Matematica ed statistica
Corso di Laurea in Biotecnologie - anno acc. 2014/2015

Esercizi sulle funzioni

Esercizio 1. Determinare il dominio delle seguenti funzioni:

- $f(x) = x + 2$; $R:\quad \mathbb{R}$
- $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3$; $R:\quad \mathbb{R}$
- $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$; $R:\quad x \neq -1$
- $f(x) = \sqrt{x-3}$; $R:\quad [3, +\infty[$
- $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x^2-1}}$; $R:\quad]-1, 0] \cup]1, +\infty[$
- $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-4}}{x^3}$; $R:\quad [4, +\infty[$
- $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 3x}$. $R:\quad \mathbb{R}$

Esercizio 2. Determinare il carattere delle seguenti funzioni (iniettiva, suriettiva, pari, dispari, limitata, eventuali punti di massimo e minimo assoluti o relativi) esplicitando anche dominio e codominio:

- $f(x) = x + 2$; $R:$ biiettiva, non limitata
- $f(x) = 2x^2 - 3$; $R:$ suriettiva in $[-3, +\infty[$, limitata inferiormente, minimo assoluto $y = -3$, punto di minimo assoluto in $x = 0$
- $f(x) = x - 8$; $R:$ biiettiva, non limitata
- $f(x) = |x+4|$; $R:$ suriettiva in $\mathbb{R}^+$, limitata inferiormente, minimo assoluto $y = 0$, punto di minimo assoluto in $x = -4$
- $f(x) = -3x^2$; $R:$ suriettiva in $]-\infty, 0]$, limitata superiormente, massimo assoluto $y = 0$, punto di massimo assoluto in $x = 0$, funzione pari
- $f(x) = -x^2 + 4x$; $R:$ suriettiva in $]-\infty, 4]$, limitata superiormente, massimo assoluto $y = 4$, punto di massimo assoluto in $x = 2$
- $f(x) = |x^2 - 3|$. $R:$ suriettiva in $[0, +\infty[$, limitata inferiormente, massimo relativo $y = 3$, punto di massimo relativo in $x = 0$, minimo assoluto $y = 0$,

punto di minimo relativo in $x = \sqrt{3}, x = -\sqrt{3}$

Esercizio 3. Determinare quando è possibile $f \circ g$ e $g \circ f$:

- $f(x) = x + 2$, $g(x) = x - 3$; $R: \quad f \circ g = g \circ f = x - 1$
- $f(x) = 2x^2+1$, $g(x) = -x+2$; $R: \quad f \circ g = 2(-x+2)^2+1, g \circ f = -(2x^2+1)+2$
- $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = x^4$; $R: \quad f \circ g$ non si può fare, $g \circ f = \frac{1}{x^4}$
- $f(x) = \sqrt{x-3}$, $g(x) = \frac{x^2}{x+2}$; $R: \quad f \circ g$ non si può fare, $g \circ f = \dfrac{(\sqrt{x-3})^2}{\sqrt{x-3}+2}$
- $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = |x-2|$; $R: \quad f \circ g = \sqrt{|x-2|}$, $g \circ f = |\sqrt{x} - 2|$
- $f(x) = \dfrac{x}{x^2+2}$, $g(x) = \sqrt[3]{x+9}$; $R: \quad f \circ g = \dfrac{\sqrt[3]{x+9}}{(\sqrt[3]{x+9})^2+2}$, $g \circ f = \sqrt[3]{\dfrac{x}{x^2+2}+9}$
- $f(x) = \sqrt{x^2-7x+4}$, $g(x) = x + 3$. $R: \quad f \circ g$ non si può fare, $g \circ f = \sqrt{x^2-7x+4}+3$

Esercizio 4. Determinare quando è possibile l'inversa delle seguenti funzioni:

- $f(x) = x + 4$; $R: \quad f^{-1}(x) = x - 4$
- $f(x) = x^2 - 2$; $R:$ non è iniettiva
- $f(x) = x - 1$; $R: \quad f^{-1}(x) = x + 1$
- $f(x) = -2x^2 + 8$; $R:$ non è iniettiva
- $f(x) = |x - 5|$ $R:$ non è iniettiva.

Esercizi sulle funzioni esponenziali

Esercizio 5. Determinare il dominio delle seguenti funzioni:

- $f(x) = e^{x+4}$; $R: \quad \mathbb{R}$
- $f(x) = e^{x^2-2}$; $R: \quad \mathbb{R}$

- $f(x) = \dfrac{x-1}{2^x}$; $R:\quad \mathbb{R}$
- $f(x) = e^{\frac{x+2}{x-3}}$;$R:\quad x \neq 3$
- $f(x) = e^{|x+1|}$; $R:\quad \mathbb{R}$
- $f(x) = e^{\sqrt{x^2-4}}$; $R:\quad]-\infty,-2] \cup [2,+\infty[$
- $f(x) = \sqrt{3^x}$; $R:\quad \mathbb{R}$
- $f(x) = \dfrac{x+4}{e^{-3x+1}}$ $R:\quad \mathbb{R}$.

Esercizio 6. Risolvere le seguenti equazioni:

- $2^x = 8$; $R:\quad x = 3$
- $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x} = 2^4$; $R:\quad x = -2$
- $3^x + 9 = 0$; $R:$ impossibile
- $e^x - 1 = 0$; $R:\quad x = 0$
- $e^{2x} + 3e^x = 0$; $R:$ impossibile
- $\dfrac{e^{x-4}}{e^{x+7}} = 0$; $R:$ impossibile
- $e^{3x} + e^x = 0$. $R:$ impossibile

Esercizio 7. Risolvere le seguenti disequazioni:

- $2^x \geq 16$; $R:\quad x \geq 4$
- $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x} \geq \dfrac{1}{27}$; $R:\quad x \leq 3$
- $e^x < -1$; $R:$ impossibile
- $e^x \leq e^4$; $R:\quad x \leq 4$
- $2e^x - 2 > 0$; $R:\quad x > 0$

- $\dfrac{e^{x^2-9}}{3x+5} \leq 0; R: \quad x < -\dfrac{5}{3}$
- $\left(\dfrac{1}{5}\right)^x \leq \dfrac{1}{25}.\ R: \quad x \geq 2$

Esercizi sulle funzioni logaritmiche

Esercizio 8. Determinare il dominio delle seguenti funzioni:

- $f(x) = \log x - 18;\ R: \quad x > 0$
- $f(x) = \ln(x^2-2); R: \quad]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$
- $f(x) = \dfrac{\ln(x-1)}{2^x};\ R: \quad x > 1$
- $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2-25}{x+4}\right); R: \quad]-5,-4[\cup]5,+\infty[$
- $f(x) = \log|x+4|; R: \quad \mathbb{R} \setminus \{-4\}$
- $f(x) = \sqrt{\ln x + 7}; R: \quad [e^{-7}, +\infty[$
- $f(x) = \ln(2e^x); R: \quad \mathbb{R}$
- $f(x) = \dfrac{x+4}{\ln(-3x+1)}.\ R: \quad x < \dfrac{1}{3} \wedge x \neq 0$

Esercizio 9. Risolvere le seguenti equazioni:

- $5\ln x = 0;\ R: \quad x = 1$
- $\ln(2x) - 9 = 0;\ R: \quad x = \dfrac{e^9}{2}$
- $3\log x + 9 = 0;\ R: \quad x = e^{-3}$
- $\ln\left(\dfrac{x-1}{x+4}\right) = 0; R: \quad \text{impossibile}$
- $\dfrac{\ln x - 1}{\ln(x+4)} = 0.\ R: \quad x = e$

Esercizio 10. Risolvere le seguenti disequazioni:

- $\log x \geq 10;\ R: \quad x \geq 10^{10}$

- $\log_{\frac{1}{3}} x \geq 1$; $R: \quad 0 < x \leq \frac{1}{3}$ (N.B: bisogna sempre tenere conto del dominio del logaritmo)
- $\ln x - 7 < -1$;$R: \quad 0 < x < e^6$
- $\ln(x+3) - \ln(x^2 - 27) \geq 0$; $R: \quad]\sqrt{27}, 6]$
- $\ln x^2 \leq 0$; $R: \quad [-1, 0[\cup]0, 1]$
- $\dfrac{\ln(x+12)}{3x-6} \leq 0$ $R: \quad -11 \leq x < 2.$

Esercizi sulle funzioni trigonometriche

Esercizio 11. Determinare il dominio delle seguenti funzioni:

- $f(x) = \cos(x+3)$;$R: \quad \mathbb{R}$
- $f(x) = \sin(x^2)$;$R: \quad \mathbb{R}$
- $f(x) = \tan x + 6$;$R: \quad \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- $f(x) = \dfrac{\cos(x-2)}{\sin x + 4}$;$R: \quad \mathbb{R}$
- $f(x) = \cos\left(\dfrac{x}{x^2 - 3x - 4}\right)$;$R: \quad x \neq 4, x \neq -1$
- $f(x) = 3\sin x + 4x^3$;$R: \quad \mathbb{R}$
- $f(x) = \sqrt{\cos x}$;$R: \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \vee \frac{3\pi}{2} \leq x < 2\pi$
- $f(x) = \ln \sin x$ $R: \quad 0 < x < \pi.$

Esercizio 12. Calcola coseno, seno, tangente e cotangente dei seguenti angoli: $\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{9\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{3}, \dfrac{12\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{3}, \dfrac{21\pi}{4}.$

Esercizio 13. Risolvere le seguenti equazioni:

- $\cos x = 6$;$R: \quad$ impossibile
- $\cos x = \dfrac{1}{2}$;$R: \quad x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{3}$
- $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $R: \quad x = \frac{3\pi}{4}, x = \frac{5\pi}{4}$

- $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $R:\quad x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{2\pi}{3}$
- $\sin x = \cos x$; $R:\quad x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{5\pi}{4}$
- $\sin(3x+5) = \sin(8x^2)$; $R:$ è equivalente a risolvere le due equazioni di secondo grado: $3x+5 = 8x^2$ e $3x+5 = \pi - 8x^2$
- $\tan x = -1$. $R:\quad x = \frac{3\pi}{4}, x = \frac{7\pi}{4}$

Esercizio 14. Risolvere le seguenti disequazioni:

- $\cos x \geq \dfrac{1}{2}$; $R:\quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \vee \frac{5\pi}{3} \leq x < 2\pi$
- $\sin x \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;$R:\quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \vee \frac{3\pi}{4} \leq x < 2\pi$
- $\cos x + 4 \leq 0$; $R:$ impossibile
- $\cos x + 4 \geq 0$; $R:\quad \mathbb{R}$
- $\cos(x + \dfrac{\pi}{3}) \leq 0$; $R:\quad \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{7\pi}{6}$
- $\cos(x + \dfrac{5\pi}{4}) \geq 0$; $R:\quad \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4}$
- $\sin x \cos x \geq 0$;$R:\quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \vee \pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$
- $\sin x < \cos x$. $R:\quad 0 < x < \frac{\pi}{4} \vee \frac{5\pi}{4} < x < 2\pi$

Altri esercizi

Esercizio 15. Dire se $f(x) = \dfrac{1}{x^2-3}$, $g(x) = \dfrac{1}{x^3+4}$ sono funzioni pari o dispari.

Esercizio 16. È data la funzione

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Determinare il dominio e stabilire se è limitata.

Esercizio 17. Disegnare il grafico di

$$f(x) = \begin{cases} 2x+6, & x \leq -1 \\ x^2 - 2x + 1, & x > -1. \end{cases}$$

Esercizio 18. Disegnare il grafico di $f(x) = |x+3| - 5$.

Esercizio 19. Data la funzione $y = f(x) = x\,|x|$, tracciarne il grafico. Provare che è invertibile e trovarne l'inversa.

Esercizio 20. Dopo aver disegnato il grafico di $f(x) = x^2 + x - 3$, dire qual è il dominio della funzione inversa.

Esercizio 21. A partire dal grafico della funzione $y = \log x$, tracciare un grafico qualitativo della funzione $y = f(x) = |\log x| + 3$.

Esercizio 22. Disegnare il grafico di

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \le 0 \\ -x+1, & 0 < x \le 1, \\ \log x, & x > 1 \end{cases}$$

e determinare i punti di massimo e di minimo.

Esercizio 23. Disegnare il grafico e determinare la periodicità delle funzioni $\cos(\frac{x}{2})$, $\sin(4x)$, $\tan(x) + 2$.