Calcolo delle Variazioni e Teoria Geometrica della Misura; applicazione alla teoria delle Funzioni a Variazione Limtata

V.Buffa, G.Menegatti, M.Miranda

a.a. 2014/2015

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Scopo di questo corso quello di dare una introduzione alla teoria geometrica della misura sviluppando strumenti e metodologie adatte allo studio delle funzioni a variazione limitata, argomento centrale di questo corso. Chiuderemo il corso con alcune applicazioni a problemi di calcolo delle variazioni.

La storia relativa alle funzioni a variazione limitata piuttosto lunga; la teoria delle funzioni a variazione limitata in dimensione uno venne ampiamente sviluppata gi nel diciannovesimo secolo, fino ad arrivare ad una teoria abbastanza completa all'inizio del secolo scorso. La generalizzazione alle dimensioni superiori invece pi recente ed dovuta principalmente ai lavori di De Giorgi negli anni cinquanta del secolo scorso. Tale sviluppo strettamente legato allo studio della Teoria Geometrica della Misura, che come vedremo strettamente legata alle propriet fini delle funzioni a variazione limitata. Deriveremo le propriet fini delle funzioni a variazione limitate dopo aver studiato le propriet degli insiemi di perimetro finito; infatti, molte delle propriet possono essere derivate utilizzando la formula di coarea, che lega la variazione totale di una funzione al perimetro degli insiemi di livello della funzione stessa.

Inizieremo il corso con una panoramica delle funzioni a variazione limitata in dimensione uno per poi passare allo studio sistematico della teoria della misura, passando quindi allo studio delle funzioni a variazione limitata di pi variabili.

La teoria degli insiemi di perimetro finito e delle funzioni a variazione limitata, come accennato, stata sostanzialmente iniziata e sviluppata da De Giorgi nei lavori [5, 6] (si veda anche [7]). Una monografia dedicata alle funzioni a variazione limitata, con applicazioni al funzionale di Mumford-Shah il libro di Ambrosio-Fusco-Pallara [2]; un libro completamente dedicato agli insiemi di perimetro finito invece il libro di Maggi [8]. Un buon riferimento anche il libretto di Ambrosio [1], che contiene le note del corso tenuto dall'autore presso la Scuola Normale Superiore di Pisa.

1.1 Funzioni BV in dimensione uno

Il materiale contenuto in questa sezione preso quasi interamente dal libro Riesz-Nagy [9].

Definizione 1.1.1. *Data una funzione* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, *definiamo variazione totale di* f

relativa all'intervallo $[a,b]$ *la quantit*

$$V(f,[a,b]) = \sup\left\{\sum_{i=0}^{n} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n+1} = b\right\},$$

dove l'estremo superiore fatto su tutte le possibili partizioni dell'intervallo $[a,b]$ *determinate dai nodi* $t_0, t_1, \ldots, t_{n+1}$ *con* $t_0 = a$ *e* $t_{n+1} = b$. *Diremo che* f *ha variazione totale limitata su* $[a,b]$, $f \in BV([a,b])$, *se* $V(f,[a,b]) < +\infty$. *Un insieme* $E \subset \mathbb{R}$ *si dice di perimetro finito se* $f = \chi_E \in BV([a,b])$, *dove con* χ_E *abbiamo denotato la funzione caratteristica dell'insieme* E

$$\chi_E(t) = \begin{cases} 1 & se\ t \in E \\ \\ 0 & se\ t \notin E. \end{cases}$$

Notiamo che dalla definizione data di variazione totale, se $c \in (a,b)$, allora

$$V(f,[a,b]) = V(f,[a,c]) + V(f,[c,b]);$$

infatti, da un lato

$$V(f,[a,c]) + V(f,[c,b]) = \sup\left\{\sum_{i=0}^{n_1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| : a = t_0 < \ldots < t_{n_1+1} = c\right\} +$$

$$+ \sup\left\{\sum_{i=0}^{n_2} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| : c = t_0 < \ldots < t_{n_2+1} = b\right\} =$$

$$= \sup\left\{\sum_{i=0}^{n} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| : a = t_0 < \ldots < t_{n_1+1} = c < t_{n_1+2} < \ldots < t_{n_1+n_2+1} = b\right\} \leq$$

$$\leq \sup\left\{\sum_{i=0}^{n} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| : a = t_0 < \ldots < t_{n_1+1} = b\right\} = V(f,[a,b]),$$

dall'altro, per ogni successione $a = t_0 < \ldots < t_{n_1+1} = b$, con $t_j \leq c < t_{j+1}$,

$$\sum_{i=0}^{n} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| = \sum_{i=0}^{j-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| + \sum_{i=j+1}^{n} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| + |f(t_{j+1}) - f(t_j)| \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{j-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| + \sum_{i=j+1}^{n} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| + |f(c) - f(t_j)| + |f(t_{j+1}) - f(c)| \leq$$

$$\leq \sup\left\{\sum_{i=0}^{n} |f(t'_{i+1}) - f(t'_i)| : a = t'_0 < \ldots < t'_{n_1+1} = c < t'_{n_1+2} < \ldots < t'_{n_1+n_2+1} = b\right\} =$$

$$= V(f,[a,c]) + V(f,[c,b]),$$

e da tale disuguaglianza segue per definizione $V(f,[a,b]) \leq V(f,[a,c]) + V(f,[c,b])$.

Quindi la funzione $V(f,\cdot)$ additiva sugli intervalli chiusi essenzialmente disgiunti, cio con intersezione trascurabile per la misura di Lebesgue.

Si pu estendere la nozione di variazione totale ad intervalli aperti ponendo

$$V(f,(\alpha,\beta)) = \sup_{[\tilde{a},\tilde{b}]\subset(\alpha,\beta)} V(f,[\tilde{a},\tilde{b}])$$

e costruire una misura esterna $\mu_f : \mathscr{P}([a,b]) \to [0,+\infty)$ ponendo

$$\mu_f(A) = \inf_{A\subset P} V(f,P)$$

dove abbiamo denotato con P un plurirettangolo contenente l'insieme A. facile verificare che la misura esterna cos definita metrica, cio additiva sugli insiemi distanti; quindi, per il criterio di Carathodory gli insiemi Boreliani sono misurabili e $\mu_{f|\mathscr{B}([a,b])} : \mathscr{B}([a,b]) \to [0,+\infty)$ una misura. Non utilizzeremo qui questa misura, ma sottolineiamo qui solo il fatto che una funzione a variazione totale limitata definisce una misura Boreliana positiva e finita sull'intervallo $[a,b]$.

Grazie alle osservazioni appena fatte, si pu notare che si possono anche definire funzioni a variazione totale limitata o localmente limitata definite su insiemi aperti $I \subset \mathbb{R}$, nel primo caso semplicemente richiedendo che $V(f,I) < +\infty$, nel secondo caso richiedendo che per ogni $K \subset I$ compatto, $V(f,K) < +\infty$.

Mostriamo alcuni esempi di funzioni a variazione totale limitata.

Esempio 1.1.1.

1. Sia $f \in C^1([a,b])$; allora $f \in BV([a,b])$ e

   $$V(f,[a,b]) = \int_a^b |f'(s)|ds.$$

   Infatti, se $a = t_0 < \ldots < t_{n+1} = b$ una partizione di $[a,b]$, grazie al teorema fondamentale del calcolo integrale si ottiene che

   $$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| &= \sum_{i=0}^{n} \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f'(s)ds \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |f'(s)|ds = \int_a^b |f'(s)|ds.\end{aligned}$$

   Passando quindi al sup sulle possibili partizioni di $[a,b]$ si ricava che

   $$V(f,[a,b]) \leq \int_a^b |f'(s)|ds.$$

   Vogliamo mostrare la disugualianza inversa: consideriamo $\{f' > 0\}$, che per la continuit di f' un aperto in $\mathbb{R}$, e possiamo quindi decomporlo in intervalli aperti disgiunti; la stessa cosa possiamo fare per $\{f' < 0\}$, quindi

   $$\{f' > 0\} = \textstyle\bigcup_{i\in I_1}(a_i,b_i); \quad \{f' < 0\} = \displaystyle\bigcup_{i\in I_2}(a_i,b_i);$$

prendendo $I := I_1 \cup I_2$, si ha

$$\{f' \neq 0\} = \bigcup_{i \in I} (a_i, b_i)$$

ove gli intervalli (a_i, b_i) sono disgiunti e su ognuno di tali intervalli si ha $f'(s) > 0$ oppure $f'(s) < 0$. Si nota che se su (a_i, b_i) si ha $f'(s) > 0$, allora f monotona e

$$|f(b_i) - f(a_i)| = f(b_i) - f(a_i) = \int_{a_i}^{b_i} f'(s)ds = \int_{a_i}^{b_i} |f'(s)|ds,$$

mentre se $f'(s) < 0$, allora

$$|f(b_i) - f(a_i)| = -(f(b_i) - f(a_i)) = -\int_{a_i}^{b_i} f'(s)ds = \int_{a_i}^{b_i} |f'(s)|ds,$$

quindi

$$\sum_{i \in I} |f(b_i) - f(a_i)| = \sum_{i \in I} \int_{a_i}^{b_i} |f'(s)|ds = \int_{f' \neq 0} |f'(s)|ds = \int_a^b |f'(s)|ds;$$

inoltre vale

$$\sum_{i \in I} |f(b_i) - f(a_i)| = \sup_{J \subseteq I, |J| \in \mathbb{N}} \left\{ \sum_{i \in J} |f(b_i) - f(a_i)| \right\};$$

considerando che a ogni J si pu associare una partizione finita di $[a, b]$

$$a = t_0 \leq t_1 = c_0 < t_2 = d_0 \leq t_3 = c_1 < \ldots \leq t_{n-1} = c_m < t_n = d_m \leq t_{n+1} = b,$$

vale quindi

$$\sum_{i \in J} |f(b_i) - f(a_i)| \leq \sum_{j=0}^{n+1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)| \leq V(f, [a, b])$$

(l'ultima disuguaglianza deriva dalla definizione di $V(f, [a, b])$); quindi

$$\int_a^b |f'(s)|ds = \sup_{J \subseteq I, |J| \in \mathbb{N}} \left\{ \sum_{i \in J} |f(b_i) - f(a_i)| \right\} \leq V(f, [a, b]).$$

2. Una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ si dice assolutamente continua in $[a, b]$, $f \in AC([a, b])$, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se (a_i, b_i), $i \in I$, sono sottointervalli disgiunti di $[a, b]$ con

$$\sum_{i \in I} (b_i - a_i) < \delta,$$

allora

$$\sum_{i \in I} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon.$$

Si dimostra che le funzioni assolutamente continue coincidono con le funzioni appartenenti allo spazio di Sobolev $W^{1,1}([a, b])$ (precisazione: l'identificazione va fatta scegliendo il rappresentante continuo di una funzione Sobolev).

Le funzioni assolutamente continue sono a variazione totale limitata e, denotando con $f' \in L^1([a,b])$ la derivata debole di f, vale l'identit

$$V(f,[a,b]) = \int_a^b |f'(s)|ds.$$

3. Se $f[a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione monotona, allora f ha variazione totale limitata e

$$V(f,[a,b]) = |f(b) - f(a)|,$$

come si pu facilmente verificare usando la definizione di variazione totale.

Questo esempio mostra che in generale le funzioni a variazione totale limitata non sono necessariamente continue; infatti ad esempio la funzione parte intera $f(x) = [x]$ che ha variazione totale limitata su ogni $[a,b] \subset \mathbb{R}$, e quindi ha variazione totale localmente limitata in $\mathbb{R}$. Un esempio importante di funzione monotona che presentiamo nel punto successivo la funzione di Cantor-Vitali; tale funzione un esempio di funzione continuta e monotona la cui derivata quasi ovunque uguale a zero.

4. La funzione di Cantor-Vitali viene definita come limite uniforme di una successione di funzioni definite per ricorrenza. Si definiscono anzitutto le funzioni $\psi_1, \psi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\psi_1(t) = \frac{t}{3}, \qquad \psi_2(t) = \frac{t+2}{3}.$$

Definiamo quindi la successione $f_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ponendo

$$f_0(t) = 0 \vee t \wedge 1 = \max 0, \min t, 1$$

e per ricorsione

$$2f_{h+1}(t) = \begin{cases} f_h(\psi_1^{-1}(t)) & t \in (-\infty, \frac{1}{3}] \\ 1 & t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ 1 + f_h(\psi_2^{-1}(t)) & t \in [\frac{2}{3}, +\infty). \end{cases}$$

Tale successione ha la propriet che $f_h(t) = 0$ se $t \leq 0$, $f_h(t) = 1$ se $t \geq 1$ per ogni $h \in \mathbb{N}$; inoltre, si dimostra per induzione che

$$\|f_{h+1} - f_h\|_\infty \leq \frac{1}{3 \cdot 2^{h+1}}.$$

Quindi la successione converge uniformemente in $[0,1]$, e quindi in tutto $\mathbb{R}$, ad una funzione continua e monotona crescente in quanto ogni f_h continua e monotona crescente.

L'esempio dato riguardanti le funzioni monotone esaurisce quasi completamente la classe delle funzioni a variazione totale limitata, nel senso del seguente Teorema.

Teorema 1.1.2. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione per cui $V(f,[a,b]) < +\infty$; allora esistono due funzioni $f^=, f^- : [a,b] \to \mathbb{R}$ monotone crescenti tali che*

$$f(t) = f^+(t) - f^-(t), \qquad \forall t \in [a,b].$$

Dimostrazione. Se definiamo la funzione

$$v(t) = V(f, [a, t]),$$

si nota che tale funzione monotona crescente; infatti, se $t_1 < t_2$, allora

$$v(t_2) = V(f, [a, t_2]) = V(t, [a, t_1]) + V(f, [t_1, t_2]) \geq V(f, [a, t_1]) = v(t_1).$$

Scrivendo quindi

$$f(t) = v(t) - (v(t) - f(t)),$$

otteniamo la decomposizione cercata con $f^+(t) = v(t)$ e $f^-(t) = v(t) - f(t)$ se mostriamo che f^- monotona crescente. Se fissiamo $t_1 < t_2$, allora la condizione $f^-(t_1) \leq f^-(t_2)$ equivalente alla condizione

$$f(t_2) - f(t_1) \leq v(t_2) - v(t_1) = V(f, [t_1, t_2]).$$

Dato che i nodi t_1 e t_2 definiscono una partizione ammissibile dell'intervallo $[t_1, t_2]$ nella definizione di variazione totale, la monotonia segue quindi dal fatto che

$$f(t_2) - f(t_1) \leq |f(t_2) - f(t_1)| \leq V(f, [t_1, t_2]).$$

□

Osservazione 1.1.3. La decomposizione di f come differenza di funzioni monotone non univoca, come si nota dal fatto che

$$f(t) = f^+(t) - f^-(t) = (f^+(t) + g(t)) - (f^-(t) + g(t))$$

fornisce, per ogni $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ monotona crescente, un'alternativa decomposizione in funzioni monotone. Esiste una decomposizione che in letteratura risulta pi frequente, ed quella definita da

$$f^+(t) = \frac{1}{2}(v(t) + f(t)), \qquad f^-(t) = \frac{1}{2}(v(t) - f(t)).$$

Si possono quindi ricavare propriet puntuali sulle funzioni a variazione limitata dalle analoghe propriet delle funzioni monotone. Enunciamo e dimostriamo preliminarmente il seguente Lemma.

Lemma 1.1.4. *Sia $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua; allora l'insieme*

$$E = \{t \in (a, b) : \exists \xi > t \ t.c. \ g(\xi) > g(t)\}$$

aperto; nel caso in cui $E \neq \emptyset$, scritto

$$E = \bigcup_{i \in I} (a_i, b_i)$$

con I al pi numerabile e gli intervalli (a_i, b_i) disgiunti, si ha che

$$g(a_i) \leq g(b_i), \qquad \forall i \in I.$$

Dimostrazione. Fissiamo $t_0 \in E$; esiste quindi $\xi > t_0$ tale che $g(\xi) > g(t_0)$. Per la continuit di g, esiste quindi $r < \xi - t_0$ tale che per ogni $t \in (t_0 - r, t_0 + r) \cap [a, b]$

$$g(\xi) > g(t),$$

da cui il fatto che E aperto.

Supponiamo quindi $E \neq \emptyset$ e fissiamo una componente (a_i, b_i) nella decomposizione disgiunta

$$E = \bigcup_{i \in I} (a_i, b_i).$$

Questo significa anzitutto che $b_i \notin E$; dimostriamo quindi che

$$g(b_i) \geq g(t_0), \qquad \forall t_0 \in (a_i, b_i),$$

da cui la dimostrazione del Lemma considerando il limite $t_0 \to a_i$. Definiamo quindi

$$t_1 = \sup\{t \in [t_0, b_i) : g(t) \geq g(t_0)\};$$

vogliamo mostrare che $t_1 = b_i$, da cui la dimostrazione. Supponiamo quindi per assurdo che $t_1 < b_i$ e quindi che $g(b_i) < g(t_0)$; per la continuit di g e la massimalit di t_1, si deve avere

$$g(b_i) \leq g(t_1).$$

D'altra parte $t_1 \in E$ e quindi esiste $\xi_1 > t_1$ tale che $g(\xi_1) > g(t_1)$; se fosse $\xi_1 \leq b_i$, avremmo contraddetto la massimalit di t_1, quindi $\xi_1 > b_i$ e dato che $b_i \notin E$, si deve anche avere che $g(\xi_1) \leq g(b_i)$. Ma allora abbiamo trovato che

$$g(t_0) \leq g(t_1) < g(\xi_1) \leq g(b_i) < g(t_0);$$

ci assurdo e quindi necessariamente si deve avere $t_1 = b_i$. □

Osservazione 1.1.5. Si potrebbe in effetti dimostrare che vale l'uguaglianza $g(a_i) = g(b_i)$ con al pi l'eccezione nel caso $a_i = a$.

Dimostriamo quindi il seguente risultato; la nozione di trascurabile che utilizzeremo in tale Teorema relativa alla misura di Lebesgue, cio un insieme $E \subset [a, b]$ viene detto trascurabile se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una unione disgiunta di intervalli aperti (a_i, b_i), $i \in I$ ed I al pi numerabile, tali che

$$E \subset \bigcup_{i \in I} (a_i, b_i), \qquad \sum_{i \in I} (b_i - a_i) < \varepsilon.$$

Teorema 1.1.6. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione monotona crescente; allora per ogni $t_0 \in [a, b)$ esiste il limite*

$$f(t_0^+) = \lim_{t \to t_0^+} f(t),$$

mentre per ogni $t_0 \in (a, b]$ esiste il limite

$$f(t_0^-) = \lim_{t \to t_0^-} f(t);$$

per ogni $t \in (a,b)$ si hanno le seguenti disuguaglianze:

$$f(t^-) \leq f(t) \leq f(t^+).$$

Inoltre, l'insieme dei punti

$$S_f = \{t \in (a,b) : f(t^-) < f(t^+)\}$$

al pi numerabile e vale la stima

$$\sum_{t \in S_f} (f(t^+) - f(t^-)) \leq V(f, [a,b]).$$

Infine, f derivabile tranne al pi in un insieme trascurabile di punti.

Dimostrazione. La prima parte relativa all'esistenza dei limiti destri e sinistri segue semplicemente dalla monotonia: ricordiamo che, per definizione, il limite destro di f in t_0 quel $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta_\varepsilon > 0 :\ |f(x) - \lambda| < \varepsilon\, \forall\, x \in (t_0, t_0 + \delta_\varepsilon) \cap [a,b];$$

per monotonia, $f(a) < f(x) < f(b)$, dunque possiamo definire $\rho := \inf\limits_{x \in (t_0, b]} f(x) \in \mathbb{R}$; per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $x_\varepsilon \in (t_0, b]$ tale che $\rho > f(x_\varepsilon) - \varepsilon$; allora, poich per ipotesi f crescente, per ogni $x \in (t_0, x_\varepsilon)$, vale $\rho \leq f(x) \leq f(x_\varepsilon) < \rho + \varepsilon$; ponendo $\delta_\varepsilon = x_\varepsilon - t_0$, si ha che ρ il limite destro di f in t_0. Per il limite sinistro si ragiona in maniera analoga, questa volta sull'estremo superiore di f su $[a, t_0)$; la monotonia crescente assicura inoltre che $f\left(t^-\right) \leq f(t) \leq f\left(t^+\right)$.

Proviamo adesso che l'insieme S_f al pi numerabile; ricordiamo la definizione

$$\sum_{\alpha \in A} c_\alpha := \sup_{\substack{F \subseteq A \\ F \text{ finito}}} \sum_{\alpha \in F} c_\alpha;$$

se proviamo

$$\sum_{t \in S_f} \left(f\left(t^+\right) - f\left(t^-\right)\right) < +\infty$$

se ne pu dedurre che S_f al pi numerabile. Infatti, se in generale A un insieme di indici, $c_\alpha > 0$ per ogni $\alpha \in A$, e

$$\sum_{\alpha \in A} c_\alpha < \infty,$$

si ha che $\#\{\alpha \in A,\ c_\alpha \geq 0\} \leq \#\mathbb{N}$.

(Dimostrazione: scegliamo gli insiemi degli indici

$$F_0 = \{\alpha \in A,\ c_\alpha \geq 1\}, F_1 = \{\alpha \in A,\ c_\alpha \in [1/2, 1)\}, \ldots, F_h = \left\{\alpha \in A,\ c_\alpha \in \left[\frac{1}{2^h}, \frac{1}{2^{h-1}}\right]\right\};$$

varr

$$M := \sum_{\alpha \in A} c_\alpha \geq \sum_{h=0}^{+\infty} 2^{-h} \# F_i,$$

quindi $\#F_h \leq 2^h M$. Dunque,

$$\#F = \sum_{h=0}^{+\infty} \#F_i \leq \sum_{h=0}^{+\infty} 2^h M = \#\mathbb{N}$$

)

Tornando al nostro caso, fissato $F \subseteq S_f$, $F = \{t_1, ..., t_n\}$, esiste una successione di nodi a_i, b_i - con $i = 1, ..., n$ - tali che

$$a \leq a_1 < t_1 < b_1 \leq a_2 < t_2 < ... < t_n < b_n \leq b,$$

e notiamo che $f(a_i) \leq f(t_i^-) \leq f(t_i^+) \leq f(b_i)$, da cui $f(t_i^+) - f(t_i^-) \leq f(b_i) - f(a_i)$. Dal momento che gli elementi a_i, b_i formano una partizione ammissibile dell'intervallo $[a, b]$,

$$\sum_{i=1}^{n} \left(f\left(t_i^+\right) - f\left(t_i^-\right)\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \left(f(b_i) - f(a_i)\right) \leq V(f, [a, b]);$$

poich ci stato fatto per un F generico, vale

$$\sum_{t \in S_f} \left(f\left(t^+\right) - f\left(t^-\right)\right) \leq V(f, [a, b]) < +\infty,$$

e si conclude.

Dimostriamo la derivabilit quasi ovunque, assumendo preliminarmente che f sia continua; definiamo, per ogni $t \in (a, b)$ le quantit, eventualmente infinite

$$\Lambda_l(t) = \limsup_{h \to 0^+} \frac{f(t) - f(t-h)}{h}, \quad \lambda_l(t) = \liminf_{h \to 0^+} \frac{f(t) - f(t-h)}{h},$$

$$\Lambda_r(t) = \limsup_{h \to 0^+} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}, \quad \lambda_r(t) = \liminf_{h \to 0^+} \frac{f(t+h) - f(t)}{h};$$

chiaro che in ogni caso $\lambda_l(t) \leq \Lambda_l(t) \leq \lambda_r(t) \leq \Lambda_r(t)$, per la definizione e perch f crescente; dimostreremo che gli insiemi

$$E_\infty = \{t : \Lambda_r(t) = +\infty\}$$

e

$$F = \{x : \Lambda_r(t) > \lambda_l(t)\}$$

sono trascurabili; questo implicher che per quasi ogni $t \in (a, b)$ si deve avere

$$\Lambda_r(t) < +\infty, \qquad \Lambda_r(t) \leq \lambda_l(t).$$

Applicando lo stesso risultato alla funzione, sempre monotona crescente $g(t) = -f(-t)$, otterremo poi che per quasi ogni t vale

$$\Lambda_l(t) \leq \lambda_r(t),$$

avendo quindi dimostrato che per quasi ogni $t \in (a, b)$

$$\Lambda_r(t) \leq \lambda_l(t) \leq \Lambda_l(t) \leq \lambda_r(t) \leq \Lambda_r(t) < +\infty,$$

da cui la derivabilit quasi ovunque.

Mostriamo quindi che E_∞ trascurabile; siccome per ogni $C > 0$ vale l'inclusione

$$E_\infty \subset E_C = \{t \in (a,b) : \Lambda_r(t) > C\},$$

se tale insieme non vuoto, ne deduciamo che esiste $\xi > t$ per cui

$$\frac{f(\xi) - f(t)}{\xi - t} > C.$$

Se definiamo la funzione continua $g(t) = f(t) - Ct$, la precedente propriet si pu riscrivere

$$g(\xi) > g(t);$$

il punto t appartiene quindi all'insieme E associato alla funzione g del Lemma 1.1.4, che quindi non vuoto e determinato dall'unione disgiunta di intervalli aperti

$$E = \bigcup_{i\in I}(a_i, b_i),$$

con I al pi numerabile. La condizione $g(b_i) \geq g(a_i)$ equivale alla condizione

$$C(b_i - a_i) \leq f(b_i) - f(a_i);$$

sommando su $i \in I$ troviamo quindi che

$$\sum_{i\in I}(b_i - a_i) \leq \frac{1}{C}\sum_{i\in I}(f(b_i) - f(a_i)) \leq \frac{f(b) - f(a)}{C} = \frac{V(f,[a,b])}{C}$$

grazie alla monotonia di f. Abbiamo quindi trovato che

$$E_\infty \subset \bigcup_{i\in I}(a_i, b_i)$$

con

$$\sum_{i\in I}(b_i - a_i) \leq \frac{f(b) - f(a))}{C},$$

da cui la trascurabilit di E_∞ prendendo il limite per $C \to +\infty$.

Per dimostrare che F trascurabile notiamo anzitutto che

$$F = \{t \in (a,b) : \lambda_l(t) < \Lambda_r(t)\} = \bigcup_{\substack{q_1<q_2 \\ q_1,q_2\in\mathbb{Q}}} E(q_1, q_2),$$

dove abbiamo definito, per $c < C$

$$E(c, C) = \{t \in (a,b) : \lambda_r(t) < c < C < \Lambda_l(t)\};$$

dimostreremo quindi che ogni insieme $E(c, C)$ trascurabile se $c < C$.

Fissiamo quindi $c < C$; se $E(c, C)$ vuoto, non c' nulla da dimostrare, altrimenti definiamo le due funzioni

$$g_1(t) = f(-t) + ct, \qquad g_2(t) = f(t) - Ct.$$

Sia E_1 l'insieme aperto, unione quindi di intervalli, derivante dal Lemma 1.1.4 applicato alla funzione g_1; l'insieme $F_1 = -E_1$ contiene tutti i punti per cui $\lambda_l(t) < c$: infatti

$$F_1 = \bigcup_{i \in I} (a_i, b_i), \qquad E_1 = \bigcup_{i \in I} (-b_i, -a_i),$$

con $g_1(-a_i) \geq g_1(-b_i)$, cio $f(b_i) - f(a_i) \leq c(b_i - a_i)$.

Su ogni intervallo (a_i, b_i), $i \in I$ applichiamo il Lemma 1.1.4 alla funzione g_2 in modo da trovare che un insieme aperto E_2^i che contiene i punti di (a_i, b_i) per cui $\Lambda_r(t) > C$. Scriviamo quindi

$$E_2^i = \bigcup_{j \in J} (a_j^{(i)}, b_j^{(i)})$$

per cui $g_2(b_j^{(i)}) \geq g_2(a_j^{(i)})$, cio

$$C(b_j^{(i)} - a_j^{(i)}) \leq f(b_j^{(i)}) - f(a_j^{(i)}).$$

Definiamo quindi

$$F_2 = \bigcup_{i \in I} E_2^i;$$

Tale insieme contiene l'insieme $E(c, C)$ e la sua misura di Lebesgue controllata da

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^1(F_2) =& \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} (b_j^{(i)} - a_j^{(i)}) \leq \frac{1}{C} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} (f(b_j^{(i)}) - f(a_j^{(i)})) \\
\leq& \frac{1}{C} \sum_{i \in I} (f(b_i) - f(a_i)) \leq \frac{c}{C} \sum_{i \in I} (b_i - a_i) \\
=& \frac{c}{C} \mathcal{L}^1(F_1).
\end{aligned}$$

Iteriamo a questo punto il ragionamento costruendo una successione di insiemi F_n decrescenti per inclusione, dove gli F_n con n dispari si ottengono applicando il Lemma 1.1.4 alla funzione g_1, mentre per quelli pari lo si applica alla funzione g_2; si trover che ogni F_n contiene $E(c, C)$ e

$$\mathcal{L}^1(F_{2n}) \leq \frac{c}{C} \mathcal{L}^1(F_{2n-1}) \leq \left(\frac{c}{C}\right)^n \mathcal{L}^1(F_1);$$

siccome $c < C$, quest'ultima quantit tende a 0 per $n \to +\infty$, e quindi $E(c, C)$ trascurabile.

L'ipotesi di continuit su f si pu ottenere come segue; l'insieme S_f al pi numerabile, e quindi possiamo scrivere

$$S_f = \{t_j : j \in I \subset \mathbb{N}\}.$$

Se poniamo, per ogni $t \in [a, b]$

$$I(t) = \{j \in I : t_j \leq t\}$$

e

$$c_j = (f(t_j^+) - f(t_j^-)),$$

possiamo definire la funzione

$$s(t) = \sum_{j \in I(t)} c_j = \nu([a, t]), \tag{1.1}$$

dove ν la misura positiva finita

$$\nu = \sum_{j\in I} c_j \delta_{t_j}.$$

Lasciamo nell'Esercizio 1.1.2 i dettagli sul fatto che la funzione

$$\tilde{f}(t) = f(t) - s(t)$$

sia continua e dalla quale si pu dedurre la derivabilit quasi ovunque di f. $\square$

Esercizio 1.1.1. Sia $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ la funzione definita in (1.2); si dimostrino i seguenti fatti:

1. s monotona crescente e per ogni $t \in [a, b]$ si ha che

$$s(t^+) - s(t^-) = f(t^+) - f(t^-);$$

2. per ogni $a \leq t_1 < t_2 \leq b$ si ha che

$$s(t_2) - s(t_1) \leq V(f, [t_1, t_2]) = f(t_2) - f(t_1);$$

3. per ogni $t \in (a, b) \setminus S_f$ la funzione s derivabile e $s'(t) = 0$;

4. la funzione $\tilde{f} : [a, b] \to \mathbb{R}$ definita da

$$\tilde{f}(t) = f(t) - s(t)$$

 monotona crescente e continua e quindi f derivabile in tutti i punti di $(a, b) \setminus S_f$ in cui $\tilde{f}$ derivabile.

Osservazione 1.1.7. Notiamo che mentre la discontinuit di una funzione monotona si verifica solo al pi su di un insieme numerabile, la non derivabilit in generale si verifica in un insieme trascurabile, che pu a priori essere anche pi che numerabile. Un esempio di questo fatto dato dalla funzione di Cantor-Vitali; in Darst [4] infatti viene caratterizzato l'insieme di non derivabilit , dimostrando che consiste in un sottoinsieme proprio dell'insieme di Cantor, ma avente dimensione di Hausdorff strettamente positiva. Ritorneremo pi avanti sulla nozione di dimensione di Hausdorff, legata alla definizione delle misure di Hausdorff.

Abbiamo quindi il seguente corollario.

Corollario 1.1.8. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione con $V(f, [a, b]) < +\infty$; allora f continua eccettuato che in una quantit al pi numerabile di punti. Esistono inoltre i limiti destri e sinistri in ogni punto ed f derivabile eccetto che in un insieme di punti trascurabili; vale inoltre la seguente stima*

$$\int_a^b |f'(s)|ds + \sum_{t\in S_f} |f(t^+) - f(t^-)| \leq V(f, [a, b]).$$

Infine, se $E \subset \mathbb{R}$ un insieme avente perimetro finito in $[a, b]$, allora l'insieme $E \cap [a, b]$ consiste in una unione finita di intervalli.

Dimostrazione. (METTERE QUALCHE RIGA DI DIMOSTRAZIONE).

Nel caso in cui $f = \chi_E$ con E di perimetro finito in $[a, b]$, dato che la funzione f assume solo i valori 0 e 1, un punto $t \in S_f$ se e solo se

$$|f(t^+) - f(t^-)| = 1,$$

e quindi

$$\#S_f = \sum_{t \in S_f} |f(t^+) - f(t^-)| \leq V(f, [a, b]).$$

□

(Fine della dimostrazione del Teorema **??** *).* Notiamo anzitutto che

$$A = \{t \in (a, b) : \lambda_l(t) < \Lambda_r(t)\} = \bigcup_{\substack{q_1 < 2_2 \\ q_1, q_2 \in \mathbb{Q}}} E(q_1, q_2),$$

dove abbiamo definito, per $c < C$

$$E(c, C) = \{t \in (a, b) : \lambda_r(t) < c < C < \Lambda_l(t)\};$$

dimostreremo quindi che ogni insieme $E(c, C)$ è trascurabile se $c < C$.

Fissiamo quindi $c < C$; se $E(c, C)$ è vuoto, non c'è nulla da dimostrare, altrimenti definiamo le due funzioni

$$g_1(t) = f(-t) + ct, \qquad g_2(t) = f(t) - Ct.$$

Sia quindi E_1 l'insieme aperto, unione quindi di intervalli, derivante dal Lemma1.1.4 applicato alla funzione g_1; l'insieme $F_1 = -E_1$ contiene quindi tutti i punti per cui $\lambda_l(t) < c$. Sappiamo quindi che

$$F_1 \bigcup_{i \in I} (a_i, b_i), \qquad E_1 = \bigcup_{i \in I} (-b_i, -a_i),$$

con $g_1(-a_i) \geq g_1(-b_i)$, cioè $f(b_i) - f(a_i) \leq c(b_i - a_i)$.

Su ogni intervallo (a_i, b_i), $i \in I$ applichiamo il Lemma1.1.4 alla funzione g_2 in modo da trovare che un insieme aperto E_2^i che contiene i punti di (a_i, b_i) per cui $\Lambda_r(t) > C$. Scriviamo quindi

$$E_2^i = \bigcup_{j \in J} (a_j^{(i)}, b_j^{(i)})$$

per cui $g_2(b_j^{(i)}) \geq g_2(a_j^{(i)})$, cioè

$$C(b_j^{(i)} - a_j^{(i)}) \leq f(b_j^{(i)}) - f(a_j^{(i)}).$$

Definiamo quindi

$$F_2 = \bigcup_{i \in I} E_2^i;$$

Tale insieme contiene l'insieme $E(c, C)$ e la sua misura di Lebesgue è controllata da

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^1(F_2) =& \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} (b_j^{(i)} - a_j^{(i)}) \leq \frac{1}{C} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} (f(b_j^{(i)}) - f(a_j^{(i)})) \\
\leq& \frac{1}{C} \sum_{i \in I} (f(b_i) - f(a_i)) \leq \frac{c}{C} \sum_{i \in I} (b_i - a_i) \\
=& \frac{c}{C} \mathcal{L}^1(F_1).
\end{aligned}$$

Iteriamo a questo punto il ragionamento costruendo una successione di insiemi F_n decrescenti per inclusione, dove gli F_n con n dispari si ottengono applicando il Lemma1.1.4 alla funzione g_1, mentre per quelli pari lo si applica alla funzione g_2; si troverà che ogni F_n contiene $E(c, C)$ e

$$\mathcal{L}^1(F_{2n}) \leq \frac{c}{C}\mathcal{L}^1(F_{2n-1}) \leq \left(\frac{c}{C}\right)^n \mathcal{L}^1(F_1);$$

siccome $c < C$, quest'ultima quantità tende a 0 per $n \to +\infty$, e quindi $E(c, C)$ è trascurabile.

L'ipotesi di continuità su f si può ottenere come segue; l'insieme S_f è al più numerabile, e quindi possiamo scrivere

$$S_f = \{t_j : j \in I \subset \mathbb{N}\}.$$

Se poniamo, per ogni $t \in [a, b]$

$$I(t) = \{j \in I : t_j \leq t\}$$

e

$$c_j = (f(t_j^+) - f(t_j^-)),$$

possiamo definire la funzione

$$s(t) = \sum_{j \in I(t)} c_j = \nu([a, t]), \tag{1.2}$$

dove ν è la misura positiva finita

$$\nu = \sum_{j \in I} c_j \delta_{t_j}.$$

Lasciamo nell'Esercizio1.1.2 i dettagli sul fatto che la funzione

$$\tilde{f}(t) = f(t) - s(t)$$

sia continua e dalla quale si può dedurre la derivabilità quasi ovunque di f. □

Esercizio 1.1.2. Sia $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ la funzione definita in (1.2); si dimostrino i seguenti fatti:

1. s è monotona crescente e per ogni $t \in [a, b]$ si ha che
$$s(t^+) - s(t^-) = f(t^+) - f(t^-);$$
2. per ogni $a \leq t_1 < t_2 \leq b$ si ha che
$$s(t_2) - s(t_1) \leq V(f, [t_1, t_2]) = f(t_2) - f(t_1);$$
3. per ogni $t \in (a, b) \setminus S_f$ la funzione s è derivabile e $s'(t) = 0$;
4. la funzione $\tilde{f} : [a, b] \to \mathbb{R}$ definita da
$$\tilde{f}(t) = f(t) - s(t)$$
è monotona crescente e continua e quindi f è derivabile in tutti i punti di $(a, b) \setminus S_f$ in cui $\tilde{f}$ è derivabile.

Come abbiamo appena visto, per una funzione a variazione totale limitata, si possono definire i punti di discontinuità a salto

$$S_f = \{t \in [a,b] : f(t+) \neq f(t^-)\};$$

vale ovviamente l'inclusione $S_f \subset S_{f^+} \cup S_{f^-}$ per ogni decomposizione monotona $f = f^+ - f^-$; tuttavia, l'insieme S_f non esaurisce in generale tutti i punti di discontinuità per f. Basti pensare alla funzione

$$f(t) = \chi_{\{0\}}(t) = \chi_{(-\infty,0]}(t) - \chi_{(0,+\infty)}(t).$$

Vedremo però che ciò non succede una volta che si modifica la funzione f scegliendo un opportuno rappresentate misurabile.

Chiudiamo questa sezione con una interessante proprietà di approssimazione di funzioni a variazione limitata con funzioni semplici; osserviamo anzitutto che una funzione a variazione limitata è misurabile, in quanto somma di una funzione continua più una funzione salto. Inoltre una funzione a variazione limitata è limitata negli intervalli $[a,b]$, quindi su aperti limitati Ω una funzione a variazione limitata è sommabile; più in generale, una funzione a variazione localmente limitata in un aperto Ω è localmente sommabile, cioè $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Denoteremo con $\mathscr{P}$ una partizione di $[a,b]$ intendendo una scelta di nodi

$$\mathscr{P} = \{t_0, t_1, \ldots, t_n, t_{n+1}\}$$

per cui $t_0 = a$, $t_{n+1} = b$ e

$$(a,b) \setminus \{t_1, \ldots, t_n\} = \bigcup_{i=0}^{n} (t_i, t_{i+1}).$$

L'ampiezza della partizione $\mathscr{P}$ è definita ponendo

$$|\mathscr{P}| = \max\{|t_{i+1} - t_i| : i = 0, \ldots, n\}.$$

Proposizione 1.1.9. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione a variazione limitata in $[a,b]$ e sia $\mathscr{P}$ una partizione di $[a,b]$; allora se si definisce*

$$u(t) = \sum_{i=0}^{n} f(s_i)\chi_{(t_i,t_{i+1})}(t)$$

con $s_i \in (t_i, t_{i+1})$ arbitrario, si ottiene la stima

$$\int_a^b |u(t) - f(t)|dt \leq |\mathscr{P}| V(f, [a,b]).$$

Dimostrazione. Sfruttiamo la decomposizione monotona di f per notare che su ogni intervallo (t_i, t_{i+1}) vale la stima

$$\begin{aligned}
|u(t) - f(t)| =& |f(s_i) - f(t)| = |f^+(s_i) - f^+(t) - f^-(s_i) + f^-(t)| \\
\leq& |f^+(s_i) - f^+(t)| + |f^-(s_i) - f^-(t)| = f^+(s_i) - f^+(t) + f^-(s_i) - f^-(t) \\
\leq& f^+(t_{i+1}) - f^+(t_i) + f^-(t_{i+1}) - f^-(t_i) = |f(t_{i+1} - f(t_i))|.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\int_a^b |u(t) - f(t)|dt = \sum_{i=0}^{n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |u(t) - f(t)|dt \leq \sum_{i=0}^{n} |f(t_{i+1} - f(t_i))|(t_{i+1} - t_i)$$
$$\leq |\mathscr{P}| V(f, [a, b]).$$

□

Come corollario della precedente proposizione si ottiene il seguente risultato di approssimazione mediante funzioni semplici.

Corollario 1.1.10. *Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}$ aperto, una funzione a variazione totale localmente finita; allora esiste una successione di funzioni semplici convergenti in norma $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ ad f. localmente finita*

1.2 Variazione essenziale

In questa sezione vediamo una definizione alternativa di variazione totale che sia indipendente dal rappresentante di una data funzione misurabile. Considereremo quindi ora funzioni misurabili secondo Lebesgue, definite su di un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}$. Definiamo quindi le due seguenti variazioni di $f : \Omega \to \mathbb{R}$, la prima quella che viene detta variazione totale essenziale

$$eV(f, \Omega) = \inf\{V(g, \Omega) : g = f \text{ quasi ovinque}\},$$

la seconda ponendo

$$\mathscr{V}(f, \Omega) = \sup_{\Omega} f(t)\varphi'(t)dt : \varphi \in C^1_c(\Omega, \mathbb{R}), \|\varphi\|_\infty \leq 1\}.$$

Come la variazione esssenziale, anche la variazione $\mathscr{V}(f, \Omega)$ è indipendente da variazioni quasi ovunque della funzione f. Si nota che se f è una funzione tale che $\mathscr{V}(f, \Omega) < +\infty$, allora il funzionale $L_f : C^1_c(\Omega, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

$$L_f(\varphi) = -\int_\Omega f(t)\varphi'(t)dt$$

è limitato rispetto alla norma di $C_0(\Omega, \mathbb{R})$, cioè

$$|L_f(\varphi)| \leq \mathscr{V}(f, \Omega)\|\varphi\|_\infty.$$

Dato che $C^1_c(\Omega, \mathbb{R})$ è denso in $C_0(\Omega, \mathbb{R})$ rispetto a tale norma, se ne deduce che L_f può essere esteso ad un funzionale lineare e continuo su $C_0(\Omega, \mathbb{R})$; come vedremo nel seguito, il duale di $C_0(\Omega, \mathbb{R})$ può essere rappresentato mediante le misure con segno finite su Ω, e quindi per una funzione f con $\mathscr{V}(f, \Omega) < +\infty$ esiste una misura con segno finita μ_f per cui

$$L_f(\varphi) = \int_\Omega \varphi(t)d\mu_f(t), \qquad \forall \varphi \in C_0(\Omega, \mathbb{R}); \tag{1.3}$$

in particolare, per ogni $\varphi \in C^1_c(\Omega, \mathbb{R})$ si ha dall'identità

$$\langle Df, \varphi \rangle = -\int_\Omega f(t)\varphi'(t)dt = L_f(\varphi) = \int_\Omega \varphi(t)d\mu_f(t),$$

cioè Df è una distribuzione rappresentata dalla misura μ_f; per questo motivo si dice che le funzioni a variazione totale limitata sono funzioni con derivata misura. Osserviamo che se $\mu_f = 0$, allora la funzione f è costante in ogni componente connessa di Ω; più precisamente e più in generale, se $\Omega = (a,b)$ e la derivata distribuzionale Df di f è nulla, $Df = 0$, allora esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ per cui $f = c$ quasi ovunque su (a,b). Tale risultato lo si può vedere sia come corollario del fatto che in tal caso risulta $f \in W^{1,1}((a,b))$ con derivata debole nulla, oppure come corollario del seguente risultato di approssimazione.

Proposizione 1.2.1. *Sia $f \in L^1(\Omega)$ una funzione tale che $Df = \mu_f$ sia una misura; allora per le convoluzioni*

$$f_\varepsilon(t) = f * \varrho_\varepsilon(t) = \int f(t-s)\varrho_\varepsilon(s)ds,$$

allora

$$f'_\varepsilon(t) = \mu_f * \varrho_\varepsilon(t) = \int \varrho_\varepsilon(t-s)d\mu_f(s).$$

Dimostrazione. Basta considerare $\varphi \in C^1_c(\Omega)$ e prendere $\varepsilon < \operatorname{dist}(\operatorname{spt}(\varphi), \Omega^c)$ e notare che

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f_\varepsilon(t)\varphi'(t)dt &= \int_\Omega \int_\Omega f(t-s)\varrho_\varepsilon(s)\varphi'(t)dsdt \\
&= \int_\Omega \varrho_\varepsilon(s) \int_\Omega f(t-s)\varphi'(t)dtds \\
&= \int_\Omega \varrho_\varepsilon(s) \int_\Omega f(s)\varphi'(t+s)dtds \\
&= -\int_\Omega \varrho_\varepsilon(s) \int_\Omega \varphi'(t+s)d\mu_f(t)ds \\
&= -\int_\Omega \int_\Omega \varrho_\varepsilon(s)\varphi'(t+s)dsd\mu_f(t) \\
&= -\int_\Omega \int_\Omega \varrho_\varepsilon(s-t)\varphi'(s)dsd\mu_f(t) \\
&= -\int_\Omega \varphi'(s) \int_\Omega \varrho_\varepsilon(s-t)d\mu_f(t)ds \\
&= -\int_\Omega \varphi'(s)\mu_f * \varrho_\varepsilon(s)ds,
\end{aligned}$$

cioè la derivata debole, e quindi classica, di f_ε è data da $\mu_f * \varrho_\varepsilon$. □

Osserviamo inoltre che la variazione totale puntuale e quella essenziale possono essere molto differenti tra loro; basti pensare alla funzione

$$f(t) = \chi_{\mathbb{Q}}(t)$$

che ha variazione totale infinita in ogni aperto non vuoto Ω, mentre essendo $f = 0$ quasi ovunque, si avrà

$$eV(f,\Omega) = \mathscr{V}(f,\Omega) = 0.$$

Tale differenza resta anche se la variazione totale puntuale di f è finita; basta considerare la funzione

$$f(t) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \chi_{\{t_i\}}(t)$$

con $\{t_i : i \in \mathbb{N}\}$ è una numerazione di $\mathbb{Q} \cap \Omega$, e la successione c_i è fatta di numeri strettamente positivi con

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} c_i < +\infty.$$

Abbiamo però il seguente risultato.

Teorema 1.2.2. *Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile; esiste allora $u : \Omega \to \mathbb{R}$ misurabile con $u = f$ quasi ovunque su Ω e tale che*

$$V(u, \Omega) = eV(f, \Omega) = \mathscr{V}(f, \Omega).$$

Per poter dimostrare tale Teorema, abbiamo bisogno di alcuni risultati preliminari.

Lemma 1.2.3. *La funzione*

$$u \mapsto \mathscr{V}(u, \Omega)$$

è semicontinua inferiormente rispetto alla convergenza di $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

Dimostrazione. Basta notare che per ogni $\varphi \in C^1_c(\Omega, \mathbb{R})$ la mappa

$$u \mapsto \int_\Omega u(t)\varphi'(t)dt$$

è continua rispetto alla convergenza di $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$; si conclude notando che l'estremo superiore di funzoni continue è semicontinuo inferiormente. Infatti, se fissiamo $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, allora per definizione di estremo superiore, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\varphi_\varepsilon \in C^1_c(\Omega, \mathbb{R})$ con $\|\varphi_\varepsilon\| \leq 1$ per cui

$$\mathscr{V}(u, \Omega) \leq \int_\Omega u(t)\varphi'_\varepsilon(t)dt + \varepsilon.$$

Se quindi prendiamo $(u_h)_{h \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni di $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ convergente ad u in $K_\varphi = \text{spt}(\varphi_\varepsilon)$, dalla stima

$$\left| \int_\Omega (u_h(t) - u(t))\varphi'_\varepsilon(t)dt \right| \leq \|\varphi'_\varepsilon\|_\infty \|u_h - u\|_{L^1(K)}$$

si ricava che

$$\mathscr{V}(u, \Omega) \leq \int_\Omega u_h(t)\varphi'_\varepsilon(t)dt + \|\varphi'_\varepsilon\|_\infty \|u_h - u\|_{L^1(K_\varepsilon)} + \varepsilon,$$

da cui passando al limite per $h \to +\infty$

$$\mathscr{V}(u, \Omega) \leq \liminf_{h \to +\infty} \mathscr{V}(u_h, \Omega) + \varepsilon,$$

che è il risultato del Lemma prendendo il limite $\varepsilon \to 0$. □

Tale risultato può anche essere visto come risultato più generale su funzioni continue e semicontinue in spazi topologici; rimandiamo all'appendice A.1.1 per maggiori dettagli.

Proseguiamo con il seguente risultato; ricordiamo che per funzione semplice uni-dimensionale intendiamo una funzione del tipo

$$v(t) = \sum_{i=1}^{m} c_i \chi_{I_i}(t)$$

con $I_i = (a_i, b_i)$ scelti in modo tale che $b_i = a_{i+1}$ e tali che

$$(a,b) \setminus \{b_1, \dots, b_{m-1}\} = \bigcup_{i=1}^{m} (a_i, b_i).$$

Lemma 1.2.4. *Sia $v : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione semplice*

$$v(t) = \sum_{i=1}^{m} c_i \chi_{I_i}(t);$$

allora

$$\mathscr{V}(v, (a,b)) = \sum_{i=1}^{m-1} |c_{i+1} - c_i| = V(f, (a,b)).$$

Dimostrazione. Basta notare che per definizione se v è una funzione semplice allora nella decomposizione di (a,b) in intervalli (a_i, b_i) si deve necessariamente avere $a_1 = a$ e $b_m = b$; quindi, per ogni $\varphi \in C_c^1(a,b)$ si ha che

$$\int_1^b v(t)\varphi'(t)dt = \sum_{i=1}^{m} c_i \int_{a_i}^{b_i} \varphi'(t)dt = \sum_{i=1}^{m} c_i(\varphi(b_i) - \varphi(a_i)) = \sum_{i=1}^{m-1} (c_i - c_{i+1})\varphi(b_i).$$

Passando quindi all'estremo superiore sulle funzioni φ con $\|\varphi\|_\infty \leq 1$ si ottiene il risultato. □

(Teorema 1.2.2). Possiamo supporre senza ledere in generalità che $\Omega = I = (a,b)$ sia un intervallo aperto e dimostriamo che $\mathscr{V}(f,(a,b)) \leq eV(f,(a,b))$. Sia quindi v una funzione che coincide quasi ovunque con f; chiaramente possiamo supporre $V(v,(a,b)) < +\infty$ e usare l'approssimazione mediante funzioni semplici date dal Corollario **??**; grazie alla semicontinuità inferiore di $\mathscr{V}(\cdot,(a,b))$ si deduce che

$$\begin{aligned}\mathscr{V}(f,(a,b)) = \mathscr{V}(v,(a,b)) &\leq \liminf_{h\to+\infty} \mathscr{V}(v_h,(a,b)) \\ &= \liminf_{h\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} |v(s_{i+1}) - v(s_i)| \leq V(v,(a,b));\end{aligned}$$

passando all'estremo inferiore sulle v si ottiene quindi la disuguaglianza desiderata.

Dimostriamo quindi la disuguaglianza inversa; possiamo quindi supporre $\mathscr{V}(f,(a,b)) < +\infty$. In tal caso sappiamo che esiste una misura con segno finita μ_f che rappresenta ma derivata distribuzionale di f. Poniamo quindi

$$w(t) = \mu_f((a,t)) = \int_a^t d\mu_f(s);$$

dal Teorema di Fubini notiamo che per ogni $\varphi \in C_c^1(a,b)$

$$\int_a^b w(t)\varphi'(t)dt = \int_a^b \int_a^t \varphi'(t)d\mu_f(s)dt = \int_a^b \int_s^b \varphi'(t)dtd\mu_f(s) = -int_a^b \varphi(s)d\mu_f(s),$$

e quindi anche w è tale che $\mathscr{V}(w,(a,b)) < +\infty$ e per la sua derivata distribuzionale vale anche $\mu_w = \mu_f$. Grazie all'Osservazione **??**, se ne deduce che esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ per cui $f = w + c$ quasi ovunque su (a, b), cioè $w + c$ è una funzione ammissibile per il calcolo di $eV(f, (a, b))$. Notiamo quindi che per ogni partizione $\mathscr{P}$ di (a, b) si ottiene

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} |w(t_{i+1}) - w(t_i)| =& |\mu_f(a, t_1)| + \sum_{i=1}^{n} |\mu_f([t_i, t_{i+1})| \leq |\mu_f|(a, t_1) + \sum_{i=1}^{n} |\mu_f|([t_i, t_{i+1}) \\ =& |\mu_f|(a, b) = \mathscr{V}(f, (a, b)).\end{aligned}$$

Passando all'estremo superiore su tutte le partizioni abbiamo quindi trovato che

$$eV(f, (a, b)) \leq V(w + c, (a, b)) = V(w, (a, b)) \leq \mathscr{V}(f, (a, b));$$

si nota in particolare che la funzione $u = w + c$ realizza il minimo nella definizione di variazione totale essenziale.

La dimostrazione si completa nel caso di un generico aperto Ω semplicemente considerando le componenti connesse di Ω date da intervalli aperti e l'additività delle variazioni totali. $\square$

Capitolo 2

Elementi di Teoria della Misura e Teoria Geometrica della Misura

Diamo per scontate le nozioni base di teoria della misura relativa alle misure positive; sarà quindi importante in questo capitolo sapere cosa si intende per misura esterna, insiemi misurabili, Boreliani e si conosca la nozione di misura Boreliana. Daremo anche per scontata la conoscenza del Criterio di Caratheodory. Studieremo in questo capitolo principalmente le misure con segno e più in generale le misure vettoriali. Ci interesseremo di misure definite su un insieme aperto Ω di $\mathbb{R}^n$, anche se la maggior parte dei concetti che andremo ora a studiare si possono formulare in contesti molto più generali, come ad esempio quello degli spazi metrici localmente compatti e separabili; per semplicità inoltre ci concentreremo sulle misure Boreliane.

2.1 Teoria della Misura

Iniziamo con la definizione di misura vettoriale.

Definizione 2.1.1 (Misura vettoriale)**.** *Una funzione d'insieme* $\mu : \mathscr{B}(\Omega) \to \mathbb{R}^p$ *viene detta misura vettoriale se:*

1. $\mu(\emptyset) = 0$*;*

2. *per ogni* $E_i \in \mathscr{B}(\Omega)$*,* $i \in \mathbb{N}$*, insiemi disgiunti,*

$$\mu\left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} E_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(E_i).$$

Come vedremo a breve, una misura vettoriale è intrinsecamente una misura finita, nel senso della variazione totale.

Definizione 2.1.2 (Variazione totale)**.** *Data una misura $\mu : \mathscr{B}\Omega \to \mathbb{R}^p$, si definisce per ogni $E \in \mathscr{B}(\Omega)$ la variazione totale di μ su E ponendo*

$$|\mu|(E) = \sup \left\{ \sum_{i\in\mathbb{N}} |\mu(E_i)| : E = \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} E_i, E_i \in \mathscr{B}(\Omega) \right\}.$$

Abbiamo il seguente Teorema.

Teorema 2.1.3. *Sia $\mu : \mathscr{B}(\Omega) \to \mathbb{R}^p$ una misura; allora $|\mu| : \mathscr{B}(|Omega) \to [0, +\infty)$ definisce una misura positiva con $|\mu|(\Omega) < +\infty$.*

Dimostrazione. Lasciamo come esercizio la verifica che $|\mu|$ definisce una misura positiva e dimostriamo solo che $|\mu|(\Omega) < +\infty$.

Se $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_p)$ è una misura vettoriale, dalla disuguaglianza

$$|\mu|(\Omega) \leq \sum_{i=1}^{p} |\mu_i|(\Omega)$$

si deduce che possiamo dimostrare l'asserto nel caso di misura scalare.

Supponiamo quindi per assurdo che $|\mu|(\Omega) = +\infty$; troveremo quindi un insieme $G_1 \subset \Omega$ Boreliano tale che $|\mu(G_1)| > 1$ e $|\mu|(\Omega \setminus G_1) = +\infty$. Iterando il ragionamento, si costruirà quindi una successione di insiemi $G_i \subset \mathscr{B}(\Omega)$ disgiunti con $|\mu(G_i)| > 1$ per ogni $i \in \mathbb{N}$; questo sarà quindi un assurdo in quanto dovremmo avere che

$$\mu\left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} G_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(G_i)$$

e quindi la serie a secondo membro dovrebbe essere convergente.

Se la variazione totale è infinita, allora esistono $E_i \in \mathscr{B}(\Omega)$ tali che

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} |\mu(E_i)| > 2(|\mu(\Omega)| + 1).$$

Definiamo

$$P = \{i \in \mathbb{N} : \mu(E_i) \geq 0\}, \qquad N = \{i \in \mathbb{N} : \mu(E_i) < 0\}$$

e poniamo

$$E = \bigcup_{i\in P} E_i, \qquad F = \bigcup_{i\in N} E_i.$$

Per uno dei due insiemi deve quindi valere

$$|\mu(E)| = \mu(E) > |\mu(\Omega)| + 1, \qquad |\mu(F)| = -\mu(F) > |\mu(\Omega)| + 1;$$

supponiamo si abbia $\mu(E) > |\mu(\Omega)| + 1 > 1$; dato che $\Omega = E \cup F$, se ne deduce che

$$|\mu(F)| = |\mu(\Omega) - \mu(E)| \geq \mu(E) - |\mu(\Omega)| > 1.$$

Quindi entrambi gli insiemi E ed F hanno la proprietà che $|\mu(E)|, |\mu(F)| > 1$; per l'additività di $|\mu|$, si deve anche avere che o $|\mu|(E) = +\infty$ oppure $|\mu|(F) = +\infty$; nel primo caso porremo $G_1 = F$, altrimenti $G_1 = E$. $\square$

Osservazione 2.1.4. Se $\mu \in \mathscr{M}(\Omega)$ è una misura scalare con segno, allora le due misure

$$\mu^+ = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu), \qquad \mu^- = \frac{1}{2}(|\mu| - \mu),$$

sono misure positive e valgono le relazioni

$$\mu = \mu^+ - \mu^-, \qquad |\mu| = \mu^+ + \mu^-;$$

si ottiene quindi sempre, per una misura scalare, una decomposizione in parte positiva e parte negativa.

È facile notare che se una misura è tale che $|\mu|(\Omega) = 0$, allora $\mu(E) = 0$ per ogni $E \in \mathscr{B}(\Omega)$. Inoltre dalla definizione segue subito che date due misure μ e ν

$$|\mu + \nu|(\Omega) \leq |\mu|(\Omega) + |\nu|(\Omega).$$

Possiamo quindi definire sullo spazio lineare reale $\mathscr{M}(\Omega, \mathbb{R}^p)$ delle misure vettoriali la seguente norma

$$\|\mu\| = |\mu|(\Omega).$$

Lasciamo come esercizio la dimostrazione del seguente risultato.

Proposizione 2.1.5. *Lo spazio* $(\mathscr{M}(\Omega, \mathbb{R}^p), \| \cdot \|)$ *è uno spazio di Banach.*

Ricordiamo anche la nozione di misure assolutamente continue e singolari.

Definizione 2.1.6. *Date due misure* $\mu \in \mathscr{M}(\Omega, \mathbb{R}^p)$, $\nu \in \mathscr{M}(\Omega, \mathbb{R}^q)$ *diremo che* μ *è assolutamente continua rispetto a* ν, $\mu \ll \nu$, *se per ogni* E *per cui* $|\nu|(E) = 0$, *allora* $|\mu|(E) = 0$. *Diremo invece che* μ *e* ν *sono singolari tra loro,* $\mu \perp \nu$, *se esiste un insieme* $B \in \mathscr{B}(\Omega)$ *trascurabile per* ν *e su cui* μ *si concentra, cioè tale che* $|\nu|(B) = 0$ *e*

$$\mu(E) = \mu(E \cap B) = \mu \llcorner B(E), \qquad \forall E \in \mathscr{B}(\Omega).$$

Osservazione 2.1.7. Si noti che data una qualuque misura ν, allora $\nu \ll |\mu|$. La definizione di assoluta continuità di μ rispetto a ν, $\mu \ll \nu$, è equivalente alla richiesta che la misura μ sia assolutamente continua rispetto alla misura positiva $\lambda = |\nu|$, cioè $\mu \ll \lambda$, nel senso che per ogni $E \in \mathscr{B}(\Omega)$ per cui $\lambda(E) = 0$, allora $|\mu|(E) = 0$; tale condizione è poi equivalente alla richiesta che per ogni $\varepsilon > 0$ eiste $\delta > 0$ per cui se $E \in \mathscr{B}(\Omega)$ è tale che $\lambda(E) < \delta$, allora $|\mu|(E) < \varepsilon$.

Esempio 2.1.1.
1. Un modo semplice per costruire, data una misura positiva $\lambda \in \mathscr{M}(\Omega)$, misure assolutamente continue è fissare una funzione $f \in L^1(\Omega, \lambda, \mathbb{R}^p)$ e definire

$$\mu_f(E) = \mu \llcorner f(E) = \int_E f d\lambda.$$

2. Data una misura $\mu \in \mathscr{M}(\Omega, \mathbb{R}^p)$, si parla di misura non atomica se per ogni $x \in \Omega$

$$\mu(\{x\}) \neq 0.$$

Data una misura non atomica μ, allora per ogni $x_0 \in \Omega$ la misura Delta di Dirac $\nu = \delta_{x_0}$ definita da

$$\delta_{x_0}(E) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in E \\ \\ 0 & \text{se } x_0 \notin E \end{cases}$$

è singolare rispetto a μ in quanto ν è concentrata su $\{x_0\}$.

Osservazione 2.1.8. Molte delle nozioni che stiamo considerando ora si può estendere alle misure σ–finite; sono queste le funzioni di insieme per cui esiste una successione di insiemi Ω_h invadenti Ω, $\Omega_h \subset \Omega_{h+1}$,

$$\Omega = \bigcup_{h\in\mathbb{N}} \Omega_h,$$

tali che le restrizioni di μ ad Ω_h siano delle misure, cioè $\mu_h = \mu_{|\Omega_h} \in \mathscr{M}(\Omega_h, \mathbb{R}^p)$.

Chiudiamo questa sezione col seguente risultato.

Proposizione 2.1.9. *Siano $\mu, \nu \in \mathscr{M}(\Omega, \mathbb{R}^p)$ due misure singolari tra loro, $\mu \perp \nu$; allora*

$$|\mu + \nu|(\Omega) = |\mu|(\Omega) + |\nu|(\Omega).$$

Dimostrazione. Chiaramente dobbiamo dimostrare solo la disuguaglianza

$$|\mu + \nu|(\Omega) \geq |\mu|(\Omega) + |\nu|(\Omega).$$

Sia $B \in \mathscr{B}(\Omega)$ un insieme trascurabile rispetto a ν e su cui μ si concentra; allora, se $\{E_i\}_{i\in I\subset\mathbb{N}}$ è una partizione quasi ottimale per $|\mu|(\Omega)$, abbiamo che

$$|\mu|(\Omega) \leq \sum_{i\in I} |\mu(E_i)| + \varepsilon = \sum_{i\in I} |\mu(E_i \cap B)| + \varepsilon = \sum_{i\in I} |\mu + \nu(E_i \cap B)| + \varepsilon.$$

Analogamente, se $\{F_j\}_{j\in J\subset\mathbb{N}}$ è una partizione quasi ottimale per $|\nu|(\Omega)$, allora

$$|\nu|(\Omega) \leq \sum_{j\in J} |\mu(F_j)| + \varepsilon = \sum_{j\in J} |\mu(F_j \setminus B)| + \varepsilon = \sum_{j\in J} |\mu + \nu(F_j \setminus B)| + \varepsilon.$$

In definitiva

$$|\mu|(\Omega) + |\nu|(\Omega) \leq \sum_{i\in I} |\mu + \nu(E_i \cap B)| + \sum_{j\in J} |\mu + \nu(F_j \setminus B)| + 2\varepsilon \leq |\mu + \nu|(\Omega) + 2\varepsilon,$$

da cui per l'arbitrarietà di ε il risultato. $\square$

La norma della variazione totale è in qualche senso una norma troppo forte per i nostri scopi; ad esempio, data $\mu \in \mathscr{M}(\Omega, \mathbb{R}^p)$, allora possiamo definire la convoluzione ponendo

$$f_\varepsilon(x) = \mu * \varrho_\varepsilon(x) = \int_\Omega \varrho_\varepsilon(x - y) d\mu(y);$$

tale funzione è liscia e definisce una misura assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue

$$\mu_\varepsilon = \mathcal{L}^n \llcorner f_\varepsilon.$$

Si nota che però in generale le misure μ_ε non convergono in norma a μ; se ad esempio $\mu = \delta_{x_0}$, $x_0 \in \Omega$, allora $f_\varepsilon(x) = \varrho_\varepsilon(x - x_0)$ e

$$|\mu - \mu_\varepsilon|(\Omega) = |\delta_{x_0}|(\Omega) + \int_\Omega \varrho_\varepsilon(x - x_0) d\mathcal{L}^n(x),$$

e quindi

$$\lim_{\varepsilon\to 0} |\mu - \mu_\varepsilon|(\Omega) = 2.$$

Useremo invece la convergenza debole, grazie alla caratterizzazione derivante dal Teorema di Riesz.

2.1.1 Il Teorema di Riesz e la convergenza debole di misure

Vogliamo qui caratterizzare il preduale dello spazio di Banach $\mathscr{M}(\Omega, \mathbb{R}^p)$; notiamo preliminarlmente che se $\mu \in \mathscr{M}(\Omega, \mathbb{R}^p)$, allora abbiamo ben definito il funzionale lineare e continuo $L_\mu : C_0(\Omega, \mathbb{R}^p)$

$$L_\mu(\varphi) = \int_\Omega \varphi((x) \cdot d\mu(x) = \sum_{i=1}^p \int_\Omega \varphi_i(x) d\mu_i(x).$$

Enunciamo e dimostriamo quindi il Teorema di Riesz, che dimostra che la precedente definizione esaurisce tutti i possibili funzionali lineari e continui su $C_0(\Omega, \mathbb{R}^p)$.

Teorema 2.1.10. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto; allora $C_0(\Omega, \mathbb{R}^p)' = \mathscr{M}(\Omega, \mathbb{R}^p)$.*

Dimostrazione. Fissiamo $L \in C_0(\Omega, \mathbb{R}^p)'$ funzionale lineare e continuo e dividiamo la dimostrazione in vari passi; costruiremo anzitutto una misura positiva λ, grazie alla quale costruiremo la misura vettoriale che rappresenta L.

Definiamo quindi la variazione totale di L ponendo per ogni aperto $A \subset \Omega$

$$\lambda(A) = \sup\{L(\varphi) : \varphi \in C_0(A, \mathbb{R}^p) : \|\varphi\|_\infty \leq 1\}$$

e per ogni $E \in \mathscr{B}(\Omega)$

$$\lambda(E) = \inf\{\lambda(A) : E \subset A \text{ aperto}\}$$

Grazie al Teorema di De Giorgi–Letta (vedi Esercizio 2.3.2), λ risulta essere una misura positiva su $\mathscr{B}(\Omega)$.

Una volta costruita la misura λ, useremo il fatto che $L^1(\Omega\lambda)' = L^\infty(\Omega, \lambda)$ e che il funzionale L può estendersi ad $L^1(\Omega, \lambda, \mathbb{R}^p)'$.

A tal fine definiamo $M : C_0(\Omega, [0, +\infty)) \to [0, +\infty)$ mediante

$$M(\psi) = \sup\{L(\varphi) : \varphi \in C_0(\Omega, \mathbb{R}^p), |\varphi(x)| \leq \psi(x).\}$$

È facile dimostrare che per ogni $\psi_1, \psi_2 \in C_0(\Omega, [0, +\infty))$ e $c \geq 0$

$$\begin{aligned} &M(\psi_1 + \psi_2) = M(\psi_1) + M(\psi_2), \\ &M(c\psi_1) = cM(\psi_1) \\ &M(\psi_1) \leq M(\psi_2) \end{aligned}$$

dove l'ultima disuguaglianza è valida se $\psi_1 \leq \psi_2$. Dimostriamo che

$$M(\psi) \leq \int_\Omega \psi d\lambda, \forall \psi \in C_0(\Omega, [0, +\infty)).$$

Infatti, fissata $\psi \in C_0(\Omega, [0, +\infty))$, definiamo

$$t_0 < 0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < \|\psi\|_\infty < t_N, \qquad t_{h+1} - t_h < \varepsilon, h = 0, \ldots, N-1.$$

Poniamo

$$E_h = \{x \in \Omega : t_{h-1} < \psi(x) \leq t_h\}, \qquad h = 1, \ldots, N;$$

siano quindi $\tilde{A}_h \supset E_h$ aperti tali che

$$\lambda(\tilde{A}_h) < \lambda(E_h) + \frac{\varepsilon}{N}$$

ed infine

$$A_h = \tilde{A}_h \cap \{x \in \Omega : \psi < t_h + \varepsilon\}.$$

Sia quindi $\{\eta_h\}_h$ una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $\{A_h\}_h$; avremo quindi che, posto $\psi_h = \eta_h \psi$

$$M(\psi) = \sum_{h=1}^{N} M(\psi_h) < \sum_{h=1}^{N} (t_h + \varepsilon) M(\eta_h).$$

Dato che per ogni $\varphi \in C_0(\Omega, \mathbb{R}^p)$ con $|\varphi(x)| \leq \eta_h(x)$ abbiamo anche che $\varphi \in C_0(A_h, \mathbb{R}^p)$, se ne deduce che $M(\eta_h) \leq \lambda(A_h)$, e quindi

$$\begin{aligned}
M(\psi) &< \sum_{h=1}^{N} (t_h + \varepsilon) \lambda(A_h) \\
&< \sum_{h=1}^{N} (t_h + \varepsilon) \left(\lambda(E_h) + \frac{\varepsilon}{N} \right) \\
&\leq \int_\Omega \psi d\lambda + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{h=1}^{N} t_{h-1} + 2\varepsilon\lambda(\Omega) + 2\varepsilon^2 \\
&\leq \int_\Omega \psi d\lambda + \varepsilon \|\psi\|_\infty + 2\varepsilon\lambda(\Omega) + 2\varepsilon^2.
\end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di ε segue l'asserto.

A questo punto, se si fissa $e \in \mathbb{S}^{p-1}$, possiamo definire il funzionale $L_e \in C_0(\Omega)'$ ponendo

$$L_e(f) = L(fe);$$

per quanto appena visto, si nota che

$$L_e(f) \leq \sup \{L(\varphi) : \varphi \in C_0(\Omega, \mathbb{R}^p) : |\varphi(x)| \leq |f(x)|\} = M(|f|) \leq \int_\Omega |f| d\lambda.$$

Possiamo quindi estendere $L_e \in L^1(\Omega, \lambda)'$ e quindi esiste una funzione $g_e \in L^\infty(\Omega, \lambda)$ tale che

$$L_e(f) = \int_\Omega f g_e d\lambda.$$

La dimostrazione si completa fissando la base ortonormale standard $e_1, \ldots, e_p \in \mathbb{S}^{p-1}$ in modo da ottenere che, posto $\varphi_i = \varphi \cdot e_i$,

$$L(\varphi) = \sum_{i=1}^{p} L_{e_i}(\varphi_i) = \sum_{i=1}^{p} \int_\Omega \varphi_i g_{e_i} d\lambda;$$

la misura che rappresenta rappresenta L è quindi data da

$$\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_p), \qquad \mu_i = g_{e_i} \lambda.$$

Notiamo che la funzione $g = (g_{e_1}, \ldots, g_{e_p})$ è tale che $|g(x)| = 1$ per λ–q.o. $x \in \Omega$; infatti da una parte osserviamo che per ogni aperto $A \subset \Omega$

$$\begin{aligned}
\lambda(A) &= \sup \left\{ \int_\Omega \varphi \cdot g d\lambda : \varphi \in C_0(\Omega, \mathbb{R}^p), \|\varphi\|_\infty \leq 1 \right\} \\
&\leq \int_A |g| d\lambda.
\end{aligned}$$

Tale disuguaglianza può essere estesa ad ogni $E \in \mathscr{B}(\Omega)$; in particolare possiamo usare l'insieme $E_t = \{x \in \Omega : |g(x)| \leq t\}$ con $t < 1$ per trovare che

$$\lambda(E_t) \leq \int_{E_t} |g| d\lambda \leq t\lambda(E_t),$$

da cui $\lambda(E_t) = 0$ per ogni $t < 1$. Quindi $|g(x)| \geq 1$ per λ–q.o. $x \in \Omega$; per ogni aperto $A \subset \Omega$ abbiamo anche che la funzione

$$u = \frac{g}{|g|}\chi_{\{|g|>0\}}$$

appartiene ad $L^1(A, \lambda, \mathbb{R}^p)$; grazie alla densità di $C_0(A, \mathbb{R}^p)$ in $L^1(A, \lambda, \mathbb{R}^p)$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\varphi_\varepsilon \in C_0(\Omega, \mathbb{R}^p)$ tale che $\|u - \varphi_\varepsilon\|_{L^1(A,\lambda,\mathbb{R}^p)} < \varepsilon$; dato che $|u(x)| = 1$ per λ–q.o. $x \in A$, possiamo anche supporre che $|\varphi_\varepsilon(x)| \leq 1$ e quindi

$$\begin{aligned} \lambda(A) &\geq \int_A \varphi_\varepsilon \cdot g d\lambda \\ &= \int_A u \cdot g d\lambda + \int_A (\varphi_\varepsilon - u) \cdot g d\lambda \\ &\geq \int_A |g| d\lambda - \varepsilon \|g\|_{L^\infty(\Omega,\lambda)} \end{aligned}$$

da cui l'uguaglianza

$$\lambda(A) = \int_A |g| d\lambda,$$

per ogni aperto A, e quindi $|g(x)| = 1$ per λ–q.o. $x \in \Omega$. $\square$

Grazie alla dualità individuata dal Teorema di Riesz, useremo la convergenza debole* delle misure come convergenza privilegiata; con questo intendiamo che una successione di misure $(\mu_h)_h$ converge debole ad una misura μ se

$$\lim_{h \to +\infty} \int_\Omega \varphi \cdot d\mu_h = \int_\Omega \varphi \cdot \mu, \qquad \forall \varphi \in C_0(\Omega, \mathbb{R}^p).$$

Enunciamo il seguente Lemma tecnico che ci servirà in seguito.

Lemma 2.1.11. *Sia $u : \Omega \to [c, +\infty]$, $c \in \mathbb{R}$, una funzione non indenticamente uguale a $+\infty$; allora la funzione*

$$u_t(x) = \inf\{u(y) + t|x - y| : y \in \Omega\}$$

è una funzione t–Lipschitziana, definita in tutto $\mathbb{R}^n$, tale che $u_t \leq u$ su Ω e $u_t(x) \nearrow u(x)$ per $t \to +\infty$ se x è un punto di semicontinuità inferiore per u.

Dimostrazione. È facile dimostrare che u_t è t–Lipschitziana e che la mappa $t \mapsto u_t(x)$ è monotona crescente per ogni x e che $u_t(x) \leq u(x)$ per ogni $x \in \Omega$. Inoltre $u_t(x) < +\infty$ per ogni x; sia quindi $x_t \in \Omega$ tale che

$$u(x_t) + t|x - x_y| < u_t(x) + 2^{-t};$$

se $u_t(x) \to +\infty$, allora non c'è nulla da dimostrare, altrimenti se $u_t(x) \nearrow \alpha \in \mathbb{R}$, se ne deduce che $x_t \to x$. Quindi per la semicontinuità inferiore di u in x,

$$u(x) \leq \liminf_{t \to +\infty} u(x_t) \leq \liminf_{t \to +\infty}(u_t(x) + 2^{-t}) = \alpha;$$

dato che $\alpha \leq u(x)$, il Lemma è completato. $\square$

Raccogliamo nella seguente proposizione alcune proprietà della convergenza debole che ci serviranno in seguito.

Proposizione 2.1.12. *Siano* $\mu_h, \mu \in \mathscr{M}(\Omega, \mathbb{R}^p)$, $\lambda_h, \lambda \in \mathscr{M}(\Omega, [0, +\infty))$ *misure con*

$$\mu_h \rightharpoonup \mu, \qquad \lambda_h \rightharpoonup \lambda.$$

Allora:

1. *se* $u : \Omega \to [0, +\infty]$ *è una funzione semicontinua inferiormente,*
$$\int_\Omega u d\lambda \leq \liminf_{h\to+\infty} \int_\Omega u d\lambda_h;$$

2. *se* $v : \Omega \to [0, +\infty)$ *è una funzione semicontinua superiormente ed a supporto compatto, allora*
$$\int_\Omega v d\lambda \geq \limsup_{h\to+\infty} \int_\Omega v d\lambda_h;$$

3. *se* $\lambda_h = |\mu_h|$, *allora* $\lambda \geq |\mu|$;

4. *se* $\lambda_h = |\mu_h|$, *allora* $\lambda \geq |\mu|$. *Inoltre, se* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *è una funzione limitata con supporto compatto e tale l'insieme delle discontinuità di* u *sia* λ*–trascurabile, allora*
$$\int_\Omega u d\mu = \lim_{h\to+\infty} u d\mu_h.$$

Dimostrazione. 1. Fissata u, consideriamo l'approssimazione Lipschitziana u_t del Lemma 2.1.11; sia quindi $\varphi \in C_c(\Omega)$ tale che $0 \leq \varphi \leq 1$. Allora
$$\int_\Omega \varphi u_t d\lambda = \lim_{h\to+\infty} \int_\Omega \varphi u_t d\lambda_h \leq \liminf_{h\to+\infty} \int_\Omega u_t d\lambda_h \leq \liminf_{h\to+\infty} \int_\Omega u d\lambda_h.$$
Passando all'estremo superiore su φ e poi al limite per $t \to +\infty$, grazie al Teorema di convergenza monotona si ottiene che
$$\int_\Omega u d\lambda \leq \liminf_{h\to+\infty} \int_\Omega u d\lambda_h.$$

2. La modifica rispetto al punto precedente si fa considerando le approssimazioni
$$v_t(x) = \sup\{v(y) - t|x - y| : y \in \Omega\}.$$
Si nota anzitutto che v ammette massimo dato che è semicontinua superiore ed a supporto compatto; inoltre anche v_t ha supporto compatto, è limitata, $v_t(x) \geq v(x)$ per ogni $x \in \Omega$ e $v_t(x) \searrow v(x)$ per $t \to +\infty$. Dato che v ha supporto relativamente in Ω, allora per t sufficientemente grande, anche v_t ha supporto relativamente compatto in Ω e quindi $v_t \in C_c(\Omega)$; quindi
$$\int_\Omega v_t d\lambda = \lim_{h\to+\infty} \int_\Omega v_t d\lambda_h \geq \limsup_{h\to+\infty} \int_\Omega v d\lambda_h.$$
Di nuovo per convergenza monotona otteniamo il risultato.

3. Questo punto segue dalle proprietà delle convergenze deboli e dalla semicontinuità della norma rispetto alla convergenza debole; infatti, se $\mu_h \rightharpoonup \mu$ in $\mathscr{M}(\Omega,\mathbb{R}^p)$, allora per ogni aperto $A\subset\Omega$, le restrizioni ad A convergono debole in $\mathscr{M}(A,\mathbb{R}^p)$. In particolare, se si fissa un aperto $A\subset\Omega$ e si definisce l'aperto

$$A_r = \{x\in A : \mathrm{dist}(x,\partial A) > r\},$$

allora possiamo trovare una funzione $\varphi\in C_0(\Omega)$ tale che $\chi_{A_r}\le\varphi\le\chi_A$ e quindi

$$|\mu|(A_r)\le\liminf_{h\to+\infty}|\mu_h|(A_r)\le\liminf_{h\to+\infty}\int_\Omega\varphi d|\mu_h| = \int_\Omega\varphi d\lambda\le\lambda(A).$$

Passando al limite $r\to 0$ si ottiene quindi che $|\mu|(A)\le\lambda(A)$ per ogni aperto $A\subset\Omega$, da cui l'asserto.

4. Fissata u limitata, si considerano le due approssimazioni Lipschitziane $u_t\le u\le v_t$ che convergono ad u in tutti i punti di continuità di u. Denotiamo con $D_u\in\mathscr{B}(\Omega)$ l'insieme dei punti di dicontinuità di u

Supponiamo prima di tutto che le μ_h siano misure positive; in tal caso $|\mu|=\lambda$ e quindi

$$\lim_{t\to+\infty}\int_\Omega(v_t-u_t)d\mu = \lim_{t\to+\infty}\int_{\Omega\setminus D_u}(v_t-u_t)d\mu = 0.$$

Dalle disuguaglianze

$$\begin{aligned}\int_\Omega u_t d\mu = \lim_{h\to+\infty}\int_\Omega u_t d\mu_h &\le \liminf_{h\to+\infty}\int_\Omega u d\mu_h \le \limsup_{h\to+\infty}\int_\Omega u d\mu_h\\ &\le \lim_{h\to+\infty}\int_\Omega v_t d\mu_h = \int_\Omega v_t d\mu,\end{aligned}$$

passando al limite per $t\to+\infty$ si deduce che

$$\lim_{h\to+\infty}\int_\Omega u d\mu_h = \int_\Omega u d\mu.$$

Nel caso di misura con segno, si scrive

$$\mu_h = \mu_h^+ - \mu_h^-;$$

dato che $\mu_h^+\le|\mu_h|$, se $|\mu_h|\rightharpoonup\lambda$, allora le quantità $|\mu_h|(\Omega)$ sono equilimitate, e quindi a meno di sottosuccessioni, anche le μ_h^+ sono convergenti, cioè $\mu_h^+\rightharpoonup\nu^+$ per una qualche misura positiva ν^+. Questo implica che anche le μ_h^- convergono debolmente, sempre a meno di sottosuccessioni, ad una misura positiva ν^-; per l'unicità del limite debole, si deve avere che

$$\mu = \nu^+ - \nu^-,$$

e quindi $|\mu| = \nu^+ + \nu^- \ge \nu^+$. da cui il fatto che $\lambda\ge\nu^+$. In particolare ne deduciamo che $\nu^+(D_u)=0$; quindi

$$\lim_{h\to+\infty}\int_\Omega u d\mu_h^+ = \int_\Omega u d\nu^+;$$

per lo stesso motivo

$$\lim_{h\to+\infty}\int_\Omega u d\mu_h^- = \int_\Omega u d\nu^-,$$

quindi per differenza

$$\lim_{h\to+\infty}\int_\Omega u d\mu_h = \int_\Omega u d\mu.$$

Il caso vettoriale si ricava ragionando componente per componente.

□

Corollario 2.1.13. *Siano $\mu_h, \mu \in \mathscr{M}(\Omega, \mathbb{R}^p)$ misure con*

$$\mu_h \rightharpoonup \mu.$$

Allora:

1. *per ogni aperto $A \subset \Omega$,*
$$|\mu|(A) \leq \liminf_{h\to+\infty} |\mu_h|(A);$$

2. *per ogni compatto $K \subset \Omega$,*
$$|\mu|(K) \geq \limsup_{h\to+\infty} |\mu_h|(K);$$

3. *se $|\mu_h| \rightharpoonup \lambda$, allora $\lambda \geq |\mu|$ e se E è un insieme con $\lambda(\partial E) = 0$, allora*
$$\mu(E) = \lim_{h\to+\infty} \mu_h(E).$$

Dimostrazione. Le varie proprietà seguono dal Teorema 2.1.12 con le funzioni $u = \chi_A$ (semicontinua inferiormente se A aperto), $v = \chi_K$ (semicontinua superiormente se K compatto) e $u = \chi_E$ che ha discontinuità in ∂E, quindi λ–trascurabili se $\lambda(\partial E) = 0$. □

2.1.2 Proprietà delle convoluzioni

In questa sezione vediamo alcune proprietà delle convoluzioni

$$\mu_\varepsilon = f_\varepsilon \mathcal{L}^n, \qquad f_\varepsilon = \mu * \varrho_\varepsilon.$$

Notiamo anzitutto che per ogni $\varphi \in C_c(\Omega, \mathbb{R}^p)$, se $\varepsilon < \mathrm{dist}(\mathrm{spt}(\varphi), \partial\Omega)$, allora

$$\int_\Omega \varphi(x) d\mu_\varepsilon(x) = \int_\Omega \varphi(x) f_\varepsilon(x) dx = \int_\Omega\int_\Omega \varphi(x)\varrho_\varepsilon(x-y) d\mu(y) dx = \int_\Omega \varphi_\varepsilon(y) d\mu(y).$$

Se ne deduce quindi, grazie alla densità di $C_c(\Omega, \mathbb{R}^p)$ in $C_0(\Omega, \mathbb{R}^p)$, che $|\mu_\varepsilon|(\Omega) = |\mu|(\Omega)$. In più, da quanto visto, dato che φ_ε converge uniformemente a $\varphi \in C_c(\Omega, \mathbb{R}^p)$, allora

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \varphi d\mu_\varepsilon = \int_\Omega \varphi d\mu, \qquad \forall \varphi \in C_c(\Omega, \mathbb{R}^p).$$

Ancora per la densità di $C_c(\Omega, \mathbb{R}^p)$, si deduce che $\mu_\varepsilon \rightharpoonup \mu$.

2.2 Il Teorema di Radon-Nikodym e di Besicovitch

Scopo di questa sezione è la dimostrazione dei Teoremi di Radon-Nikodym e del Teorema di derivazione per misure di Besicovitch. Iniziamo col seguente risultato, la cui dimostrazione abbiamo preso dal libro Bogachev[3]. Ricordiamo che un insieme E viene detto positivo per una misura μ se

$$\mu(F) \geq 0, \qquad \forall F \subset E;$$

diremo invece che E è un insieme negativo se

$$\mu(F) \leq 0, \qquad \forall F \subset E.$$

Proposizione 2.2.1 (Decomposizione di Hahn)**.** *Sia $\mu \in \mathscr{M}(\Omega)$ una misura scalare; esiste allora $B \in \mathscr{B}(\Omega)$ tale che*

$$\mu(E) \geq 0, \qquad \forall E \subset B,$$

mentre

$$\mu(E) \leq 0, \qquad \forall E \subset \Omega \setminus B.$$

Le due misure $\mu^+ = \mu \llcorner B$ e $\mu^- = -\mu \llcorner (\Omega \setminus B)$ sono quindi due misure positive con

$$\mu = \mu^+ - \mu^-, \qquad |\mu| = \mu^+ + \mu^-.$$

Dimostrazione. Si pone

$$\alpha = \inf\left\{\mu(E) : E \in \mathscr{B}(\Omega) \text{ è un insieme positivo}\right\} > -|\mu|(\Omega);$$

e

$$\beta = \sup\left\{\mu(E) : E \in \mathscr{B}(\Omega) \text{ è un insieme positivo}\right\} < |\mu|(\Omega)$$

chiaramente il caso interessante è $\alpha < 0 < \beta$, altrimenti o μ oppure $-\mu$ è una misura positiva. Si considera una successione $\{E_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ di insiemi per cui positivi per μ tale che

$$\lim_{h\to+\infty} \mu(E_h) = \beta.$$

Poniamo quindi

$$B = \bigcup_{h\in\mathbb{N}} E_h$$

È facile vedere che $\mu(E) > 0$ per ogni $E \subset B$ ed inoltre $\mu(B) = \beta$. Resta da mostrare che $\Omega \setminus B$ è un insieme negativo; ma se esistesse $E \subset \Omega \setminus B$ con $\mu(E) > 0$: E non può essere un insieme positivo perchè altrimenti avremmo che

$$\mu(E \cup B) = \mu(E) + \mu(B) > \beta,$$

che contraddice la massimalità di β. Esistono quindi sottoinsiemi $F \subset E$ con $\mu(F) < 0$. Definiamo quindi

$$\alpha_1 = \inf\{\mu(F) : F \subset E\} < 0$$

e fissiamo $F_1 \subset E$ tale $\mu(F_1) \leq \alpha_1/2$. Si osservi che $\mu(E \setminus F_1) > \mu(E) > 0$ e quindi ancora $E \setminus F_1$ non può essere un insieme positivo altrimenti contraddirremmo la massimalità di β. Iteriamo quindi il processo definendo

$$\alpha_h = \inf\left\{\mu(F) : F \subset E \setminus \bigcup_{i=1}^{h-1} F_i\right\} < 0$$

e F_h tale che $\mu(F_h) \leq \alpha_h/2$. È chiaro che $\alpha_h \to 0$, altrimenti avremmo che

$$|\mu|\left(\bigsqcup_{h=1}^{\infty} F_h\right) = -\sum_{h=1}^{\infty} \mu(F_h) = +\infty,$$

contraddicendo la finitezza di μ. Si noti che l'insieme

$$F = E \setminus \bigsqcup_{h=1}^{\infty} F_h$$

ha la proprietà che $\mu(F) > 0$ ed è un insieme positivo; infatti, se esistesse $C \subset F$ con $\mu(C) < 0$, allora esisterebbe $h \in \mathbb{N}$ per chi $\mu(C) < \alpha_h$, contraddicendo la definizione di α_h dato che

$$C \subset E \setminus \bigsqcup_{i=1}^{h} F_i.$$

. □

Grazie a questo risultato, data $\mu \in \mathscr{M}(\Omega, \mathbb{R})$, allora

$$\mu = |\mu| \llcorner f, \qquad f = \chi_B - \chi_{\Omega\setminus B};$$

grazie a questo fatto, possiamo passare alla dimostrazione del seguente teorema.

Teorema 2.2.2 (Radon–Nikodym)**.** *Siano $\mu, \nu \in \mathscr{M}(\Omega, \mathbb{R})$ con $\mu \ll \nu$; allora esiste $f \in L^1(\Omega, |\nu|)$ tale che $\mu = \nu \llcorner f$.*

Dimostrazione. Grazie alla decomposizione di Hahn, possiamo supporre $\mu, \nu \in \mathscr{M}(\Omega)$; definiamo quindi la famiglia

$$\mathscr{F} = \{f \in L^1(\Omega, \nu, [0, +\infty]) : \int_E f d\nu \leq \mu(E), \forall E \in \mathscr{B}(\Omega)\}.$$

Posto

$$M = \sup_{f \in \mathscr{F}} \int_X f d\nu,$$

dimostriamo che tale estremo superiore è un massimo; se $(f_h)_h$ è una successione massimizzante, possiamo renderla monotona crescente ponendo

$$g_h(x) = \max_{i=1,\dots,h} f_i(x).$$

Notiamo che $g_h \in \mathscr{F}$ in quanto, se denotiamo con

$$F_k^h = \{g_h = f_k\}, \quad E_1^h = F_1^h, E_k^h = F_k^h \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} F_i^h, \qquad k = 1, \dots, h,$$

allora

$$\int_E g d\nu = \sum_{k=1}^{h} \int_{E \cap E_k^h} f_k d\nu \leq \sum_{k=1}^{h} \mu(E \cap E_k^h) = \mu(E).$$

Per convergenza monotona, posto $f = \sup_h g_h$ è ancora una funzione con $f \in \mathscr{F}$ con

$$\int_\Omega f d\nu = M.$$

Dimostriamo quindi che per ogni $E \in \mathscr{B}(\Omega)$,

$$\mu(E) = \int_E f d\nu.$$

Definiamo quindi la misura non negativa

$$\lambda(E) = \mu(E) - \int_E f d\nu;$$

è chiaro che $\lambda \ll \nu$; se λ non è nulla, allora esiste E_0 tale che $\lambda(E_0) > 0$. Se definiamo, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la misura

$$\lambda_n = \lambda - \nu \llcorner \frac{1}{n},$$

possiamo applicare la decomposizione di Hahn

$$\lambda_n = \lambda_n^+ \llcorner B_n - \lambda_n^- \llcorner (\Omega \setminus B_n)$$

a tale misura. Siccome

$$\lambda_n(E_0) = \lambda(E_0) - \frac{1}{n}\nu(E_0),$$

esiste $n \in \mathbb{N}$ per cui $\lambda_n(E) > 0$, e quindi $\lambda_n(B_n) > 0$. Se ne deduce che anche $\nu(B_n) > 0$. Ma allora possiamo definire

$$h = f + \frac{1}{n}\chi_{B_n}$$

per ottenere che per ogni $E \in \mathscr{B}(\Omega)$

$$\begin{aligned}\int_E h d\nu = \int_E f d\nu + \frac{1}{n}\nu(E \cap B_n) &\leq \int_E f d\nu + \lambda(E \cap B_n) \\ &= \int_{E\setminus B_n} f d\nu + \lambda(E \cap B_n) + \int_{E\cap B_n} f d\nu \leq \int_{E\setminus B_n} f d\nu + \mu(E \cap B_n) \leq \mu(E),\end{aligned}$$

cioè $h \in \mathscr{F}$, che contraddice la massimalità di f. $\square$

Osservazione 2.2.3. Siccome data una misura vettoriale $\mu \in \mathscr{M}(\Omega, \mathbb{R}^p)$, $\mu \ll |\mu|$, se ne deduce che, scritta $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_p)$, allora $\mu_i = f_i|\mu|$. Otteniamo quindi la decomposizione polare di μ

$$\mu = |\mu| \llcorner \sigma_\mu,$$

dove $\sigma_\mu \in L^1(\Omega, |\mu|, \mathbb{R}^p)$ è la mappa $\sigma_{\mu,i} = f_i$. Dato che per ogni aperto $A \subset \Omega$

$$|\mu|(A) = \int_A |\sigma_\mu| d|\mu|,$$

se ne deduce che $|\sigma_\mu| = 1$ $|\mu|$–q.o.

Osserviamo infine che il Teorema di Radon–Nikodym si può generalizzare a misure $\mu \in \mathscr{M}(\Omega, \mathbb{R}^p)$ e $\nu \in \mathscr{M}(\Omega, \mathbb{R}^q)$; infatti se $\mu \ll \nu$, allora esiste $f \in L^1(\Omega, |\nu|, \mathbb{R}^{q\times p})$ tale che

$$\mu = \nu \llcorner f;$$

basta applicare il Teorema 2.2.2 alle misure μ_i, $i = 1, \dots, p$ e ν_j, $j = 1, \dots, q$, per ottenere funzioni $f_{i,j} \in L^1(\Omega, |\nu|)$ tali che $\mu_i = \nu_j \llcorner f_{i,j}$.

Corollario 2.2.4. *Date due misure $\mu \in \mathscr{M}(\Omega, \mathbb{R}^p)$ e $\nu \in \mathscr{M}(\Omega, \mathbb{R}^q)$, allora esistono $f \in L^1(\Omega, |\nu|, \mathbb{R})$ e $\mu_0 \in \mathscr{M}(\Omega, \mathbb{R}^p)$ con $\mu_0 \perp \nu$ tali che*

$$\mu = \nu \llcorner f + \mu_0.$$

Dimostrazione. Iniziamo col caso scalare $\mu, \nu \in \mathscr{M}(\Omega, \mathbb{R})$; si applica il Teorema 2.2.2 con la misura μ, ν e $\lambda = |\mu| + |\nu|$, ed esistono quindi due funzioni $f_\mu, f_\nu \in L^1(\Omega, \lambda)$ tali che

$$\mu = \lambda \llcorner f_\mu, \qquad \nu = \lambda \llcorner f_\nu.$$

Definiamo quindi

$$B = \{x \in \Omega : f_\nu(x) \neq 0\};$$

su B è ben definita la funzione

$$f(x) = \frac{f_\mu(x)}{f_\nu(x)}$$

e la misura

$$\mu_0 = \mu \llcorner (\Omega \setminus B)$$

è singolare rispetto a ν. Il risultato segue quindi estendendo $f = 0$ su $\Omega \setminus B$ e notando che per ogni $E \in \mathscr{B}(\Omega)$

$$\begin{aligned} \mu(E) =& \mu(E \cap B) + \mu(E \setminus B) = \int_{E \cap B} f_\mu d\lambda + \mu_0(E) \\ =& \int_{E \cap B} \frac{f_\mu}{f_\nu} f_\nu d\lambda + \mu_0(E) = \int_{E \cap B} f d\nu + \mu_0(E) \\ =& \int_E f d\nu + \mu_0(E) = \nu \llcorner f(E) + \mu_0(E). \end{aligned}$$

Il caso generale si ottiene ragionando componente per componente. □

2.3 Esercizi

Esercizio 2.3.1. Data $\mu \in \mathscr{M}(\Omega)$ e $f \in L^1(\Omega, \mu)$, dimostrare che

$$|\mu \llcorner f| = \mu \llcorner |f|.$$

Generalizzare quindi il risultato a misure μ vettoriali e funzioni f a valori matrice.

Esercizio 2.3.2. Dimostrare il Teorema di De Giorgi–Letta:

Teorema 2.3.1 (De Giorgi–Letta)**.** *Sia X uno spazio metrico e sia $\mathscr{A}$ la collezione degli insiemi aperti di X. Se $\lambda : \mathscr{A} \to [0, +\infty]$ è una funzione di insieme tale che:*

1. *$\lambda(\emptyset) = 0$;*
2. *se $A_1, A_1 \in \mathscr{A}$, allora*
$$\lambda(A_1 \cup A_2) \leq \lambda(A_1) + \lambda(A_2);$$
3. *se $A_1, A_2 \in \mathscr{A}$ con $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, allora*
$$\lambda(A_1 \cup A_2) \geq \lambda(A_1) + \lambda(A_2);$$

4. per ogni $A \in \mathscr{A}$,

$$\lambda(A) = \sup_{B \Subset A} \lambda(B).$$

Allora l'estensione di λ *ad ogni insieme* $E \subset X$ *data da*

$$\lambda(E) = \inf\{\lambda(A) : E \subset A, A \in \mathscr{A}\}$$

definisce una misura esterna e la sua restrizione a $\mathscr{B}(X)$ *definisce una misura.*

(Sugg: Basta dimostrare le σ–subadditività, in quanto la proprietà 3. mostra che a λ può applicarsi il Criterio di Caratheodory).

Esercizio 2.3.3. Dimostrare che se $\mu_h, \mu \in \mathscr{M}(\Omega, \mathbb{R}^p)$ sono tali che $\mu_h \rightharpoonup \mu$, allora

$$\sup_{h \in \mathbb{N}} |\mu_h|(\Omega) < +\infty.$$

Esercizio 2.3.4. Dimostrare che se $\mu_h \in \mathscr{M}(\Omega, \mathbb{R}^p)$ sono misure tali che

$$\sup_{h \in \mathbb{N}} |\mu_h|(\Omega) < +\infty,$$

allora esiste una sottosuccessione estratta μ_{h_k} ed una misura $\mu \in \mathscr{M}(\Omega, \mathbb{R}^p)$ tali che $\mu_{h_k} \rightharpoonup \mu$.

Appendice A

Spazi topologici e metrici

Raccogliamo in questo capitolo alcune proprietà degli spazi topologici e metrici che ci serviranno nel seguito.

A.1 Topologia, continuità e semicontinuità

Sia $(X, \mathscr{T})$ uno spazio topologico; definiamo $F : X \to \bar{\mathbb{R}}$ la funzione

$$F(u) = \sup_{f \in \mathcal{F}} f(u),$$

dove $\mathcal{F}$ è una famiglia di funzioni $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$.

Teorema A.1.1. *Se le funzioni $f \in \mathcal{F}$ sono continue, allora la funzione F è semicontinuta inferiormente.*

Bibliografia

[1] Luigi Ambrosio. *Corso introduttivo alla teoria geometrica della misura ed alle superfici minime*. Appunti dei Corsi Tenuti da Docenti della Scuola. [Notes of Courses Given by Teachers at the School]. Scuola Normale Superiore, Pisa, 1997.

[2] Luigi Ambrosio, Nicola Fusco, and Diego Pallara. *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2000.

[3] Vladimir Bogachev. *Measure Theory: Vol.I.* Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, 2007.

[4] Richard Darst. The Hausdorff dimension of the nondifferentiability set of the Cantor function is $[\ln(2)/\ln(3)]^2$. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 119(1):105–108, 1993.

[5] Ennio De Giorgi. Su una teoria generale della misura $(r-1)$-dimensionale in uno spazio ad r dimensioni. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 36:191–213, 1954.

[6] Ennio De Giorgi. Nuovi teoremi relativi alle misure $(r-1)$-dimensionali in uno spazio ad r dimensioni. *Ricerche Mat.*, 4:95–113, 1955.

[7] Ennio De Giorgi. *Selected papers*. Springer Collected Works in Mathematics. Springer, Heidelberg, 2006. [Author name on title page: Ennio Giorgi], Edited by Luigi Ambrosio, Gianni Dal Maso, Marco Forti, Mario Miranda and Sergio Spagnolo.

[8] Francesco Maggi. *Sets of finite perimeter and geometric variational problems*, volume 135 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2012. An introduction to geometric measure theory.

[9] Frigyes Riesz and Béla Sz.-Nagy. *Functional analysis*. Dover Books on Advanced Mathematics. Dover Publications, Inc., New York, 1990. Translated from the second French edition by Leo F. Boron, Reprint of the 1955 original.