UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FERRARA

Analisi Infinito-Dimensionale

Michele Miranda
Dipartimento di Matematica e Informatica
via Machiavelli 35, I-44121 Ferrara
e–mail: michele.miranda@unife.it

a.a. 2013-2014

Indice

Capitolo 1

Lo spazio di Wiener

In questo capitolo ci occuperemo dello spazio di Wiener classici;

1.1 Costruzione della misura di Wiener

Premesso ció, su $\Omega = \mathbb{R}^{[0,1]}$ si definiscono gli insiemi cilindrici ω come segue: si fissa un numero finito h di istanti $F[0,1]$, $F = \{t_1, t_2, \ldots, t_h\}$ con $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leq 1$ e indichiamo con $\pi_F : \Omega \to \mathbb{R}^F$ la proiezione

$$\pi_F(\omega) = (\omega(t_1), \ldots, \omega(t_n)).$$

Si definisce quindi per ogni $B \in \sigma_F = \sigma(\pi_F^{-1}(\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)))$, $B = \pi_F^{-1}(\tilde{B})$, la misura

$$\mu_F(B) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n t_1(t_2 - t_1) \cdot \ldots \cdot (t_n - t_{n-1})}} \int_{\tilde{B}} \exp\big(- \frac{x_1^2}{2t_1} + \ldots - \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{2(t_n - t_{n-1})}\big) dx.$$

Introduciamo un pò di notazione; dati due insiemi finiti $F \subset G \subset [0,1]$, denotiamo con $\pi_{GF} : \mathbb{R}^G \to \mathbb{R}^F$ la proiezione naturale La famiglia di misure così definite al variare di $F \subset [0,1]$ insieme finito soddisfa le seguenti;

Possiamo quindi applicare il Teorema di Kolmogorov **??**

Capitolo 2

Spazi di Wiener astratti

In questo capitolo ci oppuremo della definizione e della descrizione delle prime proprietà degli spazi di Wiener astratti.

Iniziamo col fissare alcune notazioni; denoteremo con $\mathcal{E}(X)$ la σ–algebra generata dagli insiemi cilindrici, mentre con $\mathscr{B}(X)$ la σ–algebra degli insiemi Boreliani. Se X è separabile, le due σ–algebre coincidono.

Con spazio di Wiener astratto si intende una terna (X, H, γ) dove X è uno spazio di Banach (per noi separabile), H uno spazio di Hilbert e γ una misura Gaussiana centrata. Per misura Gaussiana centrata si intende una misura di Radon su X con la proprietà che per ogni $x^* \in X^*$, la legge $x^*_{\#}\gamma$ è Gaussiana su $\mathbb{R}$.

Una misura è univocamente determinata dalla sua funzione caratteristica, o trasformata di Fourier;

$$\hat{\gamma}(x^*) = \phi_\gamma(x^*) := \mathbb{E}[e^{ix^*}] = \int_X e^{ix^*(x)} d\gamma(x), \qquad x^* \in X^*.$$

Abbiamo raccolto in appendice alcune proprietà della funzione caratteristica che ci sono utili in questo corso. Ricordiamo qui il seguente risultato.

Teorema 2.1 *Una misura γ su uno spazio di Banach X è Gaussiana se e solo se esistono $L : X^* \to \mathbb{R}$ mappa lineare e $B : X^* \times X^* \to \mathbb{R}$ bilineare simmetrica tale che $x^* \to B(x^*, x^*)$ forma quadratica non–negativa tali che*

$$\hat{\gamma}(x^*) = e^{iL(x^*) - \frac{1}{2}B(x^*, x^*)}.$$

Dimostrazione. Supponiamo γ sia Gaussiana (non necessariamente centrata); quest significa che ogni $x^* \in X^*$ eistono $a_x\gamma(x^*)$, $\sigma(x^*) \in \mathbb{R}$ tali che

$$x^*_{\#}\gamma = \mathscr{N}(a_\gamma(x^*), \sigma(x^*)). \tag{2.1}$$

In particolare, se ne ricava che

$$\int_X |x^*(x)|^2 d\gamma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma(x^*)}} \int_{\mathbb{R}} t^2 e^{-\frac{|t - a_\gamma(x^*)|^2}{2\sigma(x^*)}} dt < +\infty,$$

e quindi $x^* \in L^2(X, \gamma)$. Possiamo quindi definire L e B

$$L(x^*) := \int_X x^*(x) d\gamma(x) = a_\gamma(x^*), \qquad x^* \in X^*,$$

$$B(x^*, y^*) := \int_X \big(x^*(x) - L(x^*)\big)\big(y^*(x) - L(y^*)\big) d\gamma(x), \qquad x^*, y^* \in X^*.$$

In questo modo, le richieste su L e B sono soddisfatte e (2.1) segue semplicemente notando che $B(x^*, x^*) = \sigma(x^*)$.

Viceversa, supponiamo γ soddisfi (2.1); allora la funzione caratteristica di $\mu_{x^*} = x^*_{\#}\gamma$, grazie alla definizione di legge, è data da

$$\hat{\mu}_{x^*}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi t} d\mu_{x^*}(t) = \int_X e^{i\xi x^*(x)} d\gamma(x) = e^{iL(\xi x^*) - \frac{1}{2}B(\xi x^*, \xi x^*)} = e^{i\xi L(x^*) - \frac{\xi^*}{2}B(x^*, x^*)},$$

che equivale alla richiesta che μ_{x^*} sia Gaussiana di media $L(x^*)$ e varianza $B(x^*, x^*)$. □

Notiamo che la misura è centrata se e solo se $L \equiv 0$, cioè $a_\gamma(x^*) = 0$ per ogni $x^* \in X^*$. Dalle proprietà della funzione caratteristica, la misura è centrata se e solo se

$$\gamma(A) = \gamma(-A), \qquad \forall A \in \mathscr{B}(X).$$

Infatti, la trasformata di Fourier della misura $\mu(A) = \gamma(-A)$, che è la misura immagine $\mu = T_{\#}\gamma$ tramite la mappa lineare $T : X \to X$, $T(x) = -x$, è data da

$$\hat{\mu}(x^*) = \int_X e^{ix^*(x)} d\mu(x) = \int_X e^{-ix^*(x)} d\gamma(x) = \overline{\hat{\gamma}(x^*)}.$$

Avremo quindi che $\mu = \gamma$ se e solo se $L \equiv 0$, grazie al fatto che due misure coincidono se e solo le funzioni caratteristiche coincidono.

Notiamo tra l'altro che se γ_1 e γ_2 sono due misure Gaussiane su X, allora la misura $\gamma_1 \otimes \gamma_2$ è Gaussiana su $X \otimes X$ e

$$B_{\gamma_1 \otimes \gamma_2}(x^* \otimes y^*) = B_{\gamma_1}(x^*, x^*) + B_{\gamma_2}(y^*, y^*).$$

Infatti, prendendo la funzione caratteristica sugli elementi della forma $x^* \otimes y^*$, $x^*, y^* \in X^*$, si ottiene

$$\begin{aligned}\widehat{\gamma_1 \otimes \gamma_2}(x^* \otimes y^*) &= \int_{X \times X} e^{ix^* \otimes y^*(x,y)} d\gamma_1 \otimes \gamma_2(x, y) = \int_{X \times X} e^{ix^*(x)} e^{iy^*(y)} d\gamma_1 \otimes \gamma_2(x, y) \\ &= \int_X e^{ix^*(x)} d\gamma_1(x) \int_X e^{iy^*(y)} d\gamma_2(y) = e^{-\frac{1}{2}(B_{\gamma_1}(x^*, x^*) + B_{\gamma_2}(y^*, y^*))}.\end{aligned}$$

Lemma 2.2 *Dato X spazio di Banach separabile, la misura γ è Gaussiana centrata se e solo per ogni ϑ, la legge di $\gamma \otimes \gamma$ mediante l'applicazione $T_\vartheta : X \times X \to X$,*

$$T_\vartheta(x, y) = \sin\vartheta x + \cos\vartheta y$$

coincide con γ, cioè $T_{\vartheta\#}\gamma \otimes \gamma = \gamma$.

Inoltre, se definiamo $R_\vartheta : X \times X \to X \times X$,

$$R_\vartheta(x, y) = (\cos\vartheta x + \operatorname{sen}\vartheta y, -\operatorname{sen}\vartheta x + \cos\vartheta y),$$

allora la legge di R_ϑ coincide con $\gamma \otimes \gamma$.

Dimostrazione. È sufficiente considerare la funzione caratteristica della misura $\mu = T_{\vartheta\#}\gamma \otimes \gamma$

$$\hat{\mu}(x^*) = \int_X e^{ix^*(x)} d\mu(x) = \int_{X \times X} e^{i \sin\vartheta x^*(x) + \cos\vartheta x^*(y)} d\gamma \otimes \gamma(x, y).$$

Quindi se γ è Gaussiana, anche $\gamma \otimes \gamma$ è Gaussiana □

Si potrebbe anche dimostrare che le precedenti condizioni definiscono precisamente le misure Gaussiane, nel senso che se γ è Gaussiana se e solo se le precedenti condizioni sono verificate. In questo corso non siamo interessati a questa caratterizzazione, e quindi rimandiamo a Bogachev [?] per la dimostrazione di questo fatto.

Teorema 2.3 (Fernique) *Sia X spazio di Banach separabile e γ misura Gaussiana centrata su X; allora esiste $\alpha > 0$ tale che*

$$\int_X e^{\alpha\|x\|^2} d\gamma(x) < +\infty.$$

Dimostrazione. Dati $t, s > 0$ numeri arbitrari, grazie la Lemma 2.2, con $\vartheta = \pi/4$, otteniamo che

$$\begin{aligned}\gamma(\bar{B}_t)\gamma(\bar{B}_s^c) = \int_{\bar{B}_t \times \bar{B}_s^c} d\gamma\otimes\gamma(x,y) = & \int_{\{\|x-y\|\leq t\sqrt{2}\}\cap\{\|x+y\|>s\sqrt{2}\}} d\gamma\otimes\gamma(x,y) \\ \leq \int_{\{\|x\|>\frac{s-t}{\sqrt{2}}\}\cap\{\|y\|>\frac{s-t}{\sqrt{2}}\}} d\gamma\otimes\gamma(x,y) &\end{aligned}$$

dato che

$$\sqrt{2}\|x\| \geq \left|\left\|\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right\| - \left\|\frac{y-x}{\sqrt{2}}\right\|\right| = \left\|\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right\| - \left\|\frac{y-x}{\sqrt{2}}\right\| \geq s-t.$$

In definitiva,

$$\gamma(\bar{B}_t)\gamma(\bar{B}_s^c) \leq \gamma(\bar{B}^c_{\frac{s-t}{\sqrt{2}}})^2.$$

Sia ora $\tau > 0$ in modo tale che

$$c = \gamma(\bar{B}_\tau) > \frac{1}{2};$$

se $c = 1$, allora il teorema segue. Altrimenti, se $c < 1$, definiamo

$$\alpha = \frac{1}{24\tau^2}\ln\frac{c}{1-c}$$

e costruiamo la succession

$$t_0 = \tau, \quad t_n = \tau + t_{n-1}\sqrt{2}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Dato che

$$t_n = \tau(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}^{n+1} - 1),$$

se definiamo

$$p_n = \frac{1}{c}\gamma(\bar{B}^c_{t_n}),$$

da quanto visto sopra, si ricava che

$$p_n \leq p_{n-1}^2,$$

da cui il fatto che

$$\gamma(\bar{B}^c_{t_n}) \leq c\left(\frac{1-c}{c}\right)^{2^n}.$$

Se ne conclude quindi che

$$\begin{aligned}\int_X e^{\alpha\|x\|^2} d\gamma(x) \leq & \int_{\bar{B}_\tau} e^{\alpha\|x\|^2} d\gamma(x) + \sum_{n=0}^{\infty} e^{\alpha t_{n+1}^2} \gamma(\bar{B}_{t_{n+1}} \setminus \bar{B}_{t_n}) \\ \leq & ce^{\alpha\tau^2} + \sum_{n=0}^{\infty} e^{\alpha t_{n+1}^2} \gamma(\bar{B}_{t_n}^c) \\ \leq & ce^{\alpha\tau^2} + \sum_{n=0}^{\infty} c \left(\frac{1-c}{c}\right)^{2^n} e^{4\alpha\tau^2(1+\sqrt{2})^2 2^n} \\ = & ce^{\alpha\tau^2} + +c \sum_{n=0}^{\infty} e^{2^n (\ln \frac{1-c}{c} + 4\alpha\tau^2(1+\sqrt{2})^2)} < +\infty.\end{aligned}$$

□

Come corollario del Teorema di Fernique si ha che valgono le seguenti proprietà; per ogni $x^*, y^* \in X^*$, dato che stiamo supponendo γ centrata

$$|R_\gamma(x^*)(y^*)| \leq \int_X |x^*(x)||y^*(x)| d\gamma(x) \leq \|x^*\|\|y^*\| \int_X \|x\|^2 d\gamma(x) \leq C\|x^*\|\|y^*\|$$

con

$$C = \int_X \|x\|^2 d\gamma(x)$$

costante che dipende solo da X e da γ. In particolare, dato che

$$R_\gamma(x^*)(y^*) = y^*(Qx^*)$$

con $Q : X^* \to X$, ne deduciamo che Q è un operatore simmetrico, definito positivo e limitato. Vedremo in realtà che Q è anche un operatore compatto.

È inoltre ben definita la media della misura γ nel senso di integrale di Bochner

$$a_\gamma = \int_X x d\gamma(x).$$

Possiamo quindi definire le seguenti funzioni:

$$a_\gamma(x^*) = \int_X x^*(x) d\gamma(x)$$

detta media di γ relativa a $x^* \in X^*$ e

$$y^*(Qx^*) = R_\gamma(x^*)(y^*) = \int_X \big(x^*(x) - a_\gamma(x^*)\big)\big(y^*(x) - a_\gamma(y^*)\big) d\gamma(x)$$

detto operatore di covarianza di γ relativo a $x^*, y^* \in X^*$.

Come abbiamo visto, X^* è contenuto nello spazio $L^2(X, \gamma)$; si definisce quindi il reproducing kernel della misura γ

$$\mathcal{H} = X_\gamma^* = \overline{X^*}^{\|\cdot\|_{L^2(X,\gamma)}}$$

la chiusura in $L^2(X, \gamma)$ di X^*. Si definisce inoltre la norma

$$|h|_H = |h|_{H(\gamma)} = \sup\{x^*(h) : x^* \in X^*, R_\gamma(x^*)(x^*) \leq 1\}$$

e lo spazio di Cameron-Martin

$$H = H(\gamma) = \{h \in X : |h|_H\} < +\infty.$$

Abbiamo il seguente lemma

Lemma 2.4 *Un vettore $h \in X$ appartiene allo spazio di Cameron–Martin H se e solo se esiste $g \in \mathcal{H} = X^*_\gamma$ tale che $h = R_\gamma(g)$; in tal caso si ha pure che*

$$|h|_H = \|g\|_{L^2(X,\gamma)}.$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo $|h|_H < +\infty$; allora il funzionale lineare

$$x^* \mapsto x^*(h)$$

è tale che

$$|x^*(h)| \leq |h|_H R_\gamma(x^*)(x^*) = |h|_H \int_X (x^*(x) - a_\gamma(x^*))^2 d\gamma(x).$$

Cioè il funzionale è limitato in $L^2(X,\gamma)$ e quindi può essere rappresentato da una funzione $g \in X^*_\gamma$,

$$x^*(h) = \int_X (x^*(x) - a_\gamma(x^*))g(x)d\gamma(x)$$

grazie al Teorema di Riesz. Quindi $h = R_\gamma(g)$. L'implicazione inversa è immediata. □

Per convenienza di notazione, per ogni $h \in H$ denoteremo con $\hat{h}$ l'elemento di X^*_γ per cui $R_\gamma(\hat{h}) = h$.

Quanto visto implica che lo spazio di Cameron–Martin eredita un prodotto scalare

$$[h,k]_H = \int_X \hat{h}(x)\hat{k}(x)d\gamma(x)$$

in modo tale che $|h|_H = \|\hat{h}\|_{L^2(X,\gamma)}$.

L'importanza dello spazio di Cameron–Martin risiede nei due seguenti risultati.

Nel prossimo teorema indicheremo con γ_h la misura

$$\gamma_h(A) = \gamma(A-h), \qquad h \in X.$$

Teorema 2.5 *Sia X spazio di Banach separabile e γ misura Gaussiana.*

1. *Se $h \in X$ è tale che $|h|_H < \infty$, allora γ e γ_h sono equivalenti con densità data da*

$$\varrho_h(x) = e^{\hat{h}(x) - \frac{1}{2}|h|_H^2};$$

2. *Se $h \in X$ è tale che $|h|_H = \infty$, allora le due misure γ e γ_h sono mutuamente singolari.*

DIMOSTRAZIONE. Il fatto che $g \in X^*_\gamma$ implica che la funzione $e^{|g(x)|}$ è integrabile rispetto a γ. Tale affermazione è ovvia se $g \in X^*$; il caso generale segue per approssimazione.

Quindi, la misura γ_g è una misura finita. Fissiamo quindi $x^* \in X^*$ e definiamo per $z \in \mathbb{R}$ la seguente funzione:

$$\begin{aligned}\varphi(z) =& e^{ia_\gamma(x^*) - \frac{1}{2}\sigma(g)^2} \int_X e^{i(x^*(x) - a_\gamma(x^*) - zg(x))} d\gamma(x) \\ =& e^{ia_\gamma(x^*) - \frac{1}{2}\sigma(g)^2} e^{-\frac{1}{2}\sigma(x^*)^2 - \frac{1}{2}z^2\sigma(g)^2 + zR_\gamma(g)(x^*)}\end{aligned}$$

dato che $x^* - a_\gamma(x^*) - zg \in X^*_\gamma$. La funzione φ ammette quindi un'estensione olomorfa a tutto $\mathbb{C}$ e per $z = i$ si ottiene $\varphi(i) = \hat{\gamma}_g(x^*)$, da cui la prima parte del lemma. La seconda parte segue semplicemente dal fatto che

$$x^*(h) = R_\gamma(\hat{h})(x^*), \qquad \forall x^* \in X^*.$$

Supponiamo invece che $|h|_H = +\infty$; se si fissa $F \subset X^*$ e $\pi_F : X \to \mathbb{R}^F$ la proiezione finito-dimensionale, si nota che

$$|\gamma_h - \gamma|(X) \geq |(\pi_{F\#}\gamma)_{\pi_F(h)} - \pi_{F\#}\gamma|(\mathbb{R}^F).$$

La condizione $|h|_H = \infty$ implica che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $f \in X^*$ tale che $R_\gamma(f)(f) = 1$ e $f(h) > n$. Usiamo quindi la stima precedente con $F = \{f\}$; usiamo inoltre il fatto che $\mu_1 = \pi_{F\#}\gamma$ è Gaussiana in $\mathbb{R}$ determinata da $\mathscr{N}(0,1)$, $\mu_2 = (\pi_{F\#}\gamma)_{f(h)}$ è assolutamente continua rispetto a μ_1 con funzione di Hellinger data da

$$H(\mu_1, \mu_2) = e^{-\frac{f(h)^2}{8}}.$$

Quindi, per le proprietà della funzione di Hellinger, se ne deduce che

$$|\mu_1 - \mu_2|(\mathbb{R}) \geq 2(1 - e^{-\frac{f(h)^2}{8}}) \geq 2(1 - e^{-\frac{n^2}{8}}).$$

Passando al limite per $n \to +\infty$, se ne deduce che

$$|\gamma_h - \gamma|(X) = 2,$$

e quindi le due misure sono singolari tra loro. □

Vediamo alcune proprietà dello spazio di Cameron-Martin.

Teorema 2.6 *Sia X uno spazio di Banach separabile di dimensione infinita e γ una misura Gaussiana centrata. Allora:*

1. *la palla unitaria di H,*
$$\bar{B}_1^H = \{h \in X : |h|_H \leq 1$$
è debolmente compatta ed H è uno spazio di Hilbert che si immerge con continuità in X;

2. *H coincide con l'intersezione di tutti i sottospazi lineari di X di misura piena;*

3. *$\gamma(H) = 0$.*

Dimostrazione. Fissiamo $x^* \in X^*$; quindi se $h \in \bar{B}_1^H$,

$$|x^*(h)| = \left| \int_X x^*(x)\hat{h}(x) d\gamma(x) \right| \leq \|f\|_{L^2(X,\gamma)}.$$

Quindi la mappa x^* è limitata in $\bar{B}_1^H$, cioè quest'ultima è debolmente limitata. Sia ora $h \in \bar{B}_1^H$ limite debole di una successione $(h_j)_j \in \bar{B}_1^H$; quindi, se $x^* \in X^*$ è tale che $\|x^*\|_{L^2(X,\gamma)} \leq 1$, se ne ricava che $x^*(h) \leq 1$ dato che

$$x^*(h) = \lim_{j \to +\infty} x^*(h_j).$$

Quindi $h \in \bar{B}_1^H$, quindi abbiamo anche la sequenziale debole chiusura di $\bar{B}_1^H$. Da ciò se ne deduce che l'immersione di H in X è continua. Quindi l'insieme debolmente compatto $\bar{B}_1^H$ di H è anche debolmente compatto in X.

Veniamo alla seconda parte del teorema; sia L un sottospazio di X con $\gamma(L) = 1$. Se $h \in H$, dato che γ_h è equivalente a γ, se ne deduce che $\gamma(L - h) = 1$. Questo implica che $h \in L$, altrimenti come applicazione del teorema di separazione tra h ed L, troveremmo un $x^* \in X^*$ per cui $x^*(L) = 0$ e $x^*(h) = \alpha > 0$. Troveremmo quindi che l'insieme

$$A = \{x \in X : x^*(x) > \frac{\alpha}{2}\}$$

ha misura positiva e non interseca L. Abbiamo quindi dimostrato che se un sottospazio ha misura piena, contiene H; mostriamo ora che

$$H = \bigcap_{\gamma(L)=1} L.$$

Basta far vedere che per ogni $h \notin H$ esiste L per cui $h \notin L$ e $\gamma(L) = 1$. Dato che $h \notin H$, $|h|_H = \infty$ e quindi per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n^* \in X^*$ per cui $\sigma(x^*) = 1$ e $x^*(h) > n$. Definiamo quindi

$$L = \{x \in X : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x_n^*(x) < +\infty\};$$

tale insieme è uno spazio lineare e dato che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_X |x_n^*(x)| d\gamma(x) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty,$$

allora $\gamma(L) = 1$ e $h \notin L$.

Dimostriamo infine che $\gamma(H) = 0$; dato che X^* ha dimensione infinita, possiamo trovare $x_n^* \in X^*$ ortonormali in $L^2(X, \gamma)$. L'insieme

$$A = \{x \in X : \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n^*(x)| \leq M\}$$

ha per ogni M misura nulla. Infatti, esso è contenuto, per ogni $k \in \mathbb{N}$ nell'insieme

$$A_k = \{x \in X : \sup_{1 \leq n \leq k} |x_n^*(x)| \leq M\}$$

e

$$\gamma(A_k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}} \int_{[-M,M]^k} e^{-\frac{|x|^2}{2}} dx = (\gamma_1(-M, M))^k$$

con γ_1 misura Gaussiana in $\mathbb{R}$ determinata da $\mathscr{N}(0, 1)$, e quindi per ogni $M > 0$, $\gamma_1([-M, M]) < 1$. Quindi l'insieme

$$\{x \in X : \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x)^2 < +\infty\}$$

ha misura nulla e contiene H dato che per ogni $h \in H$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(h)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_X x_n^*(x) \hat{h}(x) d\gamma(x) \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \|\hat{h}\|_{L^2(X,\gamma)} = |h|_H.$$

dato che x_n^* è una base ortonormale di X_γ^*. $\square$

2.1 Il semigruppo di Ornstein-Uhlenbeck

In questa sezione introduciamo uno strumento molto importante nelle applicazioni successive; esso è definito per ogni funzione $u \in L^1(X, \gamma$ dalla formula di Mehler

$$T_t u(x) = \int_X u(e^{-t} x + \sqrt{1 - e^{-2t}} y) d\gamma(y).$$

Raccogliamo nel seguente teorema le principali proprietà del semigruppo di Ornstein–Uhlenbeck.

Teorema 2.7 *Sia X uno spazio di Banach separabile e γ una misura Gaussiana centrata. Allora:*

1. *per ogni $p \geq 1$, $(T_t)_{t\geq 0}$ è un semigruppo fortemente continuo di operatori con norma*
$$\|T_t\|_{\mathscr{L}(L^p(X,\gamma))} = 1;$$
2. *per ogni $h \in H$ e $u \in L^p(X,\gamma)$, $p > 1$, la funzione*
$$h \mapsto T_t u(x+h)$$
è continua in H;
3. *per ogni $h \in H$ e per ogni $u \in L^p(X,\gamma)$, $p > 1$, la funzione $T_t u(x)$ è derivabile in direzione h, cioè*
$$\exists \partial_h T_t u(x) = \frac{d}{d\varepsilon} T_t u(x+\varepsilon h)_{|\varepsilon=0} = e^{-t}\int_X u(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y)\hat{h}(y)d\gamma(y).$$

Dimostrazione.

1. È immediato verificare che $T_t 1 = 1$ e che
$$\|T_t u\|_{L^p(X,\gamma)} \leq \|u\|_{L^p(X,\gamma)}$$
dall'invarianza per rotazione della misura Gaussiana. Questo implica che
$$\|T_t\|_{\mathscr{L}(L^p(X,\gamma))} = 1.$$
Il fatto che $(T_t)_{t\geq 0}$ sia un semigruppo si dimostra grazie all'invarianza della misura rispetto alle trasformazioni
$$(y,z) \mapsto e^{-s}\frac{\sqrt{1-e^{-2t}}}{\sqrt{1-e^{-2t-2s}}}y + \frac{\sqrt{1-e^{-2s}}}{\sqrt{1-e^{-2t-2s}}}z.$$
Da questo si ricava infatti che
$$\begin{aligned} T_t(T_s u)(x) &= \int_X T_s u(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y)d\gamma(y) \\ &= \int_{X\times X} u(e^{-t-s}x + e^{-s}\sqrt{1-e^{-2t}}y + \sqrt{1-e^{-2s}}z)d\gamma\otimes\gamma(y,z) \\ &= \int_{X\times X} u(e^{-t-s}x + \sqrt{1-e^{-2t-2s}}y)d\gamma(y) = T_{t+s}u(x). \end{aligned}$$
Si vede facilmente inoltre che T_t è autoaggiunto in $L^2(X,\gamma)$ e inoltre che il semigruppo è non–negativo.
Il fatto che sia fortemente continuo, basta prima considerare funzioni continue e limitate; per tali funzioni la continuità di
$$t \mapsto T_t f$$
come funzione a valori in $L^p(X,\gamma)$ è immediata dal teorema di convergenza dominata. Il caso generale si ottiene per apprissimazione e per la limitatezza in $L^p(X,\gamma)$.
2. Notiamo anzitutto che la funzione
$$y \mapsto u(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y)$$

appartiene ad $L^p(X,\gamma)$ per γ-q.o. $x \in X$. Basta quindi dimostrare che la mappa

$$\varphi : h \mapsto \int_X g(y+h)d\gamma(y)$$

è continua in H. Possiamo però scrivere

$$\varphi(h) = \int_X g(x)e^{\hat{h}(x)-\frac{1}{2}|h|_H^2}d\gamma(x)$$

e per ogni $q > 1$ la mappa

$$h \mapsto e^{\hat{h}-\frac{1}{2}|h|_H^2}$$

è continua da H ad $L^q(X,\gamma)$, da cui la continuità di φ.

□

2.2 Slicing ed approssimazioni finito–dimensionali

Possiamo definire le approssimazioni finito dimensionali di funzioni $u \in L^p(X,\gamma)$. Definiamo le funzioni cilindriche;

Dato $h \in H$, possiamo definire la mappa misurabile $\pi_h(x) = \hat{h}(x)$. Tale funzione ha legge Gaussiana. Definiamo quindi $F = \text{span}(h) \subset H$, $X_F = \text{span}(h) \subset X$, $F^\perp = h^\perp \subset H$ e $X_F^\perp = X/X_F$. Gli spazi X_F e $X_F^\perp$ sono spazi di Banach, la legge delle funzioni $\Pi_F : X \to X_F$ e $\Pi_F : X \to X_F^\perp$

$$\Pi_F(x) = z, \qquad \Pi_F^\perp(x) = y,$$

dove la decomposizione $x = y + z$ deriva dalla somma diretta di $X = X_F \oplus X_F^\perp$ hanno entrambe legge Gaussiana. Si può vedere che gli spazi di Cameron–Martin di $\gamma_F = \Pi_{F\#}\gamma$ e $\gamma_F^\perp = \Pi_{F\#}^\perp\gamma$ sono dati rispettivamente da F e $F^\perp$. Da questo si deduce anche che

$$\gamma = \gamma_F \otimes \gamma_F^\perp.$$

2.3 La legge zero-uno

In questa sezione vogliamo arrivare alla dimostrazione del seguente risultato.

Teorema 2.8 *Sia X spazio di Banach separabile e γ una misura Gaussiana centrata. Se L è un sottospazio affine γ–misurabile di X, allora*

$$o\ \gamma(L) = 0\ \textit{oppure}\ \gamma(L) = 1.$$

Teorema 2.9 *Sia X spazio di Banach separabile e γ misura Gaussiana centrata; se $A \in \mathscr{B}(X)$ è un insieme tale che*

$$\gamma(A+h) = \gamma(A), \qquad \forall h \in H,$$

allora o $\gamma(A) = 1$ oppure $\gamma(A) = 0$. Inoltre, se f è una funzione γ–misurabile tale che

$$f(x+h) = f(x), \qquad \forall h \in H,$$

allora f coincice q.o. con una costante.

Dimostrazione. Sia $\{h_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una base ortonormale di H. Allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la funzione

$$\begin{aligned} F(t_1, \ldots, t_n) =& \gamma(A - t_1 h_1 + \ldots - t_n h_n) \\ =& \int_A \exp\left(\sum_{j=1}^n t_j \hat{h}_j(x) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n t_j^2\right) d\gamma(x) \end{aligned}$$

è costante. Quindi, per ogni scelta di interi non–negativi $m_1, \ldots, m_n$ non simultaneamente nulli se ne deduce che

$$\frac{\partial^{m_1+\ldots+m_n} F}{\partial t_1^{m_1} \ldots \partial t_n^{m_n}}(0, \ldots, 0) = 0,$$

da cui il fatto che

$$\int_X H_{m_1}(\hat{h}_1(x)) \cdot \ldots \cdot H_{m_n}(\hat{h}_n(x))\chi_A(x) d\gamma(x) = 0,$$

dove abbiamo indicato con H_i i polinomi di Hermite. Quindi la funzione caratteristica χ_A è ortogonale a tutti i polinomi di Hermite non costanti, cioè χ_A è costante.

Per l'ultima parte del teorema, basta considerare gli insiemi $\{f < c\}$. □

Corollario 2.10 *Sia X spazio di Banach separabile e γ misura Gaussiana centrata; allora se $A \in \mathscr{B}(X)$ è tale che*

$$\gamma(A \setminus (A + h)) = 0, \qquad \forall h \in H,$$

o $\gamma(A) = 1$ oppure $\gamma(A) = 0$.

Dimostrazione. Dato che se $h \in H$, anche $-h \in H$, se ne deduce che anche

$$\gamma(A \setminus (A - h)) = 0, \qquad \forall h \in H.$$

cioè $\gamma((A + h) \setminus A) = 0$. Quindi

$$\gamma(A + h) = \gamma(A), \qquad \forall h \in H.$$

Quindi possiamo applicare il precedente Teorema. □

Ovviamente come corollario, possiamo anche ricavare che se A è un insieme γ–misurabile tale che

$$A + rh_j = A$$

a meno di insiemi γ–trascurabili, con $r \in \mathbb{Q}$ e $\{h_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ base ortonormale, allora o $\gamma(A) = 1$ oppure $\gamma(A) = 0$.

Dimostrazione.[Teorema 2.8] Supponiamo L sottospazio lineare; possiamo anche supporre $L \in \mathscr{B}(X)$. Definiamo le due mappe $p_1, p_2 : X \times X \to X$,

$$p_1(x, y) = x, \qquad p_2(x, y) = y.$$

Tali mappe hanno legge γ, cioè

$$p_{i\#}\gamma \otimes \gamma = \gamma$$

come facilmente verificabile mediante trasformata di Fourier. Definiamo quindi gli insiemi

$$A_n = \{(x, y) : x \notin L\} \cap \{(x, y) : y + nx \in L\}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

È immediato verificare che per $n \neq m$, $A_n \cap A_m = \emptyset$. Infatti se $x + ny, x + my \in L$, allora per linearità $(n-m)y \in L$; ma se $n \neq m$, allora $y \in L$, da cui, siccome $x + ny \in L$, si ricaverebbe $x \in L$.

Notiamo che

$$
\begin{aligned}
(\widehat{p_1 + np_2)_\#}\gamma \otimes \gamma(x^*) &= \int_X e^{ix^*(x)} d((p_1+np_2)_\#\gamma\otimes\gamma)(x) \\
&= \int_{X\times X} e^{ix^*(p_1(x,y)+np_2(x,y))} d\gamma\otimes\gamma(x,y) \\
&= \int_{X\times X} e^{ix^*(x)+nix^*(y))} d\gamma\otimes\gamma(x,y) \\
&= \int_X e^{ix^*(x)} d\gamma(x) \int_X e^{inx^*(y)} d\gamma(y) \\
&= e^{-\frac{1}{2}\|x^*\|^2_{L^2(X,\gamma)}} e^{-\frac{n^2}{2}\|x^*\|^2_{L^2(X,\gamma)}} \\
= e^{-\frac{1+n^2}{2}\|x^*\|^2_{L^2(X,\gamma)}}.
\end{aligned}
$$

D'altra parte

$$
\begin{aligned}
\widehat{\sqrt{1+n^2}p_{2\#}}\gamma\otimes\gamma(x^*) &= \int_X e^{ix^*(x)} d(\sqrt{1+n^2}p_{2\#}\gamma\otimes\gamma)(x) \\
&= \int_{X\times X} e^{ix^*(\sqrt{1+n^2}p_1(x,y))} d\gamma\otimes\gamma(x,y) \\
&= \int_{X\times X} e^{i\sqrt{1+n^2}x^*(x)} d\gamma\otimes\gamma(x,y) \\
&= e^{-\frac{1+n^2}{\|x^*\|_{L^2(X,\gamma)}}}.
\end{aligned}
$$

Quindi le due v.a. $p_1 + np_2$ e $\sqrt{1+n^2}p_1$ sono equidistribuite. Inoltre, dato che $x, y \in L$ se e solo se $x, y + nx \in L$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, ricaviamo che

$$
\begin{aligned}
\gamma\otimes\gamma(A_n) =& \gamma\otimes\gamma(\{(x,y) : y+nx \in L\}) - \gamma\otimes\gamma(\{(x,y) : x \in L\} \cap \{(x,y) : y+nx \in L\}) \\
=& \gamma\otimes\gamma(\{(x,y) : \sqrt{1+n^2}x \in L\}) - \gamma\otimes\gamma(\{(x,y) : x \in L\} \cap \{(x,y) : y \in L\}) \\
=& \gamma\otimes\gamma(\{(x,y) : x \in L\}) - \gamma\otimes\gamma(\{(x,y) : x \in L\})^2 \\
=& \gamma(L) - \gamma(L)^2.
\end{aligned}
$$

Dato che gli insiemi A_n sono disgiunti, se ne deduce che $\gamma(A_n) = 0$, e quindi che $\gamma(L) \in \{0, 1\}$. $\square$

2.4 Funzionali lineari misurabili

In questa sezione vogliamo studiare in maggior dettaglio le proprietà delle funzioni di X^*_γ; vedremo in particolare che tali funzioni altro non sono che funzionali lineari misurabili, secondo la seguente definizione.

Definizione 2.11 (Funzionali lineari misurabili) *Data una misura Gaussiana γ su di uno spazio di Banach X, diremo che f è un funzionale lineare misurabile o γ-funzionale lineare misurabile se esiste un sottospazio lineare L di misura piena ed un funzionale f_0 γ-misurabile e lineare su L tale che $f = f_0$ γ–q.o..*

Si può sempre supporre che f_0 sia definito e lineare su tutto X; per fare ciò bisogna utilizzare la nozione di basi di Hamel, e quindi non approfondiremo qui il concetto.

Un esempio di funzionale lineare misurabile ma non lineare è dato dal funzionale

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$$

definito su $X = \mathbb{R}^\infty$ con $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$. La serie precedentemente definita converge γ–quasi ovunque, se per γ si prende la misura ottenuta come prodotto numerabile di misure Gaussiane standard su $\mathbb{R}$. Tuttavia, il funzionale f è lineare in senso stretto solo sulle successioni $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con solo un numero finito di elementi diversi da zero.

Iniziamo con un paio di lemmi.

Lemma 2.12 *Per ogni $p \in (1,\infty)$, per ogni $r > p$ e per ogni $f \in L^r(X,\gamma)$, la mappa*

$$H \ni h \mapsto f(\cdot + h) \in L^p(X,\gamma)$$

è continua da H in $L^p(X,\gamma)$ nella norma di H. Nel caso $p = 1$, la stessa conclusione si ottiene per ogni $f \in L^\infty(X,\gamma)$.

Dimostrazione. La dimostrazione si fa per aprrossimazione cilindrica; sia infatti $f \in \mathcal{F}C_b(X)$; allora la dimostrazione si ricava grazie al teorema di convergenza dominata.

Per $f \in L^r(X,\gamma)$, si considera $f_j \in \mathcal{F}C_b(X)$ convergente ad f in $L^r(X,\gamma)$. Fissiamo t ed s in modo tale che

$$tp = r, \qquad \frac{1}{t} + \frac{1}{s} = 1.$$

Dato che

$$\int_X e^{s\hat{h}(x)} d\gamma(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{sy} d\mathcal{N}(0, |h|_H^2)(y) = e^{\frac{s^2}{2}|h|_H^2},$$

ricaviamo che

$$\begin{aligned}\int_X |f(x+h) - f_j(x+h)|^p d\gamma(x) &= \int_X |f(x) - f_j(x)|^p e^{\hat{h}(x) - \frac{1}{2}|h|_H^2} d\gamma(x) \\ &\le \left(\int_X |f(x) - f_j(x)|^r d\gamma(x)\right)^{\frac{1}{t}} \left(\int_X e^{s\hat{(x)} - \frac{s}{2}|h|_H^2} d\gamma(x)\right)^{\frac{1}{s}} \\ &\le \left(\int_X |f(x) - f_j(x)|^r d\gamma(x)\right)^{\frac{1}{t}} e^{\frac{s-1}{2}|h|_H^2}.\end{aligned}$$

Siccome la precedente quantità tende a 0 uniformemente per $h \in H$ con $|h|_H \le R$ per ogni $R > 0$, otteniamo la continuità in $L^r(X,\gamma)$.

Nel caso $f \in L^\infty(X,\gamma)$, si prenderà f_j che converge ad f in misura con $\|f_j\|_\infty \le \|f\|_\infty$. $\square$

Lemma 2.13 *Sia A un insieme misurabile con $\gamma(A) > 0$; allora esiste $r > 0$ tale che*

$$B_r^H \subset A - A.$$

Dimostrazione. La funzione

$$h \mapsto \gamma((A+h) \cap A)$$

è strettamente positiva per $h = 0$ e continua grazie al lemma precedente dato che

$$\gamma((A+h) \cap A) = \int_X \mathbf{1}_A(x-h)\mathbf{1}_A(x) d\gamma(x).$$

Quindi la continuità implica l'esistenza di $r > 0$ per il quale

$$\gamma((A+h) \cap A) > 0, \qquad \forall h \in B_r^H.$$

Per tali h si deve avere quindi $h \in A - A$. $\square$

Possiamo quindi enunciare il seguente risultato.

Proposizione 2.14 *Sia X spazio di Banach separabile e γ una misura Gausssiana centrata. Se f è un funzionale lineare su X γ–misurabile, allora la sua restrizione ad H è continuo nella norma di H.*

DIMOSTRAZIONE. Basta considerare gli insiemi

$$V_n = \{f \le n\}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Tali insiemi hanno misura positiva per qualche $n_0 \in \mathbb{N}$, quindi per il lemma precedente esiste $r > 0$ tale che

$$B_r^H \subset V_{n_0} - V_{n_0},$$

da cui il fatto che

$$\sup_{h \in B_r^H} |f(h)| \le 2n_0.$$

□

Qui abbiamo dovuto richiedere la definizione di f su tutto X, in quanto H ha misura nulla; vedremo però che i valori su H determinano univocamente i funzionali lineari γ–misurabili.

Lemma 2.15 *Sia X spazio di Banach separabile e γ misura Gaussiana centrata; sia $f \in X_\gamma^*$ un funzionale lineare proprio, allora*

$$f(h) = [R_\gamma(f), h]_H = \int_X f(x)\hat{h}(x)d\gamma, \qquad \forall h \in H.$$

DIMOSTRAZIONE. La seconda uguaglianza è la definizione della norma in H; per la prima, si consideri $(x_j^*)_{j\in\mathbb{N}} \subset X^*$ convergente ad f in $L^2(X,\gamma)$ e sia $h \in H$. Allora

$$x_j^*(h) = \int_X x_j^*(x)\hat{h}(x)d\gamma(x.)$$

A destra possiamo passare al limite per $j \to \infty$. Possiamo quindi supporre che $x_j^* \to f$ q.o.; se definiamo

$$L = \{x \in X : f(x) = \lim)_{j\to\infty} x_j^*(x)\},$$

otteniamo un sottospazio lineare di misura piena, e quindi $H \subset L$. Quindi $f(h) = \lim_{j\to\infty} x_j^*(h)$.

□

Corollario 2.16 *Sia X uno spazio di Banach separabile e γ una misura Gaussiana centrata; se una sucessione di funzionali lineari propri f_j converge a zero in misura, allora i funzionali lineari continui $f_{j|H}$ convergono a zero in norma H.*

DIMOSTRAZIONE. La convergenza in misura implica, per la Gaussianità, la convergenza in $L^2(X,\gamma)$. Quindi

$$|f_j(h)| \le \int_X |f(x)||\hat{h}(x)|d\gamma(x) \le \|f_j\|_{L^2(X,\gamma)}|h|_H, \qquad \forall h \in H.$$

Da ciò si ricava che

$$|f_j|_H = \sup_{h\in H, |h|_H \le 1} |f_j(h)| \le \|f_j\|_{L^2(X,\gamma)} \to 0.$$

□

Proposizione 2.17 *Sia X spazio di Banach separabile e γ una misura Gaussiana centrata; dati due funzionali lineari γ–misurabili f e g, allora o essi differiscono q.o., oppure coincidono q.o. Se poi f e g sono lineari propri, allora f e g coincidono q.o. se e solo se $f = g$ su H.*

Dimostrazione. Supponiamo che f e g siano lineari propri; allora il sottospazio lineare

$$L = \{f = g\}$$

è misurabile. Grazie alla legge zero-uno (vedi appendice), abbiamo che o $\gamma(L) = 0$, o $\gamma(L) = 1$. Nel secondo caso, si ha anche che $H \subset L$ e l'ultima parte segue dal Teorema 2.9 □

Dalla continuità in H e dal precedente Teorema, si ricava che se un funzionale lineare γ–misurabile è nullo su di un sottospazio denso di H, allora esso è nullo γ–q.o.

Chiudiamo questa sezione con il seguente Teorema.

Teorema 2.18 *Sia X spazio di Banach separabile e γ misura Gaussiana centrata. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. *f è un funzionale lineare γ–misurabile;*
2. *$f \in X^*_\gamma$;*
3. *esiste una susccessione $(x^*_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset X^*$ convergente ad f in misura.*

Dimostrazione. L'implicazione 2. ⇒ 3. è ovvia.

Se poi $(x^*_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset X^*$ converge in misura ad f, allora a meno di sottosuccessioni abbiamo convergenza q.o.. Sia quindi

$$L = \{x \in X : \exists \lim_{j\to+\infty} x^*_j(x)\}.$$

Tale spazio ha misura piena e possiamo quindi definire

$$f_0(x) = \lim_{j\to+\infty} x^*_j(x), \qquad x \in L.$$

Quindi 3. ⇒ 1..

Vediamo infine l'implicazione 1. ⇒ 2.; sia quindi f funzionale lineare misurabile e senza ledere in generalità possiamo subito supporre che $f = f_0$. Grazie al Teorema di Fernique, $f \in L^2(X, \gamma)$ e grazie al Teorema **??**, f è continuo su H. Fissiamo quindi una base ortonormale $\{h_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ di H. Possiamo quindi definire

$$g = \sum_{j\in\mathbb{N}} f(h_j)\hat{h}_j \in X^*_\gamma.$$

Si ha chiaramente che $f = g$ su H, e quindi $f = g$ γ–q.o., cioè $f \in X^*_\gamma$. □

Capitolo 3

Caso Hilbertiano

In questo capitolo considereremo il caso in cui X sia uno spazio di Hilbert separabile; l'obiettivo sarà quello di caratterizzare lo spazio di Cameron–Martin nel caso $X = C_0([0,1];\mathbb{R}^d)$. Caratterizzeremo tale spazio supponendo che $X = L^2([0,1],\mathbb{R}^d)$; è da notare che per il fatto che

$$X \subset L^2([0,1];\mathbb{R}^d) \subset X^*$$

con inclusioni dense, dato che $\mathbb{P}^W(X) = 1$, avremo che lo spazio di Cameron–Martin considerato in X o in $L^2([0,1];\mathbb{R}^d)$ sarà il medesimo; lasciamo la dimostrazione di questo fatto come esercizio.

3.1 Misure Gaussiane in spazi di Hilbert

Sia X uno spazio di Hilbert separabile ed indichiamo con $(\cdot,\cdot)_X$ il prodotto interno su X; ricordiamo che un operatore Q simmetrico definito posigivo viene detto *nucleare* o *di tipo traccia* se esiste per ogni base ortonormale $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ di X,

$$\sum_{j=1}^{\infty}(Qe_j, e_j)_X < +\infty.$$

Si può fare vedere che la precedente condizione non dipende dalla scelta della base, che quindi può essere supposta essere costituita da autovettori di Q con autovalori $\lambda_j \in \mathbb{R}^+$ che quindi soddisfano la condizione

$$\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j < +\infty.$$

Abbiamo il seguente risultato.

Teorema 3.1 *Sia X uno spazio di Hilbert separabile e γ una misura Gaussiana su X; allora per ogni $x \in X = X^*$,*

$$\hat{\gamma}(x) = e^{i(a,x)_X - \frac{1}{2}(Qx,x)_X} \tag{3.1}$$

con $a \in X$ e $Q \in \mathcal{L}(X)$ operatore di tipo traccia. Viceversa, se $a \in X$ e Q è un operatore di tipo traccia, allora la funzione (3.1) *è la trasformata di Fourier di una misura Gaussiana su X con a la media e Q l'operatore di covarianza di tale misura.*

Dimostrazione. Supponiamo che γ sia una misura Gaussiana; allora, per quanto visto nel capitolo **??**, esitono L e B funzionali lineari il primo e bilineare il secondo per cui la trasformata di Fourier di γ è determinata da L e B. Dal teorema di convergenza dominata, la mappa

$$x \mapsto \hat{\gamma}(x)$$

è continua, da cui si deduce la continutà di L e di B; esistono quindi $a \in X$ e Q operatore simmetrico lineare non negativo per cui

$$L(x) = (a, x)_X, \qquad B(x, x) = (Qx, x)_X.$$

L'operatore $Q^{1/2}$ è compatto; infatti, supponiamo $(x_j)_j$ sia una successione che convergen debolmente a 0. Allora

$$\lim_{j \to +\infty} \hat{\gamma}(x_j) = 1$$

grazie al Teorema di convergenza dominata. Quindi

$$\lim_{j \to +\infty} (Qx_j, x_j)_X = \lim_{j \to +\infty} \|Q^{1/2} x_j\| = 0,$$

da cui la compattezza.

Dimostriamo ora che Q è di tipo traccia; fissiamo $\{e_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una base ortonormale di X. Allora, dato che Q è l'operatore di covarianza associato a γ,

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} (Qe_j, e_j) = \int_X (x - a, e_j)_X^2 d\gamma(x) = \int_X \|x - a\|^2 d\gamma(x) < +\infty$$

grazie al Teorema di Fernique.

Supponiamo ora che $a \in X$ sia un vettore fissato e che Q sia un operatore simmetrico non-negativo di tipo traccia fissato. Fissiamo quindi una base $\{e_j\}_{\in \mathbb{N}}$ una base di autovettori di Q con autovalori $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$. Vogliamo definire una variabile aleatoria con valori in X la cui legge sia Gaussiana con trasformata di Fourier data da (3.1). Basta a tal fine considerare una successione di v.a. indipendenti $\xi_j : (\Omega, \mathbb{P}) \to X$ con distribuzione Gassiana standard e definire

$$\xi(\omega) = a + \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_j} \xi_j(\omega) e_j.$$

Siccome, dal teorema di convergenza monotona,

$$\int_\Omega \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \xi_j(\omega)^2 d\mathbb{P}(\omega) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j < +\infty,$$

se ne deduce che

$$\mathbb{P}\big(\{\omega : \|\xi(\omega)\| < +\infty\}\big) = 1,$$

cioè la v.a. ξ è definita e finita in X per $\mathbb{P}$–q.o. $\omega \in \Omega$. È immediato verificare che la legge di ξ è Gaussiana e che la trasformata di Fourier è data da (3.1). $\square$

Notiamo alcuni corollari del precedente risultato; anzitutto, la funzione

$$\varphi(x) = e^{-\frac{1}{2}\|x\|^2}$$

non può essere, nel caso infinito–dimensionale, la trasformata di Fourier di una misura Gaussiana; infatti tale misura dovrebbe avere l'identità come operatore di covarianza, ma tale operatore non è di tipo traccia.

Inoltre, nel caso di Gaussiana centrata, dato che

$$(Qx^*, y^*) = \int_X (x^*, x)_X (y^*, x)_X d\gamma(x),$$

allora la chiusura di $X = X^*$ in $L^2(X, \gamma)$ coincide con il completamento di X nella norma

$$\|x\|_Q^2 = (Qx, x)_X = \|Q^{1/2}x\|^2;$$

cioè, lo spazio di Cameron–Martin è individuato dalla seguente condizione

$$H = \{x \in X : \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (x, e_j)_X^2 < +\infty\},$$

cioè $H = Q(X^*_\gamma)$, o equivalentemente, se Q lo si considera solo definito in X, $H = Q^{1/2}(X)$.

3.2 Il caso dei moti Browniani

In questa sezione consideriamo lo spazio $X = L^2([0,1]; \mathbb{R}^d)$ con la misura di Wiener $\mathbb{P}^W$; studieremo qui per semplicità il caso $d = 1$. Abbiamo il seguente risultato. Premettiamo una piccola discussione sulla costruzione della misura $\mathbb{P}^W$; tale misura può anche essere costruita nel seguente modo. Si prenda $\xi_j : (\Omega, \mathbb{P}) \to X$ una successione di v.a. indipendenti con distribuzione Gaussiana standard. Fissata una base ortonormale $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ di $L^2([0,1])$, si definisce il processo stocastico $x_t : (\Omega, \mathbb{P}) \to X$

$$x_t(\omega) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \xi_j(\omega) e_j(t),$$

con

$$e_j(t) = \int_0^t \varphi_j(s) ds.$$

È facile verifica che x_t è definito e finito per q.o. $\omega \in \Omega$, e quindi definisce una v.a. a valori in X. La legge di x_t è esattamente $\mathbb{P}^W$; infatti, che sia Gaussiana centrata è ovvio per costruzione. Per dimostrare il risultato, basta calcolare la covarianza di tale legge. Sia ℓ un funzionale lineare del tipo

$$\ell(x) = \sum_{h=1}^{k} c_h x(t_h);$$

allora

$$\begin{aligned}\int_X (\ell(x))^2 d(x_{t\#}\mathbb{P})(x) &= \int_\Omega \left(\sum_{h=1}^{k} c_h x_{t_h}(\omega) \right)^2 d\mathbb{P}(\omega) \\ &= \sum_{h_1,h_2=1}^{k} c_{h_1} c_{h_2} \sum_{j=1}^{\infty} e_j(t_{h_1}) e_j(t_{h_2}).\end{aligned}$$

Notiamo quindi che

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty} e_j(t_{h_1}) e_j(t_{h_2}) = &= \sum_{j=1}^{\infty} (\mathbf{1}_{[0,t_{h_1}]}, \varphi_j)_{L^{(}([0,1])} (\mathbf{1}_{[0,t_{h_1}]}, \varphi_j)_{L^{(}([0,1])} \\ &= (\mathbf{1}_{[0,t_{h_1}]}, \mathbf{1}_{[0,t_{h_2}]})_{L^2([0,1])} = \min\{t_{h_1}, t_{h_2}\}.\end{aligned}$$

Quindi la covarianza associata ad ℓ è data da

$$\int_X (\ell(x))^2 d(x_{t\#}\mathbb{P})(x) = \sum_{h_1,h_2=1}^{k} c_{h_1} c_{h_2} \min\{t_{h_1}, t_{h_2}\}.$$

Tale covarianza è la stessa della misura $\mathbb{P}^W$, e quindi le due misure coincidono in quanto

$$\begin{aligned}\int_X \ell(x)^2 d\mathbb{P}^W(x) &= \int_X \big(\sum_{h=1}^{k} c_h x(t_h)\big)^2 d\mathbb{P}^W(x)\\ &= \sum_{h_1,h_2=1}^{k} c_{h_1} c_{h_2} \int_X x(t_{h_1}) x_{t_{h_2}} d\mathbb{P}^W(x)\\ &= \sum_{h_1,h_2=1}^{k} c_{h_1} c_{h_2} \int_X B_{t_{h_1}}(x) B_{t_{h_2}}(x) d\mathbb{P}^W(x).\end{aligned}$$

L'uguaglianza si deduce dal fatto che, ad esempio $t_n < t_m$,

$$\begin{aligned}\int_X B_{t_n}(x) B_{t_m}(x) d\mathbb{P}^W(x) &= \int_X B_{t_n}(x)\big(B_{t_m}(x) - B_{t_n}(x)\big) d\mathbb{P}^W(x) + \int_X B_{t_n}(x)^2 d\mathbb{P}^W(x)\\ &= \int_X B_{t_n}(x) d\mathbb{P}^W(x) \int_X \big(B_{t_m}(x) - B_{t_n}(x)\big) d\mathbb{P}^W(x)\\ &\quad + \int_X B_{t_n}(x)^2 d\mathbb{P}^W(x)\\ &= t_n = \min\{t_n, t_m\}.\end{aligned}$$

Teorema 3.2 *Nel caso $X = L^2([0,1];\mathbb{R})$ con la misura di Wiener $\mathbb{P}^W$, lo spazio di Cameron–Martin è dato da*

$$H = W_0^{1,2}([0,1];\mathbb{R}^d),$$

cioè lo spazio delle funzioni f assolutamente continue con $f' \in L^2([0,1];\mathbb{R})$ e $f(0) = 0$. Inoltre,

$$|f|_H = \|f'\|_{L^2([0,1]);\mathbb{R}}.$$

Dimostrazione. Si tratta di determinare gli autovalori dell'operatore

$$Q = R_{\mathbb{P}^W}.$$

Dato che Q è un operatore compatto, le autofunzioni f_j costituiscono una base ortonormale di $L^2([0,1])$; possiamo quindi utilizzare il ragionamento precedente con le funzioni $\varphi_j = f_j$ e $Qf_j = \lambda_j f_j$.

Notiamo anzitutto che per ogni $f \in L^2([0,1])$,

$$Qf(t) = \int_0^1 f(s) \min\{s,t\} ds.$$

Infatti si deve avere che per ogni $g \in L^2([0,1])$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 g(t)Qf(t)dt =&(Qf,g)_{L^2([0,1])} = \int_X (f,\omega)_{L^2([0,1])}(g,\omega)_{L^2([0,1])} d\mathbb{P}^W(\omega)\\
=&\int_X \int_0^1 f(s)\omega(s)ds \int_0^1 g(t)\omega(t)dtd\mathbb{P}^W(\omega)\\
=&\int_X \int_0^1 f(s)B_s(\omega)ds \int_0^1 g(t)B_t(\omega)dtd\mathbb{P}^W(\omega)\\
=&\int_{[0,1]^2} g(t)f(s)\int_X B_s(\omega)B_t(\omega)d\mathbb{P}^W(\omega)\\
=&\int_0^1 g(t)\int_0^1 f(s)\min\{t,s\}dsdt
\end{aligned}$$

in quanto, dal fatto che B_t e B_s hanno legge Gaussiana con covarianza t ed s rispettivamente e, se $t > s$, B_s e $B_t - B_s$ sono indipendenti, da cui

$$\begin{aligned}
\int_X B_t(\omega)B_s(\omega)d\mathbb{P}^W(\omega) = &= \int_X B_s(\omega)^2 d\mathbb{P}^W(\omega) + \int_X B_s(\omega)(B_t(\omega) - B_s(\omega))d\mathbb{P}^W(\omega)\\
&=s = \min\{t,s\}.s
\end{aligned}$$

Quindi la ricerca di autovalori si riduce alla ricerca di funzioni f_j e $\lambda_j \in \mathbb{R}$ per cui

$$\int_0^1 \min\{t,s\}f_j(s)ds = \lambda_j f_j(t).$$

Standard argomenti di regolarità, implica che le autofunzioni sono regolari e soddisfano il seguente problema:

$$\begin{cases} \lambda_j f_j''(t) = -\lambda_j f_j(t) \\ f_j(0) = f_j'(1) = 0. \end{cases}$$

Da questo se ne deduce che

$$f_j(t) = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\big(\frac{t}{\sqrt{\lambda_j}}\big), \qquad \lambda_j = \frac{1}{\pi^2(j-\frac{1}{2})^2}, j \in \mathbb{N}$$

Sappiamo quindi che lo spazio di Cameron–Martin coincide con $Q^{\frac{1}{2}}(L^2([0,1]))$, che consiste quindi delle funzioni $f \in L^2([0,1])$ i cui coefficienti c_j nella base f_j soddisfano

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j^2(j-\frac{1}{2})^2 < +\infty.$$

Se fissiamo quindi come base ortonormale di $L^2([0,1])$, la condizione precedente equivale alla richiesta dell'esistenza di una funzione $g \in L^2([0,1])$ per cui

$$(g,\varphi)_{L^2([0,1])} = \pi c_j\big(j - \frac{1}{2}\big).$$

La funzione così costruita è la primitiva di f, dato che

$$\begin{aligned}
\int_0^t g(s)ds =& \sum_{j=1}^{\infty} \pi c_j \left(j-\frac{1}{2}\right)\int_0^t \psi_j(s)ds\\
=&\sum_{j=1}^{\infty} c_j f_j(t) = f(t).
\end{aligned}$$

Abbiamo quindi dimostrato che $H \subset W_0^{1,2}([0,1])$. Viceversa, se f è assolutamente continua con $f(0) = 0$ e $f' \in L^2([0,1])$, allora, posto $g = f'$, dato che

$$f_j(t) = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda_j}}\right) = -\sqrt{\lambda_j}\psi_j'(t),$$

se ne deduce che

$$\begin{aligned}\pi\left(j - \frac{1}{2}\right)c_j &= -\int_0^1 f(t)\psi_j'(t)dt \\ &= \int_0^1 g(t)\psi_j'(t)dt = (g, \psi_j)_{L^2([0,1])}.\end{aligned}$$

Questo significa che $f = Q^{1/2}g$ e cioè che $H = W_0^{1,2}([0,1])$. □

3.3 Cameron–Martin e integrale stocastico

In questa sezione riepilogheremo la situazione fin qui delineata. Se partiamo da una funzione semplice

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{t_i,t_{i+1}}(t),$$

con $c_i \in \mathbb{R}$ e $0 = t_1 < \ldots < t_{n+1} = 1$, allora l'integrale di Ito

$$\begin{aligned}I(\varphi)(\omega) &= \sum_{i=1}^n c_i(B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega)) \\ &= \sum_{i=1}^n c_i(\omega(t_{i+1}) - \omega(t_i))\end{aligned}$$

definisce un funzionale lineare e continuo su X. L'isometria di Ito implica inoltre che

$$\mathcal{E}\left[I(\varphi)^2\right] = \int_0^1 \varphi(t)^2 dt = \|\varphi\|_{L^2([0,1])}.$$

Quindi, per approssimazione, se ne deduce che

$$X^*_{\mathbb{P}W} \subset L^2([0,1]),$$

nel senso che $X^*_{\mathbb{P}W}$ può essere identificato, mediante l'isometria di Ito, con un sottospazio di $L^2([0,1])$ e che per ogni $h \in H$, denotato con φ_h l'unico elemento di $L^2([0,1])$ per cui $I(\varphi_h) = \hat{h}$, allora

$$|h|_H = \|\varphi_h\|_{L^2([0,1])}.$$

D'altra parte, se f è un funzionale lineare misurabile, allora $h = R_{\mathbb{P}W} f \in W_0^{1,2}([0,1])$ con $\varphi = h' \in L^2([0,1])$. Vogliamo far vedere che $f = I(\varphi)$; dato che sia f che $I(\varphi)$ definiscono funzionali lineari misurabili, basta far vedere che coincidono su H, cioè che per ogni $\psi \in W_0^{1,2}([0,1])$,

$$f(\psi) = (Qf.\psi)_H = (h, \psi)_H = \int_0^1 h'(t)\psi'(t)dt = \int_0^1 \varphi(t)\psi'(t)dt.$$

Notiamo che, dalla regolarità di ψ, si deduce che

$$\begin{aligned}\int_0^1 \varphi(t)\psi'(t)dt &= \int_0^1 \varphi(t)d\psi(t)\\ &= \int_0^1 \varphi(t)dB_t(\psi)\\ &= I(\varphi)(\psi)\end{aligned}$$

come si deduce approssimando φ in $L^2([01])$ mediante funzioni semplici. Questo conclude la dimostrazione.

Capitolo 4

Il problema isoperimetrico

In questo capitolo affronteremo il problema isoperimetrico nello spazio di Gauss; affronteremo anzitutto il caso finito dimensionale, richiamando le principali proprietà degli insiemi di perimetro finito. Generalizzeremo quindi i risultati ottenuti al caso infinito dimensionale.

In questa sezione denoteremo con I la funzione isoperimetrica; tale funzione è definita

4.1 Caso finito dimensionale

In questa sezione considereremo il caso finito dimensionale, iniziando prima con il caso unidimensionale per poi passare al caso infinito-dimensionale. Ricordiamo alcune definizioni e risultati riguardanti le funzioni a variazione limitata e gli insiemi di perimetro finito.

Data una funzione $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$ e dato un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, si definisce la variazione totale di u su Ω come

$$|Du|(\Omega) = \left\{ \int_\Omega u \mathrm{div}\varphi dx : \varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^d), |\varphi(x)| \leq 1 \, \forall x \in \Omega \right\}.$$

Una funzione per cui $|Du|(\Omega) < +\infty$ viene detta a variazione limitata su Ω e scriveremo $u \in BV(\Omega)$. Diremo che u ha localmente variazione totale limitata in un aperto Ω, e scriveremo $u \in BV_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ se per ogni $A \Subset \Omega$ relativamente compatto in Ω $u \in BV(A)$.

Il fatto che una funzione $u \in L^1(\Omega)$ sia a variazione limitata in Ω, $u \in BV(\Omega)$, è equivalente ad ognuna delle seguenti condizioni;

1. esite una successione di funzioni regolari $(u_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset C^\infty(\Omega)$ tale che

$$\lim_{j \to +\infty} \int_\Omega |u - u_j| dx = 0, \qquad \sup_{j \to +\infty} \int_\Omega |\nabla u_j| dx < +\infty;$$

2. esiste una misura finita $\mu_u \in \mathscr{M}_f(\Omega, \mathbb{R}^d)$ tale che

$$\int_\Omega u \mathrm{div}\varphi dx = -\int_\Omega \varphi \cdot d\mu_u = \int_\Omega \varphi \cdot \nu^u d|\mu_u|, \qquad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^d),$$

dove abbiamo scritto $\mu_u = \nu^u |\mu_u|$ per la decomposizione polare della misura μ_u derivante dal Teorema di Radon-Nikodym, con $\sigma_u \in L^1(\Omega, |\mu_u|)$.

Valgono inoltre le seguenti identità:

$$|Du|(\Omega) = |\mu^u|(\Omega) = \inf\left\{\liminf_{j\to+\infty}\int_\Omega |\nabla u_j| dx : (u_j)_{j\in\mathbb{N}}, u_j \to u \text{ in } L^1(\Omega)\right\}.$$

La successione approssimante u_j può essere presa mediante convoluzione, nel senso che se ϱ è un nucleo di convoluzione standard, allora la funzione

$$u_j = u * \varrho_j, \qquad \varrho_j(x) = \varepsilon_j \varrho\left(\frac{x}{\varrho_j}\right)$$

con $\varepsilon \to 0$ è una successione di funzioni regolari che non solo converge ad u in $L^1(\Omega)$ ma ha anche la proprietà che

$$\lim_{j\to+\infty}\int_\Omega |\nabla u_j| dx = |Du|(\Omega)$$

In modo del tutto analogo si possono definire le funzioni a variazione Gaussiana finita, ponendo per $u \in L^1(\mathbb{R}^d, \gamma_d)$,

$$|D_{\gamma_d} u|(\Omega) = \left\{\int_\Omega u \operatorname{div}_{\gamma_d}\varphi d\gamma_d : \varphi \in C^1_c(\Omega), |\varphi(x)| \le 1,\ \forall x \in \Omega\right\},$$

dove la divergenza Gaussiana $\operatorname{div}_{\gamma_d}$ è definita come

$$\operatorname{div}_{\gamma_d}\varphi(x) = \operatorname{div}\varphi(x) - \varphi(x)\cdot x.$$

Diremo quindi che u ha variazione Gaussiana finita, e scriveremo $u \in BV(\Omega, \gamma_d)$, se $|D_{\gamma_d} u|(\Omega) < +\infty$.

Dato che su ogni palla B_R valgono le seguenti disuguaglianze

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{R^2}{2}} \mathscr{L}^d \le \gamma_d \le \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{s}}} \mathscr{L}^d,$$

si ottiene facilmente che se $u \in BV(\Omega)$, allora $u \in BV(\Omega, \gamma_d)$, mentre se $u \in BV(\Omega, \gamma_d)$ allora $u \in BV_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Inoltre, se scriviamo $Du = \mu_u$ e $D_{\gamma_d} u$ le misure che vengono definite dall'appartenza di u in $BV(\Omega)$ e $BV(\Omega, \mathbb{R}^d)$ rispettivamente, allora

$$dD_{\gamma_d} u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2}} dDu(x).$$

Un insieme $E \subset \mathbb{R}^d$ si dice di perimetro finito in Ω se $\mathbf{1}_E \in BV(\Omega)$ e si denota con $P(E, \cdot)$ la misura perimetro di E, cioè la misura

$$P(E, \cdot) = |D\mathbf{1}_E|(\cdot) = |\mu_E|(\cdot).$$

Per gli insiemi di perimetro finito valgono i seguenti risultati; anzitutto, scritta $\mu_E = \nu^E|\mu_E|$, dal Teorema di Besocovitch, per $|\mu_E|$–q.o. $x \in \Omega$,

$$\nu^E(x) = \lim_{\varrho\to 0}\frac{\mu_E(B_\varrho(x))}{|\mu_E|(B_\varrho(x))};$$

quindi, se definiamo la frontiera ridotta di E mediante

$$\mathscr{F}E = \left\{x \in \operatorname{spt}(|\mu_E|) : \exists \nu^E(x) = \lim_{\varrho}\frac{\mu_E(B_\varrho(x))}{|\mu_E|(B_\varrho(x))},\ |\nu^E(x)| = 1\right\},$$

si ottiene subito che $|\mu_E|(\Omega \setminus \mathscr{F}E) = 0$, cioè la misura μ_E si concentra sulla frontiera ridotta di E.

De Giorgi dimostrò, per ogni $x \in \mathscr{F}E$, i seguenti fatti:

1. per ogni $\varepsilon_j \to 0$,

4.1.1 Caso uni–dimensionale

In questa sezione considereremo il caso uni–dimensionale; ricordiamo che nel caso $d = 1$, un insieme $E \subset \mathbb{R}$ ha perimetro finito se e solo se E è equivalente all'uniione finita di intervalli di $\mathbb{R}$; avremo quindi che E ha perimetro Gaussiano finito se e solo se E è equivalente all'unione al più numerabile di intervalli

$$\bigcup_{h \in S} (a_h, b_h), \qquad S \subset \mathbb{N};$$

inoltre vale la seguente identità

$$P_{\gamma_1}(E) = \sum_{h \in S} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{a_h^2}{2}} + e^{-\frac{b_h^2}{2}} \right).$$

Lemma 4.1 *Siano $-\infty \leq a < b \leq +\infty$; allora, se $a + b \geq 0$, dati $a < \bar{a} < \bar{b}$ tali che $\gamma_1(a, b) = \gamma_1(\bar{a}, \bar{b})$, vale*

$$P_{\gamma_1}(a, b) > P_{\gamma_1}(\bar{a}, \bar{b}).$$

Dimostrazione. Se $a \geq 0$ o se $a < 0$ e $\bar{a} > -a$, allora la dimostrazione è banale in quanto in tal caso

$$\sqrt{2\pi} P_{\gamma_1}(a, b) = e^{-\frac{a^2}{2}} + e^{-\frac{b^2}{2}} > e^{-\frac{\bar{a}^2}{2}} + e^{-\frac{\bar{b}^2}{2}}.$$

Supponiamo quindi $a < 0$; allora $b > -a$. Possiamo quindi porre $\bar{a} = x \in (a, -a)$ e $\bar{b} = \bar{b}(x)$ definita implicitamente dalla relazione

$$\int_x^{\bar{b}(x)} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Da quest'ultima relazione si deduce che

$$\bar{b}'(x) e^{-\frac{\bar{b}(x)^2}{2}} = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Quindi se definiamo $g : [a, -a] \to \mathbb{R}$

$$g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} + e^{-\frac{\bar{b}(x)^2}{2}},$$

otteniamo che

$$g'(x) = -x e^{-\frac{x^2}{2}} - \bar{b}(x)\bar{b}'(x) e^{-\frac{\bar{b}(x)^2}{2}} = -(x + \bar{b}(x)) e^{-\frac{x^2}{2}} \leq 0$$

in quanto $x \geq a, \bar{b}(x) \geq b$ e quindi $x + \bar{b}(x) \geq a + b \geq 0$. Da qui la monotonia di g e quindi il risultato. □

Il precedente lemma ci dice che dato un intervallo (a, b) tale che $a + b \geq 0$, allora effettuando la traslazione a destra dell'intervallo, quando possibile, si può costruire un intervallo col la stessa misura Gaussiana ma con perimetro Gaussiano strettamente inferiore. Ovviamente, se (a, b) soddisfa la condizione $a + b \leq 0$, l'operazione che fa calare il perimetro sarà una traslazione a sinistra. Possiamo quindi dimostrare il seguente risultato.

Proposizione 4.2 *Sia $E \subset \mathbb{R}$ un insieme di perimetro Gaussiano finito; allora se $e \in \mathbb{R}$ è tale che*

$$\gamma_1(E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{e} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

denotando con $E_e = (-\infty, e)$, si ottiene che

$$\gamma_1(E) = \gamma_1(E_e), \qquad P_{\gamma_1}(E) \geq P_{\gamma_1}(E_e)$$

con uguaglianza se e solo se E è equivalente ad una semiretta.

Dimostrazione. Dato che E ha perimetro Gaussiano finito, se ne deduce che a meno di insiemi di misura nulla

$$E = \bigcup_{h \in S} (a_h, b_h)$$

con $S \subset \mathbb{N}$; inoltre, se per $k \in S$ $a_k > -\infty$ e $b_k < +\infty$, allora

$$\mathrm{dist}(E \setminus (a_k, b_k), (a_k, b_k)) > 0$$

percheè localmente S è l'unione finita di intervalli. Nel caso in cui $a_k + b_k$, si effettua una traslazione a destra come segue; altrimenti si effettua una traslazione a sinistra. Se denotiamo con $j \in S$ l'indice per cui $\mathscr{L}^1((b_k, a_j) \cap E) = 0$, allora l'intervallo $(\bar{a}_h, \bar{b}_h)$ costruito in modo tale che $\bar{b}_h = a_j$, si trova che

$$P_{\gamma_1}(a_h, b_h) > P_{\gamma_1}(\bar{a}_h, \bar{b}_h).$$

In particolare, se sostituiamo i due intervalli (a_h, b_h) e (a_j, b_j) con l'unico intervallo $(\bar{a}_h, b_j)$, si ottiene che il perimetro è calato.

Iterando tale procedimento, si arriva a costruire un insieme E_1 con la stessa misura di E e con perimetro minore della forma

$$E_1 = (-\infty, a) \cup (b, +\infty), \qquad a < b.$$

Si avrà $a > -\infty$ se esiste almeno un $h \in S$ per cui $a_h + b_h < 0$, mentre $b_h < +\infty$ se esiste almeno un $h \in S$ per cui $a_h + b_h \geq 0$.

Almeno uno tra a e b è finito; se solo uno di essi è finito, allora abbiamo concluso perchè quindi E_1 è una semiretta, con l'unica accortezza di considerare $E_e = (-\infty, -b)$ se $a = -\infty$. Se entrambi tra a e b sono finiti, si considera l'insieme $E_2 = (a, b)$; se $a + b \geq 0$, si sostituisce E_2 con $E_3 = (\bar{a}, +\infty)$ tale che $\gamma_1(E_3) = \gamma_1(E_2)$. L'insieme $E_4 = (-\infty, \bar{a})$ conclude la dimostrazione. Nel caso $a + b < 0$, si sostituisce E_2 con $E_3 = (-\infty, \bar{a})$ con $\bar{a}$ tale che $\gamma_1(E_3) = \gamma_1(E_2)$; la dimostrazione quindi si conclude considerando $E_4 = (-\infty, -\bar{a})$. □

Passiamo quindi al caso multi-dimensionale.

4.1.2 Simmetrizzazione di Ehrhard

Useremo la seguente notazione: per $x \in \mathbb{R}^d$, scriviamo $x = (y, z)$ con $y \in \mathbb{R}^{d-1}$ e $z \in \mathbb{R}$ e denotiamo

$$E_y = \{z \in \mathbb{R} : (y, z) \in E\} \subset \mathbb{R};$$

denotiamo inoltre con

$$\pi_+(E) = \{y \in \mathbb{R}^{d-1} : \gamma_1(E_y) > 0\}$$

la proiezione essenziale di E su $\mathbb{R}^{d-1}$.

Ricordiamo il seguente risultato:

Teorema 4.3 (Vol'pert) *Sia $E \subset \mathbb{R}^d$ un insieme di perimetro euclideo localmente finito; allora esiste un insieme di Borel $B_E \subset \pi_+(E)$ con $\mathscr{L}^{d-1}(\pi_+(E) \setminus B_E) = 0$ tale che per ogni $y \in B_E$:*

1. *E_y è un insieme di perimetro localmente finito;*
2. *$(\partial^* E)_y = \partial^*(E_y) = \mathscr{F}(E_y) = (\mathscr{F} E)_y$;*
3. *$\nu_z^E(y,z) \neq 0$ per ogni z tale che $(y,z) \in \mathscr{F}(E_y)$.*

Ricordiamo anche la seguente versione della formula di coarea:

$$\int_{\mathscr{F} E} g(x)|\nu_z^E(x)| d\mathcal{H}^{d-1}(x) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} dy \int_{(\mathscr{F} E)_y} g(y,z) d\mathscr{H}^0(z).$$

Definiamo quindi $v_E : \mathbb{R}^{d-1} \to [0,1]$ come

$$v_E(y) = \gamma_1(E_y)$$

e il simmetrizzato di Ehrhard E^s di E in direzione z

$$E^s = \{(y,z) : z > z(y)\}, \qquad z(y) = \Phi^{-1}(v_E(y)).$$

È chiaro per costruizione che $\gamma_d(E^s) = \gamma_d(E)$; inoltre i perimetri delle sezioni uni–dimensionali sono calati in quanto se definiamo $p_E : \mathbb{R}^{d-1} \to [0,+\infty]$

$$p_E(y) = \mathscr{H}_\gamma^0(\partial^* E_y), \qquad y \in \mathbb{R}^{d-1}.$$

Per quanto visto nel caso uni–dimensionale, $p_E(y) \geq p_{E^s}(y)$. Abbiamo in effetti il seguente risultato più preciso.

Teorema 4.4 *Sia $d \geq 2$ ed E un insieme di perimetro Gaussiano finito in $\mathbb{R}^d$; allora, per ogni insieme di Borel $B \subset \mathbb{R}^{d-1}$,*

$$P_{\gamma_d}(E^s, B \times \mathbb{R}) \leq P_{\gamma_d}(E, B \times \mathbb{R}).$$

Se poi

$$\mathcal{H}_\gamma^{d-1}(\{x \in \mathscr{F} E : \nu_z^E(x) = 0\}) = 0,$$

allora anche

$$\mathcal{H}_\gamma^{d-1}(\{x \in \mathscr{F} E^s : \nu_z^{E^s}(x) = 0\}) = 0$$

ed in più $v_E \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{d-1})$ con

$$P_{\gamma_d}(E^s) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \sqrt{p_{E^s}(y) + |\nabla v_E(y)|^2} d\gamma_{d-1}(y).$$

Lemma 4.5 *Sia $E \subset \mathbb{R}^d$ un insieme di perimetro Gaussiano finito con $d \geq 2$. Allora $v_E \in BV_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{d-1})$; si ha inoltre che per ogni $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^{d-1})$*

$$|D_{\gamma_{d-1}} v_E|(B) \leq P_{\gamma_d}(E, B \times \mathbb{R})$$

e

$$D_i v_E(y) = \int_{(\mathscr{F} E)_y} \frac{\nu_i^E(y,z)}{|\nu_z^E(y,z)|} d\mathscr{H}_{\gamma_d}^0(z), \quad i = 1, \ldots, d-1$$

per $\mathscr{L}^{d-1}$–q.o. $y \in B_E$.

Dimostrazione. [Chlebik-Cianchi-Fusco,Annals of Math (2005), vol.162, 525–555]. □

Notiamo che se nel lemma precedente prendiamo $E = E^s$, allora

$$(\mathscr{F}E^s)_y = \{z(y)\}$$

e quindi

$$D_i v_{E^s}(y) = \frac{\nu_i^{E^s}(y, z(y))}{|\nu_z^{E^s}(y, z(y))|} e^{-\frac{|z(y)|^2}{2}}$$

Lemma 4.6 *Sia $E \subset \mathbb{R}^d$ un insieme di perimetro Gaussiano finito con $d \geq 2$. Allora per ogni $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^{d-1})$*

$$P_{\gamma_d}(E^s, B \times \mathbb{R}) \leq |D_{\gamma_{d-1}} v_E|(\mathbb{R}^d) + \int_B p_{E^s}(y) d\gamma_{d-1}(y);$$

in particolare

$$P_{\gamma_d}(E^s, B \times \mathbb{R}) \leq P_{\gamma_d}(E, B \times \mathbb{R})$$

per ogni B tale che $\mathscr{L}^{d-1}(B \cap B_E) = 0$.

Dimostrazione. Approssiamo B con aperti regolari e limitati; notiamo che per ogni $v \in C^1(\Omega)$ con $0 \leq v \leq 1$ e $\varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^{d-1})$ con $|\varphi(y)| \leq 1$, scritto $\varphi = (\tilde{\varphi}, \varphi_d)$ e posto

$$F = \{(y, z) : z > z(y)\}, \qquad z(y) = \Phi^{-1}(v(y)),$$

si ottiene

$$\int_F \operatorname{div}_{\gamma_d} \varphi(x) d\gamma_d(x) = \int_F \operatorname{div}_{\gamma_{d-1}} \tilde{\varphi}(y, z) d\gamma_d(y, z) + \int_F \operatorname{div}_{\gamma_1} \varphi_d(y, z) d\gamma_d(y, z).$$

Calcoliamo il primo integrale, tendo conto che

$$\nabla v(y) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2(y)}{2}} \nabla z(y);$$

si ottiene che

$$\int_F \operatorname{div}_{\gamma_{d-1o}} \tilde{\varphi}(y, z) d\gamma_d(y, z) = \int_\Omega \operatorname{div}_{\gamma_{d-1o}} \tilde{\varphi}(y, z) d\gamma_d(y, z).$$

Stimiamo il primo integrale;

$$\begin{aligned}
\int_F \operatorname{div}_{\gamma_{d-1}} \tilde{\varphi}(y, z) d\gamma_d(y, z) &= \int_{\mathbb{R}} \int_\Omega \mathbf{1}_{(z(y), +\infty)}(z) \operatorname{div}_{\gamma_{d-1}} \tilde{\varphi}(y, z) d\gamma_{d-1}(y) d\gamma_1(z) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\Omega \nabla_y \tilde{\varphi}(y, z(y)) \nabla z(y) e^{-\frac{z(y)^2}{2}} d\gamma_{d-1}(y) \\
&= \int_\Omega \nabla_y \tilde{\varphi}(y, z(y)) \nabla v(y) d\gamma_{d-1}(y) \\
&\leq \int_\Omega |\nabla v(y)| d\gamma_{d-1}(y).
\end{aligned}$$

Data quindi v_E, possiamo trovare una successione di funzioni regolari $v_j \in C^1(\Omega)$ con $0 \leq v_j \leq 1$,

$$\|v_j - v_E\|_{L^1(\Omega, \gamma_{d-1})} \to 0, \qquad \int_\Omega |\nabla v_j(y)| d\gamma_{d-1}(y) \to |D_{\gamma_{d-1}} v_E|(\Omega).$$

In questo modo, se consideriamo gli F_J e F associati rispettivamente alle v_j e a v_E, abbiamo che $\mathbf{1}_{F_j} \to \mathbf{1}_F$; quindi

$$\begin{aligned}\int_{E^s} \mathrm{div}_{\gamma_d} \varphi d\gamma_d &= \int_{E^s} \mathrm{div}_{\gamma_{d-1}} \tilde{\varphi} d\gamma_d + \int_{E^s} \partial_z^* \varphi_d d\gamma_d \\ &= \lim_{j\to+\infty} \int_{F_1 j} \mathrm{div}_{\gamma_{d-1}} \tilde{\varphi} d\gamma_d - \int_{\mathscr{F} E^s} \varphi_d \nu_z^E d\mathcal{H}_\gamma^{d-1} \\ &\leq \lim_{j\to+\infty} \int_\Omega |\nabla v_j(y)| d\gamma_{d-1}(y) + \int_{\mathscr{F} E^s \cap (\Omega\times\mathbb{R})} |\nu_z^E| d\mathcal{H}_\gamma^{d-1} \\ &= |D_{\gamma_{d-1}} v_E|(\Omega) + \int_\Omega p_{E^s}(y) d\gamma_{d-1}(y)\end{aligned}$$

dove l'ultima identità segue dal Teorema di Vol'part. Passando all'estremo superiore in φ, si ottiene quindi che

$$P_{\gamma_d}(E^s, \Omega\times\mathbb{R}) \leq |D_{\gamma_{d-1}} v_E|(\Omega) + \int_\Omega p_{E^s}(y) d\gamma_{d-1}(y).$$

□

Lemma 4.7 *Sia $E \subset \mathbb{R}^d$ un insieme di perimetro Gaussiano finito, $d \geq 2$; allora per ogni $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^{d-1})$*

$$P_{\gamma_d}(E, B\times\mathbb{R}) \geq \int_B \sqrt{p_E(y)^2 + |\nabla v_E(y)|^2} d\gamma_{d-1}(y).$$

Dimostrazione. Possiamo applicare la formula di coarea **??** per ottenere che

$$\begin{aligned}P_{\gamma_d}(E, B\times\mathbb{R}) &= \int_{\mathscr{F} E\cap(B\times\mathbb{R})} \frac{|\nu_z^E|}{|\nu_z^E} d\mathcal{H}_\gamma^{d-1} = \int_B d\gamma_{d-1}(y) \int_{\mathscr{F} E_y} \frac{1}{|\nu_z^E|} d\mathscr{H}_\gamma^0 \\ &= \int_B p_E(y) \ \fint_{\mathscr{F} E_y} \sqrt{1 + \frac{\sum_{i=1}^{d-1} |\nu_{y_i}^E|^2}{|\nu_z^E|^2}} d\mathscr{H}_\gamma^0 d\gamma_{d-1}(y) \\ &\geq \int_B p_E(y) \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{d-1} \left(\fint_{\mathscr{F} E_y} \frac{\nu_{y_i}^E}{|\nu_z^E} d\mathscr{H}_\gamma^s \right)^2} d\gamma_{d-1}(y) \\ &= \int_B \sqrt{p_E(y)^2 + \sum_{i=1}^{d-1} \left(\int_{\mathscr{F} E_y} \frac{\nu_{y_i}^E}{|\nu_z^E} d\mathscr{H}_\gamma^s \right)^2} d\gamma_{d-1}(y) \\ &= \int_B \sqrt{p_E(y)^2 + |\nabla v_E(y)|^2} d\gamma_{d-1}(y).\end{aligned}$$

Notiamo poi che se $E \cap (B\times\mathbb{R}) = E^s \cap (B\times\mathbb{R})$, allora $\mathscr{F} E_y$ è o vuoto o costituito da un solo punto per q.o. $y \in B$, da cui l'uguaglianza nel punto precedente. □

Dimostrazione.[Teorema**??**] Grazie al Lemma**??**, possiamo considerare un insieme di Borel $B \subset B_E \cap B_{E^s}$; dal Lemma **??**, otteniamo che

$$\begin{aligned}P_{\gamma_d}(E, B\times\mathbb{R}) &\geq \int_B \sqrt{p_E(y)^2 + |\nabla v_E(y)|^2} d\gamma_{d-1}(y) \\ &\geq \int_B \sqrt{p_{E^s}(y)^2 + |\nabla v_{E^s}(y)|^2} d\gamma_{d-1}(y) = P_{\gamma_d}(E^s, B\times\mathbb{R}),\end{aligned}$$

da cui la (**??**). Supponiamo ora che valga (**??**); poniamo quindi

$$C_E = \{x \in \mathscr{F} E : \nu_z^E(x) = 0\}, \qquad C_{E^s} = \{x \in \mathscr{F} E^s : \nu_z^{E^s}(x) = 0\}.$$

Dalla condizione 3. nel Teorema di Vol'pert e dal Lemma **??**, otteniamo che

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{d-1}_{\gamma_d}(C_{E^s}) \leq & P_{\gamma_d}(E^s, (\mathbb{R}^{d-1} \setminus B_{E^s}) \times \mathbb{R}) \leq P_{\gamma_d}(E, (\mathbb{R}^{d-1} \setminus B_{E^s}) \times \mathbb{R}) \\ \leq & P_{\gamma_d}(E, C_E) + P_{\gamma_d}(E, (\mathbb{R}^{d-1} \setminus B_{E^s}) \times \mathbb{R}) \setminus C_E).\end{aligned}$$

Per ipotesi, $P_{\gamma_d}(E, C_E) = 0$; per il secondo termine, dalla formula di coarea (**??**)

$$P_{\gamma_d}(E, (\mathbb{R}^{d-1} \setminus B_{E^s}) \times \mathbb{R}) \setminus C_E) = \int_{\mathbb{R}^{d-1} \setminus B_{E^s}} d\mathcal{H}^{d-1}_{\gamma_d}(y) \int_{(\mathscr{F}E \setminus C_E)_y} \frac{1}{|\nu^E_z(y,z)|} d\mathscr{H}^0_\gamma(z),$$

che quindi è nullo per il Teorema di Vol'pert.

Notiamo infine, che sotto le precedenti ipotesi, abbiamo mostrato che

$$P_{\gamma_d}(E^s) = P_{\gamma_d}(E^s, B_{E^s} \times \mathbb{R}),$$

da cui la (**??**).

Resta da dimostrare che $v_E \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{d-1})$; basta dimostrare che se $\mathcal{H}^{d-1}(B) = 0$, allora $P_{\gamma_d}(E, B \times \mathbb{R}) = 0$. Basta applicare la cormua di coarea

$$P_{\gamma_d}(E, B \times \mathbb{R}) = P_{\gamma_d}(E, (B \times \mathbb{R}) \setminus C_E) = \int_B d\mathcal{H}^{d-1}_\gamma(y) \int_{(\mathscr{F}E \setminus C_E)_y} \frac{1}{|\nu^E_z(y,z)|} d\mathscr{H}^0_\gamma(z) = 0.$$

□

Possiamo quindi dimostrare il seguente teorema.

Teorema 4.8 *Sia $d \geq 2$; allora*

$$P_{\gamma_d}(E) \geq I(\gamma_d(E)) \tag{4.1}$$

dove la funzione isoperimetrica $I : [0,1] \to [0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}]$ è definita da $I(0) = I(1)$ e per $s \in (0,1)$

$$I(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\Phi^{-1}(s)^2}{2}}, \quad \Phi(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Si ha uguaglianza in (4.1) *se e solo se E è equivalente ad un semispazio.*

Dimostrazione. Bastta quindi dimostrare che per ogni $r \in (0,1)$, il minimo del problema

$$\min\{P_{\gamma_d}(E) : \gamma_d(E) = r\}$$

è dato da un semispazio. L'esistenza del minimo E di tale problema è un classico argomento che sfrutta la compattezza dell'immersione

$$BV(\mathbb{R}^d, \gamma_d) \subset L^1(\mathbb{R}^d, \gamma_d)$$

e dalla semicontinuità inferiore del funzionale perimetro rispetto alla convergenza $L^1(\mathbb{R}^d, \gamma_d)$.

Anzitutto, quasi ogni sezione uno–dimensionale di E è una semiretta; infatti, la minimalità assicura che $P_{\gamma_d}(E) = P_{\gamma_d}(E^s)$ e quindi

$$P_{\gamma_d}(E, B \times \mathbb{R}) = P_{\gamma_d}(E^s, B \times \mathbb{R})$$

per ogni Boreliano $B \subset \mathbb{R}^{dmu}$. In particlare,

$$P_{\gamma_d}(E, (B_E \cap B_{E^s}) \times \mathbb{R}) = P_{\gamma_d}(E^s, (B_E \cap B_{E^s}) \times \mathbb{R})$$

da cui il fatto che

$$p_E(y) = p_{E^s}(y), \qquad \mathscr{L}^{d-e} - -a.e. y \in \mathbb{R}^{d-1}.$$

Dimostriamo ora che E^1 è convesso; siano $x_1 = (y, z_1)$ e $x_2 = (y, z_2)$ due punti in E^1 e dimostriao che ogni $x = (y, z)$, con $z_1 < z < z_2$ appartiene ad E^1.

Sappiamo che per ogni $\varepsilon > 0$, esiste ϱ_ε tale che per ogni $\varrho < \varrho_\varepsilon$

$$\frac{\mathscr{L}^d(E \cap Q_\varrho(x_i))}{\mathscr{L}^d(Q_\varrho(x_i))} > 1 - \varepsilon, \qquad i = 1, 2.$$

Applicando Fubini,

$$\begin{aligned}(2\varrho)^d(1-\varepsilon) <& \mathscr{L}^d(E^1 \cap Q_\varrho(x_i)) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \mathscr{L}^1((E^1 \cap Q_\varrho(x_i))_y) d\mathscr{L}^{d-1}(y) \\ \leq& 2\varrho \mathscr{L}^{d-1}(\pi_+(E^1 \cap Q_\varrho(x_i))).\end{aligned}$$

In particolare

$$\mathscr{L}^{d-1}(\pi_+(E^1 \cap Q_\varrho(x_1)) \cap \pi_+(E^1 \cap Q_\varrho(x_2))) > (2\varrho)^{d-1}(1 - 2\varepsilon).$$

Siccome per quasi ogni $y \in \pi_+(E^1 \cap Q_\varrho(x_1)) \cap \pi_+(E^1 \cap Q_\varrho(x_2))$ l'insieme $(E^1)_y$ è una semiretta, per connessione e per ϱ sufficientemente piccolo, il segmento $(z - \varrho, z + \varrho)$ è contenuto in $(E^1)_y$, cioè il fatto che

$$\mathscr{L}^1((E^1 \cap Q_\varrho(x))_y) = 2\varrho.$$

In definitiva

$$\mathscr{L}^d(E^1 \cap Q_\varrho(x)) > (2\varrho)^d(1 - 2\varepsilon),$$

e quindi $x \in E^1$.

Quindi E^1 è convesso e quindi è un aperto convesso.

Si nota che l'insieme E^c è minimo per il problema

$$\min\{P_{\gamma_d}(E) : \gamma_d(E) = 1 - r\};$$

se ne deduce quindi che anche $(E^c)^1$ è un aperto convesso; siccome $\mathbb{R}^d$ è l'unione, a parte insiemi di misura nulla, dei due convessi E^1 ed $(E^c)^1$, ne ne deduce che E^1 deve essere un semispazio aperto.

□

Appendice A

Alcuni risultati di teoria della misura

A.1 Funzione caratteristica

In questa sezione ci occuperemo delle principali proprietà della funzione caratteristica o trasformata di Fourier di una misura $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$,

$$\hat{\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi \cdot x} d\mu(x).$$

Teorema A.1 *Valgono le seguenti proprietà:*

1. *se μ è una misura di probabilità di Borel, allora la funzione caratteristica è una funzione uniformemente continua, limitata con $\hat{\mu}(0) = 1$;*
2. *se la successione di misure μ_j converge debolmente nel senso delle misure a μ, allora $\hat{\mu}_j$ converge uniformemente sugli insiemi compatti di $\mathbb{R}^n$ alla funzione $\hat{\mu}$;*
3. *se la successione di funzioni caratteristiche $\hat{\mu}_j$, con μ_j misure di probabilità, converge puntualmente ad una funzione φ con φ continua in 0, allora esiste un'unica misura di probabilità $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ tale che $\hat{\mu} = \varphi$;*
4. *una misura di probabilità μ è univocamente determinata dalla sua funzione caratteristica.*

A.2 Misure equivalenti e misure singolari

Proposizione A.2 *Siano μ e ν due misure di probabilità su uno spazio misurabile $(\Omega, \mathscr{B})$; sia inoltre λ una misura su $\mathscr{B}$ tale che $\mu << \lambda$ e $\nu << \lambda$. Allora*

$$H(\mu, \nu) = \int_{\Omega} \sqrt{\frac{d\mu}{d\lambda}} \sqrt{\frac{d\nu}{d\lambda}} d\lambda$$

non dipende da λ e

$$2(1 - H(\mu, \nu)) \leq |\mu - \nu|(\Omega) \leq 2\sqrt{1 - H(\mu, \nu)^2}.$$

Dimostrazione. Basta scrivere $\mu = p\lambda$ e $\nu = q\lambda$ e notare che

$$|\mu - \nu|(\Omega) = \|p - q\|_{L^1(\Omega,\lambda)}.$$

Inoltre, siccome

$$(\sqrt{p} - \sqrt{q})^2 \leq |p - q| = |\sqrt{p} - \sqrt{q}||\sqrt{p} + \sqrt{q}|,$$

integrando e usando la disuguaglianza di Hölder si ottiene il teorema. □

A.3 Speranza condizionale

A.4 Convergenze di funzioni

Ricordiamo qui il seguente risultato.

Proposizione A.3 *Sia f_n una successione di funzioni che converge in misura a 0; allora, a meno di sottosuccessioni, f_n converge a 0 quasi ovunque.*

Appendice B

Fatti finito-dimensionali

In questo capitolo raccogliamo alcuni risultati riguardanti l'analisi finito–dimensionale su cui abbiamo basato alcunu risultati infinito–dimensionali.

B.1 Forme di Dirichlet e semigruppi

B.1.1 Le condizioni di Bakry–Emery

B.2 Polinomi di Hermite

Studieremo qui i polinomi di Hermite, che, come vedremo, costituiscono una base ortonormali di autofunzioni per l'operatore di Ornstein–Uhlenbeck.

B.2.1 Caso uni–dimensionale

Inziamo col ragionare in $\mathbb{R}$ con la misura Gaussiana

$$d\gamma_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} d\mathscr{L}^1(x).$$

Definiamo, per ogni $k \in \mathbb{N}$ le funzioni

$$H_k(x) = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k!}} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^k}{dx^k} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Così ad esempio

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = x, \quad H_2(x) = x^2 - 1, \dots.$$

La funzione H_k è sempre un polinomio di grado k, quindi

$$\mathrm{span}(H_0, \dots, H_k)$$

coincide con lo spazio dei polinomi di grado k. Notando che

$$e^{\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}(x-\lambda)^2} = e^{\frac{x^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{d^k}{d\lambda^k} e^{-\frac{1}{2}(x-\lambda)^2}_{|\lambda=0},$$

si deduce che

$$e^{\lambda x-\frac{\lambda^2}{2}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{\sqrt{k!}}H_k(x). \tag{B.1}$$

Valgono inoltre le seguenti identità:

$$H_k'(x)=xH_k(x)-\sqrt{k+1}H_{k+1}(x)=\sqrt{k}H_{k-1}(x)$$

e

$$LH_k(x)=-kH_k(x).$$

Quindi le funzioni H_k sono autofunzioni per L con autovalori $-k$, $k\in\mathbb{N}$.

Proposizione B.1 *La famiglia $\{H_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ costituisce una base ortonormale in $L^2(\mathbb{R},\gamma_1)$.*

Dimostrazione. Notiamo che per ogni $t,s\in\mathbb{R}$ si ha che

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} e^{tx-\frac{t^2}{2}}e^{sx-\frac{s^2}{2}}d\gamma_1(x)=&\frac{e^{-\frac{s^2+t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x^2-2(s+t)x)}dx\\ =&\frac{e^{-\frac{s^2+t^2}{2}+\frac{(s+t)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x^2-2stx+(s+t)^2)}dx\\ =&e^{st}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{s^kt^k}{k!}.\end{aligned}$$

D'altra parte

$$\int_{\mathbb{R}} e^{sx-\frac{s^2}{2}}e^{tx+\frac{t^2}{2}}d\gamma_1(x)=\sum_{h,k=0}^{\infty}\frac{s^kt^h}{\sqrt{h!k!}}\int_{\mathbb{R}} H_h(x)H_k(x)d\gamma_1(x).$$

Quindi si deve avere

$$\int_{\mathbb{R}} H_h(x)H_k(x)d\gamma_1(x)=\delta_{hk}.$$

Supponiamo ora che $f\in L^2(\mathbb{R},\gamma_1)$ sia tale che

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)H_k(x)d\gamma_1(x)=0,\qquad \forall k\in\mathbb{N}.$$

Allora f è ortogonale, in $L^2(\mathbb{R},\gamma_1)$, ad ogni polinomio. Quindi la funzione olomorfa

$$F(z)=\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{izx}d\gamma_1(x)$$

ha la proprietà che

$$F^{(k)}(0)=0,\qquad \forall k\in\mathbb{N},$$

e quindi $F(z)=0$ per ogni $z\in\mathbb{C}$. Questo implica che la trasformata di Fourier della funzione

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

è nulla, cioè

$$\hat{g}(\xi)=0,\qquad \forall\xi\in\mathbb{R}.$$

Quindi $g(x)=0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$, da cui il fatto che $f(x)=0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$. □

B.2.2 Dimensione $d \geq 1$

In $\mathbb{R}^d$ con la misura

$$d\gamma_d(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2}} d\mathscr{L}^d(x)$$

si definiscono i polinomi di Hermite

$$H_\alpha(x) = H_{k_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot H_{k_d}(x_d)$$

per ogni multiindice $\alpha = (k_1, \ldots, k_d)$. Come per il caso $d = 1$ si può dimostrare che la famiglia

$$\{H_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}^d}$$

costituisce una base ortonoromale in $L^2(\mathbb{R}^d, \gamma_d)$. Denotato con

$$|\alpha| = |(k_1, \ldots, k_d)| = k_1 + \ldots + k_d,$$

si pone

$$\mathcal{X}_k = \operatorname{span}\{H_\alpha : |\alpha| = k\};$$

tali spazi sono ortogonali tra loro e

$$L^2(\mathbb{R}^d, \gamma_d) = \otimes_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{X}_k.$$

Denoteremo con $I_k : L^2(\mathbb{R}^d, \gamma_d) \to \mathcal{X}_k$ la proiezione ortogonale su $\mathcal{X}_k$. Notiamo che per il semigruppo di Ornstein–Uhlenbeck vale la seguente identità

$$T_t f = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kt} I_k(f), \qquad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^d, \gamma_d)$$

come facilmente verificato utilizzando la base ortonormale costituita dai polinomi di Hermite.

Infine, notiamo che nel caso $d = 1$, se $f \in C_b^\infty(\mathbb{R})$, allora

$$I_k(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x) H_k(x) d\gamma_1(x) = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k!}} \int_{\mathbb{R}} f^{(k)}(x) d\gamma_1(x).$$