Programma del corso

Teoria della misura e dell'integrazione

Michele Miranda

Secondo Semestre, a.a. 2014/2015

Richiami sugli spazi di Banach ed esempio significativi (spazi euclidei, funzioni continue, funzioni Lipschitz e funzioni Hölderiane). Integrazione alla Riemann; integrale su rettangoli ed estensione agli insiemi misurabili. Integrabilità delle funzioni continue sugli insiemi misurabili. Caratterizzazione della misurabilità mediante la trascurabilità del bordo; teoria della misura alla Peano-Jordan.

Definizioni di algebre e sigma-algebre; alcuni esempi significativi. La sigma-algebra generata da una famiglia di insiemi e la sigma-algebra dei Boreliani. Definizione di misura; alcuni esempi significativi e prime proprietà delle misura. Subadditività, monotonia, continuità per successioni monotone crescenti e decrescenti. Una funzione sigma additiva di insieme è misura se e solo se continua lungo le successioni monotone. Misure esterne; definizione, esempi e sigma algebra degli insiemi misurabili. Criterio di Caratheodory. Esempi vari, tra cui Lebesgue e misura di Hausdorff.

Completezza di una misura e suo completamento; esempio del fatto che la misura di Lebesgue non completa sui Boreliani. Misure regolari e regolarità delle misure Boreliane. Funzioni misurabili e prime proprietà. Operazioni con funzioni misurabili; somme, prodotti, combinazioni lineari ed approssimazione con funzioni semplici. Proprietà vere quasi ovunque. Insieme di Cantor e sua costruzione con metrica di Hausdorff; esempio di insieme Lebesgue misurabile ma non Boreliano.

Definizione di integrale; prima sulle semplici e poi sulle misurabili. Proprietà dellintegrale; linearità e stabilità per limiti monotoni. Stabilità dellintegrale per modificazioni quasi ovunque. Disuguaglianza di Chebyshev e sue conseguenze. Teoremi di convergenza monotona, Beppo Levi, Fatou e di convergenza dominata. Nozione di misurabilità tra spazi misurabili e misura immagine. Confronto tra lintegrale di Riemann e quello di Lebesgue; integrabilità alla Riemann se e solo continuità quasi ovunque e coincidenza dei due integrali.

Convergenze di funzioni; convergenza quasi ovunque, quasi uniforme, in misura ed in media. Relazioni tra le varie convergenze e Teorema di Egoroff. Spazi di Lebesgue; proprietà principali, disuguaglianza di Hölder e Minkowski. Teoremi di completezza e disuguaglianza di Jensen. Densità delle funzioni semiplici e dualità. Definizione della misura prodotto; esempio con la misura di Lebesgue. Esercizi di ripasso sulle misure prodotto.

Elementi di teoria della probabilità; variabili aleatorie, indipendenza, speranza condizionale, martingale. Definizione e caratterizzazione della speranza condizionale; elenco delle proprietà della speranza condizionale ed esempi significativi. Costruzione di martingale e sopra e sotto martingali.

Definizione delle misure vettoriali e di variazione totale. Dimostrazione della finitezza della misura e decomposizione in parte positiva e parte negativa mediante variazione totale. Decomposizione di Hahn e di Jordan di una misura con segno; definizione di insimi di positività e negatività di una misura. Misure assolutamente continue e singolari; costruzione di una misura assolutamente continua mediante funzioni integrabili. Decomposizione di Radon-Nikodym e costruzione della derivatata di Radon-Nikodym. Dimostrazione del Teorema di Radon- Nikodym, per misure finite e sigma-finite e generalizzazione al caso vettoriale. Decomposizione di una misura rispetto ad una seconda in parte assolutamente continua e parte singolare; determinazione della variazione totale come somma delle due variazioni totali.

Lemmi di ricoprimento; Teorema di Besicovitch e Besicovitch-Vitali. Teorema di Besicovitch-Vitali di derivazione di misure; punti di Lebesgue di una funzione sommabile rispetto ad una misura.

Funzioni monotone; funzioni di distribuzione di una misura positiva finita e sue proprietà (limitatezza, monotonia, infinitesimalità e continuità a destra). Derivabilità quasi ovunque delle funzioni di distribuzione. Derivabilità quasi ovunque delle funzioni monotone; costruzione della misura positva che caratterizza la funzione monotone. Funzioni a variazione finita; definizione di variazione e caratterizzazione come differenza di funzioni monotone. Caratterizzazione delle funzioni a variazione finita come funzioni con derivata misura. Funzioni convesse; dimostrazione della continuità e derivabilità quasi ovunque con derivata monotona. Caratterizzazione delle funzioni convesse come le funzioni con derivata seconda misura positiva. Integrale di Riemann-Sjieltjies e caratterizzazione delle funzioni integrabili.

Moti Browniani; costruzione della misura di Wiener. Caratterizzazione degli insiemi su cui la misura è concentrata; funzioni continue nulle in zero, funzioni Hölderiane di esponente di Hölder minore di un mezzo. Trascurabilià delle funzioni a variazione finita. Proprietà del moto Browniano; incrementi indipendenti, martingala. Costruzione dellintegrale stocastico e sue caratteristiche. Applicazione alle equazioni differenziali stocastiche.

Misure di Hausdorff; definizione classica, misura di Hausdorff sferica e Hasudorff generalizzata. Regolarità e confronto con la misura di Lebesgue. Definizione di dimensione di Hausdorff; determinazione della dimensione di Hausdorff per insiemi con misura di Lebesgue positiva e dellinsieme di Cantor. Misura di Hausdorff dellinsieme di Cantor.

Misura di Hausdorff di dimensione uno; confronto con la lunghezza di una curva regolare. Curve rettificabili in spazi metrici. Teorema di Ascoli-Arzelà; generalizzazione alle funzioni Lischitziane. Problema della geodetica e connessione ottimale; alcuni esempi di problemi variazionali in dimensione uno. Misure di Hausdorff e misure definite su superfici regolari parametrizzate; coincidenza tra le due misure. Criteri di rettificabilità per insiemi e concidenza tra misura di Hausdorff sferica e misura di Hausdorff. Semicontinuità inferiore della misura di Hausdorff unidimensionale sulle successioni di insiemi connessi compatti secondo la convergenza di Kuratowski; teorema di Golub. Reti di connessioni ottimali e confronto con il problema della geodetica.

Riferimenti bibliografici

[1] Donald L.Cohn. *Measure theory.* Birkhäuser, Boston, Mass., 1980.

[2] Richard M. Dudley. *Real Analysis and Probability.* Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[3] Pertti Mattila. *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces* Cambridge University Press, Cambridge, 1995.