n+1]}$.

Il problema dell'ultimo esempio non sta tanto nel fatto che l'insieme dove f_n dista da f sia di misura infinita, ma sta più che altro nel fatto che la misura dell'insieme ambiente sia infinita. Abbiamo infatti il seguente risultato.

Proposizione 3.2. *Sia $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ uno spazio con misura con $\mu(\Omega) < +\infty$; allora, se f_n converge ad f quasi ovunque, vi converge anche in misura.*

Dimostrazione. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e definiamo

$$A_n = \{|f_n - f| > \varepsilon\};$$

poniamo quindi

$$B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

La successione B_n è decrescente e

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset \{x \in \Omega : f_n(x) \text{ non converge ad } f(x)\}.$$

Quindi, visto che abbiamo convergenza q.o.,

$$\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n) = 0;$$

ma per la continuità della misura su insiemi decrescenti, dato che la misura è finita,

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(B_n) = 0.$$

Siccome vale anche $A_n \subset B_n$, se ne conclude che

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) = 0,$$

che era quanto volevamo dimostrare. □

Abbiamo inoltre il seguente risultato.

Proposizione 3.3. *Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione che converge in misura ad f; allora esiste una sottosuccessione f_{n_k} che converge ad f q.o..*

Dimostrazione. Dalla convergenza in misura possiamo costruire n_k strettamente monotona crescente in modo tale che

$$\mu\left(\left\{|f_{n_k} - f| > \frac{1}{k}\right\}\right) \leq \frac{1}{2^k}.$$

Poniamo

$$A_k = \left\{|f_{n_k} - f| > \frac{1}{k}\right\}$$

e notiamo che se

$$x \notin \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcap_{k=j}^{\infty} A_k,$$

allora esiste $j \in \mathbb{N}$ tale che

$$x \in \bigcap_{k=j}^{\infty} A_k,$$

e quindi $|f_{n_k}(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k}$ per ogni $k \geq j$. Abbiamo quindi la convergenza ovunque della successione $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ sul complementare di

$$\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty} A_k;$$

mostriamo che tale insiemi è trascurabile. Tale risultato seguirà ancora dalla continuità della misura per successioni decrescenti in quanto

$$\mu\left(\bigcup_{k=j}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=j}^{\infty}\mu(A_k) \leq \sum_{k=j}^{\infty}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{j-1}}.$$

□

Chiudiamo questa prima parte sulle convergenze con il setuente importante teorema, che è un teorema di convergenza quasi uniforme, dove una successione f_n viene detta convergere quasi uniformemente a f se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $B \in \mathscr{F}$ con $\mu(\Omega \setminus B) < \varepsilon$ tale che la successione f_n converga uniformemente ad f su B. È chiaro che una successione che converge quasi uniformemente converge anche q.o., ma vale anche il viceversa nel caso di misura finita grazie al seguente Teorema.

Teorema 3.4 (Egoroff)**.** *Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni $\mathscr{F}$–misurabili su uno spazio di misura $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ con $\mu(\Omega) < +\infty$. Se f_n converge ad f q.o., allora per ogni $\varepsilon > 0$, eiste $A \in \mathscr{F}$ con $\mu(\Omega \setminus A) < \varepsilon$ e tale che f_n converge uniformemente ad f su A.*

Dimostrazione. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e definiamo

$$g_n = \sup_{k\geq n}|f_k - f|, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Le funzioni g_n sono finite q.o. e convergono a 0 q.o. e convergono a 0 q.o. e quindi in misura; quindi, per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste n_k per cui

$$\mu\left(\left\{g_{n_k} > \frac{1}{k}\right\}\right) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Definiamo quindi gli insiemi

$$B_k = \left\{g_{n_k} \leq \frac{1}{k}\right\}$$

e notiamo che l'insieme $B = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_k$ soddisfa

$$\mu(\Omega \setminus B) = \mu(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\Omega \setminus B_k) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}}\mu(\Omega \setminus B_k) < \sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

Quindi, fissato $\delta > 0$ e k tale che $\frac{1}{k} < \delta$, dato che $B \subset B_k$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq g_{n_k}(x) \leq \frac{1}{k} < \delta, \qquad \forall x \in B$$

per ogni $n \geq n_k$, da cui la convergenza uniforme in B. □

3.2 Spazi L^p

Iniziamo con fare alcune considerazioni sullo spazio $\mathscr{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$; diremo che una successione di funzioni f_n di $\mathscr{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ converge in media ad f se

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega |f_n - f| d\mu = 0.$$

Ricordiamo i due seguenti Lemmi utili per la dimostrazione della completezza degli spazi L^p.

Lemma 3.5. *Se la successione f_n converge in media ad f, allora converge in misura.*

La convergenza in media quindi implica la convergenza q.o. solo a meno di sottosuccessioni. Le convergenze in misura e q.o. invece non sono sufficienti per la convergenza in media; basti pensare alle funzioni $f_n = n\chi_{0,1/n}$ in $(0, 1)$. Vale però il seguente risultato.

Lemma 3.6. *Se la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ad f q.o. o in misura e se esiste $g \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ a valori in $\bar{\mathbb{R}}$ per cui*

$$|f_n| \le g, |f| \le g, \qquad q.o.,$$

allora f_n converge ad f in media.

Dimostrazione. Nel caso della convergenza quasi ovunque, basta notare che $|f_n - f|$ tende a 0 q.o. e che $|f_n - f| \le 2g$ q.o. ed applicare quindi il Teorema di convergenza dominata.

Nel caso della convergenza in misura, ogni sottosuccessione estratta ha una estratta che converge ad f q.o., che quindi converge in media ad f. Questo implica la convergenza in media di f_n ad f. $\square$

Capitolo 4

Misure prodotto e Teorema di Fubini

In questo capitolo trattiamo la costruzione delle misure prodotto di misure date e dimostriamo il Teorema di Fubini. Il materiale contenuto in questo capitolo è preso quasi esclusivamente dal libro di Cohn [4].

Prima di affrontare tale costruzione dobbiamo introdurre alcune nozioni e risultati preliminari; le nozioni che introduciamo ora solo legate al fatto che date in generale due misure μ e ν su $\mathscr{F}$, la famiglia

$$\{A : \mu(A) = \nu(A)\}$$

non è una σ−algebra in generale (si veda ad esempio l'Esercizio 4.3.1.

Definizione 4.1 (Classe di Dynkin). *Una collezione di insiemi $\mathscr{D} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ viene detta classe di Dynkin su Ω se:*

1. $\Omega \in \mathscr{D}$;
2. *se* $A, B \in \mathscr{D}$ *e* $A \subset B$, *allora* $B \setminus A \in \mathscr{D}$;
3. *su* $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}$ *è una successione crescente di insiemi, allora*

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathscr{D}.$$

Esempio 4.1. È facile verificare che se $\mu, \nu : \mathscr{F} \to [0, +\infty)$ sono due misure con $\mu(\Omega) = \nu(\Omega)$, allora

$$\mathscr{D} = \{A \in \mathscr{F} : \mu(A) = \nu(A)\}$$

è una classe di Dynkin.

È facile notare che intersezioni arbitrarie di classi di Dynkin è una classe di Dynkin e che $\mathscr{P}(\Omega)$ è una classe di Dynkin. Data una famiglia di insiemi $\mathscr{C}$ è possibile quindi definire $\mathscr{D}(\mathscr{C})$ classe di Dynkin generata da $\mathscr{C}$ come la più piccola classe di Dynkin che contiene $\mathscr{C}$ e sarà determinata da

$$\mathscr{D}(\mathscr{C}) = \bigcap \{\mathscr{D} : \mathscr{D} \text{ è un sistema di Dynkin e } \mathscr{C} \subset \mathscr{D}\}.$$

Ricordiamo inoltre la seguente definizione.

Definizione 4.2 (π–sistema)**.** *Una collezione di insiemi $\mathscr{C}$ viene detta π–sistema se è chiusa per intersezioni finite.*

Esempi di π–sistemi in $\mathbb{R}$ sono dati da:

$$\begin{aligned}
\mathscr{C}_1 =&\{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}\\
\mathscr{C}_2 =&\{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}\\
\mathscr{C}_3 =&\{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}\\
\mathscr{C}_4 =&\{[a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}\\
\mathscr{C}_5 =&\{\emptyset\} \cup \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}\\
\mathscr{C}_6 =&\{\emptyset\} \cup \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}\\
\mathscr{C}_7 =&\{\emptyset\} \cup \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}\\
\mathscr{C}_8 =&\{\emptyset\} \cup \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}.
\end{aligned}$$

Abbiamo il seguente risultato.

Teorema 4.3. *Sia Ω un insieme e $\mathscr{C}$ un π–sistema; allora*

$$\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{D}(\mathscr{C}).$$

Come corollario di tale Teorema abbiamo quanto segue.

Corollario 4.4. *Sia $(\Omega, \mathscr{F})$ uno spazio misurabile, $\mathscr{C}$ un π–sistema con $\mathscr{F} = \sigma(\mathscr{C})$. Se μ e ν sono due misure finite con $\mu(\Omega) = \nu(\Omega)$ e $\mu(C) = \nu(C)$ per ogni $C \in \mathscr{C}$, allora $\mu = \nu$.*

Dimostrazione. Abbiamo già notato che

$$\mathscr{D} = \{A \in \mathscr{F} : \mu(A) = \nu(A)\}$$

è una classe di Dynkin; siccome $\mathscr{C} \subset \mathscr{D} \subset \mathscr{F}$ e $\mathscr{D}(\mathscr{C}) = \sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{F}$, se ne deduce che $\mathscr{D} = \mathscr{F}$. □

4.1 Misure prodotto

Dati due spazi misurabili $(\Omega, \mathscr{F})$ e $(\Omega', \mathscr{F}')$, si definisce la σ–algebra prodotto ponendo

$$\mathscr{F} \times \mathscr{F}' = \sigma(\{A \times A' : A \in \mathscr{F}, A' \in \mathscr{F}'\}).$$

Esempio 4.2. È facile vericare che

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}) \times \mathscr{B}(\mathbb{R}) = \mathscr{B}(\mathbb{R}^2),$$

mentre

$$\mathscr{M}(\lambda_1) \times \mathscr{M}(\lambda_1) \neq \mathscr{M}(\lambda_2);$$

come controesempio basta considerare l'insieme $V \times \{0\}$ con V insieme di Vitali.

Dato $A \subset \Omega \times \Omega'$ denotiamo con

$$\begin{aligned}
A_x =&\{y \in \Omega' : (x, y) \in A\}, \qquad x \in \Omega,\\
A^y =&\{x \in \Omega : (x, y) \in A\}, \qquad y \in \Omega',
\end{aligned}$$

mentre se $f : \Omega \times \Omega' \to \overline{\mathbb{R}}$, allora

$$\begin{aligned} f_x(y) =& f(x,y), \quad x \in \Omega \\ f^y(x) =& f(x,y), \quad y \in \Omega'. \end{aligned}$$

Abbiamo il seguente lemma.

Lemma 4.5. *Siano $A \in \mathscr{F} \times \mathscr{F}'$ e f $\mathscr{F} \times \mathscr{F}'$–misurabile, allora*

$$\begin{aligned} &A_x \in \mathscr{F}' \text{ e } f_x \ \text{ è } \mathscr{F}' \text{ misurabile per ogni } x \in \Omega \\ &A^y \in \mathscr{F} \text{ e } f^y \ \text{ è } \mathscr{F} \text{ misurabile per ogni } y \in \Omega'. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Definiamo

$$\mathscr{G} = \{A \subset \Omega \times \Omega' : A_x \in \mathscr{F}' \text{ per ogni } x \in \Omega\}$$

e

$$\mathscr{G}' = \{A \subset \Omega \times \Omega' : A^y \in \mathscr{F} \text{ per ogni } y \in \Omega'\}.$$

Tali famiglie sono σ–algebre e siccome per ogni $B \in \mathscr{F}$ e $B' \in \mathscr{F}'$ l'insieme $B \times B' \in \mathscr{G} \cap \mathscr{G}'$ dato che

$$(B \times B')_x = \begin{cases} B' & \text{se } x \in B \\ \emptyset & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

allora $\mathscr{F} \times \mathscr{F}' \subset \mathscr{G} \cap \mathscr{G}'$.

Analogamente, dato che

$$\begin{aligned} (f^{-1}(E))_x =& \{y \in \Omega' : (x,y) \in f^{-1}(E)\} = \{y \in \Omega' : f(x,y) \in E\} = \{y \in \Omega' : f_x(y) \in E\} \\ =& f_x^{-1}(E), \end{aligned}$$

si deduce la $\mathscr{F}'$–misurabilità di f_x per ogni $x \in \Omega$. Nello stesso modo si ottiene la $\mathscr{F}$–misurabilità di f^y per ogni $y \in \Omega'$. □

Enunciamo quindi il seguente teorema, dove viene definita e caratterizzata la misura prodotto.

Teorema 4.6 (Misura prodotto)**.** *Siano $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ e $(\Omega', \mathscr{F}', \mu')$ due spazi con misure σ–finiti; allora esiste ed è unica una misura su $\mathscr{F} \times \mathscr{F}'$, denotata con $\mu \otimes \mu'$ e chiamata misura prodotto tale che*

$$\mu \otimes \mu(A \times A') = \mu(A)\mu'(A'), \qquad \forall A \in \mathscr{F}, A' \in \mathscr{F}'. \tag{4.1}$$

Infine per ogni $E \in \mathscr{F} \times \mathscr{F}'$, valgono le seguenti identità

$$\mu \otimes \mu'(E) = \int_\Omega \mu'(E_x) d\mu(x) = \int_{\Omega'} \mu(E^y) d\mu'(y).$$

Dimostrazione. L'unicità della misura prodotto con la proprità (4.1) segue dal fatto che la famiglia dei rettangoli con lati misurabili è un π–sistema grazie al Corollario 4.4.

Dimostriamo che la funzione $x \mapsto \mu'(E_x)$ è misurabile per ogni $E \in \mathscr{F} \times \mathscr{F}'$. Definiamo a tal proposito

$$\mathscr{G} = \{E \in \mathscr{F} \times \mathscr{F}' : x \mapsto \mu'(E_x) \text{ misurabile}\}.$$

Dato che per ogni $A \times A'$,
$$\mu'((A \times A')_x) = \mu'(A')\chi_A(x),$$
se ne deduce che $A \times A' \in \mathscr{G}$ per ogni $A \in \mathscr{F}$ e $A' \in \mathscr{F}'$: quindi se si mostra che $\mathscr{G}$ è una classe di Dynkin si conclude.

È facile vedere che $\emptyset, \Omega \times \Omega' \in \mathscr{G}$. Dal fatto poi che se $E \subset F$ sono elementi di $\mathscr{G}$, allora dall'identità $(F \setminus E)_x = F_x \setminus E_x$ e da

$$\mu'((F \setminus E)_x) = \mu'(F_x) - \mu'(E_x),$$

segue la misurabilità di $x \mapsto \mu'((F \setminus E)_x)$. Infine se $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{G}$ è una famiglia crescente di insiemi, allora dato che
$$\mu'\left(\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i\Big)_x\right) = \sup_{i\in\mathbb{N}} \mu'((E_i)_x),$$
segue il fatto che $\mathscr{G}$ è una classe di Dynkin. In definitiva $\mathscr{G} = \mathscr{F} \times \mathscr{F}'$. In modo analogo si dimostra la misurabilità di $y \mapsto \mu(E^y)$.

Il teorema si conclude notando che le due funzioni

$$\nu_1(E) = \int_\Omega \mu'(E_x)d\mu(x)$$
$$\nu_2(E) = \int_{\Omega'} \mu(E^y)d\mu'(y)$$

sono due misure su $\mathscr{F} \times \mathscr{F}'$. Se $\mu(\Omega)$ e $\mu'(\Omega')$ sono finiti, allora

$$\nu_1(\Omega \times \Omega') = \nu_2(\Omega \times \Omega') < +\infty$$

e
$$\nu_1(A \times A') = \nu_2(A \times A') = \mu(A)\mu'(A').$$
per ogni $A \in \mathscr{F}$, $A' \in \mathscr{F}'$, quindi $\nu_1 = \nu_2$. Il caso in cui Ω e Ω' siano σ–finiti si conclude in modo ovvio. □

Come corollario della costruzione precedente si nota che

$$\lambda_2 = \lambda_1 \otimes \lambda_1$$

in $\mathbb{R}^2$ o più in generale
$$\lambda_d = \lambda_n \otimes \lambda_m$$
per ogni $n, m \in \mathbb{N}$ con $n + m = d$.

4.2 Il Teorema di Fubini

In questa sezione dimostriamo il Teorema di Fubini, che è una importante applicazione della teoria delle misure prodotto e delle funzioni misurabili su spazi prodotto. Abbiamo il seguente risultato preliminare.

Proposizione 4.7. *Siano $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ e $(\Omega', \mathscr{F}', \mu')$ due spazi di misura σ–finiti e sia $f : \Omega \times \Omega' \to [0, +\infty]$ una funzione $\mathscr{F} \times \mathscr{F}'$–misurabile. Allora:*

1. *le funzioni*
$$x \mapsto \int_{\Omega'} f_x d\mu', \qquad y \mapsto \int_{\Omega} f^y d\mu$$
sono $\mathscr{F}$*–misurabile e* $\mathscr{F}'$*–misurabile rispettivamente;*

2. *vale la seguente identità*
$$\int_{\Omega\times\Omega'} f d\mu \otimes \mu' = \int_{\Omega'} \left(\int_{\Omega} f^y d\mu \right) d\mu' = \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega'} f_x d\mu' \right) d\mu.$$

Dimostrazione. La misurabilità delle funzioni f_x e f^y è stata dimostrata nel Lemma 4.5 e quindi gli integrali
$$\int_{\Omega} f^y d\mu, \qquad \int_{\Omega'} f_x d\mu'$$
sono ben definiti. Per dimostrare la misurabilità e la conclusione del teorema si procede mediante approssimazione con funzioni semplici. Se $f = \chi_A$ con $A \in \mathscr{F} \times \mathscr{F}'$, allora la misurabilità della funzione
$$x \mapsto \int_{\Omega'} f_x d\mu' = \mu'(A_x)$$
segue da quanto visto nel Teorema 4.6 con
$$\mu(A) = \int_{\Omega} \mu'(A_x) d\mu = \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega'} f_x d\mu' \right) d\mu.$$
Si passa quindi a funzioni semplici e per approssimazione grazie alla convergenza monotona a funzioni misurabili arbitrarie. □

Osservazione 4.8. Notiamo che nella precedente Proposizione non serve l'itegrabilità della funzione f grazie al fatto di aver scelto f non negativa; infatti la conclusione vale ancora nel caso in cui l'integrale di f sia infinito, da cui anche il fatto che gli altri due integrali sono infiniti. L'integrabilità invece è necessaria se la funzione è di segno variabile.

Teorema 4.9 (Fubini)**.** *Siano* $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ *e* $(\Omega', \mathscr{F}', \mu')$ *due spazi di misura* σ*–finiti e sia* $f : \Omega \times \Omega' \to \overline{\mathbb{R}}$ *una funzione* $\mathscr{F} \times \mathscr{F}'$*–misurabile e* $\mu \otimes \mu'$*–integrabile. Allora:*

1. *la funzione* f_x *è* μ'*–integrabile per* μ*–q.o.* $x \in \Omega$ *e* f^y *è* μ*–interabile per* μ'*–q.o.* $y \in \Omega'$*;*

2. *le funzioni*
$$I_f(x) = \begin{cases} \int_{\Omega'} f_x d\mu' & \textit{se } f_x \textit{ è } \mu' - \textit{integrabile} \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$
e
$$J_f(y) = \begin{cases} \int_{\Omega} f^y d\mu & \textit{se } f^y \textit{ è } \mu - \textit{integrabile} \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$
sono μ*–integrabile e* μ'*–integrabile rispettivamente;*

3. *vale la seguente identità*
$$\int_{\Omega\times\Omega'} f d\mu \otimes \mu' = \int_{\Omega'} \left(\int_{\Omega} f^y d\mu \right) d\mu' = \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega'} f_x d\mu' \right) d\mu.$$

Dimostrazione. Si scrive $f = f^+ - f^-$ e si nota che la funzioni $(f^{\pm})_x$ e $f(^{\pm})^y$ sono q.o. integrabili grazie all'integrabilità di f. Fissiamo quindi $N \in \mathscr{F} \times \mathscr{F}'$ trascurabile tale che se $(x, y) \in N$ si abbia o

$$\int_{\Omega'} f_x d\mu' = +\infty$$

oppure

$$\int_{\Omega} f^y d\mu = +\infty.$$

Si nota che per $(x, y) \notin N$, allora

$$I_f(x) = \int_{\Omega'} f_x^+ d\mu' - \int_{\Omega'} f_x^- d\mu'$$

e quindi I_f è μ–integrabile. Si conclude grazie alla Proposizione 4.7 e alla Proposizione 2.19 □

Quanto visto in questo capitolo si può chiaramente estendere a prodotti di un numero finito di spazi con misura, procendendo induttivamente.

4.3 Esercizi

Esercizio 4.3.1. Si dimostri in generale che l'insieme di coincidenza tra due misure non è una σ–algerbra. Si consideri ad esempio $\Omega = \{a, b, c, d\}$ con

$$\mu(\{a\}) = 2, \mu(\{b\}) = 1, \mu(\{c\}) = 2, \mu(\{d\}) = 1$$

e

$$\nu(\{a\}) = 1, \nu(\{b\}) = 2, \nu(\{c\}) = 1, \nu(\{d\}) = 2.$$

Esercizio 4.3.2. Sia $A \in \mathscr{F} \times \mathscr{F}'$ e μ, μ' misure σ–finite; dimostrare che se $\mu'(A_x) = 0$ per μ–q.o. x, allora anche $\mu(A^y) = 0$ per μ'–q.o. y.

Esercizio 4.3.3. Dimostrare che le mappe $\pi_1 : \Omega \times \Omega' \to \Omega$,$\pi_2 : \Omega \times \Omega' \to \Omega'$

$$\pi_1(x, y) = x, \qquad \pi_2(x, y) = y$$

sono $(\mathscr{F} \times \mathscr{F}, \mathscr{F})$–misurabile e $(\mathscr{F} \times \mathscr{F}, \mathscr{F}')$–misurabile rispettivamente e che

$$\mathscr{F} \times \mathscr{F}' = \sigma(\pi_1, \pi_2).$$

Esercizio 4.3.4. Si dimostri che le mappe $i_1^y : \Omega \to \Omega \times \Omega'$ e $i_2^x : \Omega' \to \Omega \times \Omega'$

$$i_1(x) = (x, y), \qquad i_2(y) = (x, y)$$

sono $(\mathscr{F}, \mathscr{F} \times \mathscr{F}')$–misurabile e $(\mathscr{F}', \mathscr{F} \times \mathscr{F}')$–misurabile rispettivamante per ogni $x \in \Omega$ e $y \in \Omega'$.

Esercizio 4.3.5. Dimostrare che le rette, i cerchi, i grafici di funzioni e in generale i sostegni di curve regolari nel piano sono λ_2–trascurabili. Estendere il ragionamento al caso d–dimensionale.

Esercizio 4.3.6. Sia $\mu = \mathscr{H}^0$ la misura del conteggio, $f = \chi_D$ con $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$. dimostrare che

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f_x d\mathscr{H}^0 \right) d\lambda_1 \neq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f^y d\lambda_1 \right) d\mathscr{H}^0,$$

cercando di capire dove fallisce il Teorema di Fubini.

Esercizio 4.3.7. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq y < x+1 \\ -1 & \text{se } x \geq 0, x+1 \leq y < x+2 \\ 0 & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

dimostrare che

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f_x d\lambda_1 \right) d\lambda_1 \neq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f^y d\lambda_1 \right) d\lambda_1$$

cercando di capire dove fallisce il Teorema di Fubini.

Esercizio 4.3.8. Siano μ, μ', ν e ν' misure finite con $\mu \ll \nu$ e $\mu' \ll \nu'$; dimostrare che $\mu \otimes \mu' \ll \nu \otimes \nu'$ e determinare la derivata di Radon–Nikodym.

4.4 Approfondimenti

4.4.1 Classi di Dynkin

Si potrebbe approfondire le proprietà delle classi di Dynkin dimostrando i teoremi della sezione introduttiva di questo capitolo, con le applicazioni proposte negli esercizi contenuti nel libro di Cohn [4].

4.4.2 Convoluzioni in $\mathbb{R}^d$

Come applicazione del Teorema di Fubini si può affrontare lo studio delle proprietà delle convoluzioni in $\mathbb{R}^d$.

Capitolo 5

Elementi di teoria della probabilità

In questo capitolo introduciamo alcune nozioni relative alla teoria della probabilità; in particolare vedremo le importanti nozioni di indipendenza e di speranza condizionale. Il materiale contenuto in questo capitolo è essenzialmente preso dal libro di Dudley [6].

Supporremo di avere uno spazio con misura $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ con $\mu(\Omega) = 1$; si parla in questo caso di spazio di probabilità e, per sottolineare il fatto di avere a che fare con una misura di probabilità, scriveremo $\mu = \mathbb{P}$. Gli elementi di $\mathscr{F}$ vengono tipicamente detti eventi.

5.1 Variabili aleatorie, processi stocastici e filtrazioni

Le funzioni $\mathscr{F}$–misurabili su di uno spazio di probabilità vengono chiamate variabili aleatorie e tipicamente vengono indicate con le ultime lettere dell'alfabeto; denoteremo quindi ad esempio con $X, Y, Z : \Omega \to \mathbb{R}$ le variabili aleatorie, cioè le funzioni misurabili da Ω a valori reali $\mathbb{R}$.

Data una variabile aleatoria $X : \Omega \to \mathbb{R}$ che sia $\mathbb{P}$–integrabile, cioè $X \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, si denota con

$$\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X d\mathbb{P}$$

la media (anche detto valore atteso o aspettazione) di X. Si definisce inoltre la varianza della variabile aleatoria X, nel caso $X \in L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, cioè X a quadrato sommabile, come

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \int_\Omega (X - \mathbb{E}[X])^2 d\mathbb{P}.$$

Usando la misura immagine, possiamo enunciare il seguente risultato, la cui dimostrazione segue direttamente dalla Proposizione 2.33.

Proposizione 5.1. *Sia X una variabile aleatoria su $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ e sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione Boreliana tale che $g \circ X \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$; allora*

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_\mathbb{R} g dX_\# \mathbb{P}.$$

Proposizione 5.2. *Sia X una variabile aleatoria non negativa su $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$; allora*

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \mathbb{P}(\{X \geq t\}) dt.$$

Ricordiamo anche che per processo stocastico a tempi discreti si intende una famiglia di variabili aleatorie $X : \underline{n} \times \Omega \to \mathbb{R}$ con $n \in \mathbb{N}$ fissato tale che, denotando con $X(i, \omega) = X_i(\omega)$, si richiede che la funzione X_i sia una variabile aleatoria su $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ per ogni $i \in \underline{n}$. Per variabile aleatoria a tempi continui si intende invece una funzione $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ con I intervallo di $\mathbb{R}$ della forma $[0, T]$, $T > 0$ fissato o $[0, +\infty)$, tale che per ogni $t \in I$, X_t sia una variabile aleatoria su $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

Definizione 5.3 (Filtrazione)**.** *Dato uno spazio misurabile $(\Omega, \mathscr{F})$ ed un intervallo I del tipo $[0, T]$ o $[0, +\infty)$, si chiama filtrazione una famiglia $\{\mathscr{F}_t\}_{t \in I}$ di sotto σ–algebre crescente di $\mathscr{F}$, cioè una famiglia di σ–algebre tali che per ogni $t < s \in I$ $\mathscr{F}_t \subset \mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}$. Si parla di spazio filtrato per intendere la terna $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t \in I})$ con $\{\mathscr{F}_t\}_{t \in I}$ filtrazione.*

Dato un processo stocastico $(X_t)_{t \in I}$ è sempre possibile costruire una filtrazione ponendo

$$\mathscr{F}_t = \sigma(X_s : s \leq t);$$

in questo modo si ottiene una famiglia crescente di σ–algebre e $\mathscr{F}_t$ è la più piccola σ–algebra che rende continue tutte le variabili aleatorie X_s, $s \leq t$. In particolare, la funzione X_t è $\mathscr{F}_t$–misurabile. Interpretando gli elementi di una σ–algebra come eventi o informazioni su un dato sistema, il concetto di filtrazione esprime il concetto di informazioni che aumentano con il passare del tempo.

Definizione 5.4 (Processo adattato)**.** *Dato uno spazio filtrato $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t \in I})$, si parla di processo stocastico $(X_t)_{t \in I}$ adattato alla filtrazione $\{\mathscr{F}_t\}_{t \in I}$ se X_t è $\mathscr{F}_t$–misurabile per ogni $t \in I$.*

Come detto in precedenza, dato un processo stocastico si può sempre costruire una filtrazione, quella generata dal processo stesso, in modo tale che il processo sia adattato a tale filtrazione.

5.2 Indipendenza

Diamo anzitutto il concetto di indipendenza; si parla di indipendenza sia per eventi, che per σ–algebre e quindi per variabili aleatorie.

Definizione 5.5 (Indipendenza)**.** *Due eventi $A, B \in \mathscr{F}$ vengono detti indipendenti se*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Due σ–algebre $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2$ contenute in $\mathscr{F}$ vengono dette indipendenti se ogni evento $A \in \mathscr{F}_1$ è indipendente da ogni evento $B \in \mathscr{F}_2$, cioè se

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B), \qquad \forall A \in \mathscr{F}_1, \forall B \in \mathscr{F}_2.$$

Data una variabile aleatoria X che sia $\mathscr{F}$–misurabile e $\mathscr{F}'$ σ–algebra contenuta in $\mathscr{F}$, diremo che X è indipendente da $\mathscr{F}'$ se $\sigma(X)$ e $\mathscr{F}'$ sono indipendenti. Due variabili aleatorie X e Y $\mathscr{F}$–misurabili vengono dette indipendenti se $\sigma(X)$ e $\sigma(Y)$ sono indipendenti. Due processi stocastici $(X_t)_{t \in I}$ e $(Y_t)_{t \in I}$ vengono detti indipendenti se per ogni $t \in I$, $\sigma(X_t)$ e $\sigma(Y_t)$ sono indipendenti. Infine una famiglia indicizzata di sotto σ–algebre $\{\mathscr{F}_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ di $\mathscr{F}$, con Γ insieme arbitrario di indici, viene detta mutuamente indipendente se per ogni sottoinsieme finito $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\} \subset \Gamma$ e per ogni $A_i \in \mathscr{F}_{\gamma_i}$,

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_n).$$

Esempio 5.1. Un esempio di σ–algebre indipendenti è dato da $\Omega = (0,1)^2 \subset \mathbb{R}^2$, $\mathbb{P} = \lambda_2$ con

$$\mathscr{F} = \mathscr{B}((0,1)) \times \mathscr{B}((0,1))$$

e

$$\mathscr{F}_1 = \mathscr{B}((0,1)) \times (0,1), \qquad \mathscr{F}_2 = (0,1) \times \mathscr{B}((0,1));$$

infatti se $A \in \mathscr{F}_1$ e $B \in \mathscr{F}_2$, allora $A = A_1 \times (0,1)$ e $B = (0,1) \times B_1$ con $A_1, B_1 \in \mathscr{B}((0,1))$. Ma allora

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap B) =& \lambda_2(A_1 \times (0,1) \cap (0,1) \times B_1) = \lambda_2(A_1 \times B_1)\\ =& \lambda_1(A_1) \cdot \lambda_1(B_1) = \lambda_2(A_1 \times (0,1)) \cdot \lambda_2((0,1) \times B_1)\\ =& \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).\end{aligned}$$

Un esempio di variabili aleatorie indipendenti sono quindi le proiezioni $\pi_i : (0,1)^2 \to (0,1)$, $i = 1, 2$,

$$\pi_1(x,y) = x, \qquad \pi_2(x,y) = y.$$

Una delle prime proprietà dell'indipendenza è espressa dalla seguente proposizione.

Proposizione 5.6. *Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$; allora, se $X, Y, X \cdot Y \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$,*

$$\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y].$$

Dimostrazione. Dividendo sia X che Y in parte positiva e parte negativa, possiamo supporre sia X che Y non negative. Consideriamo quindi due successioni di funzioni semplici $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}, (s'_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}_+$ con s_i che sia $\sigma(X)$–misurabile e s'_i $\sigma(Y)$–misurabile per ogni $i \in \mathbb{N}$ e tali che

$$\mathbb{E}[X] = \lim_{i\to+\infty} \mathbb{E}[s_i], \qquad \mathbb{E}[Y] = \lim_{i\to+\infty} \mathbb{E}[s'_i].$$

Possiamo scrivere

$$s_i = \sum_{h\in\underline{n_i}} c_{i,h}\chi_{A_{i,h}}, \quad s'_i = \sum_{h\in\underline{m_i}} c'_{i,k}\chi_{A'_{i,k}}$$

con $A_{i,h} \in \sigma(X)$, $A'_{i.,k} \in \sigma(Y)$. Allora $s_i \cdot s'_i$ è una successione di funzioni semplici che converge a $X \cdot Y$ e quindi, grazie all'indipendenza,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X \cdot Y] &= \lim_{i\to+\infty} \mathbb{E}[s_i \cdot s'_i] = \lim_{i\to+\infty} \sum_{(h,k)\in\underline{n_i}\times\underline{m_i}} c_{i,h}c'_{i,k}\mathbb{E}[\chi_{A_{i,h}} \cdot \chi_{A'_{i,k}}]\\ &= \lim_{i\to+\infty} \sum_{(h,k)\in\underline{n_i}\times\underline{m_i}} c_{i,h}c'_{i,k}\mathbb{P}(A_{i,h} \cap A'_{i,k})\\ &= \lim_{i\to+\infty} \sum_{(h,k)\in\underline{n_i}\times\underline{m_i}} c_{i,h}c'_{i,k}\mathbb{P}(A_{i,h}) \cdot \mathbb{P}(A'_{i,k})\\ &= \lim_{i\to+\infty} \sum_{h\in\underline{n_i}} c_{i,h}\mathbb{P}(A_{i,h}) \sum_{k\in\underline{m_i}} c'_{i,k}\mathbb{P}(A'_{i,k})\\ &= \lim_{i\to+\infty} \mathbb{E}[s_i] \cdot \mathbb{E}[s'_i] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y].\end{aligned}$$

$\square$

Corollario 5.7. *Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ e siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni Boreliane; allora, se $f(X), g(Y), f(X) \cdot g(Y) \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$,*

$$\mathbb{E}[f(X) \cdot g(Y)] = \mathbb{E}[f(X)] \cdot \mathbb{E}[g(Y)].$$

5.3 Speranze condizionali

Il concetto di speranza condizionale generalizza quello di probabilità condizionale.

Ricordiamo che se $B \in \mathscr{F}$ è un evento con $\mathbb{P}(B) \neq 0$, allora lo spazio $(B, \mathscr{F}_B)$ diventa uno spazio di probabilità se si definisce per $A' = A \cap B$, $A \in \mathscr{F}$

$$\mathbb{P}_B(A') = \frac{\mathbb{P}(A')}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

La quantità $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}_B(A \cap B)$ prende il nome di probabilità condizionata, ed esprime la probabilità che un certo evento si verifichi sapendo che l'evento B è già avvenuto; vale infatti l'identità $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A|B)$.

Per generalizzare tale concetto alle variabili aleatorie, iniziamo anzitutto con la definizione di speranza condizionale per le funzioni a quadrato sommabile.

Teorema 5.8. *Dato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, una sotto σ–algebra $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ e $X \in L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, esiste ed è unica una variabile aleatoria $Y \in L^2(\Omega, \mathscr{G}, \mathbb{P})$ tale che*

$$\int_A Y d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P}, \qquad \forall A \in \mathscr{G}. \tag{5.1}$$

Tale variabile aleatoria prende il nome di speranza di X condizionata a $\mathscr{G}$, e si pone $Y = E(X|\mathscr{G})$.

Dimostrazione. Lo spazio $V = L^2(\Omega, \mathscr{G}, \mathbb{P})$ è un sottospazio vettoriale chiuso di $L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, quindi possiamo considerare la proiezione ortogonale π_V; dalle proprietà della proiezione ortogonale si ha che $X - \pi_V(X)$ è ortogonale ad $L^2(\Omega, \mathscr{G}, \mathbb{P})$. Quindi, se prendiamo in particolare χ_A con $A \in \mathscr{G}$, troviamo che

$$0 = \langle X - \pi_V(X), \chi_A \rangle_{L^2} = \int_\Omega (X - \pi_V(X))\chi_A d\mathbb{P} = \int_A (X - \pi_V(X)) d\mathbb{P},$$

da cui il fatto che $Y = \pi_V(X)$ soddisfa la (5.1).

Per quanto riguarda l'unicità, se esistessero due Y, Y' soddisfacenti la (5.1), allora

$$\int_A (Y - Y') d\mathbb{P} = \int_A (X - X) d\mathbb{P} = 0,$$

e quindi $Y = Y'$ $\mathbb{P}$–q.o. □

Osservazione 5.9. Il fatto che la speranza condizionale va cercata come la proiezione ortogonale segue dall'osservazione che se $Y \in L^2(\Omega, \mathscr{G}, \mathbb{P})$ è una variabile aleatoria che soddisfa la (5.1), allora mediante approssimazione con funzioni semplici si deduce che

$$\int_\Omega (X - Y) Z d\mathbb{P} = 0, \qquad \forall Z \in L^2(\Omega, \mathscr{G}, \mathbb{P}),$$

e quindi necessariamente $Y = \pi_V(X)$.

Esempio 5.2.

1. Nel caso in cui $\mathscr{G} = \sigma(B)$ con $B \in \mathscr{F}$ tale che $\mathbb{P}(B) \in (0,1)$, allora è facile notare che per ogni $A \in \mathscr{F}$
$$\mathbb{E}(\chi_A|\mathscr{G}) = \mathbb{P}(A|B)\chi_B + \mathbb{P}(A|B^c)\chi_{B^c}.$$
Per funzioni $X \in L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ si ha invece l'identità
$$\mathbb{E}(X|\mathscr{G}) = \frac{\mathbb{E}[X \cdot \chi_B]}{\mathbb{P}(B)}\chi_B + \frac{\mathbb{E}[X \cdot \chi_{B^c}]}{\mathbb{P}(B^c)}\chi_{B^c}$$
Si provi a vedere cosa succede se $\mathscr{G} = \sigma(\{B_1, \dots, B_n\})$ con $B_1, \dots, B_n \in \mathscr{F}$.
2. Nel caso in cui $\Omega = (0,1)^2$ con $\mathscr{F} = \mathscr{B}((0,1)^2)$, $\mathbb{P} = \lambda_2$, allora se $\mathscr{G} = \mathscr{B}((0,1)) \times (0,1)$ si trova che
$$\mathbb{E}(X|\mathscr{G})(x,y) = \int_0^1 X(x,t)d\lambda_1(t).$$

Elenchiamo qui di seguito alcune proprietà della speranza condizionale.

Proposizione 5.10. *La speranza condizionale soddisfa le seguenti proprietà.*

1. *Se* $\mathscr{G} = \{\emptyset, \Omega\}$, *allora* $\mathbb{E}(X|\mathscr{G}) = \mathbb{E}[X]$.
2. $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X|\mathscr{G})] = \mathbb{E}[X]$.
3. *Se* $X \le Y$, *allora* $\mathbb{E}(X|\mathscr{G}) \le \mathbb{E}(Y|\mathscr{G})$; *in particolare, se* $X \ge 0$, *allora* $\mathbb{E}(X|\mathscr{G}) \ge 0$.
4. *Per ogni* X, Y *e* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(\alpha X + \beta Y|\mathscr{G}) = \alpha\mathbb{E}(X|\mathscr{G}) + \beta\mathbb{E}(Y|\mathscr{G})$.
5. $|\mathbb{E}(X|\mathscr{G})| \le \mathbb{E}(|X||\mathscr{G})$: *questa proprietà permette di estendere la speranza condizionale ad ogni* $X \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, *come vedremo in seguito. Si dimostra inoltre che per ogni funzione convessa* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *se* $X \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ *è una variabile aleatoria tale che* $\varphi(X) \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, *allora*
$$\varphi\Big(\mathbb{E}(X|\mathscr{G})\Big) \le \mathbb{E}(\varphi(X)|\mathscr{G}).$$
6. *Se* $\mathscr{H} \subset \mathscr{G}$ *è una sotto* σ*–algebra di* $\mathscr{G}$, *allora*
$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathscr{G})|\mathscr{H}) = \mathbb{E}(X|\mathscr{H}).$$
7. *Se* X *è* $\mathscr{G}$*–misurabile, allora* $\mathbb{E}(X|\mathscr{G}) = X$.
8. *Se* $X, Y, X \cdot Y \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ *e* X *è* $\mathscr{G}$*–misurabile, allora*
$$\mathbb{E}(X \cdot Y|\mathscr{G}) = X\mathbb{E}(Y|\mathscr{G}).$$
9. *Se* X *è indipendente da* $\mathscr{G}$, *allora* $\mathbb{E}(X|\mathscr{G}) = \mathbb{E}[X]$.

Come preannunciato, chiudiamo questa sezione con il seguente risultato che estende la definizione di speranza condizionale a tutte le funzioni di $L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

Proposizione 5.11. *Dato uno spazio di probabilità* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ *ed una sotto* σ*–algebra* $\mathscr{G}$, *allora per ogni* $X \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ *esiste un'unica variabile aleatoria* $Y = \mathbb{E}(X|\mathscr{G}) \in L^1(\Omega, \mathscr{G}, \mathbb{P})$ *tale che*
$$\int_A X d\mathbb{P} = \int_A Y d\mathbb{P}, \qquad \forall A \in \mathscr{G}.$$

Dimostrazione. Basta usare la densità di $L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ in $L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. □

5.4 Martingale

Chiudiamo questo capitolo introducendo il concetto di martingala; tale concetto sarà importante in seguito quando introdurremo il moto Browniamo e l'integrale stocastico. Diamo tale definizione per processi stocastici continui, con ovvio adattamento a processi stocastici discreti.

Definizione 5.12 (Martingale). *Sia* $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\in I}, \mathbb{P})$ *uno spazio di probabilità filtrato e* $(X_t)_{t\in I}$ *un processo stocastico. Si dirà che:*

1. X *è una martingala se per ogni* $0 \le s < t$
$$X_s = \mathbb{E}(X_t|\mathscr{F}_s);$$
2. X *è una sopra–martingala se per ogni* $0 \le s < t$
$$X_s \ge \mathbb{E}(X_t|\mathscr{F}_s);$$
3. X *è una sotto–martingala se per ogni* $0 \le s < t$
$$X_s \le \mathbb{E}(X_t|\mathscr{F}_s).$$

Osservazione 5.13. È sempre possibile costruire una martingala fissata una filtrazione $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in I}$; infatti se $Y \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ è una data variabile aleatoria, allora il processo stocastico

$$X_t := \mathbb{E}(Y|\mathscr{F}_t)$$

è una martingala.

Si può inoltre dimostrare che se $(X_t)_{t\in I}$ è una martingala e $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione convessa con $\varphi(X_t) \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ per ogni $t \in I$, allora $(\varphi(X_t))_{t\in I}$ è una sotto–martingala. Analogamente, se $(X_t)_{t\in I}$ è una sotto–martingala e $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione convessa non decrescente con $\varphi(X_t) \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ per ogni $t \in I$, allora $(\varphi(X_t))_{t\in I}$ è una sotto–martingala.

5.5 Esercizi

Esercizio 5.5.1. Dato $\Omega = \underline{n}$, con $n \in \mathbb{N}$ fissato, si consideri la probabilità uniforme $\mathbb{P}(\{j\}) = \frac{1}{n}$ e la variabile aleatoria $X(j) = j$; calcolare media e varianza di X.

Esercizio 5.5.2. Dimostrare che se $\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ è una successione con

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j^2 < +\infty$$

e $\{X_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti con

$$m_j = \mathbb{E}[X_j] = 0, \qquad v_j = \mathbb{E}[X_j^2] = 1,$$

allora

$$\mathbb{E}\left[\Big|\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j X_j\Big|^2\right] = \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j^2.$$

Esercizio 5.5.3. Dimostrare che se $\{X_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ è una successione di variabili aleatorie indipendenti con $m_j = \mathbb{E}[X_j] = 0$ e $v_j = \mathbb{E}[X_j^2] = 1$, allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} = 0$$

$\mathbb{P}$–q.o.

Esercizio 5.5.4. Usando i risultati della Proposizione 2.20 e dell'Esercizio 1.5.8, dimostrare che se $\{X_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ è una successione di variabili aleatorie indipendenti identicamente distribuite, cioè $X_{i\#}\mathbb{P} = X_{j\#}\mathbb{P}$ per ogni $i, j \in \mathbb{N}$, allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} = \mathbb{E}[X_1]$$

$\mathbb{P}$–q.o.

Esercizio 5.5.5. Dimostrare le proprietà della speranza condizionale elencate nella Proposizione 5.10

5.6 Approfondimenti

5.6.1 Moto Browniano

Come approfondimento si può iniziare a definire e studiare le prime proprietà del moto Browniano. Si tratta di definire il moto Browniano come processo stocastico $\{B_t\}_{t\geq 0} : \Omega \to \mathbb{R}$ e descrivere le prime sue proprietà. Per moto Browniano standard si intende un processo stocastico con le proprietà:

1. $B_0 = 0$ $\mathbb{P}$–q.o.;
2. per ogni $0 < s < t$, B_s e $B_t - B_s$ sono indipendenti;
3. B_t ha legge Gaussiana di media 0 e varianza t, cioè

$$B_{t\#}\mathbb{P}(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_A e^{-\frac{|x|^2}{2t}} \, d\lambda(x), \qquad \forall A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}).$$

5.6.2 Disuguaglianza di Doob

Dimostrare che se $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ è una martingala, allora per $p > 1$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |M_t|^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[|M_T|^p].$$

Capitolo 6

Misure vettoriali, Radon–Nikodym e teoremi di ricoprimento

In questo capitolo studieremo alcuni teoremi relativi alle misure vettoriali, alla nozione di assoluta continuità e singolarità e ai teoremi di ricoprimento, per arrivare a considerare il teorema di derivazione di misure.

La prima parte è molto generale e si può affrontare in spazi misurabili molto generali; la parte invece relativa ai teoremi di derivazione di misure è Euclidea.

6.1 Misure vettoriali

Affronteremo ora lo studio delle misure con segno e più in generale delle misure vettoriali. Ricordiamo aclune definizione.

Definizione 6.1 (Misura vettoriale)**.** *Una funzione d'insieme $\mu : \mathscr{F} \to \mathbb{R}^p$ viene detta misura vettoriale se:*

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. *per ogni $A_i \in \mathscr{F}$, $i \in \mathbb{N}$, insiemi disgiunti,*

$$\mu\left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i).$$

Come vedremo a breve, una misura vettoriale è intrinsecamente una misura finita, dove la finitezza va intesa nel senso della variazione totale.

Definizione 6.2 (Variazione totale)**.** *Data una misura $\mu : \mathscr{F} \to \mathbb{R}^p$, si definisce per ogni $A \in \mathscr{F}$ la variazione totale di μ su A ponendo*

$$|\mu|(A) = \sup\left\{\sum_{i\in\mathbb{N}} |\mu(A_i)| : A = \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} A_i, A_i \in \mathscr{F}\right\}.$$

Abbiamo il seguente Teorema.

Teorema 6.3. *Sia $\mu : \mathscr{F} \to \mathbb{R}^p$ una misura vettoriale; allora $|\mu| : \mathscr{F} \to [0, +\infty]$ definisce una misura positiva con $|\mu|(\Omega) < +\infty$.*

Dimostrazione. Lasciamo per il momento come esercizio la verifica che $|\mu|$ sia una misura positiva. e dimostriamo solo che $|\mu|(\Omega) < +\infty$.

Se $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_p)$ è una misura vettoriale, dalla disuguaglianza

$$|\mu|(\Omega) \leq \sum_{i=1}^{p} |\mu_i|(\Omega)$$

si deduce che possiamo dimostrare l'asserto nel caso di misura scalare.

Supponiamo quindi per assurdo che $|\mu|(\Omega) = +\infty$; troveremo quindi un insieme $A_1 \in \mathscr{F}$ con $|\mu(A_1)| > 1$ e $|\mu|(\Omega \setminus A_1) = +\infty$. Iterando il ragionamento, si costruirà quindi una successione di insiemi $A_i \in \mathscr{F}$ disgiunti con $|\mu(A_i)| > 1$ per ogni $i \in \mathbb{N}$; questo sarà quindi un assurdo in quanto dovremmo avere che

$$\mu\left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i)$$

e quindi la serie a secondo membro dovrebbe essere convergente.

Se la variazione totale è infinita, allora esistono $E_i \in \mathscr{F}$ tali che

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} |\mu(E_i)| > 2(|\mu(\Omega)| + 1).$$

Definiamo

$$P = \{i \in \mathbb{N} : \mu(E_i) \geq 0\}, \qquad N = \{i \in \mathbb{N} : \mu(E_i) < 0\}$$

e poniamo

$$E = \bigcup_{i\in P} E_i, \qquad F = \bigcup_{i\in N} E_i.$$

Per uno dei due insiemi deve quindi valere

$$|\mu(E)| = \mu(E) > |\mu(\Omega)| + 1, \qquad |\mu(F)| = -\mu(F) > |\mu(\Omega)| + 1;$$

supponiamo si abbia $\mu(E) > |\mu(\Omega)| + 1 > 1$; dato che $\Omega = E \sqcup F$, se ne deduce che

$$|\mu(F)| = |\mu(\Omega) - \mu(E)| \geq \mu(E) - |\mu(\Omega)| > 1.$$

Quindi entrambi gli insiemi E ed F hanno la proprietà che $|\mu(E)|, |\mu(F)| > 1$; per l'additività di $|\mu|$, si deve anche avere che o $|\mu|(E) = +\infty$ oppure $|\mu|(F) = +\infty$; nel primo caso porremo $A_1 = F$, altrimenti $A_1 = E$. □

Osservazione 6.4. Grazie al precedente risultato, se μ è una misura scalare con segno, cioè se $p = 1$, allora le due misure

$$\mu^+ = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu), \qquad \mu^- = \frac{1}{2}(|\mu| - \mu),$$

sono misure positive e valgono le relazioni

$$\mu = \mu^+ - \mu^-, \qquad |\mu| = \mu^+ + \mu^-;$$

si ottiene quindi sempre, per una misura scalare, una decomposizione in parte positiva e parte negativa. La decomposizione in parte positiva e parte negativa non è unica; come vedremo in seguito, esiste però una decomposizione privilegiata che prende il nome di decomposizione di Jordan.

È facile notare che se una misura è tale che $|\mu|(\Omega) = 0$, allora $\mu(A) = 0$ per ogni $A \in \mathscr{F}$. Inoltre dalla definizione segue subito che date due misure μ e ν

$$|\mu + \nu|(\Omega) \leq |\mu|(\Omega) + |\nu|(\Omega).$$

Possiamo quindi definire sullo spazio lo spazio vettoriale reale

$$\mathbb{M}(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{R}^p)\, \{\mu : \mathscr{F} \to \mathbb{R}^p \text{ misura}\}$$

delle misure misure vettoriali che diventa uno spazio normato con la norma

$$\|\mu\| = |\mu|(\Omega).$$

Nel seguito scriveremo scriveremo $\mathbb{B}(\Omega, \mathscr{F})$ per intendere $\mathbb{B}(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{R})$.

Lasciamo come esercizio la dimostrazione del seguente risultato.

Proposizione 6.5. *Lo spazio $(\mathbb{M}(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{R}^p), \|\cdot\|)$ è uno spazio di Banach, infinito dimensionale se la σ–algebra $\mathscr{F}$ non è finita.*

6.2 Il Teorema di Radon-Nikodym

Scopo di questa sezione è la dimostrazione del Teorema di decomposizione di Hanh e del Teorema di Radon-Nikodym. Considereremo solo il caso scalare $p = 1$; per il caso generale si ragiona componente per componente.

Iniziamo col seguente risultato, riguardante le misure scalari e la cui dimostrazione abbiamo preso dal libro Bogachev[5]. Ricordiamo che un insieme E viene detto positivo per una misura μ se

$$\mu(F) \geq 0, \qquad \forall F \subset E;$$

diremo invece che E è un insieme negativo se

$$\mu(F) \leq 0, \qquad \forall F \subset E.$$

Proposizione 6.6 (Decomposizione di Hahn)**.** *Sia $\mu \in \mathbb{M}(\Omega, \mathscr{F})$ una misura scalare; esiste allora $P \in \mathscr{F}$*

$$\mu(E) \geq 0, \qquad \forall E \subset P,$$

mentre

$$\mu(E) \leq 0, \qquad \forall E \subset \Omega \setminus P.$$

Si ottiene quindi la decomposizione $\Omega = P \sqcup N$, di Ω con un insieme positivo ed uno negativo per la misura μ.

Dimostrazione. Si pone

$$\alpha = \inf \{\mu(E) : E \in \mathscr{B}(\Omega) \text{ è un insieme negativo}\} > -|\mu|(\Omega);$$

e
$$\beta = \sup\{\mu(E) : E \in \mathscr{B}(\Omega) \text{ è un insieme positivo}\} < |\mu|(\Omega)$$
chiaramente il caso interessante è $\alpha < 0 < \beta$, altrimenti o μ oppure $-\mu$ è una misura positiva. Si considera una successione $\{E_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ di insiemi per cui positivi per μ tale che
$$\lim_{h\to+\infty} \mu(E_h) = \beta.$$
Poniamo quindi
$$P = \bigcup_{h\in\mathbb{N}} E_h$$
È facile vedere che $\mu(P) > 0$ per ogni $E \subset P$ ed inoltre $\mu(P) = \beta$. Resta da mostrare che $\Omega \setminus P$ è un insieme negativo. Se esistesse $E \subset \Omega \setminus P$ con $\mu(E) > 0$, allora E non può essere un insieme positivo perchè altrimenti avremmo che
$$\mu(E \cup P) = \mu(E) + \mu(P) > \beta,$$
che contraddice la massimalità di β. Un tale insieme E, se esiste, deve ammettere quindi un sottoinsieme $F \subset E$ con $\mu(F) < 0$. Definiamo quindi
$$\alpha_1 = \inf\{\mu(F) : F \subset E\} < 0$$
e fissiamo $F_1 \subset E$ tale $\mu(F_1) \leq \alpha_1/2$. Si osservi che $\mu(E \setminus F_1) > \mu(E) > 0$ e quindi ancora $E \setminus F_1$ non può essere un insieme positivo altrimenti contraddirremmo la massimalità di β. Iteriamo quindi il processo definendo
$$\alpha_h = \inf\left\{\mu(F) : F \subset E \setminus \bigcup_{i=1}^{h-1} F_i\right\} < 0$$
e F_h tale che $\mu(F_h) \leq \alpha_h/2$. È chiaro che $\alpha_h \to 0$, altrimenti avremmo che
$$|\mu|\left(\bigsqcup_{h=1}^{\infty} F_h\right) = -\sum_{h=1}^{\infty} \mu(F_h) = +\infty,$$
contraddicendo la finitezza di μ. Si noti che l'insieme
$$F = E \setminus \bigsqcup_{h=1}^{\infty} F_h$$
ha la proprietà che $\mu(F) > 0$ ed è un insieme positivo; infatti, se esistesse $C \subset F$ con $\mu(C) < 0$, allora esisterebbe $h \in \mathbb{N}$ per chi $\mu(C) < \alpha_h$, contraddicendo la definizione di α_h dato che
$$C \subset E \setminus \bigsqcup_{i=1}^{h} F_i.$$
□

Come corollario immediato abbiamo il seguente risultato.

Teorema 6.7 (Decomposizione di Jordan). *Sia $\mu \in \mathbb{M}(\Omega, \mathscr{F})$; esistono allora due misure positive μ^+ e mu^- tali che*

$$\mu = \mu^+ - \mu^-;$$

inoltre le due misure μ^+ e μ^- sono concentrate su insiemi disgiunti, nel senso che esite $P \in \mathscr{F}$ tale che $\mu^-(P) = 0$ e $\mu^+ = \mu^+ \llcorner P$.

Dimostrazione. Basta considerare la decomposizione di Hahn $\Omega = P \sqcup N$ e definire $\mu^+ = \mu \llcorner P$ e $\mu^- = -\mu \llcorner (\Omega \setminus P)$ e il risultato segue. □

Ricordiamo ora brevemente le seguenti definizioni.

Definizione 6.8 (Misure assolutamente continue e singolari). *Date $\mu \in \mathbb{M}(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{R}^p)$ e $\nu \in \mathbb{M}(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{R}^q)$ due misure vettoriali, diremo che:*

1. *ν è assolutamente continua rispetto a μ, $\nu \ll \mu$, se per ogni $A \in \mathscr{F}$ con $|\mu|(A) = 0$, allora $|\nu|(A) = 0$;*

2. *ν è singolare rispetto a μ, $\nu \perp \mu$, se sono concentrate su insiemi disgiunti, cioè se esiste $B \in \mathscr{F}$ tale che $|\mu|(B) = 0$ e $\nu = \nu \llcorner B$.*

Esempio 6.1. Un modo facile per costruire misure assolutamente continue è prendendo μ una misura positiva e $f \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$; allora la misura $\nu = \mu \llcorner f$ definita da

$$\nu(A) = \mu \llcorner f(A) = \int_A f d\mu, \qquad \forall A \in \mathscr{F}$$

è una misura finita $\nu \ll \mu$.

Esempi di misure singolari sono la misura di Lebesgue e la Delta di Dirac.

Osserviamo anzitutto che per ogni misura vettoriale, $\mu \ll |\mu|$; inoltre, nel caso di misura scalare

$$\mu = \sigma_\mu |\mu|,$$

dove σ_μ è la funzione definita mediante la decomposizione di Hahn

$$\sigma_\mu = \chi_P - \chi_{P^c}.$$

Abbiamo il seguente risultato, che enunciamo e dimostriamo solo nel caso di misure scalari positive e finite, ma che può essere facilmente esteso a misure più generali.

Teorema 6.9 (Radon–Nikodym). *Siano μ e ν due misure positive e finite su $(\Omega, \mathscr{F})$; se $\nu \ll \mu$, allora esiste ed è unica una funzione $f \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ positiva e finita ovunque tale che $\nu = \mu \llcorner f$.*

Dimostrazione. Definiamo la famiglia non vuota di funzioni

$$\mathscr{A} = \{f \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu, [0, +\infty]) : \int_E f d\mu \leq \nu(E), \forall E \in \mathscr{F}\}.$$

Posto

$$M = \sup_{f \in \mathscr{A}} \int_\Omega f d\mu,$$

dimostriamo che tale estremo superiore è un massimo; se $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ è una successione massimizzante, possiamo renderla monotona crescente ponendo

$$g_j(x) = \max_{i=1,\ldots,j} f_i(x).$$

Notiamo che $g_j \in \mathscr{A}$ in quanto, se denotiamo con

$$F_i^j = \{g_j = f_i\}, \quad E_1^j = F_1^j, E_i^j = F_i^j \setminus \bigcup_{h=1}^{i-1} F_k^j, \qquad i = 1, \ldots, j,$$

allora

$$\int_E g_j d\nu = \sum_{i=1}^{j} \int_{E\cap E_i^j} f_i d\mu \leq \sum_{i=1}^{j} \mu(E \cap E_i^j) = \mu(E).$$

Per convergenza monotona, posto $f = \sup_j g_j$, vale ancora che $f \in \mathscr{A}$ e con

$$\int_\Omega f d\mu = M.$$

Dimostriamo ora che per ogni $E \in \mathscr{F}$

$$\nu(E) = \int_E f d\mu.$$

Definiamo quindi la misura non negativa

$$\nu_0(E) = \nu(E) - \int_E f d\mu;$$

è chiaro che $\nu_0 \ll \mu$; se ν_0 non fosse nulla, allora esisterebbe E_0 tale che $\nu_0(E_0) > 0$. Dato che le misure sono finite, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $\nu_0(\Omega) > \varepsilon\mu(\Omega)$. Inoltre, dalla decomposizione di Hanh $\Omega = P \sqcup N$ relativa alla misura non necessariamente positiva $\nu_0 - \varepsilon\mu$, avremmo che

$$\nu_0(A \cap P) \geq \varepsilon\mu(A \cap P), \qquad \forall A \in \mathscr{F};$$

quindi

$$\nu(A) = \int_A f d\mu + \nu_0(A) \geq \int_A f d\mu + \nu_0(A \cap P) \geq \int_A f d\mu + \varepsilon\mu(A \cap P) = \int_A (f + \varepsilon\chi_P) d\mu.$$

L'assoluta continuità di ν rispetto a μ garantisce il fatto che $\mu(P) > 0$, e quindi avremmo trovato che $f + \varepsilon\chi_P \in \mathscr{A}$ e

$$\int_\Omega (f + \varepsilon\chi_P) d\mu > M,$$

che è un assurdo.

Per quanto riguarda l'unicità, se ci fossero due funzioni per cui

$$\nu(A) = \int_A f_1 d\mu = \int_A f_2 d\mu, \qquad \forall A \in \mathscr{F},$$

se ne deduce che $f_1 = f_2$ μ–q.o. $\square$

Osservazione 6.10. Il Teorema precedente può essere facilmente esteso al caso di misure σ–finite; basta notare che se si scrive

$$\Omega = \bigcup_{h\in\mathbb{N}} \Omega_h$$

con $\Omega_h \subset \Omega_{h+1}$ e μ e ν positive e finite su Ω_h, allora potremmo applicare il predente Teorema per trovare per ogni $h \in \mathbb{N}$ una funzione $f_h \in L^1(\Omega_h, \mathscr{F}, [0,+\infty))$; l'unicità garantisce che la restrizione di f_{h+1} ad Ω_h coincide μ–q.o. con f_h, potendo quindi definire $f : \Omega \to [0,+\infty)$ ponendo $f_{|\Omega_h} = f_h$.

Definizione 6.11. *La funzione $f \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ del Teorema di Radon–Nikodym viene detta derivata di Radon–Nikodym della misura ν rispetto alla misura μ.*

Come corollario del Teorema precedente si ha chiaramente che $\mu \ll |\mu|$; esiste quindi $\sigma \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, |mu|)$ tale che $\mu = |\mu| \llcorner \sigma$; tale scritttura viene detta decomposizione polare della misura μ.

Chiudiamo questo capitolo con il seguente Teorema di decomposizione.

Teorema 6.12 (Decomposizione di Radon–Nikodym)**.** *Siano μ e ν due misure finite e positive; esistono e sono uniche due misure $\nu^a \ll \mu$ e $\nu^s \perp \mu$ tali che $\nu = \nu^a + \nu^s$.*

Dimostrazione. É sufficiente applicare il Teorema 6.9 con le misure μ, ν e $\eta = \mu+\nu$; è chiaro che $\mu \ll \eta$ e $\nu \ll \eta$. Esistono quindi due funzioni $f_\mu, f_\nu \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \eta)$ tali che

$$\mu = \eta \llcorner f_\mu, \qquad \nu = \eta \llcorner f_\nu.$$

Definiamo quindi

$$B = \{x \in \Omega : f_\mu(x) \neq 0\};$$

su B è ben definita la funzione

$$f(x) = \frac{f_\nu(x)}{f_\mu(x)}$$

e la misura

$$\nu^s = \nu \llcorner B^c$$

è singolare rispetto a μ. Il risultato segue quindi estendendo $f = 0$ su $\Omega \setminus B$ e notando che per ogni $E \in \mathscr{F}$

$$\begin{aligned}
\nu(E) =&\nu(E\cap B) + \mu(E\setminus B) = \int_{E\cap B} f_\nu d\eta + \nu^s(E)\\
=& \int_{E\cap B} \frac{f_\nu}{f_\mu} f_\mu d\eta + \nu^s(E) = \int_{E\cap B} f d\mu + \nu^s(E)\\
=& \int_E f d\mu + \nu^s(E) = \mu \llcorner f(E) + \nu^s(E).
\end{aligned}$$

□

6.3 Teoremi di ricoprimento

In questa sezione consideriamo alcuni risultati relativi a teoremi di ricoprimento, utili per la determinazione della derivata di Radon-Nikodym; tali risultati li presentiamo solo nel caso Euclideo. Alcuni di essi si possono generalizzare in ambienti più generali, ma alltri, quali ad esempio il Teorema di Besicovitch 6.15 è intrinsecamente Euclideo.

Definizione 6.13. *Una famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^d$, $\mathcal{B}$, si dice disgiunta se $B \cap B' = \emptyset$ per ogni $B, B' \in \mathcal{B}$, $B \neq B'$. Useremo inoltre la seguente notazione*

$$\bigcup \mathcal{B} := \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B.$$

Tratteremo principalmente famigli $\mathcal{B}$ di palle chiuse; grazie quindi alla separabilità di $\mathbb{R}^d$, una famiglia di palle chiuse disgiunte è al più numerabile.

Definizione 6.14. *Sia $A \subset \mathbb{R}^d$. Una famiglia di palle chiuse $\mathcal{B}$ si dice ricoprimento fine di A se per ogni $x \in A$ esiste una palla in $\mathcal{B}$ di centro x con raggio arbitrariamente piccolo, cioè se*

$$\inf \left\{ \varrho > 0 : \overline{B_\varrho}(x) \in \mathcal{B} \right\} = 0 \qquad \forall x \in A.$$

Possiamo quindi enunciare e dimostrare il primo teorema di ricoprimento.

Teorema 6.15 (Besicovitch)**.** *Esiste un numero intero $\xi(d)$ dipendente solo dalla dimensione dello spazio tale che, se $\mathcal{B}$ è una famiglia di palle chiuse di $\mathbb{R}^d$ ricoprimento fine dell'insieme dei centri*

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \exists \varrho > 0 \text{ per cui } \overline{B_\rho}(x) \in \mathcal{B} \right\},$$

nell'ipotesi A limitato, esistono ξ sottofamiglie disgiunte e al più numerabili $\mathcal{B}_1, \dots \mathcal{B}_\xi$ di $\mathcal{B}$ per cui

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\xi} \bigcup \mathcal{B}_i.$$

Dimostrazione. Possiamo supporre che

$$s_0 := \sup \left\{ \varrho : \overline{B_\varrho}(x) \in \mathcal{B}, x \in A \right\} < +\infty,$$

altrimenti il risultato è banale. Dividiamo quindi la dimostrazione in tre passi.

Passo 1. Costruiamo una sottofamiglia al più numerabile $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ che ricopre A. Definiamo per ricorsione una famiglia descrescente di insiemi $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ e di palle chiuse $\{B(j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ nel seguente modo. Poniamo $A_1 = A \setminus B(1)$, con $B(1) \in \mathcal{B}$, $B(1) = \overline{B}_{\varrho_1}(x_1)$ tale che

$$\varrho_1 > \frac{2}{3} s_0.$$

A questo punto si definisce $A_1 = A \setminus B(1)$: se $A_1 = \emptyset$, allora abbiamo concluso, altrimenti definiamo la famiglia

$$\mathcal{B}(1) = \{ B \in \mathcal{B} : B \cap B(1) = \emptyset \}.$$

Tale famiglia è non vuota ed è un ricoprimento fine di A_1 dato che $\mathcal{B}$ lo era di A. Poniamo quindi

$$s_1 := \sup \left\{ \varrho : \overline{B_\varrho}(x) \in \mathcal{B}(1) \right\}.$$

Il passo ricorsivo viene quindi effettuato supponendo di aver costruito le prime j palle $B(1), \dots, B(j)$; si definisce

$$A_j = A \setminus \bigcup_{i \in \underline{j}} B(i);$$

se $A_j = \emptyset$, ci fermiamo e poniamo $j_\infty = j+1$, altrimenti proseguiamo e definiamo

$$\mathcal{B}(j) = \left\{ B \in \mathcal{B} : B \cap B(i) = \emptyset, \forall i \in \underline{j} \right\}$$

e consideriamo $B(j+1) \in \mathcal{B}(j)$, $B(j) = \overline{B}_{\varrho_j}(x_j)$ tale che

$$\varrho_j > \frac{2}{3} s_j.$$

Se il procedimento non si ferma mai, poniamo $j_\infty = +\infty$. È chiaro che la famiglia

$$\mathcal{B}' = \{ B(j) : j < j_\infty \}$$

è al più numerabile e ricopre A; l'ultima affermazione è immediata se $j_\infty < \infty$, mentre merita una dimostrazione se $j_\infty = +\infty$. In questo ultimo caso, osserviamo che se $j > i$, allora per come è stata scelta la palla $B(j)$,

$$|x_j - x_i| > \varrho_i,$$

ed inoltre, per come sono stati scelti i raggi, $\varrho_j < \frac{3}{2}\varrho_i$. Dimostriamo quindi che $\varrho_j \to 0$ per $j \to +\infty$; dato che la successione $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ è contenuta in A che è stato supposto essere limitato, esiste una sottosuccessione $(x_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente e quindi di Cauchy. Questo implica che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $h > k$

$$\varrho_k < |x_{j_k} - x_{j_h}| < \varepsilon.$$

Quindi, dato che per ogni $j > k$ $\varrho_j < \frac{3}{2}\varrho_k$, si conclude. Supponiamo quindi che esista

$$x \in A \setminus \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B(j) = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j;$$

avremmo quindi che esiste $\varrho > 0$ per cui $\overline{B}_\varrho(x) \in \mathcal{B}$ che, per come sono definiti i raggi ϱ_j, dovrebbe soddisfare

$$\varrho < \frac{3}{2}\varrho_j \qquad \forall j \in \mathbb{N},$$

un assurdo e quindi $\mathcal{B}'$ ricopre tutto A.

Passo 2. Dimostriamo che, per ogni $j < j_\infty$, la cardinalità dell'insieme

$$I_j = \left\{ h \in \underline{j} : B(h) \cap B(j) \neq \emptyset \right\}$$

è limitata da una costante ξ dipendente solo dalla dimensione d dello spazio. A tal fine, decomponiamo $I_j = I_j^{(1)} \sqcup I_j^{(2)}$ con

$$I_j^{(1)} \left\{ h \in I_j : \varrho_h < 7\varrho_j \right\}.$$

Se $h \in I_j^{(1)}$, allora le palle $\overline{B}_{\frac{2}{5}\varrho_h}(x_h)$ sono tra loro disgiunte e contenute in $\overline{B}_{\frac{54}{5}\varrho_j}(x_j)$; infatti dati $k > h$ con $h, k \in I_j^{(1)}$, se esistesse

$$y \in \overline{B}_{\frac{2}{5}\varrho_h}(x_h) \cap \overline{B}_{\frac{2}{5}\varrho_k}(x_k),$$

allora

$$\varrho_h < |x_h - x_k| \le |x_h - y| + |y - x_k| \le \frac{2}{5}\varrho_h + \frac{2}{5}\varrho_k < \frac{2}{5}\varrho_h + \frac{2}{5}\frac{3}{2}\varrho_h = \varrho_h,$$

che chiaramente è un assurdo. Inoltre, se $x \in \overline{B}_{\frac{2}{5}\varrho_h}(x_h)$, allora dato che $h \in I_j^{(1)}$

$$|x - x_j| \le |x - x_h| + |x_h - x_j| \le \frac{2}{5}\varrho_h + \varrho_h + \varrho_j \le \frac{14}{5}\varrho_j + 7\varrho_j + \varrho_j = \frac{54}{5}\varrho_j,$$

dove abbiamo anche usato il fatto che $B(j) \cap B(h) \neq \emptyset$ e quindi $|x_h - x_j| \le \varrho_h + \varrho_j$. Inoltre, siccome $h < j$, $\varrho_h > \frac{2}{3}\varrho_j$ e quindi $\overline{B}_{\frac{4}{15}\varrho_j}(x_h) \subset \overline{B}_{\frac{2}{5}\varrho_h}(x_h)$ per ogni $h \in \underline{j}$, da cui usando la misura di Lebesgue

$$\lambda(\overline{B}_{\frac{54}{5}\varrho_j}(x_j)) \ge \sum_{h \in I_j^{(1)}} \lambda(\overline{B}_{\frac{2}{5}\varrho_h}(x_h)) \ge \sharp I_j^{(1)} \lambda(\overline{B}_{\frac{4}{15}\varrho_j}(x_h)).$$

Quindi

$$\sharp I_j^{(1)} \le \left(\frac{81}{2}\right)^d.$$

Stimiamo ora la cardinalità di $I_j^{(2)}$: fissiamo $h, k \in I_j^{(2)}$ con $h < k$ e definiamo

$$\gamma = \frac{x_h - x_j}{|x_h - x_j|}, \quad \eta = \frac{x_k - x_j}{|x_k - x_j|}.$$

I vettori γ ed η sono unitari e dimostriamo che $|\gamma - \eta| > \delta$ dove δ è una costante positiva. Dall'identità

$$\gamma \cdot \eta = \frac{|x_h - x_j|^2 + |x_k - x_j|^2 - |x_h - x_k|^2}{2|x_h - x_j||x_k - x_j|}$$

deduciamo

$$\begin{aligned}
\gamma \cdot \eta <& \frac{(\varrho_h + \varrho_j)^2 + |x_k - x_j|^2 - \varrho_h^2}{2\varrho_h |x_k - x_j|} \\
=& \frac{\varrho_j}{|x_k - x_j|} + \frac{\varrho_j^2}{2\varrho_h |x_k - x_j|} + \frac{|x_k - x_j|}{2\varrho_h} \\
\le& \frac{\varrho_j}{\varrho_k} + \frac{\varrho_j^2}{2\varrho_h \varrho_k} + \frac{\varrho_k + \varrho_j}{2\varrho_h} \\
=& \frac{1}{7} + \frac{1}{98} + \frac{3}{4} + \frac{1}{14} = \frac{191}{196} < 1.
\end{aligned}$$

Dunque se prendiamo $\delta = \frac{\sqrt{10}}{14}$ abbiamo $|\gamma - \eta| > \delta$, come volevamo dimostrare, dimostrando l'esistenza di un ξ.

PASSO 3. Definiamo infine le famiglie $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_\xi$ disponiamo in righe le palle $B(j)$ per $j < j_\infty$) in modo che palle nella stessa riga siano a due a due disgiunte. Poniamo quindi $B(1)$ nella prima riga e $B(j)$ nella prima riga nella quale troviamo palle che non la intersecano. Se chiamiamo $\mathcal{B}_i$ la famiglia disgiunta delle palle della riga i–esima, allora dal Passo 2. segue che il numero delle righe è finito minore di ξ, dal Passo 1. segue che $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_\xi$ ricoprono A. $\square$

Possiamo quindi passare alla dimostrazione del seguente risultato.

Teorema 6.16 (Besicovitch–Vitali)**.** *Sia $A \subset \mathbb{R}^d$ un insieme Boreliano limitato e $\mathcal{B}$ un ricoprimento fine di A. Allora per ogni misura μ localmente finita e positiva su $\mathbb{R}^d$ esiste una famiglia numerabile e disgiunta $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ tale che*

$$\mu\left(A \setminus \bigcup \mathcal{B}'\right) = 0.$$

Dimostrazione. Siccome $\mathcal{B}$ è un ricoprimento fine di A per il Teorema 6.15 è possibile trovare ξ sottofamiglie disgiunte al più numerabili $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_\xi$ che ricoprono A. Inoltre esiste un intero $i \in \underline{\xi}$ tale che

$$\mu(A \cap \bigcup \mathcal{D}_i) \geq \frac{1}{\xi}\mu(A),$$

e quindi esiste una sottofamiglia finita disgiunta $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{D}_i$ tale che

$$\mu(A \cap \bigcup \mathcal{B}_1) \geq \frac{1}{2\xi}\mu(A).$$

Consideriamo ora $A_1 = A \setminus \bigcup \mathcal{B}_1$, allora

$$\mu(A_1) \leq \left(1 - \frac{1}{2\xi}\right)\mu(A).$$

Se $A_1 = \emptyset$, allora abbiamo concluso, altrimenti la famiglia

$$\mathcal{B}(1) = \left\{\overline{B}_\varrho(x) \in \mathcal{B} \mid \overline{B}_\varrho(x) \cap \bigcup \mathcal{B}_1 = \emptyset\right\}.$$

$\mathcal{B}(1)$ è un ricoprimento fine di A_1, troviamo $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}(1)$ finita e disgiunta per cui, posto $A_2 = A_1 \setminus \bigcup \mathcal{B}_2$

$$\mu(A_2) \leq \left(1 - \frac{1}{2\xi}\right)\mu(A_1).$$

Possiamo quindi iterare il ragionamento e costruire per ricorrenza una successione di insiemi $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tali che

$$\mu(A_{j+1}) \leq \left(1 - \frac{1}{2\xi}\right)\mu(A_j) \leq \left(1 - \frac{1}{2\xi}\right)^{j+1}\mu(A_1),$$

da cui il fatto che $\mu(A_j)$ è infinitesima. In conclusione se poniamo $\mathcal{B}' = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_i$, abbiamo una sottofamiglia numerabile disgiunta e tale che

$$\mu(A \setminus \bigcup \mathcal{B}') \leq \mu(\bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_h) = 0.$$

□

6.4 Decomposizione di Radon-Nikodym

In questa sezione useremo il Teorema di Besicovitch–Vitali 6.16 per caratterizzare la derivata di Radon–Nikodym di una misura rispetto ad un'altra. Tratteremo qui solo il caso di misure positive e finite, con ovvia estensione alle misure con segno e vettoriali qualsiasi.

Introduciamo il concetto di derivata di una misura rispetto ad un'altra, partendo da questa definizione.

Definizione 6.17. *Siano μ e ν due misure Boreliane positive e finite $x \in \operatorname{spt}(\mu)$. Definiamo allora le due seguenti funzioni di Borel:*

$$D_\mu^+ \nu(x) := \limsup_{\rho \to 0} \frac{\nu(\overline{B}_\rho(x))}{\mu(\overline{B}_\rho(x))}, \qquad D_\mu^- \nu(x) := \liminf_{\rho \to 0} \frac{\nu(\overline{B}_\rho(x))}{\mu(\overline{B}_\rho(x))}.$$

Nel caso in cui le due funzioni coincidano, si parla di derivata di ν fatta rispetto a μ

$$D_\mu \nu(x) := \lim_{\rho \to 0} \frac{\nu(\overline{B}_\rho(x))}{\mu(\overline{B}_\rho(x))}.$$

Osserviamo che le due densità non cambiano se al posto di palle aperte consideriamo palle chiuse.

Proposizione 6.18. *Siano μ e ν due misure Boreliane positive e finite $\mathbb{R}^d$ e sia $t \in [0, \infty)$. Per ogni insieme di Borel $E \subset \operatorname{spt}(\mu)$ valgono le due implicazioni:*

$$\begin{aligned} D_\mu^- \nu(x) \leq & t \qquad \forall x \in E, \qquad \textit{allora } \nu(E) \leq t\mu(E), \\ D_\mu^+ \nu(x) \geq & t \qquad \forall x \in E, \qquad \textit{allora } \nu(E) \geq t\mu(E). \end{aligned}$$

In particolare $\mu\left(\left\{x : D_\mu^+ \nu(x) = \infty\right\}\right) = 0$.

Dimostrazione. Dimostriamo che se $D_\mu^- \nu(x) \leq t$ allora $\nu(E) \leq t\mu(E)$. Non è restrittivo supporre che E sia limitato; sia A un insieme aperto limitato tale che $E \subset A$, e per $\varepsilon > 0$ definiamo

$$\mathcal{B} = \left\{\overline{B}_\rho(x) : x \in E, \overline{B}_\rho(x) \subset A, \nu(\overline{B}_\rho(x)) < (t + \varepsilon)\mu(\overline{B}_\rho(x))\right\}.$$

$\mathcal{B}$ è un ricoprimento fine di E e quindi per il Teorema 6.16 esiste una famiglia al più numerabile e disgiunta$\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ tale che $\nu(E \setminus \bigcup \mathcal{B}') = 0$. Quindi avremo che

$$\nu(E) \leq \nu(\bigcup \mathcal{B}') \leq (t + \varepsilon)\mu(\bigcup \mathcal{B}') \leq (t + \varepsilon)\mu(A).$$

Al limite per $\varepsilon \to 0$ e grazie alla regolarità esterna di μ, otteniamo $\nu(E) \leq t\mu(E)$. La dimostrazione dell'altra implicazione è analoga. $\square$

Teorema 6.19 (Di derivazione di Besicovitch)**.** *Siano μ e ν due misure Boreliane positive e finite in $\mathbb{R}^d$; allora, per μ-quasi ogni $x \in \operatorname{spt}(\mu)$, esiste il limite*

$$f(x) := \lim_{\varrho \to 0} \frac{\nu(\overline{B}_\varrho(x))}{\mu(\overline{B}_\varrho(x))}$$

e la decomposizione di Radon-Nikodym di ν relativamente a μ è data da

$$\nu = f\mu + \nu^s$$

dove $\nu^s = \nu \llcorner E$ con E l'insieme μ–trascurabile

$$E = (\mathbb{R}^d \setminus \operatorname{spt}(\mu)) \cup \left\{x \in \operatorname{spt}(\mu) : \lim_{\varrho \to 0} \frac{\nu(\overline{B}_\varrho(x))}{\mu(\overline{B}_\varrho(x))} = \infty\right\}.$$

Dimostrazione. Grazie alla Proposizione 6.18, l'insieme E è μ–trascurabile. Il nostro obiettivo è dimostrare che $f = D_\mu \nu$ esiste μ-quasi ovunque e che $\mu \llcorner f = \nu \llcorner E^c$. Definiamo quindi

$$\mu^\vee(B) := \int_B D_\mu^+ \nu d\mu, \qquad \mu^\wedge(B) := \int_B D_\mu^- \nu d\mu$$

per ogni insieme di Borel B. Se verifichiamo che $\mu^\vee \leq \nu \llcorner E^c \leq \mu^\wedge$ allora la dimostrazione è conclusa.

Proviamo prima che $\mu^\vee \leq \nu \llcorner E^c$; sia $t > 1$ e B Boreliano fissato, tale che $B \subset \mathrm{spt}(\mu)$ e $D_\mu^+ \nu \in (0, \infty)$ su B (e quindi contenuto in E^c). Definiamo

$$B_h := \left\{ x \in B : D_\mu^+ \nu(x) \in (t^h, t^{h+1}] \right\} \qquad h \in \mathbb{Z}.$$

Dal fatto che $D_\mu \nu^+ \leq t^{h+1}$ su B_h segue che $\mu^\vee(B_h) \leq t^{h+1} \mu(B_h)$ mentre dalla Proposizione 6.18 dal fatto che $D_\mu \nu^+ \geq t^h$ segue che

$$t^{h+1} \mu(B_h) \leq t\nu(B_h);$$

unendo le due cose e sommando rispetto a h otteniamo $\mu^\vee(B) \leq t\nu \llcorner E^c(B)$, e mandando $t \to 1$ otteniamo la disuguaglianza. Analogamente si dimostra l'altra disuguaglianza. □

Grazie al precedente teorema, se ne deduce che data una misura positiva μ ed una funzione $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \mu)$, allora per μ–q.o. $x \in \mathrm{spt}(\mu)$ esiste

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{1}{\mu(\overline{B}_\varrho(x))} \int_{\overline{B}_\varrho(x)} f d\mu = \tilde{f}(x)$$

e $\tilde{f} = f$ μ–q.o. Più precisamente abbiamo il seguente risultato.

Corollario 6.20. *Sia μ una misura di Borel positiva e finita in $\mathbb{R}^d$, $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \mu)$; allora per μ-quasi ogni $x \in \mathrm{spt}(\mu)$*

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{1}{\mu(\overline{B}_\varrho(x))} \int_{\overline{B}_\varrho(x)} \left| f(y) - \tilde{f}(x) \right| \, d\mu(y) = 0. \tag{6.1}$$

Dimostrazione. Consideriamo $\nu_q = \mu \llcorner |f - q|$ con $q \in \mathbb{Q}$ e applichiamo il Teorema 6.19:

$$|\tilde{f}(x) - q| = \lim_{\varrho \to 0} \frac{\nu_q(\overline{B}_\varrho(x))}{\mu(\overline{B}_\varrho(x))} = \lim_{\varrho \to 0} \frac{1}{\mu(\overline{B}_\varrho(x))} \int_{\overline{B}_\varrho(x)} |f(y) - q| \, d\mu(y). \tag{6.2}$$

Questa uguaglianza vale per ogni $x \in N_q^c$ dove N_q è un insieme μ–trascurabile. Posto $E = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} N_q$, allora $\mu(E) = 0$ e, per ogni $x \in E^c$ e per ogni $q \in \mathbb{Q}$ vale (6.2). Da ciò segue che per ogni $q \in \mathbb{Q}$ vale

$$\begin{aligned} &\limsup_{\varrho \to 0} \frac{1}{\mu(\overline{B}_\varrho(x))} \int_{\overline{B}_\varrho(x)} |f(y) - \tilde{f}(x)| \, d\mu(y) \\ &\qquad \leq \limsup_{\varrho \to 0} \frac{1}{\mu(\overline{B}_\varrho(x))} \int_{\overline{B}_\varrho(x)} |f(y) - q| \, d\mu(y) + |q - \tilde{f}(x)| = 2|\tilde{f}(x) - q|. \end{aligned}$$

Quindi per la densità di $\mathbb{Q}$ l'enunciato è dimostrato. □

Ogni punto $x \in \mathrm{spt}(\mu)$ per cui vale il limite (6.1) viene detto punto di Lebesgue di f relativamente alla misura μ.

6.5 Esercizi

Esercizio 6.5.1. Dimostrare che $|\mu| : \mathscr{F} \to [0, +\infty)$ è una misura.

Esercizio 6.5.2. Dimostrare la Proposizione 6.5.

Esercizio 6.5.3. Dimostrare che date due misure ν e μ definite su di uno spazio misurabile $(\Omega, \mathscr{F})$, allora $\nu \ll \mu$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se

$$|\mu(A)| < \delta, \longrightarrow |\nu|(A) < \varepsilon.$$

Esercizio 6.5.4. Dimostrare che se $f \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ con μ misura positiva, allora

$$|\mu \llcorner f| = \mu \llcorner |f|.$$

Generalizzare al caso di μ scalare o vettoriale.

Esercizio 6.5.5. Dimostrare che se μ è una misura, scrivendo la sua decompsizione polare $\mu = |\mu| \llcorner \sigma$, allora $|\sigma| = 1$ $|\mu|$–q.o.

Esercizio 6.5.6. Dimostrare che se $\nu_1 \ll \nu_2$ e $\nu_2 \ll \mu$, allora $\nu_1 \ll \mu$ e determinare la derivata di Radon-Nikodym.

Esercizio 6.5.7. Dimostrare che date due misure scalari ν e μ σ–finite su di uno spazio misurabile $(\Omega, \mathscr{F})$, allora per la variazione totale vale

$$|\nu - \mu| = \mu \llcorner |f - 1| + |\nu^s|$$

con f derivata di Radon–Nikodym di ν rispetto a μ e ν^s parte singolare di ν rispetto a μ.

Esercizio 6.5.8. Dimostrare che, data una misura positiva μ, lo spazio delle misure $\mathbb{M}_\mu(\Omega, \mathscr{F})$ assolutamente continue rispetto a μ è un sottospazio chiuso di $\mathbb{M}(\Omega, \mathscr{F})$ isomorfo a $L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$.

Esercizio 6.5.9. Sia μ una misura positiva σ–finita; dimostrare che esiste una misura ν finita tale che $\nu \ll \mu$ e $\mu \ll \nu$.

Esercizio 6.5.10. Trovare una stima della cardinalità $\#I_j^{(2)}$ nel Passo 2. della dimostrazione del Teorema 6.15.

Esercizio 6.5.11. Dimostrare che la conlcusione del Teorema 6.15 e del Teorema 6.16 restano invariate se la famiglia di palle chiuse viene sostituita con una qualsiasi collezione $\mathscr{C}$ di insiemi C chiusi per cui esista $M > 0$ con

$$\frac{\inf\{\varrho > 0 : \exists x \in \mathbb{R}^d \text{ t.c. } C \subset B_\varrho(x)\}}{\sup\{\varrho > 0 : \exists x \in \mathbb{R}^d \text{ t.c. } B_\varrho(x) \subset C\}} \leq M.$$

Particolareggiare l'esercizio alla collezione di palle chiuse

$$\overline{B}^+_\varrho(x, \hat{n}) = \{y \in \overline{B}_\varrho(x) : y \cdot \hat{n} \geq 0\}$$

con $\hat{n} \in \mathbb{S}^{d-1}$ fissato.

Esercizio 6.5.12. Dimostrare che le conclusioni della Proposizione 6.18 e del Teorema 6.19 restano ancora valide se si fissa un insieme chiuso C con

$$\frac{\inf\{\varrho > 0 : \exists x \in \mathbb{R}^d \text{ t.c. } C \subset B_\varrho(x)\}}{\sup\{\varrho > 0 : \exists x \in \mathbb{R}^d \text{ t.c. } B_\varrho(x) \subset C\}} \leq M < +\infty$$

con $0 \in C$ sostituendo la palla chiusa $\overline{B}_\varrho(x)$ con

$$C_\varrho(x) = \frac{C - x}{\varrho} = \{y \in \mathbb{R}^d : x + \varrho y \in C\}.$$

Si consideri in particolare $C = \overline{B}_1^+(0, \hat{n})$ con $\hat{n} \in \mathbb{S}^{d-1}$ fissato.

Esercizio 6.5.13. Dimostrare che la conclusione del Teorema di Besicovitch 6.19 rimane invariata se la definizione di f viene modificata considerando palle aperte, cioè

$$\overline{f}(x) = \lim_{\varrho \to 0} \frac{\nu(B_\varrho(x))}{\mu(B_\varrho(x))}$$

mostrando che, dato che $\mu(\partial B_\varrho(x))$ e $\nu(\partial B_\varrho(x))$ è non trascurabile per al più una quantità numerabile di raggi $\varrho > 0$, allora se esiste $D_\mu \nu(x)$, deve coincidere con $\overline{f}(x)$.

Esercizio 6.5.14. Dimostrare che se $A \subset \mathbb{R}^d$ è un insieme limitato e $\varrho : A \to (0, +\infty)$ è una data funzione, allora esiste $S \subset A$ al più numerabile tale che

$$A \subset \bigcup_{x \in S} \overline{B}_{\varrho(x)}(x)$$

ed ogni punto di $\mathbb{R}^d$ appartenente ad al più ξ palle $\overline{B}_{\varrho(x)}(x)$ centrate in S.

Esercizio 6.5.15. Sia $\mu = \lambda$ la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^d$ ed $E \subset \mathbb{R}^d$ un insieme con ∂E, cioè tale che per ogni $x \in \partial E$, esiste $\varrho > 0$ per cui $\partial E \cap B_\varrho(x)$ è il grafico di una funzione derivabile. Calcolare quindi, per ogni $x \in \mathbb{R}^d$, il limite

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{\lambda \llcorner E(B_\varrho(x))}{\lambda(B_\varrho(x))}.$$

Provare a capire cosa succede con $E \subset \mathbb{R}^d$ Boreliano arbitrario.

6.6 Approfondimenti

Capitolo 7

Funzioni monotone, a variazione limitata, Lipschitz e convesse: Integrale di Riemann–Stieltjies

In questo capitolo applicheremo anzitutto quanto ottenuto sulle derivazioni di misure per studiare le proprietà di alcune importanti classi di funzioni, per poi fare una rapida panoramica sulla teoria dell'integrazione alla Riemann–Stieltjies. Tratteremo solo il caso uni–dimensionale, anche se molte delle proprietà che vedremo si possono estendere al caso multi–dimensionale. Il materiale di questo capitolo è principalmente preso dai libri di Riesz–Nagy [12] and Cohn [4].

7.1 Funzioni monotone

In questa sezione tratteremo le funzioni monotone e la loro stretta connessione con le misure positive. Iniziamo introducendo la seguente definizione.

Definizione 7.1 (Funzione di distribuzione)**.** *Data una misura μ su $\mathbb{R}$ Boreliana, positiva e limitata, viene detta funzione di distribuzione la funzione $u_\mu(x) = \mu((-\infty, x])$.*

Descriviamo nella seguente proposizione le principali proprietà delle funzioni di distribuzione.

Proposizione 7.2. *Sia u_μ la funzione di distribuzione associata ad una misura Boreliana positiva e finita μ su $\mathbb{R}$. Allora:*

1. *u_μ è positiva e monotona non decrescente;*
2. *$u_\mu(x) \to 0$ per $x \to -\infty$;*
3. *u_μ è continua a destra e limitata a sinistra, quindi continua a parte una quantità al più numerabile di punti.*

Dimostrazione. La positività e la monotonia sono immediate per le proprietà di μ. Dato che gli insiemi $A_j = (-\infty, -j]$ per $j \to +\infty$ sono monotoni decrescenti per inclusione e

$$\bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j = \emptyset,$$

segue subito che $u_\mu(-j) \to 0$ per $j \to +\infty$ grazie alla continuità delle misure per successioni decrescenti; la monotonia di u_μ implica quindi il punto 2.

Sempre la monotonia implica che esistono i limiti destri e sinistri

$$u_\mu(x^\pm) = \lim_{y \to x^\pm} u_\mu(y)$$

con $u_\mu(x^-) \le u_\mu(x^+)$. Come conseguenza l'insieme

$$E = \{x \in \mathbb{R} : u_\mu(x^-) < u_\mu(x^+)\}$$

è al più numerabile (si veda Esercizio 7.5.1. Dato che u_μ è continua in $\mathbb{R} \setminus E$, segue l'ultima parte del punto 4. Per la prima parte, basta notare che gli insiemi $B_j = (-\infty, t + \frac{1}{j}]$ sono monotoni decrescenti e

$$(-\infty, t] = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} B_j,$$

da cui la continuità a destra di u_μ grazie alla continuità delle misure per successioni decrescenti. □

Osserviamo che la continuità a destra è conseguenza della scelta della funzione di distribuzione come la misura dell'intervallo $(-\infty, x]$; si potrebbe anche scegliere come funzione di distribuzione la funzione $\mu((-\infty, x))$ ottenendo una funzione continua a sinistra. Altre scelte di funzioni di distribuzione sono $\mu([x, +\infty))$ e $\mu((x, +\infty))$, che definiscono funzioni monotone decrescenti.

Enunciamo e dimostriamo il seguente risultato.

Teorema 7.3. *Sia u_μ una funzione di distribuzione su $\mathbb{R}$ associata ad una misura Boreliana positiva e finita μ su $\mathbb{R}$; allora u_μ è derivabile λ–q.o.*

Dimostrazione. Basta usare la decomposizione di Radon–Nikodym alla misura μ per scrivere

$$\mu = \lambda \llcorner g + \mu^s,$$

con $\mu^s \perp \lambda$ e $g \in L^1(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Applicando il Teorema di Besicovitch–Vitali 6.19 con ricoprimenti del tipo $\overline{B}^+_\varrho(x) = [x, x + \varrho]$, si può concludere che per λ–q.o. $x \in \mathbb{R}$ esiste il limite

$$\tilde{g}(x) = \lim_{\varrho \to 0} \frac{\mu(\overline{B}^+_\varrho(x))}{\lambda(\overline{B}^+_\varrho(x))}$$

con $\tilde{g} = g$ λ–q.o.; dato che

$$\mu(\overline{B}^+_\varrho(x)) = \mu([x, x + \varrho]) = u_\mu(x + \varrho) - u(x) + \mu(\{x\}),$$

se ne deduce che nei punti in cui $\mu(\{x\}) = 0$, esiste la derivata destra di u_μ e coincide con g. Riapplicando il ragionamento con gli insiemi $\overline{B}^-_\varrho(x) = [x - \varrho, x]$, si deduce che nei punti x per cui

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{\mu(\{x - \varrho\})}{\varrho} = 0, \tag{7.1}$$

esiste anche la derivata sinistra e anch'essa coincide λ–q.o. con g. Rimandiamo all'Esercizio 7.5.2 la verifica che la relazione (7.1) vale per λ–q.o. $x \in \mathbb{R}$. In definitiva u_μ è derivabile λ–q.o. con $u'_\mu = g$. □

Chiudiamo questa sezione mostrando che una funzione monotona non–decrescente arbitraria sia derivabile λ–q.o.; iniziamo con il seguente risultato che mostra la controparte del Teorema 7.3.

Teorema 7.4. *Sia $u : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ una funzione monotona non–decrescente, positiva, limitata, continua a destra e tale che $u(x) \to 0$ per $x \to -\infty$; allora esiste ed è unica una misura Boreliana positiva e limitata μ su $\mathbb{R}$ tale che $u(x) = u_\mu(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.*

Dimostrazione. La misura μ si costruisce imitando la costruzione della misura di Lebesgue; definiamo una misura esterna ponendo per ogni $A \subset \mathbb{R}$

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j\in\mathbb{N}} (u(b_j) - u(a_j)) : A \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} [a_j, b_j] \right\}.$$

Lasciamo come esercizio la verifica che μ^* definisce una misura esterna e facciamo la seguente considerazione. Se $[a, b]$ è un dato intervallo, allora se per ogni $n \in \mathbb{N}$ scriviamo

$$[a, b] \subset \bigcup_{i\in\underline{n}} \left[a + \frac{i-1}{n}(b-a), a + \frac{i}{n}(b-a) \right],$$

notando che

$$u(b) - u(a) = \sum_{i\in\underline{n}} \left(u\Big(a + \frac{i}{n}(b-a)\Big) - u\Big(a + \frac{i-1}{n}(b-a)\Big) \right),$$

si deduce che, come per la misura di Lebesgue,

$$\mu^*(A) = \lim_{\delta\to 0} \inf \left\{ \sum_{j\in\mathbb{N}} (u(b_j) - u(a_j)) : A \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} [a_j, b_j], b_j - a_j < \delta \right\}.$$

Quindi si può applicare il Criterio di Caratheodory 1.16 per dedurre che μ^* definisce una misura Boreliana μ.

Dimostriamo che $\mu((-\infty, x]) = u(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; scrivendo

$$(-\infty, x] \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} [x - j, x - j + 1],$$

allora

$$\mu((-\infty, x]) = \mu^*((-\infty, x]) \le \sum_{j\in\mathbb{N}} (u(x - j + 1) - u(x - j)) = u(x),$$

dato che $u(x - j) \to 0$ per $j \to +\infty$, e quindi $\mu(-\infty, x]) \le u(x)$.

Per dimostrare la disuguaglianza inversa, fissiamo $\varepsilon > 0$ e $x_\varepsilon < x$ per cui $u(x_\varepsilon) < \varepsilon$. Fissiamo quindi un ricoprimento

$$(-\infty, x] \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} [a_j, b_j];$$

è chiaro che possiamo supporre $a_j < b_j$, altrimenti avremmo $u(b_j) - u(a_j) = 0$ e quindi nessun contributo bel calcolo di $\mu((-\infty, x])$. Abbiamo quindi che l'intervallo compatto $[x_\varepsilon, x]$ è ricoperto dagli intervalli aperti $\{(a_j, b_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$; quindi

$$[x_\varepsilon, x] \subset \bigcup_{j\in\underline{n}} (a_j, b_j).$$

Supponiamo di riordinare gli intervalli in modo da avere

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_n, \qquad b_1 < b_2 < \ldots < b_n;$$

possiamo anche supporre, eventualmente scartando degli intervalli, che $b_1 \geq x_\varepsilon$ e $a_n \leq x$. Possiamo anche ridefinire gli intervalli $[a_j, b_j]$ in intervalli $[a'_j, b'_j]$ in modo tale che gli $(a'_j, b'_j) \cap (a'_i, b'_i) = \emptyset$ per $i \neq j$ e

$$[x_\varepsilon, x] = \bigcup_{j \in \underline{n}} [a'_j, b'_j];$$

si può ad esempio prendere

$$a'_1 = \max\{a_1, x_\varepsilon\}, \qquad a'_j = \max\{a_j, b_{j-1}\}, \forall j \geq 2,$$

mentre

$$b'_j = b_j, \quad \forall j \in \underline{n-1}, \qquad b'_n = \min\{b_n, x\}.$$

In questo modo, grazie alla monotonia di u, si ricava che

$$\begin{aligned} u(x) =& u(x) - u(x_\varepsilon) + u(x_\varepsilon) \leq u(x) - u(x_\varepsilon) + \varepsilon \\ =& \sum_{j \in \underline{n}} (u(b'_j) - u(a'_j)) + \varepsilon \leq \sum_{j \in \underline{n}} (u(b_j) - u(a_j)) + \varepsilon \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} (u(b_j) - u(a_j)) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Quindi, vista l'arbitrarietà del ricoprimento

$$u(x) \leq \mu((-\infty, x]) + \varepsilon,$$

da cui, vista l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, quanto desiderato.

Resta da vedere l'unicità di μ; se si suppone esista una seconda misura con $\nu((-\infty, x]) = u(x)$, allora

$$\nu([a, b]) = u(b) - u(a) + \nu(\{a\}) \geq u(b) - u(a) \geq \mu([a, b]).$$

Quindi $\nu(A) \geq \mu(A)$ per ogni insieme Boreliano, e quindi

$$\nu(\mathbb{R}) = \nu(A) + \nu(A^c) \geq \mu(A) + \mu(A^c) = \mu(\mathbb{R}).$$

Dato che $\nu(\mathbb{R}) = \mu(\mathbb{R})$, si deduce l'uguaglianza $\nu(A) = \mu(A)$ per ogni $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. □

Dal precedente risultato possiamo dedurre il seguente, noto anche come Teorema di Lebesgue sulle funzioni monotone.

Corollario 7.5. *Sia $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione monotona, allora u è derivabile λ–q.o.*

Dimostrazione. Eventualmente cambiando u con $-u$ possiamo supporre u monotona non decrescente. Mostriamo che esistono degli intervalli $(a_h, b_k) \subset \mathbb{R}$ aperti non vuoti, con $a_{h+1} \leq a_h$, $b_k \leq b_{k+1}$,

$$\lim_{h \to +\infty} a_h = -\infty, \qquad \lim_{k \to +\infty} b_k = +\infty$$

su cui la funzione u è derivabile λ–q.o..

Consideriamo anzitutto

$$M = \sup_{\mathbb{R}} u;$$

se $M < +\infty$, allora u è limitata superiormente e poniamo quindi $M_k = M$, $u^k = u$ e $b_k = +\infty$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Altrimenti, si pone per ogni $k \in \mathbb{N}$ per cui $\{u < k\} \neq \emptyset$, $M_k = k$, $u^k = \min\{u, k\}$ e $b_k = \sup\{u < k\}$. In questo modo abbiamo trovato una successione di funzioni monotone con $u = u^k$ in $(-\infty, b_k)$ e $b_k \to +\infty$ per $k \to +\infty$.

Analogamente, consideriamo

$$m = \inf_{\mathbb{R}} u^k;$$

se $m > -\infty$, allora u^k, e quindi u, è limitata inferiormente e poniamo quindi $m_h = m$, $u^k_h = u^k$ e $a_h = -\infty$ per ogni $h \in \mathbb{N}$. Altrimenti, si pone per ogni $h \in \mathbb{N}$ per cui $\{u^k > h\} \neq \emptyset$, $m_h = h$, $u^k_h = \max\{u^k, h\}$ e $a_h = \sup\{u^k > h\}$. In questo modo abbiamo trovato una successione di funzioni monotone con $u = u^k_h$ in (a_h, b_k) e $a_h \to -\infty$ per $h \to +\infty$.

Le funzioni $g^k_h(x) = u^k_h(x^+) - m_h$ sono quindi funzioni monotone, limitate da $M_k - m_h$, positive e tali che $g^k_h(x) \to 0$ per $x \to -\infty$. Quindi grazie al Teorema 7.4, tali funzioni sono funzioni di distribuzione di una misura Boreliana positiva e finita, quindi derivabile λ–q.o. Dal fatto che $u(x) = u(x^+)$ tranne al più una quantità numerabile di punti, se ne deduce la derivabilità λ–q.o. della funzione u. □

Osservazione 7.6. Abbiamo dimostrato la derivabilità q.o. per funzioni monotone definite su tutto $\mathbb{R}$ e a valori in $\mathbb{R}$; il risultato si può chiaramente ottenere con piccole modifiche anche per funzioni a valori in $\overline{\mathbb{R}}$ e quindi anche per funzioni definite su di un intervallo arbitrario, eventualmente estendendo la funzione fuori dall'intervallo uguale a $\pm\infty$ con scelta sul segno in modo che l'estensione preservi la monotonia.

7.2 Funzioni a variazione limitata

Quanto visto nella sezione precedente si può riassumere nel fatto che esiste una biiezione tra le misure Boreliane, positive e finite su $\mathbb{R}$ e le funzioni monotone non decrescenti, positive, continue a destra, limitate e infinitesime a $-\infty$; mostriamo che tale biiezione si estende alle misure di $\mathbb{M}(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ grazie alle funzioni a variazione finita. Dato un intervallo $[a, b]$, diremo che $\{t_j\}_{j \in \underline{n}}$ è una suddivisione di $\mathcal{P} = \{t_j\}_{j \in \underline{n}}$ di $[a, b]$, se

$$a \leq t_1 < \ldots < t_n \leq b.$$

Definizione 7.7 (Funzioni a variazione finita)**.** *Data una funzione $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ definiamo la variazione di u su $[a, b]$ ponendo*

$$\mathrm{Var}(u, [a, b]) = \sup \left\{ \sum_{j \in \underline{n-1}} |u(t_{j+1)} - u(t_j)| : \mathcal{P} = \{t_j\}_{j \in \underline{n}} \text{ suddivisione di } [a, b] \right\}.$$

Diremo che u ha variazione finita in $[a, b]$, $u \in VF([a, b])$, se $\mathrm{Var}(u, [a, b]) < +\infty$*. Si definisce poi la variazione per ogni intervallo $I \subset \mathbb{R}$*

$$\mathrm{Var}(u, I) = \sup\{\mathrm{Var}(u, [a, b]) : [a, b] \subset I\}.$$

Se $\mathrm{Var}(u, \mathbb{R}) < +\infty$*, si può definire la funzione variazione*

$$v(x) = \mathrm{Var}(u, (-\infty, x]).$$

Osservazione 7.8. Si osserva che se $\mu \in \mathbb{M}(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$, allora la funzione di distribuzione $u_\mu(x) = \mu((-\infty, x])$ ha variazione finita con

$$v(x) = |\mu|((-\infty, x]).$$

La funzione u_μ non è necessariamente monotona; è però sempre continua a destra e continua in x se e solo se la misura μ non è atomica in x, cioè se e solo se $\mu(\{x\}) = 0$.

Notiamo che se $u \in VF(\mathbb{R})$, allora u è limitata (si veda Esercizio 7.5.4) ed inoltre se $-\infty < a < b < +\infty$ allora

$$\mathrm{Var}(u, (-\infty, b]) = \mathrm{Var}(u, (-\infty, a]) + \mathrm{Var}(u, [a, b]).$$

Vale inoltre la seguente proprietà

$$\mathrm{Var}(u, [a, b]) = \lim_{c \to a^+} \mathrm{Var}(u, [c, b]).$$

La funzione v è quindi una funzione limitata e non decrescente, infinitesima in $-\infty$ e se u è continua a destra, allora v è continua a destra.

Abbiamo il seguente risultato.

Proposizione 7.9. *Sia $u \in VF(\mathbb{R})$; allora esistono due funzioni $u_1, u_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ limitate non decrescenti tali che $u = u_1 - u_2$.*

Dimostrazione. Basta scrivere

$$u_1 = \frac{v + u}{2}, \qquad u_2 = \frac{v - u}{2}$$

per ottenere la decomposizione desiderata. □

Osservazione 7.10. Si noti che se u è continua a destra, e scriveremo $u \in VF_r(\mathbb{R})$, allora le funzioni u_1 e u_2 sono continue a destra.

Dalla precedente osservazione segue il seguente risultato.

Corollario 7.11. *Esiste una corrispondenza tra $\mathbb{M}(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ e $VF_r(\mathbb{R})$.*

Dimostrazione. Basta usare le decomposizioni

$$\mu = \mu^+ - \mu^-, \qquad u = u_1 - u_2$$

delle misure in parte positiva e negativa e delle funzioni a variazione finita in monotona non decrescente e non crescente. □

Osservazione 7.12. La corrispondenza del Corollario precedente non è una biiezione, in quanto in generale le decomposizioni in parte positiva per le misure e monotona per funzioni a variazione finita non sono uniche.

Come conseguenza della precedente decomposizione possiamo enunciare il seguente risultato.

Corollario 7.13. *Sia $u \in VF(\mathbb{R})$; allora per ogni $x \in \mathbb{R}$ esistono i limiti*

$$u(x^\pm) = \lim_{y \to x^\pm} u(y),$$

u è continua eccettuato una quantità al più numerabile di punti e derivabile λ–q.o.

Dimostrazione. Le proprietà elencate si ricavano dalla analoghe proprietà delle funzioni monotone. □

Chiudiamo questa sezione con il seguente corollario.

Corollario 7.14. *Sia* $u \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R})$ *una funzione Lipschitziana; allora* $u \in VF([a,b])$ *per ogni* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *e quindi* u *è derivabile* λ*–q.o.*

Dimostrazione. Basta notare che per ogni $\{t_j\}_{j\in \underline{n}}$ vale la stima

$$\sum_{j\in \underline{n-1}} |u(t_{j+1}) - u(t_j)| \leq L \sum_{j\in \underline{n-1}} |t_{j+1} - t_j| \leq L(b-a),$$

con L costante di Lipschitz di u. □

Finora abbiamo considerato funzioni Lipschitz definite su tutto $\mathbb{R}$; data una funzione L Lipschitziana $f : E \to \mathbb{R}$ definita in un insieme $E \subset \mathbb{R}$ è sempre possibile estenderla su tutto $\mathbb{R}$ con la stessa costante di Lipschitz L, ponendo ad esempio

$$\widetilde{f}(x) = \inf_{y\in E} \left(f(y) + L|x-y| \right),$$

oppure

$$\widetilde{f}(x) = \sup_{y\in E} \left(f(y) - L|x-y| \right).$$

7.3 Funzioni convesse

In questa sezione presentiamo alcune proprietà delle funzioni convesse; ricordiamo che $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è convessa se per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ e $t \in [0,1]$

$$u(ty + (1-t)x) \leq tu(y) + (1-t)u(x),$$

condizione che può essere equivalentemente scritta come

$$u(x + t(y-x)) \leq u(x) + t(u(y) - u(x)).$$

Si nota che fissati $x_1 < x_2 < x_3$ numeri reali, dato che x_2 può essere scritto come combinazione convessa di x_1 e x_3,

$$x_2 = x_1 + t(x_3 - x_1), \qquad t = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1},$$

se ne deduce che

$$\frac{u(x_2) - u(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{u(x_3) - u(x_1)}{x_3 - x_1}.$$

Quindi i rapporti incrementali sono monotoni ed in particolare:

1. preso $x_1 = x_0$, $x_2 = x_0 + h$, $x_3 = x_0 + k$ con $0 < h < k$, allora

$$R_u(x_0, h) := \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} \leq \frac{u(x_0 + k) - u(x_0)}{k} = R_u(x_0, k);$$

2. preso $x_1 = x_0 - k$, $x_2 = x_0 - h$, $x_3 = x_0$ con $0 < h < k$, allora
$$R_u(x_0, -k) := \frac{u(x_0) - u(x_0 - k)}{k} \leq \frac{u(x_0) - u(x_0 - h)}{h} = R_u(x_0, -h);$$

3. preso $x_1 = x_0 - h$, $x_2 = x_0$, $x_3 = x_0 + k$, con $h, k > 0$, allora
$$R_u(x_0, -h) := \frac{u(x_0) - u(x_0 - h)}{h} \leq \frac{u(x_0 + k) - u(x_0)}{k} = R_u(x_0, k);$$

4. infine, preso $x < x + h < y < y + k$, allora
$$R_u(x, h) = \frac{u(x + h) - u(x)}{h} \leq \frac{u(y) - u(x + h)}{y - x - h} \leq \frac{u(y + k) - u(y)}{k}.$$

Se ne deduce quindi che per ogni $x \in \mathbb{R}$ esistono
$$u'(x^{\pm}) = \lim_{h \to 0} R_u(x, \pm h),$$
e quindi la funzione u è continua sia a destra che a sinistra, $u'(x^-) \leq u'(x^+)$ e per ogni $x < y$ $u'(x^{\pm}) \leq u'(y^{\pm})$ e $u(x^+) \leq u(y^-)$. Le funzioni $x \mapsto u'(x^{\pm})$ sono quindi monotone non decrescenti, quindi continue a parte una quantità al più numerabile di punti e quindi u è derivabile a parte al più una quantità numerabile di punti. Vale inoltre la seguente formula
$$u(b) = u(a) + \int_{[a,b]} u' d\lambda$$
dove u' è definita λ–q.o. se la si definisce nei punti di derivabilità, altrimenti si può porre $u'(x) = u'(x^+)$ o $u'(x) = u'(x^-)$. Se ne deduce, per quanto visto nella sezione precedente, che le funzioni convesse sono derivabili due volte λ–q.o. e che in generale la derivata seconda è una misura positiva Boreliana su $\mathbb{R}$.

Infine, si noti che per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ vale la disuguaglianza
$$u(x) \geq m(x - x_0) + u(x_0), \qquad \forall m \in [u(x_0^-), u(x_0)^+].$$
Quindi possiamo dedune che
$$u = \sup\{\ell : \ell \text{ è una funzione affine e } \ell(x) \leq u(x), \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

7.4 L'Integrale di Riemann–Stieltjies

La teoria dell'integrazione alla Riemann-Stieltjies è una teoria che cerca di generalizzare la teoria dell'integrazione alla Riemann ma che è stata sostanzialmente superata una volta sviluppata la teoria della misura. L'idea della definizione parte dalla costruzione delle somme integrali
$$s_u(f, \mathcal{P}) = \sum_{j \in \underline{n-1}} \inf_{[t_j, t_{j+1}]} f(u(t_{j+1}) - u(t_j)), \quad S_u(f, \mathcal{P}) = \sum_{j \in \underline{n-1}} \sup_{[t_j, t_{j+1}]} f(u(t_{j+1}) - u(t_j)),$$

con $\mathcal{P} = \{t_j\}_{j\in\underline{n}} \in \mathscr{D}([a,b])$. Per poter ripetere quanto si fa con l'ingegrale di Riemann con le somme integrali inferiori e superiori, serve la non decrescenza di u, in modo da ottenere che

$$s_u(f,\mathcal{P}) \leq S_u(f,\mathcal{P}).$$

Data quindi una funzione $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ monotona non decrescente, diremo che una funzione limitata $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è Riemann–Stieltjies integrabile rispetto ad u se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione $\mathcal{P}_\varepsilon$ per cui

$$S_u(f,\mathcal{P}_\varepsilon) - s_u(f,\mathcal{P}_\varepsilon) < \varepsilon.$$

In tal caso si definisce l'integrale di Riemann–Stieltjies di f relativamente ad u e lo si denota

$$\int_a^b f(x)du(x).$$

Si noti che se $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione monotona crescente, limitata, infinitesima in $-\infty$ e continua a destra, allora si potrebbe dimostrare che una funzione f è Riemann–Stieljies integrabile relativamente ad u se e solo se f è continua μ–q.o. con μ la misura di cui u è la funzione di distribuzione e

$$\int_a^b f(x)du(x) = \int_{[a,b]} f d\mu.$$

Questa costruzione si può estendere alle funzioni $u \in VF(\mathbb{R})$; per tali funzioni vale anche la seguente formula di integrazione per parti

$$\int_a^b \varphi(x)du(x) = \int_{[a,b]} \varphi d\mu - \int_{[a,b]} u\varphi' d\lambda, \qquad \forall \varphi \in C_c^1((a,b)).$$

7.5 Esercizi

Esercizio 7.5.1. Sia $u : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione monotona; dimostrare che l'insieme

$$E = \{x : u(x^-) \neq u(x^+)\}$$

è al più numerabile.

Esercizio 7.5.2. Sia μ una misura Boreliana finita su $\mathbb{R}$; mostrare che per λ–q.o. $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{\varrho\to 0} \frac{\mu(\{x-\varrho\})}{\varrho} = 0.$$

Esercizio 7.5.3. Si dica se e dove la funzione $u(x) = x\sin(\frac{1}{x})\chi_{(0,+\infty)}(x)$ appartiene a $VF((a,b))$. Modificare l'esercizio considerando le funzioni $u(x) = \chi_{(0,+\infty)}(x)x^\alpha \sin(\frac{1}{x})$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 7.5.4. Dimostrare che se $u \in VF(\mathbb{R})$, allora esistono e sono finiti i limiti

$$\lim_{y\to\pm x} u(y)$$

e che se u è continua, allora anche v è continua.

Esercizio 7.5.5. Si caratterizzino le funzioni $u \in VF_r(\mathbb{R})$ per cui la corrispondente misura $\mu \in \mathbb{M}(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue λ.

Esercizio 7.5.6. Si dimostri che la funzione di Cantor–Vitali è a variazione finita, uniformemente continua ma non assolutamente continua, ricordando che una funzione è assolutamente continua se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ per cui se $\{(a_j, b_j)\}_{j \in \underline{n}}$ sono intervalli disgiunti tali che

$$\sum_{j \in \underline{n}} (b_j - a_j) < \delta,$$

allora

$$\sum_{j \in \underline{n}} |u(b_j) - u(a_j)| < \varepsilon.$$

Esercizio 7.5.7. Dimostrare che se $u \in VF_r(\mathbb{R})$, allora notando che

$$u(x) = \int_{(-\infty, x]} d\mu$$

con μ la misura di cui u è la funzione di distribuzione, vale la seguente formula di integrazione per parti

$$\int_{[a,b]} \varphi' u d\lambda = \varphi(b)u(b) - \varphi(a)u(a^-) - \int_{[a,b]} \varphi d\mu, \qquad \forall \varphi \in C^1(\mathbb{R}) \tag{7.2}$$

per ogni $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Esercizio 7.5.8. Mostrare in dettaglio le proprietà enunciate sulle funzioni convesse.

Esercizio 7.5.9. Dimostrare la disuguaglianza di Jensen; mostrare cioè che se μ è una misura positiva con $\mu(\Omega) = 1$, $f \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ e $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convessa, allora

$$u\left(\int_{\Omega} f d\mu\right) \leq \int_{\Omega} u \circ f d\mu,$$

sia che $u \circ f \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$, sia che l'integrale a secondo membro sia infinito.

7.6 Approfondimenti

7.6.1 Funzioni assolutamente continue

Si possono studiare ed approfondire le proprietà delle funzioni assolutamente continue su $\mathbb{R}$, mostrando che tali funzioni caratterizzano lo spazio di Sobolev $W^{1,1}(\mathbb{R})$. Si deve dimostrare che una funzione u è assolutamente continua se e solo se essa è derivabile λ–q.o. con derivata u' integrabile e tale che

$$u(b) = u(a) + \int_{[a,b]} u' d\lambda.$$

per ogni $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

7.6.2 Integrale di Riemann–Stieltjies

Si possono approfondire i dettagli delle dimostrazioni della sezione relativa all'integrazione alla Riemann–Stieljies; in particolare si può dimostrare, utilizzando il Teorema di rappresentazione di Riesz, che la classe delle funzioni a variazione finita sono tutte e sole le funzioni per cui l'integrazione per parti (7.2) ha senso.

Capitolo 8

Moti Browniani

In questo capitolo costruiamo la misura di Wiener sullo spazio delle funzioni definite nell'intervallo $[0,1]$ a valori in $\mathbb{R}$; vedremo che tale misura si concentra sullo spazio delle funzioni Hölderiane ma che lo spazio delle funzioni a variazione limitata è trascurabile. Quindi la Teoria dell'integrazione alla Riemann-Stjltjies non è sufficiente per poter dare la nozione di integrale stocastico; a questo fine è stato necessario introdurre la nozione di integrale di Ito. Vedremo nell'ultima sezione come tale integrale viene definito e accenneremo qualche applicazione. Il materiale contenuto in questo capitolo è essenzialmente preso dal libro di Dudley [6].

8.1 La misura di Wiener

Consideriamo lo spazio delle funzioni

$$\Omega = \mathbb{R}^{[0,1]} = \{\omega : [0,1] \to \mathbb{R}\}$$

di tutte le funzioni a valori reali; la σ–algebra su tale spazio è quella generata dagli insiemi cilindrici. Per insiemi cilindrici intendiamo la classe $\mathscr{C}$ definita fissando un sottoinsieme finito $F \subset [0,1]$, $F = \{t_1, \dots t_m\}$ $0 \le t_1 < \dots t_m \le 1$, $\pi_F : \Omega \to \mathbb{R}^m$

$$\pi_F(\omega) = (\omega(t_1), \dots, \omega(t_m))$$

e definendo $A \in \mathscr{C}$ cilindrico se esiste $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^m)$ tale che $A = \pi_F^{-1}(B)$. Porremo

$$\mathscr{F} = \sigma(\mathscr{C}).$$

Per un dato sottoinsieme $F \subset (0,1]$ e $A = \pi_F^{-1}(B)$, poniamo

$$P_F(A) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}} \sqrt{t_1 \cdot \ldots \cdot (t_m - t_{m-1})}} \int_A e^{-\frac{x_1^2}{2t_1} + \ldots - \frac{(x_m - x_{m-1})^2}{2(t_m - t_{m-1})}} \, d\lambda_m(x);$$

tale definizione si estende al caso $t_1 = 0$ prendendo, nella definizione precedente, il limite $t_1 \to 0$ e ponendo

$$P_F(A) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}} \sqrt{t_2 \cdot \ldots \cdot (t_m - t_{m-1})}} \int_{(A)_0} e^{-\frac{x_2^2}{2t_2} + \ldots - \frac{(x_m - x_{m-1})^2}{2(t_m - t_{m-1})}} \, d\lambda_{m-1}(x')$$

dove $(A)_0$ è la sezione
$$(A)_0 = \{x' \in \mathbb{R}^{m-1} : (0, x') \in A\}.$$

Per semplificare la notazione, dato $F \subset [0,1]$ con $m = \#F$, denoteremo con $\mathbb{R}^F$ lo spazio $\mathbb{R}^m$. Denoteremo inoltre con $\sigma_F = \pi_F^{-1}(\mathscr{B}(\mathbb{R}^F))$ la σ–algebra determinata da π_F.

Osservazione 8.1. Osserviamo che se $F' = F \cup \{t_{m+1}\}$ con $t_m < t_{m+1} \leq 1$, allora per ogni $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^m)$, $\pi_F^{-1}(B) = \pi_{F'}(B \times \mathbb{R})$ e quindi
$$P_F(\pi_F^{-1}) = P_{F'}(\pi_{F'}^{-1}(B \times \mathbb{R})).$$
Tale ragionamento si può generalizzare al caso in cui $F \subset G \subset [0,1]$ con F e G finiti per concludere che se $A \in \mathscr{C}$ è tale che $A = \pi_F^{-1}(B) = \pi_G^{-1}(B')$ per due dati insiemi di Borel $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^F)$, $B' \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^G)$, allora $P_F(A) = P_G(A)$.

Sottolineiamo inoltre che se $A_j \in \mathscr{C}$, $j = 1, \ldots, h$ è una famiglia finita di insiemi disgiunti, allora $A_j = \pi_{F_j}^{-1}(B_j)$ con $B_j \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^{F_j})$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ per $i \neq j$; quindi ponendo $F = \bigcup_{j \in \underline{h}} F_j$ otteniamo che
$$P_F\left(\bigcup_{j \in \underline{h}} A_j\right) = \sum_{j \in \underline{h}} P_{F_j}(A_j).$$

Grazie alle osservazioni precedenti possiamo applicare il seguente Teorema, noto come Teorema di estensione di Kolmogorov per dedurre che esiste una unica misura di probabilità definita sulla σ–algebra generata dagli insiemi cilindrici, nota come misura di Wiener. Riportiamo qui di seguito l'enunciato del Teorema di Kolmogorov.

Teorema 8.2 (Di estensione di Kolmogorov)**.** *Sia I un insieme di indici tale che per ogni sottoinsieme finito $F \subset I$ sia definita una misura P_F con la proprietà che:*

1. *P_F è una misura di probabilità su σ_F;*
2. *per ogni $F \subset G \subset I$ coppia di insiemi finiti $(P_G)_{|\sigma_F} = P_F$.*

Allora esiste un'unica misura di probabilità $\mathbb{P}$ su $\mathscr{F}$ tale che $\mathbb{P}_{|\sigma_F} = P_F$ per ogni $F \subset I$ finito.

Una volta definita la misura di Wiener, a volte serve considerare il completamento $\widetilde{\mathscr{F}}_{\mathbb{P}^W}$ della σ–algebra $\mathscr{F}^W$ in modo da includere tutti gli insiemi $\mathbb{P}^W$–trascurabili. Per semplificare le notazioni, in questo capitolo continueremo a denotare con $\mathbb{P}^W$ l'estensione della misura di Wiener e con $\mathscr{F}^W$ la σ–algebra estesa.

Data la misura di Wiener, si può definire il moto Browniano (denotato con m.B.) come il processo stocastico $B_t : \Omega \to \mathbb{R}$
$$B_t(\omega) = \omega(t).$$
Grazie al fatto che essenzialmente il m.B. altro non è che la proiezione $\pi_{\{t\}}$, si dimostrano facilmente i seguenti fatti:

1. $B_0 = 0$ $\mathbb{P}^W$–q.o.;
2. per ogni $0 < s < t$, le variabili aleatorie $B_t - B_s$ e B_{t-s} sono ugualmente distribuite con legge normale $\mathscr{N}(0, t - s)$;
3. per ogni $0 < s < t$, le variabili aleatorie $B_t - B_s$ e B_s sono indipendenti.

Vediamo bevemente le dimostrazioni delle precedenti proprietà.

1. La prima proprietà è immediata conseguenza della definizione della misura di Wiener in quanto
$$\mathbb{P}^W(B_0 \in A) = P_{\{0\}}\pi^{-1}_{\{0\}}(A) = \delta_0(A), \qquad \forall A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}).$$

2. Iniziamo co; calcolare la legge di B_{t-s};
$$\begin{aligned}\mathbb{P}^W(B_{t-s} \in A) =&\mathbb{P}^W(\pi^{-1}_{\{t-s\}}(A)) = P_{\{t-s\}}(\pi^{-1}_{\{t-s\}}(A))\\ =&\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\int_A e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}}\,d\lambda_1(x) = \mathscr{N}(0,t-s)(A).\end{aligned}$$
D'altra parte, se definiamo $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x,y) = y - x$, allora
$$\{B_t - B_s \in A\} = \{\omega \in \Omega : \omega(t) - \omega(s) \in A\} = \{\omega \in \Omega : h(\pi_{\{s,t\}}(\omega)) \in A\} = \pi^{-1}_{\{s,t\}}(B),$$
con $B = h^{-1}(A)$. Quindi
$$\begin{aligned}\mathbb{P}^W(\{B_t - B_s \in A\}) =&P_{\{s,t\}}(\pi^{-1}_{\{s,t\}}(B)) = \frac{1}{2\pi\sqrt{s(t-s)}}\int_B e^{-\frac{x^2}{2s}+\frac{(y-x)^2}{2(t-2)}}\,d\lambda_2(x,y)\\ =&\frac{1}{\sqrt{2\pi s}}\int d\lambda_1(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\int_{B_x} e^{-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}}\,d\lambda_1(y)\end{aligned}$$
dove
$$B_x = \{y \in \mathbb{R} : (x,y) \in B\} = \{y \in \mathbb{R} : y - x \in A\} = A + x.$$
Di conseguenza
$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\int_{B_x} e^{-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}}\,d\lambda_1(y) =&\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\int_{A+x} e^{-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}}\,d\lambda_1(y)\\ =&\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\int_A e^{-\frac{z^2}{2(t-s)}}\,d\lambda_1(z)\\ =&\mathscr{N}(0,t-s)(A).\end{aligned}$$

3. Verifichiamo l'indipendenza: fissiamo $0 < s < t$, quindi se fissiamo $A_1, A_2 \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, abbiamo che
$$\{B_s \in A_1\} = \pi^{-1}_{\{s\}}(A_1) = \pi^{-1}_{\{s,t\}}(A_1 \times \mathbb{R}),$$
e
$$\{B_t - B_s \in A_2\} = \pi^{-1}_{\{s,t\}}(h^{-1}(A_2)),$$

di modo che

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^W(\{B_s \in A_1\} \cap \{B_t - B_s \in A_2\}) = &\mathbb{P}^W(\pi^{-1}_{\{s,t\}}((A_1 \times \mathbb{R}) \cap h^{-1}(A_2))\\
=&P_{\{s,t\}}(\pi^{-1}_{\{s,t\}}((A_1 \times \mathbb{R}) \cap h^{-1}(A_2))\\
=&\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{s(t-s)}}\int_{(A_1\times\mathbb{R})\cap h^{-1}(A_2)} e^{-\frac{x^2}{2s}-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}}\,d\lambda_2(x,y)\\
=&\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{s(t-s)}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2s}}\left(\int_{((A_1\times\mathbb{R})\cap h^{-1}(A_2))_x} e^{-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}}\,d\lambda_1(y)\right)d\lambda_1(x)\\
=&\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{s(t-s)}}\int_{A_1} e^{-\frac{x^2}{2s}}\left(\int_{A_2+x} e^{-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}}\,d\lambda_1(y)\right)d\lambda_1(x)\\
=&\frac{1}{\sqrt{2\pi s}}\int_{A_1} e^{-\frac{x^2}{2s}}\,d\lambda_1(x)\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{s(t-s)}}\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\int_{A_2} e^{-\frac{z^2}{2(t-s)}}\,d\lambda_1(z)\\
=&\mathbb{P}^W(B_s \in A_1)\cdot\mathbb{P}^W(B_t - B_s \in A_2).
\end{aligned}$$

Usiamo le precedenti proprietà per mostrare che il m.B. è tale che la funzione

$$t \mapsto B_t(\omega) = \omega(t)$$

è, per $\mathbb{P}^W$–q.o. $\omega \in \Omega$, Hölder continua, con origine da 0, cioè $\omega(0) = 0$ e non ha variazione finita. In altre parole, vedremo che gli insiemi $C^\gamma([0,1])$ delle funzioni Hölderiane e

$$C_0([0,1]) = \{\omega : [0,1] \to \mathbb{R} : \omega \text{ continua con } \omega(0) = 0\}$$

sono $\mathscr{F}^W$–measurabili e

$$\mathbb{P}^W(C_0([0,1])) = \mathbb{P}^W(C^\gamma([0,1])) = 1$$

se $\gamma < \frac{1}{2}$, e

$$\mathbb{P}^W(C^\gamma([0,1])) = 0, \qquad \forall \gamma > \frac{1}{2}.$$

In più, data una funzione $\omega : [0,1] \to \mathbb{R}$ e un insieme finito di istanti $F \subset [0,1]$, $F = \{t_1, \ldots, t_m\}$, $0 \le t_1 < \ldots < t_m \le 1$, definiamo

$$\mathrm{Var}(\omega, F) = \sum_{i=1}^{m-1} |\omega(t_{i+1}) - \omega(t_i)|$$

e definiamo variazione totale di ω su $[0,1]$ come

$$\mathrm{Var}(\omega, [0,1]) = \sup_{F \subset [0,1]} \mathrm{Var}(\omega, F).$$

Poniamo quindi $VF([0,1])$ l'insieme delle funzioni a variazione totale finita in $[0,1]$, cioè le funzioni $\omega : [0,1] \to \mathbb{R}$ con $\mathrm{Var}(\omega, [0,1]) < +\infty$. Vedremo che

$$\mathbb{P}^W(VF([0,1]) \cap C([0,1])) = 0.$$

Per fare ciò, abbiamo bisogno del seguente risultato.

Lemma 8.3. *Sia $(\Omega, \mathscr{F}^W, \mathbb{P}^W)$ lo spazio di probabilità con $\mathbb{P}^W$ misura di Wiener a sia $\{B_t\}_{t\in[0,1]}$ il m.B. definito da $B_t(\omega) = \omega(t)$. Allora, per ogni $k \in \mathbb{N}$*

$$\mathbb{E}[|B_t - B_s|^k] = \begin{cases} 0 & \textit{se } k \textit{ dispari} \\ \\ \frac{k!}{(\frac{k}{2})!2^{\frac{k}{2}}}|t-s|^{\frac{k}{2}} & \textit{se } k \textit{ pari.} \end{cases}$$

Dimostrazione. Supponiamo $0 < s < t$: quindi, dato che la legge di $B_t - B_s$ è data da $\mathscr{N}(0, t-s)$, si ottiene che

$$I_k = \mathbb{E}[(B_t - B_s)^k] = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{\mathbb{R}} x^k e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}} d\lambda_1(x).$$

Quindi $I_k = 0$ se k dispari, mentre se $k = 2h$, si mostra, integrando per parti che $I_0 = 1$, $I_2 = (t-s)$ e $I_{2h} = (2h-1)(t-s)I_{2h-2}$ per $h \geq 2$. □

Grazie al lemma precedente, dato che in particolare

$$\mathbb{E}[|B_t - B_s|^{2h}] = c_h|t-s|^h, \tag{8.1}$$

possiamo applicare il Teorema di Kolmogorov 8.4 seguente per concludere che quasi ogni traiettoria del moto Browniano è Hölderiana.

Teorema 8.4. *Sia $\{X_t\}_{t\in[0,1]}$ un processo stocastico tale che*

$$\mathbb{E}[|X_t - X_s|^\beta] \leq C|t-s|^{1+\alpha};$$

allora il processo stocastico $\{X_t\}_{t\in[0,1]}$ ammette una versione $\{\widetilde{X}_t\}_{t\in[0,1]}$ tale che la mappa $t \mapsto \widetilde{X}_t(\omega)$ è γ–Hölderiana per ogni $\gamma < \frac{\alpha}{\beta}$ e per $\mathbb{P}$–q.o. $\omega \in \Omega$.

Quindi il moto Browniamo ammette una versione γ–Hölderiana per ogni $\gamma < \frac{1}{2}$ e quindi $C^\gamma([0,1])$ è $\mathscr{F}^W$–misurabile con

$$\mathbb{P}^W(C^\gamma([0,1])) = 1.$$

Definiamo ora la variazione quadratica di una funzione di una funzione $\omega : [0,1] \to \mathbb{R}$ ponendo

$$\mathrm{Var}_2(\omega, [0,1]) = \sup_{F\subset[0,1]} \mathrm{Var}_2(\omega, F),$$

dove, se $F = \{t_1, \ldots, t_m\}$, $0 \leq t_1 < \ldots < t_m \leq 1$,

$$\mathrm{Var}_2(\omega, F) = \sum_{i=1}^{m-1} |\omega(t_{i+1}) - \omega(t_i)|^2.$$

Definiamo anche

$$|F| = \max_{i=1,\ldots,m-1} |t_{i+1} - t_i|, \qquad \mathrm{osc}(\omega, F) = \max_{i=1,\ldots,m-1} |\omega(t_{i+1}) - \omega(t_i)|;$$

con queste notazioni si ottiene che

$$\mathrm{Var}_2(\omega, F) \leq \mathrm{osc}(\omega, F)\mathrm{Var}(\omega, F)$$

e quindi, se $\omega \in VF([0,1]) \cap C([0,T])$,

$$\lim_{|F|\to 0} \mathrm{Var}_2(\omega, F) = 0.$$

Dato che

$$\mathrm{Var}_2(\omega, [0,1]) = \lim_{|F|\to 0} \mathrm{Var}_2(\omega, F),$$

se ne deduce che per ogni $\omega \in VF([0,1]) \cap C([0,1])$, $\mathrm{Var}_2(\omega, F) = 0$.

Enunciamo e dimostriamo il seguente risultato.

Proposizione 8.5. *Per ogni $F \subset [0,1]$, la funzione $\omega \mapsto \mathrm{Var}_2(\omega, F)$ è misurabile e*

$$\lim_{|F|\to 0} \mathbb{E}[|\mathrm{Var}_2(\omega, F) - 1|^2] = 0.$$

Dimostrazione. La misurabilità segue dalla misurabilità della funzione

$$\omega \mapsto |\omega(t_{i+1}) - \omega(t_i)|^2 = |B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega)|^2$$

per ogni $i = 1, \dots, m-1$. Calcoliamo quindi l'integrale; usiamo la formula (8.1) e l'indipendenza degli incrementi $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ e $B_{t_{j+1}} - B_{t_j}$ per $j < i$, in modo da ottenere

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|\mathrm{Var}_2(\omega, F) - 1|^2] =& \mathbb{E}[\mathrm{Var}_2(\omega, F)^2] - 2\mathbb{E}[\mathrm{Var}_2(\omega, F)] + 1 \\
=& \sum_{i=1}^{m-1} \mathbb{E}[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^4] + 2\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j<i} \mathbb{E}[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2] + \\
& - 2\sum_{i=1}^{m-1} \mathbb{E}[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2] + 1 \\
=& 3\sum_{i=1}^{m-1} (t_{i+1} - t_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j<i} (t_{i+1} - t_i)(t_{j+1} - t_j) + \\
& - 2\sum_{i=1}^{m-1} (t_{i+1} - t_i) + 1 \\
=& 2\sum_{i=1}^{m-1} + \left(\sum_{i=1}^{m-1} (t_{i+1} - t_i)\right)^2 - 1 \\
\leq& 2|F|.
\end{aligned}$$

□

Il risultato precedente implica in particolare che se F_n è la decomposizione diadica di $[0,1]$, allora la funzione $f_n = \mathrm{Var}_2(\cdot, F_n)$ converge in $L^2(\Omega, \mathscr{F}^W, \mathbb{P}^W)$ ad 1, e quindi a meno di sottosuccessioni, f_{n_k} converge $\mathbb{P}^W$–q.o. ad 1, cioè esiste un insieme $\mathbb{P}^W$–trascurabile $N \subset \Omega$ tale che

$$\mathrm{Var}_2(\omega, F_{n_k}) \to 1, \qquad \forall \omega \in \Omega \setminus N.$$

Da ciò si deduce che

$$VF([0,1]) \cap C([0,1]) \subset N.$$

Dalle considerazioni precedenti possiamo ridurre lo studio del m.B. e la definizione della misura di Wiener allo spazio di Banach $\Omega_0 = C_0([0,1])$ delle funzioni continue nulle in 0. D'altra parte il m.B. può anche essere pensato definito sullo spazio di Hilbert $\Omega_2 = L^2([0,1]) = L^2([0,1], \mathscr{B}([0,1]), \lambda_1)$ una volta che la misura di Wiener viene definita sullo spazio quoziente $\Omega/\sim$, con

$$\omega_1 \sim \omega_2 \text{ se e solo se } \omega_1 = \omega_2 \ \lambda_1 - q.o.$$

8.2 Integrale stocastico

In questa sezione costruiremo l'integrale stocastico, noto anche come integrale di Ito, definito per processi stocastici adattati. Iniziamo con alcune considerazioni preliminari.

Supporremo di lavorare in $\Omega = C_0([0,1])$ e definiamo la filtrazione su Ω ponendo

$$\mathscr{F}_t^W = \sigma(\sigma_F : F \subset [0,t]).$$

Tale filtrazione altro non è che la più piccola σ–algebra per cui tutti i m.B. B_s per $0 \le s \le t$ sono $\mathscr{F}_t^W$–misurabili.

La mappa B_t è chiaramente $\mathscr{F}_t^W$–misurabile ed è una martingala, cioè

$$\mathbb{E}(B_t|\mathscr{F}_s^W) = B_s, \qquad \forall 0 \le s < t \le 1.$$

Infatti, la mappa $B_t - B_s$ è indipendente dalla σ–algebra $\mathscr{F}_s^W$ dato che se $A_1 = \pi_{\{t_1\}}^{-1}(A')$ con $0 \le t_1 < s$, e $A_2 \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, usando l'indipendenza di B_{t_1}, $B_s - B_{t_1}$ e $B_t - B_s$, ne deduciamo che

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^W(\{B_t - B_s \in A_2\} \cap A_1) =& \mathbb{P}^W(\{B_t - B_s \in A_2\} \cap \{B_{t_1} \in A'\}) \\
=& \mathbb{P}^W(\{B_t - B_s \in A_2\} \cap \{B_s - B_{t_1} \in \mathbb{R}\} \cap \{B_{t_1} \in A'\}) \\
=& \mathbb{P}^W(\{B_t - B_s \in A_2\}) \cdot \mathbb{P}^W(\{B_s - B_{t_1} \in \mathbb{R}\}) \cdot \mathbb{P}^W(\{B_{t_1} \in A'\}) \\
=& \mathbb{P}^W(\{B_t - B_s \in A_2\}) \cdot \mathbb{P}^W(A_1).
\end{aligned}$$

Tale ragionamento si estende chiaramente ad ogni $A_1 \in \sigma_F$, $F \subset [0,s]$, e quindi a $A_1 \in \mathscr{F}_s^W$.

Grazie a ciò, la mappa $\mathbb{E}(B_t - B_s|\mathscr{F}_s^W)$ è costante ed uguale all'aspettazione $\mathbb{E}[B_t - B_s]$, che è 0 dato che la media del m.B. è nulla. Quindi

$$0 = \mathbb{E}(B_t - B_s|\mathscr{F}_s^W) = \mathbb{E}(B_t|\mathscr{F}_s^W) - B_s,$$

cioè la proprietà di martingala del m.B.

Consideriamo ora processi stocastici semplici in $L^2([0,1], L^2(\Omega, \mathscr{F}^W, \mathbb{P}^W))$, cioè processi della forma

$$S_t = \sum_{i=1}^{m-1} \xi_i \chi_{[t_i, t_{i+1})}(t), \tag{8.2}$$

con $\xi \in L^2(\Omega, \mathscr{F}_{t_i}^W, \mathbb{P}^W)$ per ogni $i = 1, \dots, m-1$. Se per $t \in [0,1]$ si definisce $m(t)$ l'unico indice per cui $t \in [t_{m(t)}, t_{m(t)+1})$, possiamo definire l'integrale di Ito di S ponendo

$$I_t(S) = \sum_{i=1}^{m(t)-1} \xi_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + \xi_{m(t)}(B_t - B_{m(t)}). \tag{8.3}$$

Abbiamo il seguente risultato.

Lemma 8.6 (Isometria di Ito). *Sia $\{S_t\}_{t\in[0,1]}$ un processo stocastico semplice definito come in* (8.2) *e sia $I_t(S)$ definito in* (8.3)*; allora*

$$\mathbb{E}[I_t(S)^2] = \int_0^t \|S_\tau\|^2_{L^2(\Omega,\mathscr{F}^W_\tau,\mathbb{P}^W)} d\tau. \tag{8.4}$$

Dimostrazione. Useremo il fatto che per $j < i$, le funzioni ξ_i, ξ_j, e $(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})$ sono $\mathscr{F}^W_{t_i}$–misurabili e il fatto che $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ è indipendente da $\mathscr{F}^W_{t_i}$. Quindi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[I_t(S)^2] = & \sum_{i=1}^{m(t)-1} \mathbb{E}[\xi_i^2(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2] + 2\sum_{i=1}^{m(t)-1}\sum_{j<1} \mathbb{E}[\xi_i\xi_j(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})] + \\
& + \mathbb{E}[\xi^2_{m(t)}(B_t - B_{m(t)})^2] + 2\sum_{i=1}^{m(t)-1} \mathbb{E}[\xi_{m(t)}\xi_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(B_t - B_{t_{m(t)}})] \\
= & \sum_{i=1}^{m(t)-1} \mathbb{E}[\xi_i^2](t_{i+1} - t_i) + \mathbb{E}[\xi^2_{m(t)}](t - t_{m(t)}) \\
= & \int_0^t \|S_\tau\|^2_{L^2(\Omega,\mathscr{F}^W_\tau,\mathbb{P}^W)} d\tau.
\end{aligned}$$

□

Grazie al precedente lemma, possiamo definire l'integrale stocastico usando il seguente Teorema; ricordiamo che un processo stocastico $\{X_t\}_{t\in[0,1]}$ viene detto adattato ad una filtrazione $\mathscr{F}_t$ se X_t è $\mathscr{F}_t$–misurabile per ogni$t \in [0, 1]$.

Teorema 8.7. *Sia $\{X_t\}_{t\in[0,1]} \in L^2([0,1], L^2(\Omega, \mathscr{F}^W_t, \mathbb{P}^W))$ un processo stocastico adattato alla filtrazione $\mathscr{F}^W_t$; allora è ben definito l'integrale stocastico, denotato con*

$$\int_0^t X_\tau dB_\tau,$$

che è l'unico processo stocastico che coincide con $I_t(X)$ se X_t è un processo stocastico semplice ed è tale che

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t X_\tau dB_\tau\right)^2\right] = \int_0^t \mathbb{E}[X^2_\tau] d\tau.$$

Il processo

$$t \mapsto \int_0^t X_\tau dB_\tau$$

è una martingala e

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t X_\tau dB_\tau\right] = 0, \qquad \forall t \in [0, 1].$$

Dimostrazione. La dimostrazione è essenzialmenteuna dimostrazione di approssimabilità mediante processi semplici per funzioni di

$$L^2([0, 1], L^2(\Omega, \mathscr{F}^W_t, \mathbb{P}^W),$$

che lasciamo come possibile approfondimento.

La restante parte è basata sulla dimostrazione delle medesime proprietà per processi semplici Sia quindi S_t un processo stocastico semplice, allora

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(I_t(S)|\mathscr{F}_s^W) &= \sum_{i=1}^{m(s)-1} \mathbb{E}(\xi_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})|\mathscr{F}_s^W) + \sum_{i=m(s)}^{m(t)-1} \mathbb{E}(\xi_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})|\mathscr{F}_s^W) + \\
&\quad + \mathbb{E}(\xi_{m(t)}(B_t - B_{m(t)})|\mathscr{F}_s^W) \\
&= \sum_{i=1}^{m(s)-1} \xi_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + \mathbb{E}(\xi_{m(s)}(B_s - B_{m(s)})|\mathscr{F}_s^W) + \\
&\quad + \mathbb{E}(\xi_{m(s)}(B_{m(s+1)} - B_s)|\mathscr{F}_s^W) + \sum_{i=m(s)+1}^{m(t)-1} \mathbb{E}(\xi_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})|\mathscr{F}_s^W) + \\
&\quad + \mathbb{E}(\xi_{m(t)}(B_t - B_{m(t)})|\mathscr{F}_s^W) \\
&= \sum_{i=1}^{m(s)-1} \xi_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + \xi_{m(s)}(B_s - B_{m(s)}) = I_s(S),
\end{aligned}$$

dato che per $i = 1, \ldots, m(s) - 1$ le funzioni $\xi_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$ sono $\mathscr{F}_s^W$–misurabili e per ogni $i = m(s) + 1, \ldots, m(t)$, $z > t_i$, ξ_i e $B_z - B_{t_i}$ sono indipendenti, da cui

$$\mathbb{E}(\xi_i(B_z - B_{t_i})|\mathscr{F}_s^W) = \mathbb{E}(\xi_i|\mathscr{F}_s^W) \cdot \mathbb{E}(B_z - B_{t_i}|\mathscr{F}_s^W) = 0.$$

Quindi in generale

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t X_\tau dB_\tau \middle| \mathscr{F}_s^W\right) = \int_0^s X_\tau dB_\tau.$$

In definitiva quindi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[I_t(S)\right] &= \sum_{i=1}^{m(t)-1} \mathbb{E}[\xi_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})] + \mathbb{E}[\xi_{m(t)}(B_t - B_{m(t)})] \\
&= \sum_{i=1}^{m(t)-1} \mathbb{E}[\xi_i] \cdot \mathbb{E}[B_{t_{i+1}} - B_{t_i}] + \mathbb{E}[\xi_{m(t)}] \cdot \mathbb{E}[B_t - B_{m(t)}] = 0
\end{aligned}$$

grazie all'indipendenza. Quindi, generalizzando

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t X_\tau dB_\tau\right] = 0, \qquad \mathbb{P}^W - a.s.$$

□

8.3 Esercizi

Esercizio 8.3.1. Dimostrare che $\mathbb{P}^W(C_0([0,1])) = 1$ e $\mathbb{P}^W(C^\gamma([0,1])) = 0$ se $\gamma > \frac{1}{2}$.

Esercizio 8.3.2. Dimostrare che, grazie alla separabilità dello spazio di Banach $\Omega_0 = C_0([0,1])$, $\mathscr{F}^W$ ristretta ad Ω_0 è il completamento della σ–algebra dei Boreliani $\mathscr{B}(\Omega_0)$, con topologia indotta dalla norma del sup

$$\|\omega\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |\omega(t)|.$$

Esercizio 8.3.3. Dimostrare che il processo stocastico $B_t - t$ è una martingala.

8.4 Approfondimenti

8.4.1 Teoremi di Kolmogorov

Come approfondimenti, distinti o congiunti, si possono dimostrare i due Teoremi di Kolmogorov 8.2 e 8.4. Le dimostrazioni di tali Teoremi si trovano ad esempio nel libro di Dudley [6].

8.4.2 Approssimazione di processi adattati

Si potrebbe dimostrare il teorema di approssimazione di funioni

$$L^2([0,1], L^2(\Omega, \mathscr{F}_t^W, \mathbb{P}^W),$$

mediante processi semplici. Con questo approfondimento si completa quindi la dimostrazione del Teorem **??**.

8.4.3 Applicazione alle equazioni differenziali stocastiche

Un'equazione differenziale stocastica è un'equazione del tipo

$$\begin{cases} dX_t = H_t(X_t)dt + K_t(X_t)dB_t \\ \\ X_0 = Y, \end{cases}$$

dove per soluzione del precedente problema si intende un processo stocastico $\{X_t\}_t$ per cui

$$X_t = Y = \int_0^t H_s(X_s)ds + \int_0^t K_s(X_s)dB_s.$$

Si possono trovare condizioni sulle funzioni H_s e K_s per cui esiste ed è unico il processo stocastico soluzione dell'equazione data. con la precedente notazione si inten

Capitolo 9

Misure di Hausdorff

In questo capitolo ci occupiamo dello studio particolareggiato delle misure di Hausdorff. Il materiale contenuto in questo capitolo è preso dai testi di Ambrosio[1], Ambrosio–Fusco–Pallara [2], Ambrosio–Tilli [3], Falconer [7], Maggi [9], Mattila [10] and Morgan [11].

Ricordiamo che fissato $\alpha \geq 0$ la pre–misura di Hausdorff di dimensione α viene definita ponendo

$$\mathscr{H}^\alpha_\delta(E) = \inf \left\{ \omega_\alpha \sum_{j\in\mathbb{N}} \left(\frac{\operatorname{diam}(E_j)}{2} \right)^\alpha : E \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j, \operatorname{diam}(E_j) < \delta \right\}.$$

Qui con ω_α si denota la costante

$$\omega_\alpha = \frac{\pi^{\frac{\alpha}{2}}}{\Gamma(1+\frac{\alpha}{2})},$$

con Γ funzione di Eulero

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty s^{t-1} e^{-s} ds;$$

se $\alpha = k \in \mathbb{N}$, allora ω_k altro non è che la misura di Lebesgue k–dimensionale della palla unitaria. La funzione $\mathscr{H}^\alpha_\delta$ è una misura esterna e si definisce la misura esterna di Hausdorff di dimensione α

$$\mathscr{H}^\alpha(E) = \lim_{\delta\to 0} \mathscr{H}^\alpha_\delta(E) = \sup_{\delta>0} \mathscr{H}^\alpha_\delta(E).$$

Grazie al Criterio di Caratheodoy 1.16 tale funzione definisce una misura per la quale gli insiemi Boreliani sono misurabili.

La precedente costruzione può essere anche modificata come segue; anzitutto, si possono considerare ricoprimenti di un insieme dato fatto esclusivamente da palle. In questo modo si definisce la pre-misura di Hausdorff sferica

$$\mathscr{S}^\alpha_\delta(E) = \inf \left\{ \omega_\alpha \sum_{j\in\mathbb{N}} \varrho_j^\alpha : E \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_{\varrho_j}(x_j), 2\varrho_j < \delta \right\}.$$

Anche in questo casi si è definita una misura esterna e la funzione di insieme

$$\mathscr{S}^\alpha(E) = \lim_{\delta\to 0} \mathscr{S}^\alpha_\delta(E) = \sup_{\delta>0} \mathscr{S}^\alpha_\delta(E)$$

è una misura esterna, detta misura di Hausdorff sferica, per la quale gli insiemi Boreliani sono misurabili. Notiamo che vale il seguente confronto

$$\mathscr{H}^{\alpha}_{\delta}(E) \leq \mathscr{S}^{\alpha}_{\delta}(E)$$

per ogni $E \subset \mathbb{R}^d$. Dato poi che per ogni insieme $E \subset \mathbb{R}^d$ si ha che

$$E \subset B_{2\varrho}(x), \qquad \forall x \in E, \varrho = \operatorname{diam}(E),$$

vale anche il seguente confronto

$$\mathscr{S}^{\alpha}_{\delta}(E) \leq 2^{\alpha} \mathscr{H}^{\alpha}_{\delta}(E).$$

Le due misure $\mathscr{H}^{\alpha}$ e $\mathscr{S}^{\alpha}$ sono quindi equivalenti; in generale non è detto che coincidano, anche se la classe degli insiemi per cui tali misure sono uguali è molto ampia (ad esempio, nel caso di $\alpha = k$ intero con E contenuto in una varieà k–dimensionale regolare, a meno di insiemi trascurabili).

Ricordiamo infine che la costruzione della misura di Hausdorff può anche essere generalizzata al caso in cui la funzione $t \mapsto \omega_{\alpha}(\frac{t}{2})^{\alpha}$ venga sostituita con una qualsiasi funzione $h : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ monotona crescente e continua a destra ponendo

$$\mathscr{H}^{h}_{\delta}(E) = \inf \left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}} h(\operatorname{diam}(E_j)) : E \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} E_j, \operatorname{diam}(E_j) < \delta \right\}$$

e

$$\mathscr{H}^{h}(E) = \lim_{\delta \to 0} \mathscr{H}^{h}_{\delta}(E) = \sup_{\delta > 0} \mathscr{H}^{h}_{\delta}(E).$$

In modo ovvio viene anche definita la misura di Hausdorff $\mathscr{S}^{h}$ sferica associata alla funzione h.

Chiudiamo questa sezione con la seguente osservazione.

Osservazione 9.1. Se $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ è una una funzione Lipschitziana, allora dato che per ogni $E \subset \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} \operatorname{diam}(f(E)) =& \sup \{\|f(x) - f(y)\| : x, y \in E\} \leq \operatorname{Lip}(f) \cdot \sup \{\|x - y\| : x, y \in E\} \\ =& \operatorname{Lip}(f) \cdot \operatorname{diam}(E), \end{aligned}$$

se ne deduce che

$$\mathscr{H}^{\alpha}_{\delta}(E) \leq \operatorname{Lip}(f)^{\alpha} \mathscr{H}^{\alpha}_{\delta}(E)$$

e quindi

$$\mathscr{H}^{\alpha}(E) \leq \operatorname{Lip}(f)^{\alpha} \mathscr{H}^{\alpha}(E).$$

Analogamente, siccome

$$f(B_{\varrho}(x_0)) \subset B_{\operatorname{Lip}(f)\varrho}(f(x_0)),$$

se ne deduce che anche per la misura di Hausdorff sferica vale la seguente stima

$$\mathscr{S}^{\alpha}_{\delta}(E) \leq \operatorname{Lip}(f)^{\alpha} \mathscr{S}^{\alpha}_{\delta}(E)$$

e quindi

$$\mathscr{S}^{\alpha}(E) \leq \operatorname{Lip}(f)^{\alpha} \mathscr{S}^{\alpha}(E).$$

In particolare, se $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ è una similitudine di fattore r, cioè

$$\|f(x) - f(y)\| = r\|x - y\|, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^d,$$

allora

$$\mathscr{H}^\alpha(f(E)) = r^\alpha \mathscr{H}^\alpha(E), \qquad \mathscr{S}^\alpha(f(E)) = r^\alpha \mathscr{S}^\alpha(E)$$

per ogni $E \subset \mathbb{R}^d$. In particolare, le misure di Haudorff sono invarianti per traslazioni, per rotazioni e per riflessioni.

Notiamo infine che nella definizione della misura di Hausdorff il ricoprimento si può supporre fatto con insiemi chiusi in quanto il passaggio alla chiusura non modifica il diametro di un insieme. Eventualmente allargando leggermente gli insiemi, si possono anche considerare ricoprimenti fatti da insiemi aperti.

9.1 Dimensione di Hausdorff

Iniziamo anzitutto con l'osservare che se $\alpha > \beta$, allora vale il seguente confronto

$$\mathscr{H}^\alpha_\delta(E) \le \delta^{\alpha-\beta} \frac{\omega_\alpha}{\omega_\beta} \mathscr{H}^\beta_\delta(E).$$

Quindi se E è un insieme per cui $\mathscr{H}^\beta(E) < +\infty$, allora

$$\mathscr{H}^\alpha(E) = 0, \qquad \forall \alpha > \beta.$$

D'altro canto, se $\mathscr{H}^\alpha_\delta(E) > 0$, allora

$$\mathscr{H}^\beta(E) = +\infty, \qquad \forall \beta < \alpha.$$

Quindi, per ogni insieme $E \subset \mathbb{R}^d$ è ben definita la seguente quantità

$$s = \inf\{\alpha \ge 0 : \mathscr{H}^\alpha(E) = 0\} = \sup\{\alpha \ge 0 : \mathscr{H}^\alpha(E) = +\infty\}. \tag{9.1}$$

Definizione 9.2 (Dimensione di Hausdorff)**.** *Dato $E \subset \mathbb{R}^d$, viene definita dimensione di Hausdorff di E la quantità $s = \dim_H(E)$ definita dall'equazione* (9.1).

Enunciamo qui, senza dimostrarlo, il seguente risultato, noto come disuguaglianza isodiametrica; la sua dimostrazione si basa su argomenti di simmetrizzazione che esulano dagli scopi di questo corso ma che possono essere argomento di approfondimento.

Proposizione 9.3 (Disuguaglianza isodiametrica)**.** *Sia $E \subset \mathbb{R}^d$ un insieme limitato; allora*

$$\lambda^*_d(E) \le \omega_d \left(\frac{\operatorname{diam}(E)}{2}\right)^d.$$

Abbiamo il seguente risultato, che implica che per ogni insieme $E \subset \mathbb{R}^d$, $\dim_H(E) \le d$.

Teorema 9.4. *Per ogni $E \subset \mathbb{R}^d$, $\mathscr{H}^d(E) = \mathscr{S}^d(E) = \lambda^*_d(E)$.*

Dimostrazione. Fissato $E \subset \mathbb{R}^d$, consideriamo un ricoprimento quasi ottimale per la misura di Hausdorff; cioè, fissato $\varepsilon > 0$, esiste un ricoprimento $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ per cui

$$\omega_d \sum_{j\in\mathbb{N}} \left(\frac{\operatorname{diam}(E_j)}{2}\right)^d \leq \mathscr{H}^d(E) + \varepsilon.$$

Grazie alla disuguaglianza isodiametrica, si ottiene quindi che

$$\lambda_d^*(E) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_d^*(E_j) \leq \omega_d \sum_{j\in\mathbb{N}} \left(\frac{\operatorname{diam}(E_j)}{2}\right)^d \leq \mathscr{H}^d(E) + \varepsilon;$$

quindi, data l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$,

$$\lambda_d^*(E) \leq \mathscr{H}^d(E).$$

Viceversa, possiamo supporre che E abbia misura esterna di Lebesgue finita: ricopriamo E con una quantità al più numerabile di rettangoli aperti R_i in modo tale che

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_d(R_i) \leq \lambda_d^*(E) + \varepsilon.$$

Applichiamo quindi il Teorema di Besicovitch-Vitali 6.16 alla famiglia

$$\mathcal{B}_{\delta,i} = \{\overline{B}_\varrho(x) \subset R_i, 2\varrho < \delta\};$$

esiste quindi una famiglia al più numerabile e disgiunta $\mathcal{B}'_{\delta,i} = \{\overline{B}_{ij}\}$ di palle per cui

$$\mathscr{H}^d(R_i \setminus \bigsqcup \mathcal{B}'_{\delta,i}) = 0.$$

Quindi

$$\mathscr{H}^d_\delta(R_i \setminus \bigsqcup \mathcal{B}'_{\delta,i}) = 0,$$

mentre

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_d(\overline{B}_{ij}) = \lambda_d\left(\bigsqcup \mathcal{B}'_{\delta,i}\right) \leq \lambda_d(R_i).$$

In definitiva

$$\begin{aligned}\mathscr{H}^d_\delta(E) &\leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathscr{H}^d_\delta(R_i) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}} \mathscr{H}^d_\delta(\overline{B}_{ij}) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}} \omega_d \left(\frac{\operatorname{diam}(\overline{B}_{ij})}{2}\right)^d \\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_d(\overline{B}_{ij}) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_d(R_i) \leq \lambda_d^*(E) + \varepsilon,\end{aligned}$$

e quindi la disugualianza desiderata.

Resta da confrontare la misura di Lebesgue con la misura di Hausdorff sferica; ovviamente basta dimostrare la disuguaglianza $\mathscr{S}^d(E) \leq \lambda_d^*(E)$. Supopniamo E limitato e fissiamo $\delta > 0$ ed A aperto contenente E; definiamo quindi la famiglia

$$\mathcal{B}_\delta = \{\overline{B}_\varrho(x) \subset A : 2\varrho < \delta\};$$

essendo un ricoprimento fine, ne estraiamo una famiglia al più numerabile e disgiunta $\mathcal{B}'_\delta = \{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tale che

$$\mathscr{S}^d(A \setminus \bigsqcup \mathcal{B}'_\delta) = 0.$$

Quindi $\mathscr{S}^d_\delta(A \setminus \bigsqcup \mathcal{B}'_\delta) = 0$, da cui

$$\begin{aligned}\mathscr{S}^d_\delta(A) &\leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathscr{S}^d_\delta(B_i) \leq \omega_d \sum_{i\in\mathbb{N}} \varrho_i^d \\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_d(B_i) \leq \lambda_d(A).\end{aligned}$$

Passando al limite per $\delta \to 0$: per l'arbitrarietà di A, si conclude. Si passa poi al caso E illimitato considerando gli insiemi $E_R = E \cap B_R(0)$. □

La misura di Hausdorff con potenze intere coincinde in realtà con qualsiasi altra misura ragionevole su insiemi con una qualche ragionevole regolarità (si veda la seguente Proposizione 9.9). In particolare, se $k < d$ è un intero, allora la misura di Hausdorff coincide con le misure delle varietà k dimensionali immerse in $\mathbb{R}^d$. Vedremo questo fatto nei dettagli solo nel caso $k = 1$.

9.2 Frattali

Una applicazione della teoria delle misure di Hausdorff è dato dalla trattazione degli insiemi frattali; tratteremo qui solo il caso dell'insieme di Cantor, ma tale teoria si applica a tutti gli insiemi che sono ottenuti come punti fissi di una famiglia di similitudini; rimandiamo all'articolo di Hutchinson [8] e ai libri di Mattila [10] e Falconer [7] per maggiori dettagli.

Ricordiamo che l'insieme di Cantor è ottenuto come punto fisso della mappa Ψ determinata dalla due similitudini $\psi_1(x) = \frac{x}{3}$ e $\psi_2(x) = \frac{x+2}{3}$,

$$C = \Psi(C) = \psi_1(C) \sqcup \psi_2(C).$$

Dato che la misura di Hausdorff è invariante per traslazioni e grazie al fatto che ψ_1 e ψ_2 sono similitudini di fattore $\frac{1}{3}$, è facile individuare un candidato per la dimensione di Hausdorff di C. Infatti, l'unico esponente α per cui la misura di Hausdorff di C è finita e non nulla è determinato dall'identità

$$\mathscr{H}^\alpha(C) = \mathscr{H}^\alpha(\Psi(C)) = \frac{2}{3^\alpha}\mathscr{H}^\alpha(C),$$

e quindi $\alpha = \ln_3 2$. Questo ragionamento diventa completo grazie al seguente risultato.

Proposizione 9.5. *Sia* $\alpha = \ln_3 2$*; allora*

$$\mathscr{H}^\alpha(C) = \frac{\omega_\alpha}{2^\alpha}.$$

Dimostrazione. Una disuguaglianza è immediata in quanto gli insiemi $C^{(j)}$ dati dall'unione di 2^j intervalli chiusi di ampiezza $1/3^j$ sono un ricoprimento di C e quindi

$$\mathscr{H}^\alpha_{1/3^j}(C) \leq \omega_\alpha \frac{2^j}{(2\cdot 3^j)^\alpha} = \frac{\omega_\alpha}{2^\alpha}.$$

Per la disuguaglianza opposta, bisogna mostrare che il ricoprimento determinato da $C^{(j)}$ è ottimale. Sia quindi E_i un ricoprimento di C: per quanto detto quando abbiamo definito la misura di Hausdorff, possiamo supporre ogni E_i chiuso. Esistono quindi $a_i, b_i \in E_i$ tali che

$$\operatorname{diam}(E_i) = b_i - a_i.$$

È chiaro che possiamo sostituire E_i con l'intervallo $[a_i, b_i]$; a questo punto, considerando gli intervalli aperti $I_i = (a_i - \varepsilon/2^i, b_i + \varepsilon/2^i)$, se rimpiazziamo gli E_i con tali intervalli aperti I_i si ottiene che

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \left(\frac{\operatorname{diam}(E_i)}{2}\right)^\alpha = \sum_{i\in\mathbb{N}} \left(\frac{\operatorname{diam}(I_i)}{2}\right)^\alpha + o(\varepsilon).$$

Dato che C è compatto, è sufficiente una quantità finita di intarvalli I_i, $i = 1, \dots, m$ oer ricoprire C. Possiamo ulteriormente sostituire gli intervalli con la loro chiusura $\bar{I}_i = [\alpha_i, \beta_i]$; eventualmente restringendo tali intervalli, non è restrittivo supporre che $\alpha_i, \beta_i \in C$ per ogni $i = 1, \dots, m$. Poniamo

$$r = \min\{\beta_i - \alpha_i : i = 1, \dots, m\}$$

e sia $j \in \mathbb{N}$ determinato da

$$\frac{1}{3^j} \leq r < \frac{1}{3^{j-1}}.$$

Ricordiamo che il complementare di C in $[0, 1]$ è dato da intervalli aperti disgiungi

$$[0, 1] \setminus C = \bigsqcup_{h\in\mathbb{N}} A_h;$$

per come abbiamo costruito gli intervalli I_i, si ha che per ogni $h \in \mathbb{N}$, o

$$A_h \cap I_i = \emptyset \qquad \forall i = 1, \dots, m,$$

oppure

$$A_h \subset I_i \quad \text{per un qualche } i.$$

Mostriamo che possiamo scartare ogni A_h il cui diametro sia maggiore o uguale a $1/3^j$ dall'unione degli I_i. Si consideri quindi l'intervallo I_i la cui ampiezza realizza il minimo r; tale intervallo deve contenere un aperto A_h con diametro pari a $1/3^j$ in quanto

$$\frac{1}{3^j} > \frac{r}{3}$$

per costruzione. Allora scriviamo

$$I_i = K_1 \sqcup A_h \sqcup K_2$$

con K_1 e K_2 intervalli chiusi per i quali

$$\operatorname{diam}(K_1) \leq \operatorname{diam}(A_h), \quad \operatorname{diam}(K_2) \leq \operatorname{diam}(A_h).$$

Quest'ultima proprietà segue dal fatto che

$$\operatorname{diam}(A_h) \geq \frac{1}{3^j} > \frac{r}{3}$$

e gli intervalli aperti con diametro $1/3^j$ sono distribuiti a distanze tra loro pari ad almeno $1/3^j$, quindi se ad esempio

$$\operatorname{diam}(K_1) > \operatorname{diam}(A_h)$$

il punto α_i non potrebbe appartenere a C. Quindi, dalla concavità della funzione $t \mapsto t^\alpha$, se ne deduce che

$$\begin{aligned}
\operatorname{diam}(I_i)^\alpha &= (\operatorname{diam}(K_1) + \operatorname{diam}(A_h) + \operatorname{diam}(K_2))^\alpha \\
&= \left(\operatorname{diam}(K_1) + \frac{\operatorname{diam}(A_h)}{2} + \frac{\operatorname{diam}(A_h)}{2} + \operatorname{diam}(K_2)\right)^\alpha \\
&\geq \left(\frac{3}{2}\operatorname{diam}(K_1) + \frac{3}{2}\operatorname{diam}(K_2)\right)^\alpha = 3^\alpha \left(\frac{\operatorname{diam}(K_1)}{2} + \frac{\operatorname{diam}(K_2)}{2}\right)^\alpha \\
&=2 \left(\frac{\operatorname{diam}(K_1)}{2} + \frac{\operatorname{diam}(K_2)}{2}\right)^\alpha \geq \operatorname{diam}(K_1)^\alpha + \operatorname{diam}(K_2)^\alpha.
\end{aligned}$$

L'intevallo I_i non può contenere al suo interno intervalli con diamentro $\operatorname{diam}(A_h) > 1/3^{j-1}$ e quindi $K_1, K_2 \subset C^{(j)}$.

Si ripete quindi il ragionamento sugli altri intervalli I_i; se l'ampiezza r_i di I_i è compresa tra r e $\frac{4r}{3}$, il ragionamento precedente resta invariato, altrimenti esiste un intervallo aperto ampiezza almeno $1/3^{j-1}$ contenuto in I_i; considerando il più grande tra tali intervalli, si ripete il ragionamento precedente.

Con questo ragionamento si possono eliminare dall'unione degli intervalli I_i tutti gli intervalli aperti A_h di diamentro almeno $1/3^j$ e quindi l'unione degli I_i contiene l'insieme $C^{(j)}$ della costruzione dell'insieme di Cantor ed ha la proprietà che

$$\frac{\omega_\alpha}{2^\alpha} \leq \omega_\alpha \sum_{i \in \underline{m}} \left(\frac{\operatorname{diam}(I_i)}{2}\right)^\alpha,$$

che era quanto volevamo dimostrare. □

9.3 Confronto con curve e superfici regolari

Confrontiamo in questa sezione la misura di Hausdorff uni-dimensionale con la lunghezza di una curva parametrizzata.

Abbiamo infatti il seguente risultato.

Teorema 9.6. *Sia $r : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ una curva semplice regolare; allora*

$$\mathscr{H}^1(r([a,b])) = \ell(r, [a,b]).$$

Dimostrazione. Fissiamo una partizione di $[a,b]$ determinata da $0 \leq t_1 < \ldots < t_m \leq b$ e poniamo

$$\Gamma = r([a,b]), \qquad \Gamma_i = r([t_i, t_{i+1}]),\ i = 1, \ldots, m-1.$$

Denotiamo inoltre con V_i la retta passante per i punti $r(t_i)$ e $r(t_{i+1})$ e consideriamo la proiezione $\pi_i : \mathbb{R}^d \to V_i$. Dato che la proiezione è 1–Lipschitz e ogni Γ_i è connesso, se ne deduce che $[r(t_i), r(t_{i+1})] \subset \pi_i(\Gamma_i)$ e

$$\|r(t_{i+1} - r(t_i))\| \leq \mathscr{H}^1(\pi_i(\Gamma_i)) \leq \mathscr{H}^1(\Gamma_i).$$

Si noti poi che $\Gamma_i \cap \Gamma_{i+1} = \{r(t_{i+1})\}$ dato che la curva è semplice, quindi, dato che le intersezioni tra i Γ_i sono $\mathscr{H}^1$-trascurabili

$$\mathscr{H}^1(\Gamma) = \sum_{i \in \underline{m-1}} \mathscr{H}^1(\Gamma_i) \geq \sum_{i \in \underline{m-1}} \|r(t_{i+1}) - r(t_i)\|.$$

Prendendo quindi l'estremo superiore su tutte le partizioni di $[a, b]$, si deduce che

$$\mathscr{H}^1(\Gamma) \geq \ell(r, [a, b]).$$

Dimostriamo quindi la disuguaglianza inversa: usando la riparametrizzazione in lunghezza d'arco $\tilde{r} : [0, \ell] \to \mathbb{R}^d$ che definisce una funzione 1–Lipschitz, si ottiene che

$$\mathscr{H}^1(\Gamma) = \mathscr{H}^1(\tilde{r}([0, \ell])) \leq \mathscr{H}^1([0, \ell]) = \ell.$$

□

Il risultato precedente si può estendere anche al caso più generale delle curve di lunghezza finita non necessariamente regolari. Tutto quello che è servito nella dimostrazione precedente è stato il poter usare la parametrizzazione per lunghezza d'arco. Ricordiamo quindi il seguente risultato.

Proposizione 9.7. *Sia $r : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ una curva semplice con $\ell = \ell(r, [a, b]) < +\infty$; allora la funzione*

$$\alpha(t) = \ell(r, [a, t])$$

è una funzione strettamente monotona crescente e continua, quindi definendo $\tilde{r} : [0, \ell] \to \mathbb{R}^d$,

$$\tilde{r}(s) = r(\alpha^{-1}(s))$$

si ottiene la riparametrizzazione in lunghezza d'arco della curva con

$$\|\tilde{r}(s_1) - \tilde{r}(s_2)\| \leq |s_1 - s_2|, \quad \forall s_1, s_2 \in [0, \ell].$$

Dimostrazione. Le conclusioni del Teorema seguono dalle seguenti considerazioni; dato che per ogni $a \leq t_1 < t_2 \leq b$,

$$\ell(r, [a, t_2]) = \ell(r, [a, t_1]) + \ell(r, [t_1, t_2]) \geq \ell(r, [a, t_1]) + \|r(t_2) - r(t_1)\| > \ell(r, [a, t_1])$$

per l'iniettività di r, allora $\alpha(t)$ è strettamente monotona crescente. Usando poi la misura di cui α è la funzione di distribuzione

$$\mu_\alpha([t_1, t_2]) = \alpha(t_2) - \alpha(t_1),$$

segue la continuità a destra della funzione α. La continuità a sinistra segue dal fatto che

$$\ell(r, [a, t]) = \sup_{s<t} \ell(r, [a, s]).$$

La Lipschitianità di $\tilde{r}$ segue dal fatto che posto $s_1 = \alpha(t_1)$ e $s_2 = \alpha(t_2)$, supposto $t_1 < t_2$,

$$\|\tilde{r}(s_1) - \tilde{r}(s_1)\| = \|r(t_1) - r(t_2)\| \leq \ell(r, [t_1, t_2]) = s_2 - s_1.$$

□

I discorsi fatti finora si possono ripetere anche per curve a valori in un sottoinsieme X di $\mathbb{R}^d$ con distanza indotta da quella Euclidea di $\mathbb{R}^d$; per ragioni di completezza, tale insieme verrà supposto chiuso. Si potrà estendere anche al caso di X spazio metrico, dove la lunghezza di una curva viene definita nell'ovvio modo

$$\ell(r,[a,b]) = \sup_{\mathcal{P}\subset[a,b]} \sum_{i\in\underline{m-1}} d(r(t_i), r(t_{i+1}))$$

dove l'estremo superiore viene preso su tutte le partizioni $\mathcal{P}$ di $[a,b]$ determinata dai punti $a \le t_1 < \ldots < t_m \le b$. Nel dimostrare che la misura di Hausdorff era maggiore o uguale della lunghezza abbiamo usato le proiezioni su sottospazi di dimensione uno; tale argomento resta invariato anche nel caso X sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}^d$ e ovviamente non funziona nel caso generale degli spazi metrici; resta in ogni caso vero il risultato, e cioè il fatto che la misura di Hausdorff uni–dimensionale coincide con la lunghezza della curva. Non presentiamo qui la dimostrazione, ma rimandiamo al libro di Ambrosio e Tilli [3].

Ricordiamo anche il seguente risultato di semicontinuità inferiore per la lunghezza di una curva.

Proposizione 9.8. *Siano $r_j : [a,b] \to X$ curve uniformemente convergenti alla curva $r : [a,b] :\to X$; allora*

$$\ell(r,[a,b]) \le \liminf_{j\to+\infty} \ell(r_j,[a,b]).$$

Dimostrazione. Si fissi una partizione $\mathcal{P} \subset [a,b]$ con vertici $a \le t_1 < \ldots < t_m \le b$; allora

$$\begin{aligned}\sum_{i\in\underline{m-1}} d(r(t_i), r(t_{i+1})) \le & \sum_{i\in\underline{m-1}} d(r_j(t_i), r_j(t_{i+1})) \\ & + \sum_{i\in\underline{m-1}} d(r(t_i), r_j(t_i)) + \sum_{i\in\underline{m-1}} d(r(t_{i+1}), r_j(t_{i+1})) \\ \le & \ell(r_j,[a,b]) + \sum_{i\in\underline{m-1}} d(r(t_i), r_j(t_i)) + \sum_{i\in\underline{m-1}} d(r(t_{i+1}), r_j(t_{i+1})).\end{aligned}$$

Prendendo il limite per $j \to +\infty$ e sfruttando la convergenza uniforme, si ottiene quindi il risultato. □

Tornando al caso delle parametrizzazioni regolari in $\mathbb{R}^d$, si può ottenere un risultato più preciso. Si supponga di avere una superficie parametrizzata regolare $r : D \to \mathbb{R}^d$ con $D \subset \mathbb{R}^k$ aperto e $r \in C^1(D)$ con $\mathrm{rk}(dr(u)) = k$ per ogni $u \in D$. Supponiamo anche r iniettiva e poniamo $\Sigma = r(D)$. Possiamo allora definire, per $A \subset \mathbb{R}^d$ aperto,

$$\mu_r(A) = \int_{r^{-1}(A)} |J_k dr(u)| du, \tag{9.2}$$

con $|J_k dr(u)|$ il fattore di area associato alla matrice Jacobiana dr, cioè la radice quadrata della somma dei quadrati dei determinanti di tutti i minori di ordine k estratti da dr

$$|J_k dr(u)|^2 = \sum_{M\le_k dr(u)} |\det M|^2,$$

dove con $M \le_k dr(u)$ si intende matrice quadrata di ordine k estratta da $dr(u)$. La funzione $\mu_r(A)$ viene estesa a tutti gli insiemi ponendo

$$\mu_r(B) = \inf\{\mu_r(A) : B \subset A \text{ aperto}\}.$$

In questo modo si ottiene una misura esterna in cui i Boreliani sono misurabili. Vogliamo dimostrare che

$$\mu_r = \mathscr{H}^k \llcorner \Sigma.$$

È facile vedere che μ_r è concentrata su $\overline{\Sigma}$ in quanto se $A \cap \Sigma = \emptyset$, allora $r^{-1}(A) = \emptyset$. Per vedere tale uguaglianza servono un paio di Lemmi preliminari.

Proposizione 9.9. *Sia Σ una superficie regolare k–dimensionale ed $E \subset \Sigma$; allora*

$$\mathscr{H}^k(E) = \mathscr{S}^k(E).$$

Dimostrazione. Abbiamo già visto che la misura di Hausdorff e la misura di Haudorff sferica d–dimensionale coincidono con la misura esterna di Lebesgue d–dimensionale; tale risultato resta vero anche se consideriamo le restrizioni k–dimensionali, cioè se $V \leq \mathbb{R}^d$ è un sottospazio affine k–dimensionale. Quindi $\mathscr{H}^k \llcorner V = \mathscr{S}^k \llcorner V = \lambda_k^*$ con quest'ultima la ovvia misura di Lebesgue k–dimensionale definita su V.

Notiamo anzitutto che fissando $x_0 \in \Sigma$ e $V = x_0 + T_{x_0}\Sigma$, allora la mappa $\pi_V : \mathbb{R}^d \to V$ proiezione ortogonale è 1–Lipschitziana e quindi per ogni $E \subset \Sigma$

$$\mathscr{H}^k(\pi_V(E)) \leq \mathscr{H}^k(E), \quad \mathscr{S}^k(\pi_V(E)) \leq \mathscr{S}^k(E);$$

dato che V è spazio affine, si ha anche che $\mathscr{H}^k(\pi_V(E)) = \mathscr{S}^k(\pi_V(E))$.

La proiezione ortogonale su V può essere localmente invertita; cioè esiste $\varrho > 0$ tale che $\pi_V : \Sigma \cap B_\varrho(x_0) \to V \cap B_\varrho(x_0)$ è invetibile con inversa determinata dal teorema della funzione implicita. Localmente attorno x_0, Σ è il grafico di una funzione $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{d-k}$ di classe C^1; possiamo supporre $f(0) = x_0 = 0$ e $df(0) = 0$ e che $V = \mathbb{R}^k$. Definiamo quindi $\psi : B_\varrho \to \mathbb{R}^d$

$$\psi(u) = (u, f(u));$$

dato che

$$\|\psi(u) - \psi(v)\|^2 = \|u - v\|^2 + \|df(\xi)\|\|u - v\|^2$$

e $\xi \in B_\varrho$, dal fatto che $df(0) = 0$ e $f \in C^1$, allora per ϱ piccolo, la mappa ψ è $(1 + \varepsilon)$–Lipschitziana ed è la mappa inversa di π_V. Quindi

$$\begin{aligned}\mathscr{H}^k(E \cap B_\varrho(x_0)) =& \mathscr{H}^k(\psi(\pi_V(E \cap B_\varrho(x_0)))) \leq (1+\varepsilon)\mathscr{H}^k(\pi_V(E \cap B_\varrho(x_0))) \\ \leq& (1+\varepsilon)\mathscr{H}^k(E \cap (B_\varrho(x_0))).\end{aligned}$$

Stesso ragionamento vale per $\mathscr{S}^k$.

Suddividendo quindi la superficie Σ in tanti piccole porzioni $\Sigma \cap B_\varrho(x_i)$, $i = 1, \ldots, m$, ponendo $V_i = x_i + T_{x_i}\Sigma$ e π_{V_i} le proiezioni ortogonali su V_i, invertite dalle funzioni ψ_i, se si ragiona su ogni tale porzione, dato che siamo in presenza di misure, possiamo dividere E in pezzi disgiunti E_i con $E_i \subset \Sigma \cap B_\varrho(x_i)$ ed ottenere che

$$\begin{aligned}\mathscr{S}^k(E) =& \sum_{i \in \underline{m}} \mathscr{S}^k(E_i) = \sum_{i \in \underline{m}} \mathscr{S}^k(\psi_i(\pi_{V_i}(E_i))) \\ \leq& (1+\varepsilon) \sum_{i \in \underline{m}} \mathscr{S}^k(\pi_{V_i}(E_i)) = (1+\varepsilon) \sum_{i \in \underline{m}} \mathscr{H}^k(\pi_{V_i}(E_i)) \\ \leq& (1+\varepsilon) \sum_{i \in \underline{m}} \mathscr{H}^k(E_i) = (1+\varepsilon)\mathscr{H}^k(E).\end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di ε e sapendo già che $\mathscr{H}^k \leq \mathscr{S}^k$, se ne deduce quindi che

$$\mathscr{H}^k(E) = \mathscr{S}^k(E).$$

□

Un insieme contenuto in una superficie regolare viene detto rettificabile; si parla poi di σ–rettificabilità se l'insieme è contenuto in una quantità numerabile di superfici regolari, mentre si parla di $\mathscr{H}^k$–σ–rettificabilità se l'insieme è contenuto, a parte un insieme $\mathscr{H}^k$–trascurabile in una unione numerabile di superfici regolari.

Una volta introdotte le misure di Hausdorff, si possono definire le densità α–dimensionali di una misura positiva in un punto x ponendo

$$\Theta^*_\alpha(\mu, x) = \limsup_{\varrho \to 0} \frac{\mu(B_\varrho(x))}{\omega_\alpha \varrho^\alpha}$$

e

$$\Theta_{\alpha *}(\mu, x) = \liminf_{\varrho \to 0} \frac{\mu(B_\varrho(x))}{\omega_\alpha \varrho^\alpha}.$$

Esiste un analogo del Teorema 6.16 che qui riportiamo.

Teorema 9.10. *Sia μ una misura positiva, finita e Borel regolare; se*

$$\Theta^*_\alpha(\mu, x) \geq t, \qquad \forall x \in E,$$

allora $\mu(E) \geq t\mathscr{S}^\alpha(E)$, mentre se

$$\Theta^*_\alpha(\mu, x) \leq t, \qquad \forall x \in E,$$

allora $\mu(E) \leq t\mathscr{S}^\alpha(E)$.

Dimostrazione. Possiamo supporre E limitato; fissiamo $\varepsilon > 0$, un aperto A che contenga E e $\delta > 0$; allora

$$\mathcal{B}_\delta = \{\overline{B}_\varrho(x) \subset A : \mu(\overline{B}_\varrho(x)) \geq (t-\varepsilon)\omega_\alpha \varrho^\alpha, 2\varrho < \delta\}$$

è un ricoprimento fine di A, e quindi esiste $\mathcal{B}'_\delta = \{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ famiglia di palle chiuse disgiunte tale che

$$\mathscr{S}^\alpha(A \setminus \bigsqcup \mathcal{B}'_\delta) = 0,$$

e quindi

$$\mathscr{S}^\alpha_\delta(A \setminus \bigsqcup \mathcal{B}'_\delta) = 0,$$

Ma allora

$$\mathscr{S}^\alpha_\delta(A) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathscr{S}^\alpha_\delta(B_i) \leq \omega_\alpha \sum_{i\in\mathbb{N}} \varrho_i^\alpha \leq \frac{1}{t-\varepsilon} \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(B_i) \leq \frac{1}{t-\varepsilon}\mu(A).$$

Quindi, mandando $\delta \to 0$, prendendo l'estremo inferiore sugli aperti che contengono E e mandando ε a zero, si ottiene che

$$t\mathscr{S}^\alpha(E) \leq \mu(E).$$

Per la seconda implicazione, per ogni $j \in \mathbb{N}$ si considera l'insieme

$$E_j = \{x \in E : \mu(\overline{B}_\varrho(x)) \leq (t+\varepsilon)\omega_\alpha \varrho^\alpha, \forall \varrho \in (0, 1/j)\}.$$

È chiaro che $E_j \subset E_{j+1}$ e che

$$E = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} E_j.$$

Prendo una famiglia di palle $\overline{B}_{\varrho_i}(x_i)$ che ricoprono E_j con $2\varrho_i < 1/j$ e tali che

$$\omega_\alpha \sum_{i \in \mathbb{N}} \varrho_i^\alpha \leq \mathscr{S}^\alpha_{1/j}(E_j) + \frac{1}{j} \leq \mathscr{S}^\alpha(E_j) + \frac{1}{j} \leq \mathscr{S}^\alpha(E) + \frac{1}{j}.$$

Ma allora

$$\mu(E_j) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(\overline{B}_{\varrho_i}(x_i)) \leq (t+\varepsilon)\omega_\alpha \sum_{i \in \mathbb{N}} \varrho_i^\alpha \leq \mathscr{S}^\alpha(E) + \frac{1}{j},$$

da cui la disuguaglianza desiderata passando al limite per $j \to +\infty$. □

Osservazione 9.11. Un analogo risultato vale se si considerano le misure di Hausdorff sferiche associate ad una funzione h, dove in questo caso la densità va definita ponendo

$$\Theta^*_h(\mu, x) = \limsup_{\varrho \to 0} \frac{\mu(\overline{B}_\varrho(x))}{h(\overline{B}_\varrho(x))}.$$

Consideriamo ora il caso della misura μ_r definita in (9.2) associata ad una varietà k–dimensionale parametrizzata; presentiamo qui la dimostrazione solo nel caso $k = 1$.

Proposizione 9.12. *Sia $r : D \to \mathbb{R}^d$ una curva semplice regolare parametrizzata e $\Sigma = r(D)$ il sostegno della curva; allora*

$$\mu_r = \mathscr{H}^1 \llcorner \Sigma = \mathscr{S}^1 \llcorner \Sigma.$$

Dimostrazione. Fissiamo $x_0 \in \Sigma$ e $t_0 \in D$ con $r(t_0) = x_0$; dato che r è semplice, possiamo fissare $\varrho > 0$ sufficientemente piccolo in modo tale che

$$\partial B_\varrho(x_0) \cap \Sigma$$

consista di due soli punti, $r(t_1)$ e $r(t_2)$ con $t_1 < t_0 < t_2$. Possiamo scrivere

$$r(t_i) = r(t_0) + r'(t_0)(t_i - t_0) + o(\varrho), \qquad i = 1, 2;$$

quindi, dato che $r(t_0) = x_0$ e $r(t_i) \in \partial B_\varrho(x_0)$,

$$\varrho = \|r'(t_0)\||t_i - t_0| + o(\varrho).$$

In definitiva

$$t_2 - t_1 = \frac{2\varrho}{\|r'(t_0)\|} + o(\varrho).$$

Quindi

$$\frac{\mu_r(B_\varrho(x_0))}{2\varrho} = \frac{1}{2\varrho}\int_{t_1}^{t_2} \|r'(\tau)\| d\tau = \frac{t_2 - t_1}{2\varrho} \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \|r'(\tau)\| d\tau,$$

da cui

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{\mu_r(B_\varrho(x_0))}{2\varrho} = 1,$$

per ogni $x_0 \in \Sigma$. Grazie al Teorema 9.10 e alla Proposizione 9.9 si deduce quindi che

$$\mu_r = \mathscr{S}^1 \llcorner \Sigma = \mathscr{H}^1 \llcorner \Sigma.$$

□

Osservazione 9.13. La dimostrazione del caso $k > 1$ passa per il calcolo del seguente limite:

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{\lambda_k(r^{-1}(B_\varrho(x_0)))}{\omega_k \varrho^k} = \frac{1}{|J_k dr(u_0)|}$$

per ogni $u_0 \in D$ con $r(u_0) = x_0$.

Presentiamo ora, senza dimostrazione, il seguente teorema di semicontinuità per la misura di Hausdorff uni–dimensionale.

Teorema 9.14 (Golab)**.** *Siano $\Gamma_j \subset \mathbb{R}^d$ insiemi compatti connessi convergenti a Γ nella metrica di Haudorff; allora Γ è compatto e connesso e*

$$\mathscr{H}^1(\Gamma) \leq \liminf_{j \to +\infty} \mathscr{H}^1(\Gamma_j).$$

Chiudiamo questa sezione con il seguente esempio; tale esempio fu presentato da Schwarz per dimostrare che la nozione di area di una superficie non poteva essere data generalizzando quanto si faceva con le curve, e cioè come estremo superiore delle aree delle triangolazioni inscritte ad un insieme dato.

Esempio 9.1. Si consideri Σ la superficie laterale del cilindro di raggio di base R e altezza h, cioè

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = R^2, z \in [0, h]\}.$$

Per determinare la sua superficie consideriamo la triangolazione ottenuta nel seguente modo; si suddivide l'altezza in m parti uguali e la base in n parti uguali. Si considerano quindi i triangoli le cui basi sono appoggiate sulla suddivisione indicata sulla base e i cui vertici si trovano sulla stessa suddivisione alzata di h/m e ruotata di un angolo pari a π/n. L'area totale di tale triangolazione è data da $2nm$ volte l'area del triangolo i cui vertici sono

$$(R, 0, 0), \quad \left(R\cos\frac{2\pi}{n}, R\sin\frac{2\pi}{n}, 0\right), \quad \left(R\cos\frac{\pi}{n}, R\sin\frac{\pi}{n}, \frac{h}{m}\right).$$

Usando il prodotto vettoriale tra i due vettori

$$v_1 = \left(R\cos\frac{2\pi}{n} - R, R\sin\frac{2\pi}{n}, 0\right), \quad v_2 = \left(R\cos\frac{\pi}{n} - R, R\sin\frac{\pi}{n}, \frac{h}{m}\right),$$

si determina l'area della triangolazione che è data da

$$\text{Area} = 2\pi hR \left\| \left(1 + \frac{n}{2\pi} o\Big(\frac{1}{n}\Big), \frac{\pi}{n} + \frac{n}{2\pi} o\Big(\frac{1}{n}\Big), \frac{\pi^2 Rm}{2n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right) \right\|.$$

Quindi, se $m = n$, allora per $n \to +\infty$ si trova quanto correttamente si deve trovare e cioè

$$\text{Area} = 2\pi hR,$$

mentre per $m = n^2$ sempre per $n \to +\infty$

$$\text{Area} = 2\pi hR\sqrt{1 + \frac{\pi^4 R^2}{4}}$$

e ancora peggio se $m = n^3$

$$\text{Area} = +\infty.$$

La spiegazione di questo fenomeno sta nel fatto che se m tende ad infinito troppo velocemente paragonato a n, allora i triangolini che abbiamo definito non sono più asintoticamente tangenti alla superficie laterale del cilindro e quindi la determinazione dell'area della triangolazione si discosta sensibilmente dall'area della superficie laterale del cilindro.

9.4 Applicazioni; geodetiche reti di connessione ottimali

Un primo problema variazionale che si può considerare è il problema della geodetica; supponiamo qui di lavorare in uno spazio metrico X per il quale supponiamo che ogni coppia di punti possa essere connesso mediante una curva di lunghezza finita, cioè per il quale per ogni $x, y \in X$ esista un arco r congiungente x con y, $r : [0,1] \to X$ tale che $r(0) = x$, $r(1) = y$ e con $\ell(r, [0,1]) < +\infty$. Ha quindi senso considerare il seguente problema: per ogni $x, y \in X$, determinare

$$\min\{\ell(r, [0,1]) : r : [0,1] \to X \text{ è una curva che congiunge } x \text{ con } y\}.$$

Le curve, se esistono, che realizzano il precedente minimo vengono dette geodetiche. Abbiamo il seguente risultato.

Teorema 9.15. *Sia X uno spazio metrico completo localmente compatto tale che fissati $x, y \in X$ esista una curva che connette i due punti e che sia di lunghezza finita; allora esiste una geodetica che connette x con y.*

Dimostrazione. Si considera la quantità finita

$$m = \inf\{\ell(r, [0,1]) | \ r : [0,1] \to X \text{ connette } x \text{ con } y\}$$

$r_j : [0,1] \to X$ una successione minimizzante di curve con lunghezza

$$\ell_j = \ell(r_j, [0,1]) < m + \frac{1}{j}.$$

Senza ledere in generalità possiamo supporre che tali curve siano parametrizzate in modo da essere ℓ_j–Lipschitz. Esse sono quindi equi–Lipschitziane, equi–limitate in quanto partono tutte da x e quindi convergono, a meno di sottosuccessioni, ad una curva $r : [0,1] \to X$. Tale curva connette x con y e per la semicontinuità inferiore della lunghezza rispetto alla convergenza uniforme, se ne deduce che $\ell(r, [0,1]) = m$ e quindi r è una geodetica. $\square$

Nel caso in cui $X = \mathbb{R}^d$, le gedetiche sono chiaramente i segmenti; nel caso $X = \mathbb{S}^{d-1}$, allora le geodetiche sono date da archi di cerchio contenuti nel piano passante per l'origine ed i due punti dati. Tale geodetica è unica se x e y non sono antipodali, sono infinite altrimenti.

Il problema della geodetica può essere generalizzato in vari modi; ad esempio, si può cercare la curva di lunghezza minima che connette un numero finito di punti. Si fissino cioè $F \subset X$ un numero finito di punti e si cerchi la curva di lunghezza minima per cui $F \subset r([0,1])$. Tale curva, nelle stesse ipotesi del Teorema 9.15 esiste ed ha la proprietà che $r(0), r(1) \in F$ ed è fatto da un numero finito di geodetiche che connettono i punti di F. Analogamente, si possono fissare un numero finito di compatti $C_1, \ldots, C_m$ e cercare di minimizzare la lunghezza della curva che renda connesso l'insieme

$$r([0,1]) \cup \bigcup_{i \in \underline{m}} C_i.$$

Si può modificare il problema considerando il seguente problema:

$$\min \left\{ \mathscr{H}^1(\Gamma) : F \subset \Gamma, \text{ con } \Gamma \text{ connesso compatto} \right\}.$$

Grazie al fatto che $F \subset \Gamma$, allora se si fissa $x_0 \in F$ e si pone $\varrho_j = \mathscr{H}^1(\Gamma)$, si nota che

$$\Gamma_j \subset \overline{B}_{\varrho_j}(x_0).$$

Mostriamo questo fatto nel caso in cui X sia un sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}^d$; preso $x \in \Gamma_j$, $x \neq x_0$, allora possiamo considerare la retta $V = x_0 + \operatorname{span}\{x - x_0\}$ e la proiezione ortogonale su V; dato che tale proiezione ortogonale è 1–Lipschitziana e Γ_j è connesso, allora

$$\|x - x_0\| \leq \mathscr{H}^1(\pi_V(\Gamma_j)) \leq \mathscr{H}^1(\Gamma_j) = \varrho_j.$$

Quindi una successione minimizzante è equilimitata; grazie alla compattezza della convergenza di Kuratowski, esiste un punto di accumulazione Γ. Tale insieme deve essere connesso e grazie al Teorema di Golab 9.14, si conclude che Γ risolve il problema di minimo.

9.5 Esercizi

Esercizio 9.5.1. Dimostrare che nel caso $\alpha = 0$, la misura di Hausdorff e la misura di Hausdorff sferica coincidono con la misura del conteggio.s

Esercizio 9.5.2. Ripetere quanto fatto per l'insieme di Cantor e calcolare la dimensione di Hausdorff degli insiemi di Sierpinski ottenuti uno partendo dal quadrato unitario in $\mathbb{R}^2$ da cui si toglie il quadrato centrale una volta suddiviso in nove parti uguali, il secondo ottenuto dal triangolo equilatero privato del triangolo centrale una volta suddiviso in quattro triangoli uguali. Ripetere l'esercizio anche nel caso della curva di von Koch.

Esercizio 9.5.3. Dimostrare che se $r : D \to \mathbb{R}^k$ è una k–parametrizzazione regolare con $D \subset \mathbb{R}^k$ aperto, allora per ogni $x_0 \in \Sigma = r(D)$, detto $u_0 \in D$ il punto per chi $r(u_0) = x_0$,

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{\lambda_k(r^{-1}(B_\varrho(x_0))}{\omega_k \varrho^k} = \frac{1}{|J_k dr(u_0)|}.$$

9.6 Approfondimenti

9.6.1 Disuguaglianza isodiametrica

Si potrebbe dimostrare ls disuguaglianza isodiametrica; si tratta di introdurre la nozione di simmetrizzazione e dimostrare che la palla è l'insieme che massimizza il volume tra gli insiemi con diametro fissato.

9.6.2 Varietà parametrizzate

Si potrebbe dimostrare nel dettaglio il teorema di paragone tra le misure di Hausdorff con le misure su varietà k–dimensionali parametrizzate dimostrando il limite

$$\lim_{\varrho\to 0} \frac{\lambda_k(r^{(-1)}(B_\varrho(x_0))}{\omega_k \varrho^k} = 1.$$

Appendice A

Richiami su spazi di Banach e spazi di Hilbert

Ricordiamo in questa appendice alcune definizioni relative agli spazi di Banach ed Hilbert insieme ad alcuni esempi significativi. Considereremo esclusivamente spazi reali, ma si potrebbe considerare anche spazi complessi o spazi su campi $\mathbb{K}$ qualsiasi.

Definizione A.1 (Spazio di Banach)**.** *Uno spazio di Banach reale è uno spazio vettoriale X su $\mathbb{R}$ munito di una norma $\|\cdot\|$ che rende $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio metrico completo.*

Alla precedente definizione affianchiamo la definizione di spazio di Hilbert.

Definizione A.2 (Spazio di Hilbert)**.** *Uno spazio di Hilbert è uno spazio di Banach H in cui la norma è indotta da un prodotto scalare $(\cdot,\cdot)_H : H \times H \to \mathbb{R}$,*

$$\|h\| := |h|_H = \sqrt{(h,h)_H}.$$

Esempio A.1. $\mathbb{R}^d$ con la norma Euclidea

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_d^2}$$

è uno spazio di Hilbert con prodotto scalare standard. $\mathbb{R}^d$ con le norme

$$\|x\|_p = \left(|x_1|^p + \ldots + |x_d|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < +\infty,$$

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,d} |x_i|$$

è sempre uno spazio di Banach ma non è Hilbert se $p \neq 2$. Si ricorda che due qualsiasi norme in $\mathbb{R}^d$ sono sempre equivalenti tra loro e quindi $\mathbb{R}^d$ con una qualsiasi norma è Banach.

Esempio A.2. Gli spazi l^p delle successioni reali p–sommabili, cioè $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tali che, se $1 \le p < +\infty$

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} |x_i|^p < +\infty$$

con la norma

$$\|x\|_{l^p} = \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} |x_i|^p < +\infty\right)^{\frac{1}{p}},$$

mentre nel caso $p = \infty$ tali che

$$\|x\|_{l^\infty} := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < +\infty.$$

Esempio A.3. Lo spazio $X = C(\Omega)$ delle funzioni reali continue definite su uno spazio topologico Ω è uno spazio di Banach con la norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} |f(x)|.$$

Esempio A.4. Se Ω è uno spazio metrico, allora possiamo considerare lo spazio delle funzioni Lipschitz $f : \Omega \to \mathbb{R}$ con la norma

$$\|f\|_{1,1} = \|f\|_\infty + \sup_{x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)}.$$

Si lascia come esercizio la dimostrazione della completezza di tale spazio.

Esempio A.5. L'esempio precedente può essere esteso allo spazio delle funzioni Hölderiane, cioè le funzioni $f : \Omega \to \mathbb{R}$ per le quali esiste $C > 0$ e $\gamma > 0$ tali che

$$|f(x) - f(y)| \leq Cd(x,y)^\gamma, \qquad \forall x, y \in \Omega.$$

A.1 Proiezione su un convesso chiuso

Abbiamo la seguente proposizione.

Proposizione A.3. *Sia H uno spazio di Hilbert e $C \subset H$ un convesso chiuso; allora, per ogni $h \in H$, esiste un unico $y_0 \in C$ tale che*

$$|h - y_0|_H \leq |h - y|_H, \qquad \forall y \in C.$$

Dimostrazione. Si ponga

$$\alpha = \inf\{|h - y|_H : y \in C\}.$$

Se $h \in C$, allora $\alpha = 0$ e l'unico elemento $y_0 \in C$ che realizza il minimo è $y_0 = h$. Se invece $h \notin C$, dato che C è chiuso, $\alpha > 0$.

Si prende quindi $(y_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset C$ minimizzante, cioè tale che $|h - y_j|^2_H \leq \alpha^2 + \frac{1}{j}$. Mostriamo che tale successione è di Cauchy; notiamo anzitutto che

$$\left|\frac{y_i + y_j}{2} - h\right|^2_H = \frac{1}{4}|y_i - h|^2_H + \frac{1}{4}|y_j - h|^2_H + \frac{1}{2}(y_i - h, y_j - h)_H.$$

Quindi, tenendo presente che $\frac{y_i+y_j}{2} \in C$ e quindi $|\frac{y_i+y_j}{2} - h|_H \geq \alpha$,

$$\begin{aligned}|y_i - y_j|^2_H =& |y_i - h|^2_H + |y_j - h|^2_H - 2(y_i - h, y_j - h)_H \\ =& 2|y_i - h|^2_H + 2|y_j - h|^2_H - 4\left|\frac{y_i + y_j}{2} - h\right|^2_H \leq \frac{2}{i} + \frac{2}{j},\end{aligned}$$

da cui si deduce che $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy, e quindi convergente ad un elemento $y_0 \in C$.

Supponiamo esista un secondo $\bar{y}_0 \in C$ con la stessa proprietà; ma allora

$$|y_0 - \bar{y}_0|^2_H = 2|y_0 - h|^2_H + |\bar{y}_0 - h|^2_H - 4\left|\frac{y_0 + \bar{y}_0}{2} - h\right|^2_H \leq 0,$$

cioè $y_0 = \bar{y}_0$. $\square$

Grazie a questo risultato si può definire la funzione $\pi_C : H \to H$, $\pi_C(h) = y_0 \in C$; tale mappa è una proiezione in quanto $\pi_C^2 = \pi_C$ ed è tale che

$$(h - \pi_C(h), y - \pi_C(h))_H \leq 0, \qquad \forall y \in C. \tag{A.1}$$

Per vedere ciò, si fissi $h \in H$ e $y \in C$ e si definisca la funzione $g : [0,1] \to H$,

$$g(t) = |h - \pi_C(h) - t(y - \pi_C(h))|_H^2.$$

La minimalità di $\pi_C(h)$ implica che $g'(0) \geq 0$, da cui (A.1). Se poi $C = V \leq H$ è un sottospazio chiuso, allora la funzione g appena introdotta può essere definita su tutto $\mathbb{R}$ e quindi la minimalità implica $g'(0) = 0$, cioè

$$(h - \pi_C(h), y - \pi_C(h))_H = 0, \qquad \forall y \in C;$$

per tale ragione ci si riferisce a π_C come alla proiezione ortogonale su C.

Appendice B

Spazi metrici

In questo capitolo richiamiamo alcune nozioni relative agli spazi metrici e faremo qualche esempio significativo di spazio metrico.

Ricordiamo che uno spazio metrico Ω è un insieme su cui è definita una funzione, detta metrica su Ω, $d : \Omega \times \Omega \to [0, +\infty)$ con le seguenti proprietà:

1. $d(x, x) = 0$ e $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$;
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$.

Lo spazio metrico si dice completo se ogni successione di Cauchy rispetto alla metrica d è convergente ad un elemento di Ω.

Definizione B.1 (Contrazione)**.** *Una mappa $T : \Omega \to \Omega$ viene detta contrazione se esiste $\lambda < 1$ tale che*

$$d(T(x), T(y)) \leq \lambda d(x, y), \qquad \forall x, y \in \Omega.$$

Ricordiamo il seguente risultato relativo alle contrazioni.

Teorema B.2. *Sia (Ω, d) uno spazio metrico completo e $T : \Omega \to \Omega$ una contrazione. Allora esiste un unico punto $\bar{x} \in \Omega$ tale che $T(\bar{x}) = \bar{x}$.*

Dimostrazione. Si costruisce una successione per ricorrenza partendo da un punto qualsiasi $x_0 \in \Omega$ e definendo

$$x_{j+1} = T(x_j), \qquad \forall j \geq 0.$$

Si nota che per $j \geq 1$

$$d(x_{j+1}, x_j) = d(T(x_j), T(x_{j-1})) \leq \lambda d(x_j, x_{j-1}) \leq \lambda^j d(T(x_0), x_0).$$

In particolare, per ogni $j, p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} d(x_{j+p}, x_j) \leq & d(x_{j+p}, x_{j+p-1}) + d(x_{j+p-1}, x_{j+p-2}) + \ldots + d(x_{j+1}, x_j) \\ \leq & (\lambda^p + \lambda^{p-1} + \ldots + \lambda + 1) d(x_{j+1}, x_j) \leq \frac{\lambda^j}{1 - \lambda} d(T(x_0), x_0). \end{aligned}$$

Quindi la successione $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy e quindi è convergente ad un elemento $\bar{x} \in \Omega$; dal fatto che per ogni $j \geq 2$

$$d(\bar{x}, T(\bar{x})) \leq d(\bar{x}, x_j) + d(x_j, T(\bar{x})) = d(\bar{x}, x_j) + d(T(x_{j-1}, T(\bar{x})) \leq d(\bar{x}, x_j) + \lambda d(x_{j-1}, \bar{x}),$$

si ricava che $\bar{x} = T(\bar{x})$.

Vediamo l'unicità; se $\bar{x}, \bar{y} \in \Omega$ sono due punti fissi, allora

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = d(T(\bar{x}), T(\bar{y})) \leq \lambda d(\bar{x}, \bar{y}),$$

quindi dato che le distanze sono finite, si deve avere $d(\bar{x}, \bar{y}) = 0$. □

B.1 Metrica di Hausdorff e convergenza di Kuratowski

Dato uno spazio metrico (Ω, d) e $A \subset \Omega$, definiamo $(A)_t$ l'ingrassato di A del fattore $t > 0$ come

$$(A)_t = \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, A) < t\}$$

Si definisce quindi metrica di Hausdorff tra due insiemi $A, B \subset \Omega$ come

$$d_{\mathscr{H}}(A, B) = \inf\{t > 0 : A \subset (B)_t, B \subset (A)_t\}.$$

È facile mostrare che la metrica così definita è simmetrica e che soddisfa la disuguaglianza triangolare; per avere che $d_{\mathscr{H}}(A, B) = 0$ se e solo se $A = B$ bisogna invece restringersi agli insiemi chiusi.

Ricordiamo anche la definizione di convergenza di Kuratowski.

Definizione B.3 (Convergenza di Kuratowski)**.** *Dato (Ω, d) spazio metrico, diremo che una successione $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ di sottoinsiemi di Ω si dice convergente secondo Kuratowski all'insieme A, $A_i \xrightarrow{k} A$, se:*

1. *per ogni successione $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ di elementi $a_i \in A_i$, se a_i converge ad $a \in \Omega$, allora $a \in A$;*
2. *per ogni $a \in A$, esiste una successione $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ di elementi $a_i \in A_i$ con a_i convergente ad a.*

Abbiamo il seguente risultato.

Proposizione B.4. *Sia (Ω, d) uno spazio metrico completo e siano $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}, A$ sottoinsiemi chiusi di Ω; allora $d_{\mathscr{H}}(A_i, A) \to 0$ se e solo se $A_i \xrightarrow{k} A$.*

Importante è il seguente risultato; dato uno spazio metrico compatto (Ω, d), denoteremo con

$$\mathscr{K}(\Omega) = \{K \subset \Omega : K \text{ compatto}, K \neq \emptyset\}.$$

Proposizione B.5. *Dato uno spazio metrico compatto e completo (Ω, d), allora lo spazio $(\mathscr{K}(\Omega), d_{\mathscr{H}})$ è metrico e completo.*

B.1.1 Insieme di Cantor

Applichiamo le nozioni appena introdotte nella costruzione dell'insieme di Cantor; definiamo le due funzioni $\psi_1, \psi_2 : [0,1] \to [0,1]$ ponendo

$$\psi_1(x) = \frac{x}{3}, \qquad \psi_2(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}.$$

Definiamo quindi l'applicazione $T : \mathscr{K}([0,1]) \to \mathscr{K}([0,1])$ mediante

$$T(K) = \psi_1(K) \cup \psi_2(K).$$

Proposizione B.6 (Insieme di Cantor)**.** *La mappa $T : \mathscr{K}([0,1]) \to \mathscr{K}([0,1])$ è una contrazione rispetto alla metrica di Hausdorff $d_{\mathscr{H}}$. Esiste quindi un unico insieme compatto $C \subset [0,1]$ punto fisso per T e tale insieme è l'insieme di Cantor.*

L'insieme di Cantor è costruito quindi mediante una successione di insiemi compatti in modo iterativo partendo da $C^{(0)} = [0,1]$ e costruendo per ricorrenza $C^{(j+1)} = \Psi(C^{(j)})$, $j \geq 0$. Per ogni $j \in \mathbb{N}$ l'insieme $C^{(j)}$ è costituito quindi da 2^j intervalli chiusi di ampiezza $1/3^j$.

Chiudiamo questa sezione con la costruzione della funzione di Cantor–Vitali, nota anche come funzione di Cantor o scala del diavolo.

Si parte dalla funzione $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come

$$f_0(x) = \max\{\min\{x,1\},0\}$$

e per ricorrenza si definisce per $j \geq 0$

$$f_{j+1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ f_j \circ \psi_1^{-1}(x) & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \text{se } \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ f_j \circ \psi_2^{-1}(x) & \text{se } \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Si dimostra che per ogni $j \in \mathbb{N}$ le funzioni f_j sono continue, monotone non decrescenti e vale la stima

$$\|f_j - f_{j+1}\|_\infty \leq \frac{1}{3 \cdot 2^{j+1}}.$$

Le f_j sono quindi uniformemente convergenti ad una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, monotona non decrescente derivabile in ogni punto $x \in \mathbb{R} \setminus C$ non appartenente all'insieme di Cantor con $f'(x) = 0$ nei punti di derivabilità.

Appendice C

Il Teorema di Riesz

Vedremo in questo capitolo la nozione di convergenza debole per misure che è basata sul Teorema di Riesz; questo risultato è fondamentale se si considera che la norma della variazione totale è in qualche senso una norma troppo forte per i nostri scopi; data $\mu \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$, allora possiamo definire la convoluzione ponendo

$$f_\varepsilon(x) = \mu * \varrho_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varrho_\varepsilon(x-y)d\mu(y);$$

tale funzione è liscia e definisce una misura assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue

$$\mu_\varepsilon = \lambda_d \llcorner f_\varepsilon.$$

Si nota che però in generale le misure μ_ε non convergono in norma a μ; se ad esempio $\mu = \delta_{x_0}$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$, allora $f_\varepsilon(x) = \varrho_\varepsilon(x - x_0)$ e

$$|\mu - \mu_\varepsilon|(\mathbb{R}^d) = |\delta_{x_0}|(\mathbb{R}^d) + \int_{\mathbb{R}}^d \varrho_\varepsilon(x-x_0)d\lambda_d(x),$$

e quindi

$$\lim_{\varepsilon\to 0} |\mu - \mu_\varepsilon|(\mathbb{R}^d) = 2.$$

Useremo invece la convergenza debole, grazie alla caratterizzazione derivante dal Teorema di Riesz.

C.1 Il Teorema di Riesz e la convergenza debole di misure

Vogliamo qui caratterizzare il preduale dello spazio di Banach $\mathbb{M}(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^p)$; notiamo preliminarlmente che se $\mu \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^p)$, allora abbiamo ben definito il funzionale lineare e continuo $L_\mu : C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^p)$

$$L_\mu(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi((x) \cdot d\mu(x) = \sum_{i=1}^p \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_i(x)d\mu_i(x).$$

Enunciamo e dimostriamo quindi il Teorema di Riesz, che dimostra che la precedente definizione esaurisce tutti i possibili funzionali lineari e continui su $C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^p)$.

Teorema C.1. *Vale la seguente identità* $C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^p)' = \mathbb{M}(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^p)$.

Dimostrazione. Fissiamo $L \in C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^p)'$ funzionale lineare e continuo e dividiamo la dimostrazione in vari passi; costruiremo anzitutto una misura positiva ν, grazie alla quale costruiremo la misura vettoriale che rappresenta L.

Definiamo quindi la variazione totale di L ponendo per ogni aperto $A \subset \mathbb{R}^d$

$$\nu(A) = \sup\{L(\varphi) : \varphi \in C_0(A, \mathbb{R}^p) : \|\varphi\|_\infty \leq 1\}$$

e per ogni $E \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$

$$\nu(E) = \inf\{\nu(A) : E \subset A \text{ aperto}\}$$

ν risulta essere una misura positiva su $\mathscr{B}(R^d)$.

Una volta costruita la misura ν, useremo il fatto che $L^1(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}\mathbb{R}^d, \nu)' = L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}\mathbb{R}^d, , \nu)$ e che il funzionale L può estendersi ad $L^1(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}\mathbb{R}^d, \nu, \mathbb{R}^p)'$.

A tal fine definiamo $M : C_0(\mathbb{R}^d, [0, +\infty)) \to [0, +\infty)$ mediante

$$M(\psi) = \sup\left\{L(\varphi) : \varphi \in C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^p), |\varphi(x)| \leq \psi(x).\right\}$$

È facile dimostrare che per ogni $\psi_1, \psi_2 \in C_0(\mathbb{R}^d, [0, +\infty))$ e $c \geq 0$

$$\begin{aligned} &M(\psi_1 + \psi_2) = M(\psi_1) + M(\psi_2), \\ &M(c\psi_1) = cM(\psi_1) \\ &M(\psi_1) \leq M(\psi_2) \end{aligned}$$

dove l'ultima disuguaglianza è valida se $\psi_1 \leq \psi_2$. Dimostriamo che

$$M(\psi) \leq \int_{\mathbb{R}^d} \psi d\nu, \forall \psi \in C_0(\mathbb{R}^d, [0, +\infty)).$$

Infatti, fissata $\psi \in C_0(\mathbb{R}^d, [0, +\infty))$, definiamo

$$t_0 < 0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < \|\psi\|_\infty < t_N, \qquad t_{h+1} - t_h < \varepsilon, h = 0, \ldots, N-1.$$

Poniamo

$$E_h = \{x \in \mathbb{R}^d : t_{h-1} < \psi(x) \leq t_h\}, \qquad h = 1, \ldots, N;$$

siano quindi $\tilde{A}_h \supset E_h$ aperti tali che

$$\nu(\tilde{A}_h) < \nu(E_h) + \frac{\varepsilon}{N}$$

ed infine

$$A_h = \tilde{A}_h \cap \{x \in \mathbb{R}^d : \psi < t_h + \varepsilon\}.$$

Sia quindi $\{\eta_h\}_h$ una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $\{A_h\}_h$; avremo quindi che, posto $\psi_h = \eta_h \psi$

$$M(\psi) = \sum_{h=1}^N M(\psi_h) < \sum_{h=1}^N (t_h + \varepsilon) M(\eta_h).$$

Dato che per ogni $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^p)$ con $|\varphi(x)| \leq \eta_h(x)$ abbiamo anche che $\varphi \in C_0(A_h, \mathbb{R}^p)$, se ne deduce che $M(\eta_h) \leq \nu(A_h)$, e quindi

$$\begin{aligned} M(\psi) &< \sum_{h=1}^{N} (t_h + \varepsilon)\nu(A_h) \\ &< \sum_{h=1}^{N} (t_h + \varepsilon)\left(\nu(E_h) + \frac{\varepsilon}{N}\right) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \psi d\nu + \frac{\varepsilon}{N}\sum_{h=1}^{N} t_{h-1} + 2\varepsilon\nu(\mathbb{R}^d) + 2\varepsilon^2 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \psi d\nu + \varepsilon\|\psi\|_\infty + 2\varepsilon\nu(\mathbb{R}^d) + 2\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di ε segue l'asserto.

A questo punto, se si fissa $e \in \mathbb{S}^{p-1}$, possiamo definire il funzionale $L_e \in C_0(\mathbb{R}^d)'$ ponendo

$$L_e(f) = L(fe);$$

per quanto appena visto, si nota che

$$L_e(f) \leq \sup\left\{L(\varphi) : \varphi \in C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^p) : |\varphi(x)| \leq |f(x)|\right\} = M(|f|) \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f| d\nu.$$

Possiamo quindi estendere $L_e \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}\mathbb{R}^d, \nu)'$ e quindi esiste una funzione $g_e \in L^\infty(\mathbb{R}^d, \nu)$ tale che

$$L_e(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f g_e d\nu.$$

La dimostrazione si completa fissando la base ortonormale standard $e_1, \ldots, e_p \in \mathbb{S}^{p-1}$ in modo da ottenere che, posto $\varphi_i = \varphi \cdot e_i$,

$$L(\varphi) = \sum_{i=1}^{p} L_{e_i}(\varphi_i) = \sum_{i=1}^{p} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_i g_{e_i} d\nu;$$

la misura che rappresenta rappresenta L è quindi data da

$$\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_p), \qquad \mu_i = g_{e_i}\nu.$$

Notiamo che la funzione $g = (g_{e_1}, \ldots, g_{e_p})$ è tale che $|g(x)| = 1$ per ν–q.o. $x \in \mathbb{R}^d$; infatti da una parte osserviamo che per ogni aperto $A \subset \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} \nu(A) &= \sup\left\{\int_{\mathbb{R}^d} \varphi \cdot g d\nu : \varphi \in C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^p), \|\varphi\|_\infty \leq 1\right\} \\ &\leq \int_A |g| d\nu. \end{aligned}$$

Tale disuguaglianza può essere estesa ad ogni $E \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$; in particolare possiamo usare l'insieme $E_t = \{x \in \mathbb{R}^d : |g(x)| \leq t\}$ con $t < 1$ per trovare che

$$\nu(E_t) \leq \int_{E_t} |g| d\nu \leq t\nu(E_t),$$

da cui $\nu(E_t) = 0$ per ogni $t < 1$. Quindi $|g(x)| \geq 1$ per ν–q.o. $x \in \mathbb{R}^d$; per ogni aperto $A \subset \mathbb{R}^d$ abbiamo anche che la funzione

$$u = \frac{g}{|g|}\chi_{\{|g|>0\}}$$

appartiene ad $L^1(A, \mathscr{B}\mathbb{R}^d, \nu, \mathbb{R}^p)$; grazie alla densità di $C_0(A, \mathbb{R}^p)$ in $L^1(A, \mathscr{B}\mathbb{R}^d, \nu, \mathbb{R}^p)$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\varphi_\varepsilon \in C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^p)$ tale che $\|u - \varphi_\varepsilon\|_{L^1(A,\nu,\mathbb{R}^p)} < \varepsilon$; dato che $|u(x)| = 1$ per ν–q.o. $x \in A$, possiamo anche supporre che $|\varphi_\varepsilon(x)| \leq 1$ e quindi

$$\begin{aligned}\nu(A) &\geq \int_A \varphi_\varepsilon \cdot g d\nu \\ &= \int_A u \cdot g d\nu + \int_A (\varphi_\varepsilon - u) \cdot g d\nu \\ &\geq \int_A |g| d\nu - \varepsilon \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\nu)}\end{aligned}$$

da cui l'uguaglianza

$$\nu(A) = \int_A |g| d\nu,$$

per ogni aperto A, e quindi $|g(x)| = 1$ per ν–q.o. $x \in \mathbb{R}^d$. □

Grazie alla dualità individuata dal Teorema di Riesz, si può usare la convergenza debole* delle misure come convergenza privilegiata; con questo intendiamo che una successione di misure $(\mu_h)_h$ converge debole ad una misura μ se

$$\lim_{h\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi \cdot d\mu_h = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi \cdot \mu, \qquad \forall \varphi \in C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^p).$$

C.2 Proprietà delle convoluzioni

In questa sezione vediamo alcune proprietà delle convoluzioni

$$\mu_\varepsilon = f_\varepsilon \lambda_d, \qquad f_\varepsilon = \mu * \varrho_\varepsilon.$$

Notiamo anzitutto che per ogni $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^p)$, allora

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) d\mu_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) f_\varepsilon(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \varrho_\varepsilon(x-y) d\mu(y) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\varepsilon(y) d\mu(y).$$

Se ne deduce quindi, grazie alla densità di $C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^p)$ in $C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^p)$, che $|\mu_\varepsilon|(\mathbb{R}^d) = |\mu|(\mathbb{R}^d)$. In più, da quanto visto, dato che φ_ε converge uniformemente a $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^p)$, allora

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\mu_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\mu, \qquad \forall \varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^p).$$

Ancora per la densità di $C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^p)$, si deduce che $\mu_\varepsilon \rightharpoonup \mu$.

Argomenti di approfondimento

In questo capitolo raccogliamo alcune proposte di approfondimento per possibili argomenti di esame.

C.3 Questioni di misurabilità

Abbiamo visto, quando abbiamo studiato le misure prodotto, che con la σ–algebra prodotto le sezioni di insiemi e funzioni misurabili sono misurabili e vale la formula di integrazione cosiddetta per fili. Si possono studiare condizioni che in qualche modo invertano tale problema, e cioè quali condizioni sono sufficienti affinchè una scelta di sezioni che siano misurabili rendono misurabile l'insieme costruito per fette.

In particolare, si può considerare la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^2$ e studiare le proprietà degli insiemi misurabili non necessariamente Boreliani e quando si può concludere che se un insieme è tale che quasi ogni sezione è misurabile, allora esso stesso è misurabile.

C.4 Teorema di Riesz e convergenze deboli

Si tratta di dimostrare il Teorema della rappresentazione di Riesz e studiare le sue conseguenze, tra cui le proprietà delle convergenze deboli di misure. Nel caso particolare di $\mathbb{R}^d$ si vuole studiare le proprietà delle convoluzioni dimostrando che data una misura qualsiasi μ, la misura μ_ε definita ponendo per ogni $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$

$$\mu_\varepsilon(A) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \chi_A(x)\eta_\varepsilon(x-y)d\lambda \otimes \mu(x,y)$$

è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue con funzione densità regolare. Si tratta poi di dimostrare che $\mu_\varepsilon \rightharpoonup^* \mu$ e $|\mu_\varepsilon|(\mathbb{R}^d) \to |\mu|(\mathbb{R}^d)$, deducendone il fatto che le misure assolutamente continue rispetto alla misura di Lebesgue non sono dense nello spazio delle misure rispetto alla norma variazione totale, ma lo sono nel senso della convergenza in variazione.

C.5 Teoremi di ricoprimento in spazi metrici

Si tratta di verificare quali delle proprietà ricavate nel Capitolo6 si possono generalizzare in ambienti più generali rispetto agli spazi Euclidei. Si può considerare ad esempio uno spazio metrico (Ω, d) completo su cui si suppone sia definita una misura Boreliana positiva μ che soddisfa la condizione doubling, e cioè il fatto che esista una costante $c_D > 0$ per cui

$$\mu(B_{2\varrho}(x)) \leq c_D \mu(B_\varrho(x)), \qquad \forall x \in \Omega, \forall \varrho > 0.$$

Sotto questa ipotesi si può dimostrare che la conclusione del Teorema 6.16 resta valida, e quindi anche le conclusioni del Teorema 6.19 e la definizione dei punti di Lebesgue per funzioni integrabili. La condizione può essere leggermente generalizzata richiedendo che

$$\limsup_{\varrho \to 0} \frac{\mu(B_{2\varrho}(x))}{\mu(B_\varrho)} \leq M < +\infty, \qquad \forall x \in \Omega.$$

C.6 Misure tangenti

Si può dare la nozione di misura tangente usando la convergenza debole derivante dal Teorema di Riesz. Data una misura di Borel σ–finita, si dice che una misura di Borel su $B_1(0)$ ν finita è tangente a μ in $x \in \operatorname{spt}(\mu)$, e si scrive $\nu \in \operatorname{Tan}(\mu, x)$, se esiste $\varrho_j \to 0$ per $j \to +\infty$ tale che

$$\frac{1}{|\mu|(B_{\varrho_j}(x))} \mu_{x,\varrho_j} \stackrel{*}{\rightharpoonup} \nu,$$

dove abbiamo definito la misura $\mu_{x,\varrho}$ ponendo

$$\mu_{x,\varrho}(A) = \mu(x + \varrho A).$$

Si dimostra allora che se μ è una misura di Borel positiva e finita tale che

$$\limsup_{\varrho \to 0} \frac{\mu(B_\varrho(x))}{\varrho^\alpha} = +\infty$$

per un quache $\alpha \in (0, +\infty)$, allora per ogni $t \in (0,1)$ esiste $\nu \in \operatorname{Tan}(\mu, x)$ tale che $\nu(\overline{B}_t) \geq t^\alpha$. Si possono confrontare questa nozione con la misura tangente associata alla misura μ_r definita da una parametrizzazione regolare $r : D \to \mathbb{R}^d$, $D \subset \mathbb{R}^k$. Si tratta poi di conlcudere con la dimostrazione che

$$\operatorname{Tan}(\mu_r, x_0) = \mathscr{H}^k \llcorner (\chi_{B_1(0) \cap T_{x_0}\Sigma}).$$

C.7 Funzioni Convesse

Si tratta di dimostrare nei vari dettagli che una funzione convessa reale ammette derivata seconda distribuzionale data da una misura positiva. Bisogna incominciare con un piccolo ripasso sulla nozione di derivata distribuzionale, con richiami sulla teoria delle distribuzioni. Si passa poi a dimostrare che una funzione convessa è derivabile quasi ovunque e che

$$u(b) = u(a) + \int_{[a,b]} u' d\lambda$$

per ogni $a, b \in \mathbb{R}$. A questo punto si deve usare la monotonia di f' per dimostrare che per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, e $\varphi \in C^2_c((a,b))$ allora

$$\int_{[a,b]} \varphi'' u d\lambda = \int_{[a,b]} \varphi d\mu$$

con μ misura di cui u' è la funzione di distribuzione.

C.8 Funzioni assolutamente continue e spazi di Sobolev

Scopo di questo approfondimento è lo studio delle funzioni assolutamente continue e il confronto con gli spazi di Sobolev uni–dimensionali, sia nella deefinizione con derivata debole che tramite chiusura delle funzioni regolari nella norma Sobolev.

Si tratta quindi di dare la definizione di funzione assolutamente continua $u \in AC((a,b))$ in un intervallo $(a,b) \subset \mathbb{R}$ come quelle funzioni tali che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ per cui se per ogni scelta di intervalli $(a_i, b_i) \subset (a,b)$ con

$$\sum_{i \in \underline{m}} (b_i - a_i) < \delta,$$

allora

$$\sum_{i \in \underline{m}} (u(b_i) - u(a_i)) < \varepsilon.$$

Bisogna quindi dimostrare che, sotto opportune ipotesi di integrabilità, tali funzioni sono tutte e sole le funzioni per cui esista una funzione $g \in L^1((a,b))$ tale che

$$u(t) = u(a) + \int_a^t g(s) d\lambda_1(s).$$

C.9 Reti di connessione ottimale

Si può indagare meglio la dimostrazione della struttura delle reti di connessioni ottimali; in particolare si potrebbe dimostrare che se Γ è una connessione ottimale, allora per ogni $x \in \Gamma$ vale una delle tre possibilità

$$\Theta(\Gamma, x) \in \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}.$$

Questa dimostrazione passa per la dimostrazione della seguente formula di coarea

$$\mathscr{H}^k(E \cap B_\varrho(x)) = \int_0^\varrho \mathscr{H}^{k-1}(E \cap \partial B_t(x)) dt.$$

Bibliografia

[1] Luigi Ambrosio. *Corso introduttivo alla teoria geometrica della misura ed alle superfici minime.* Appunti dei Corsi Tenuti da Docenti della Scuola. [Notes of Courses Given by Teachers at the School]. Scuola Normale Superiore, Pisa, 1997.

[2] Luigi Ambrosio, Nicola Fusco, Diego Pallara. *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems.* Oxford Science Publications, Oxford, 2000.

[3] Luigi Ambrosio, Paolo Tilli. *Topics on Analysis in Metric Spaces* Oxford University Press, 2004.

[4] Donald L.Cohn. *Measure theory.* Birkhäuser, Boston, Mass., 1980.

[5] Vladimir Bogachev. *Measure Theory: Vol.I.* Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, 2007.

[6] Richard M. Dudley. *Real Analysis and Probability.* Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[7] Kenneth J. Falconer. *The geometry of fractal sets.* Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[8] John Hutchinson. *Fractals and self–similarity.* Indiana Univ. Math. J., 30 (5), p.713–747, 1981.

[9] Francesco Maggi. *Sets of Finite Perimeter and Geometric Variational Problems.* Cambridge University Press, Cambridge, 2012.

[10] Pertti Mattila. *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces* Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[11] Frank Morgan. *Geometric Measure Theory: A Beginner's Guide.* Academic Press, 1995.

[12] Frigyes Riesz and Béla Sz.-Nagy. *Functional analysis.* Dover Books on Advanced Mathematics. Dover Publications, Inc., New York, 1990. Translated from the second French edition by Leo F. Boron, Reprint of the 1955 original.