

Matematica con elementi di statistica
ESERCIZI sullo studio di funzioni
Corso di Laurea in Biotecnologie - anno acc. 2014/2015

Esercizi 8: Studio di funzioni

Studio di funzioni razionali fratte. Studiare le seguenti funzioni FINO alla derivata prima, tracciarne il grafico ed indicare gli eventuali punti di minimo e massimo (sono locali o assoluti?).

Esercizio 1. $f(x) = \frac{4 - 5x^2}{x^2 + x - 2}$

Esercizio 2. $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x + 5}$

Esercizio 3. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{9 - x^2}$

Esercizio 4. $f(x) = \frac{x^2}{x - 1}$

Esercizio 5. $f(x) = \frac{6 - x}{x^2 - 7x + 10}$

Esercizio 6. $f(x) = \frac{x^2 - 6x}{x + 2}$

Esercizio 7. $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 + 3x}$

Esercizio 8. $f(x) = \frac{x^2 - 8x}{x + 1}$

Studio di funzioni logaritmiche. Studiare le seguenti funzioni FINO alla derivata seconda, tracciarne il grafico ed indicare gli eventuali punti di minimo, massimo (sono locali o assoluti?) e punti di flesso.

Esercizio 9. $f(x) = x^3 \cdot (\ln x - 1)$

Esercizio 10. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

Esercizio 11. $f(x) = \frac{\ln(x^2)}{x}$

Esercizio 12. $f(x) = x \cdot \ln^2 x$

Esercizio 13. $f(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$

Esercizio 14. $f(x) = \ln \left(\frac{2x+5}{x-4} \right)$

Esercizio 15. $f(x) = \ln \left(\frac{3x-12}{x-6} \right)$

Esercizio 16. $f(x) = \ln \left(\frac{x-4}{2x+6} \right)$

Studio di funzioni irrazionali. Studiare le seguenti funzioni FINO alla derivata prima, tracciarne il grafico ed indicare gli eventuali punti di minimo, massimo (sono locali o assoluti?).

Esercizio 17. $f(x) = 1 - \sqrt{\frac{x}{x+1}}$

Esercizio 18. $f(x) = \sqrt{\frac{3x-6}{x+5}}$

Esercizio 19. $f(x) = \sqrt{\frac{2x+8}{x+6}}$

Esercizio 20. $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{2x-8}}$

Studio di funzioni esponenziali. Studiare le seguenti funzioni FINO alla derivata prima, tracciarne il grafico ed indicare gli eventuali punti di minimo, massimo (sono locali o assoluti?).

Esercizio 21. $f(x) = x^2 \cdot e^{-\frac{1}{x}}$

Esercizio 22. $f(x) = e^{\frac{1-x}{x^2}}$

Esercizio 23. $f(x) = e^{\frac{x+1}{2x-2}}$

Esercizio 24. $f(x) = x^3 \cdot e^{-x^3}$

Alcune soluzioni.

Soluzione. Esercizio 1

$$f(x) = \frac{4 - 5x^2}{x^2 + x - 2}$$

CLASSIFICAZIONE. È una funzione razionale fratta, poiché la variabile indipendente x compare anche al denominatore della frazione.

DOMINIO. Poiché nella funzione compare una frazione, per determinarne il dominio bisogna porre la condizione che il denominatore sia diverso da zero, e pertanto si deve avere:

$$x^2 + x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2; x \neq 1.$$

Il dominio della funzione è $D_f =] - \infty; -2[\cup] - 2; 1[\cup] 1; +\infty[$.

INTERSEZIONI CON GLI ASSI. Con l'asse y abbiamo:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{4 - 5x^2}{x^2 + x - 2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases}$$

Con l'asse x abbiamo:

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{4 - 5x^2}{x^2 + x - 2} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \frac{4 - 5x^2}{x^2 + x - 2} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} 4 - 5x^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{4}{5} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{\sqrt{5}}; x = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Pertanto la funzione interseca gli assi nei punti di coordinate $A(-\frac{2}{\sqrt{5}}; 0)$, $B(\frac{2}{\sqrt{5}}; 0)$, $C(0; -2)$.

SEGNO.

$$f(x) > 0 \Rightarrow \frac{4 - 5x^2}{x^2 + x - 2} > 0$$

$$\text{Num.} > 0 \Rightarrow 4 - 5x^2 > 0 \Rightarrow -\frac{2}{\sqrt{5}} < x < \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Den.} > 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 > 0 \Rightarrow x < -2; x > 1$$

$$\Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow -2 < x < -\frac{2}{\sqrt{5}}; \quad \frac{2}{\sqrt{5}} < x < 1;$$

ossia

$$f(x) > 0 \text{ per } x \in]-2; -\frac{2}{\sqrt{5}}[\cup]\frac{2}{\sqrt{5}}; 1[.$$

COMPORTAMENTO DELLA FUNZIONE IN PUNTI PARTICOLARI DEL DOMINIO. I punti importanti, per i quali è utile stabilire il comportamento della funzione, sono -2 , 1 , $-\infty$, $+\infty$.

Abbiamo che:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{4 - 5x^2}{x^2 + x - 2} &= \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{4 - 5x^2}{(x+2) \cdot (x-1)} = \frac{4 - 5 \cdot (-2^+)^2}{(-2^+ + 2) \cdot (-2^+ - 1)} = \\ &= \frac{-16}{(0^+) \cdot (-3)} = \frac{-16}{0^-} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{4 - 5x^2}{x^2 + x - 2} &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{4 - 5x^2}{(x+2) \cdot (x-1)} = \frac{4 - 5 \cdot (-2^-)^2}{(-2^- + 2) \cdot (-2^- - 1)} = \\ &= \frac{-16}{(0^-) \cdot (-3)} = \frac{-16}{0^+} = -\infty \end{aligned}$$

Avendo ottenuto due risultati infiniti per x tendente ad un valore finito (da destra e da sinistra), si può concludere che la retta di equazione $x = -2$ è un asintoto verticale per la funzione.

Abbiamo che:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4 - 5x^2}{x^2 + x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4 - 5x^2}{(x+2) \cdot (x-1)} = \frac{4 - 5 \cdot (1^+)^2}{(1^+ + 2) \cdot (1^+ - 1)} = \\ &= \frac{-1}{3 \cdot (0^+)} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4 - 5x^2}{x^2 + x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4 - 5x^2}{(x+2) \cdot (x-1)} = \frac{4 - 5 \cdot (1^-)^2}{(1^- + 2) \cdot (1^- - 1)} = \\ &= \frac{-1}{3 \cdot (0^-)} = \frac{-1}{0^-} = +\infty \end{aligned}$$

Avendo ottenuto due risultati infiniti per x tendente ad un valore finito (da destra e da sinistra), si può concludere che la retta di equazione $x = 1$ è un asintoto verticale per la funzione.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 - 5x^2}{x^2 + x - 2} = \frac{-\infty}{+\infty}$$

forma indeterminata, che si risolve mettendo in evidenza

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 - 5x^2}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(\frac{4}{x^2} - 5 \right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{4}{x^2} - 5}{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = -5$$

Similmente si ha:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 - 5x^2}{x^2 + x - 2} = -5.$$

Possiamo concludere che la funzione ammette come asintoto orizzontale la retta $y = -5$.

STUDIO DELLA DERIVATA PRIMA. Abbiamo che:

$$f'(x) = \frac{(-10x) \cdot (x^2 + x - 2) - (4 - 5x^2) \cdot (2x + 1)}{(x^2 + x - 2)^2} = \frac{-5x^2 + 12x - 4}{(x^2 + x - 2)^2}.$$

Studiamo il segno della derivata prima: poniamo $f'(x) > 0$, ossia

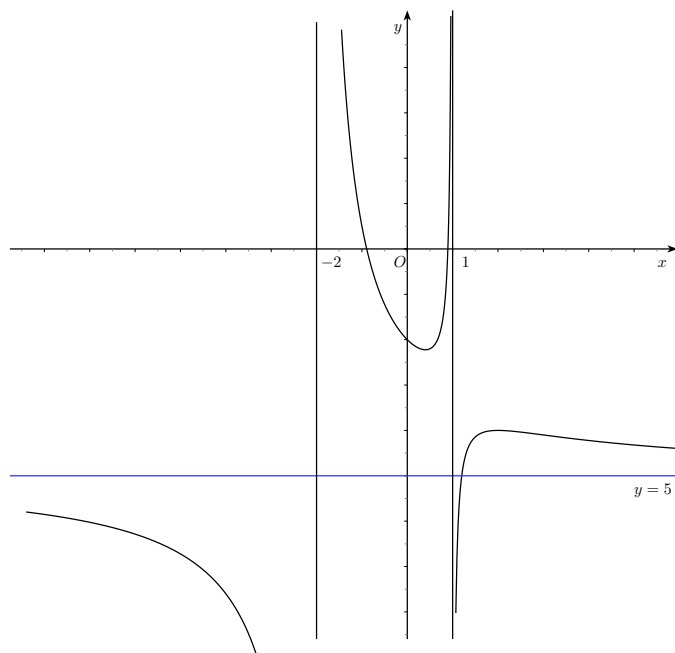
$$\frac{-5x^2 + 12x - 4}{(x^2 + x - 2)^2} > 0,$$

poiché $(x^2 + x - 2)^2 > 0$ per ogni x appartenente al dominio, è sufficiente porre

$$-5x^2 + 12x - 4 > 0 \Rightarrow \frac{2}{5} < x < 2.$$

Possiamo concludere che la funzione f è strettamente crescente per $x \in]\frac{2}{5}; 2[\cap D_f =]\frac{2}{5}; 1[\cup]1; 2[$, mentre f è strettamente decrescente per $x \in]-\infty; -2[\cup]-2; \frac{2}{5}[\cup]2; +\infty[$. Inoltre $x = \frac{2}{5}$ è un punto di minimo locale e $x = 2$ è un punto di massimo locale. Il minimo locale della funzione vale $f(\frac{2}{5}) = -\frac{20}{9}$, il massimo locale della funzione vale $f(2) = -4$.

GRAFICO.



Soluzione. Esercizio 2

$$f(x) = \frac{x^2 - 16}{x + 5}$$

CLASSIFICAZIONE. È una funzione razionale fratta, poiché la variabile indipendente x compare anche al denominatore della frazione.

DOMINIO. Poiché nella funzione compare una frazione, per determinarne il dominio bisogna porre la condizione che il denominatore sia diverso da zero, e pertanto si deve avere:

$$x + 5 \neq 0 \Rightarrow x \neq -5.$$

Il dominio della funzione è $D_f =] - \infty; -5[\cup] - 5; +\infty[$.

INTERSEZIONI CON GLI ASSI. Con l'asse y abbiamo:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{x^2 - 16}{x + 5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{16}{5} \end{cases}$$

Con l'asse x abbiamo:

$$\begin{aligned} \begin{cases} y &= 0 \\ y &= \frac{x^2 - 16}{x + 5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{x + 5} &= 0 \\ y &= 0 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 16 &= 0 \\ y &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4; & x = 4 \\ y &= 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Pertanto la funzione interseca gli assi nei punti di coordinate $C(0; -\frac{16}{5})$, $A(-4; 0)$, $B(4; 0)$.

SEGNO.

$$f(x) > 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 16}{x + 5} > 0$$

$$\text{Num.} > 0 \Rightarrow x^2 - 16 > 0 \Rightarrow x < -4; x > 4$$

$$\text{Den.} > 0 \Rightarrow x + 5 > 0 \Rightarrow x > -5$$

$$\Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow -5 < x < -4; x > 4;$$

ossia

$$f(x) > 0 \text{ per } x \in]-5; -4[\cup]4; +\infty[.$$

COMPORTAMENTO DELLA FUNZIONE IN PUNTI PARTICOLARI DEL DOMINIO. I punti importanti, per i quali è utile stabilire il comportamento della funzione, sono -5 , $-\infty$, $+\infty$.

Abbiamo che:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -5^+} \frac{x^2 - 16}{x + 5} &= \frac{(-5^+)^2 - 16}{-5^+ + 5} = \frac{9}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -5^-} \frac{x^2 - 16}{x + 5} &= \frac{(-5^-)^2 - 16}{-5^- + 5} = \frac{9}{0^-} = -\infty \end{aligned}$$

Avendo ottenuto due risultati infiniti per x tendente ad un valore finito (da destra e da sinistra), si può concludere che la retta di equazione $x = -5$ è un asintoto verticale per la funzione.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 16}{x + 5} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

forma indeterminata, che si risolve mettendo in evidenza

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 16}{x + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{16}{x^2}\right)}{x \left(1 + \frac{5}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 - \frac{16}{x^2}\right)}{1 + \frac{5}{x}} = +\infty$$

Similmente si ha:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 16}{x + 5} = -\infty.$$

Calcolando i limiti per x tendente all'infinito si sono ottenuti valori infiniti: di conseguenza si può affermare che la funzione non ammette asintoto orizzontale, allora vediamo se esiste l'asintoto obliquo. La funzione ammette come asintoto obliquo la retta $y = mx + q$ se esistono finiti i seguenti limiti:

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{e} \quad q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx).$$

Abbiamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 16}{x^2 + 5x} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

forma indeterminata, che si risolve mettendo in evidenza

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 16}{x^2 + 5x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{16}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{5}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{16}{x^2}}{1 + \frac{5}{x}} = 1$$

Similmente si ha:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 16}{x^2 + 5x} = 1.$$

Dunque $m = 1$.

Infine, abbiamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 16}{x + 5} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x - 16}{x + 5} = \frac{-\infty}{+\infty}$$

forma indeterminata, che si risolve mettendo in evidenza

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x - 16}{x + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(-5 - \frac{16}{x} \right)}{x \left(1 + \frac{5}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5 - \frac{16}{x}}{1 + \frac{5}{x}} = -5.$$

Similmente si ha:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - 16}{x + 5} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x - 16}{x + 5} = -5$$

Dunque $q = -5$. Possiamo concludere che la funzione ammette come asintoto obliquo la retta $y = x - 5$.

STUDIO DELLA DERIVATA PRIMA. Abbiamo che:

$$f'(x) = \frac{(2x) \cdot (x + 5) - (x^2 - 16) \cdot (1)}{(x + 5)^2} = \frac{x^2 + 10x + 16}{(x + 5)^2}.$$

Studiamo il segno della derivata prima: poniamo $f'(x) > 0$, ossia

$$\frac{x^2 + 10x + 16}{(x + 5)^2} > 0,$$

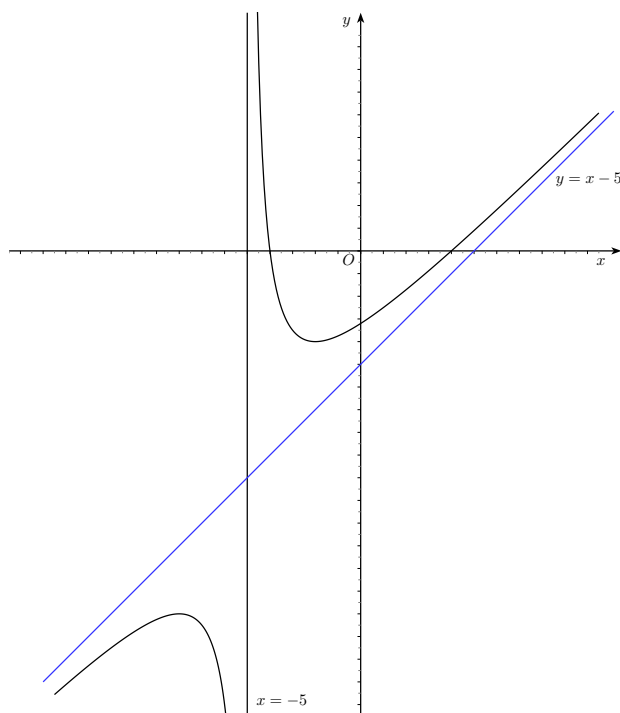
poiché $(x + 5)^2 > 0$ per ogni x appartenente al dominio, è sufficiente porre

$$x^2 + 10x + 16 > 0 \Rightarrow x < -8; x > -2.$$

Possiamo concludere che la funzione f è strettamente crescente per $x \in]-\infty; -8[\cup]-2; +\infty[$, mentre f è strettamente decrescente per $x \in]-8; -2[$.

Inoltre $x = -2$ è un punto di minimo locale e $x = -8$ è un punto di massimo locale. Il minimo locale della funzione vale $f(-2) = -4$, il massimo locale della funzione vale $f(-8) = -16$.

GRAFICO PROBABILE.



Soluzione. Esercizio 9

$$f(x) = x^3 \cdot (\ln x - 1)$$

CLASSIFICAZIONE. È una funzione mista logaritmica intera.

DOMINIO. Per determinarne il dominio bisogna porre la condizione che l'argomento del logaritmo sia maggiore di zero, e pertanto: $D_f =]0; +\infty[$.

SEGNO E INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

$$f(x) > 0 \Rightarrow x^3 \cdot (\ln x - 1) > 0.$$

Abbiamo che:

$$\begin{aligned} x^3 > 0 &\Rightarrow x > 0; \\ \ln x - 1 > 0 &\Rightarrow x > e; \\ &\Rightarrow x < 0 \text{ o } x > e. \end{aligned}$$

Poiché il dominio è $]0; +\infty[$, si ha che $f(x) > 0$ per $x > e$. La funzione non interseca l'asse y perché $x = 0 \notin D_f$, mentre interseca l'asse x nel punto di coordinate $(e; 0)$.

COMPORTAMENTO DELLA FUNZIONE IN PUNTI PARTICOLARI DEL DOMINIO. I punti importanti, per i quali è utile stabilire il comportamento della funzione, sono $0, +\infty$.

Abbiamo che:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \cdot (\ln x - 1) = 0 \cdot (-\infty),$$

forma indeterminata. Possiamo scrivere:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \cdot (\ln x - 1) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x - 1}{\frac{1}{x^3}} = \frac{-\infty}{+\infty}$$

forma indeterminata che possiamo risolvere con la regola di De l'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x - 1}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{3}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{x^3}{3} = 0.$$

Dunque la funzione non ammette asintoti verticali.

Abbiamo che:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \cdot (\ln x - 1) = +\infty,$$

la funzione non ammette asintoto orizzontale, allora vediamo se esiste l'asintoto obliquo $y = mx + q$. Abbiamo che:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot (\ln x - 1) = +\infty,$$

quindi possiamo concludere che non esiste neanche l'asintoto obliquo.

STUDIO DELLA DERIVATA PRIMA. Abbiamo che:

$$f'(x) = x^2 \cdot (3 \ln x - 2).$$

Studiamo il segno della derivata prima: ponendo $f'(x) > 0$, otteniamo che

$$x^2 \cdot (3 \ln x - 2) > 0 \Rightarrow 3 \ln x - 2 > 0 \Rightarrow \ln x > \frac{2}{3} \Rightarrow x > \sqrt[3]{e^2}.$$

Possiamo concludere che la funzione f è strettamente crescente per $x \in]\sqrt[3]{e^2}; +\infty[$, mentre f è strettamente decrescente per $x \in]0; \sqrt[3]{e^2}[$.

Inoltre $x = \sqrt[3]{e^2}$ è un punto di minimo locale. Il minimo della funzione vale $f(\sqrt[3]{e^2}) = -\frac{1}{3}e^2$.

STUDIO DELLA DERIVATA SECONDA. Abbiamo che:

$$f''(x) = x \cdot (6 \ln x - 1).$$

Studiamo il segno della derivata seconda: ponendo $f''(x) > 0$, otteniamo che

$$x \cdot (6 \ln x - 1) > 0.$$

Abbiamo che:

$$x > 0$$

e

$$6 \ln x - 1 > 0 \Rightarrow \ln x > \frac{1}{6} \Rightarrow x > \sqrt[6]{e}.$$

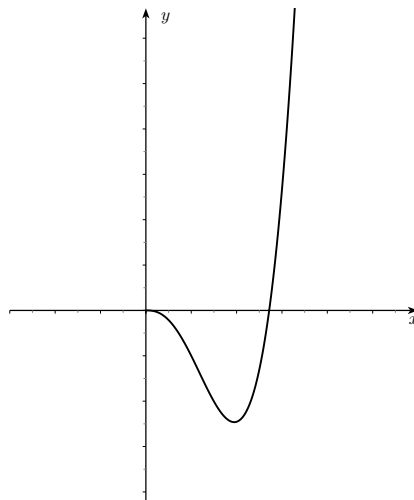
Quindi, tenendo presente che $D_f =]0; +\infty[$

$$f''(x) > 0 \Rightarrow x > \sqrt[6]{e}.$$

Possiamo concludere che la funzione f è convessa per $x \in]\sqrt[6]{e}; +\infty[$, mentre f è concava per $x \in]0; \sqrt[6]{e}[$.

Poiché $f(\sqrt[6]{e}) = -\frac{5}{6}\sqrt{e}$, abbiamo che $F = \left(\sqrt[6]{e}; -\frac{5}{6}\sqrt{e}\right)$ è un punto di flesso.

GRAFICO:



Soluzione. Esercizio 10

$$f(x) = \ln(x^2 + 1)$$

CLASSIFICAZIONE. È una funzione logaritmica intera.

DOMINIO. Per determinarne il dominio bisogna porre la condizione che l'argomento del logaritmo sia maggiore di zero, e pertanto si deve avere:

$$x^2 + 1 > 0 \Rightarrow \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Il dominio della funzione è $D_f = \mathbb{R}$.

SEGNO E INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

$$f(x) > 0 \Rightarrow \ln(x^2 + 1) > 0 \Rightarrow x^2 + 1 > 1 \Rightarrow x^2 > 0 \Rightarrow x \neq 0.$$

Dunque $f(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$ e si annulla per $x = 0$.

La funzione interseca gli assi solo nell'origine $O(0; 0)$.

COMPORTAMENTO DELLA FUNZIONE IN PUNTI PARTICOLARI DEL DOMINIO. I punti importanti, per i quali è utile stabilire il comportamento della funzione, sono $-\infty$, $+\infty$. In particolare, poiché il dominio è $\mathbb{R}$ non esistono asintoti verticali.

Abbiamo che:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln(x^2 + 1) = +\infty$$

Calcolando i limiti per x tendente all'infinito si sono ottenuti valori infiniti: di conseguenza si può affermare che la funzione non ammette asintoto orizzontale, allora

vediamo se esiste l'asintoto obliquo. La funzione ammette come asintoto obliquo la retta $y = mx + q$ se esistono finiti i seguenti limiti:

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad (\neq 0) \quad \text{e} \quad q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx).$$

Abbiamo che

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} = \frac{+\infty}{\pm\infty}$$

forma indeterminata che si risolve con la regola di De l'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x}{1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} = 0.$$

Possiamo concludere che non esiste neanche l'asintoto obliquo.

STUDIO DELLA DERIVATA PRIMA. Abbiamo che:

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

Studiamo il segno della derivata prima: ponendo $f'(x) > 0$, otteniamo che

$$\frac{2x}{x^2 + 1} > 0 \Rightarrow x > 0.$$

Possiamo concludere che la funzione f è strettamente crescente per $x \in]-\infty; 0[$, mentre f è strettamente decrescente per $x \in]0; +\infty[$.

Inoltre $x = 0$ è un punto di minimo assoluto. Il minimo della funzione vale $f(0) = 0$.

STUDIO DELLA DERIVATA SECONDA. Abbiamo che:

$$f''(x) = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}.$$

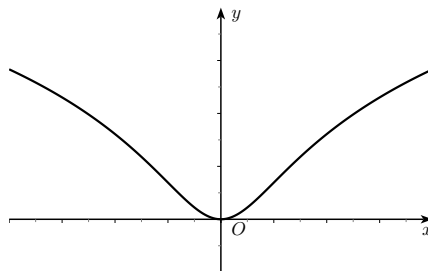
Studiamo il segno della derivata seconda: ponendo $f''(x) > 0$, otteniamo che

$$\frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} > 0 \Rightarrow -1 < x < 1.$$

Possiamo concludere che la funzione f è convessa per $x \in]-1; 1[$, mentre f è concava per $x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$.

Poiché $f(-1) = f(1) = \ln 2$, abbiamo che $F_1(-1; \ln 2)$ e $F_2(1; \ln 2)$ sono punti di flesso.

GRAFICO:



Osserviamo che il grafico della funzione è simmetrico rispetto all'asse y , quindi la funzione è pari. Infatti:

$$f(-x) = \ln((-x)^2 + 1) = \ln(x^2 + 1) = f(x).$$

Soluzione. Esercizio 17

$$f(x) = 1 - \sqrt{\frac{x}{x+1}}$$

CLASSIFICAZIONE. È una funzione irrazionale fratta.

DOMINIO. Data la natura della funzione (radice con indice pari), per determinarne il dominio bisogna porre la condizione che il radicando sia maggiore o uguale a zero, quindi:

$$\frac{x}{x+1} \geq 0$$

$$\text{Num.} \geq 0 \Rightarrow x \geq 0.$$

$$\text{Den.} > 0 \Rightarrow x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+1} \geq 0 \Rightarrow x < -1; x \geq 0.$$

Il dominio della funzione è $D_f =]-\infty; -1[\cup [0; +\infty[$.

INTERSEZIONI CON GLI ASSI. Con l'asse y abbiamo:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - \sqrt{\frac{x}{x+1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - \sqrt{\frac{0}{0+1}} = 1 \end{cases}$$

Con l'asse x abbiamo:

$$\begin{aligned} \begin{cases} y &= 0 \\ y &= 1 - \sqrt{\frac{x}{x+1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - \sqrt{\frac{x}{x+1}} &= 0 \\ y &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{x+1}} &= 1 \\ y &= 0 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{x+1} &= 1 \\ y &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x &= x+1 \\ y &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 &= 1 \\ y &= 0 \end{cases} \text{ impossibile} \end{aligned}$$

Pertanto la funzione interseca solo l'asse y nel punto di coordinate $(0, 1)$. L'equazione irrazionale del secondo sistema è stata risolta senza porre la condizione di esistenza della radice, poiché essa era stata già considerata al momento della determinazione del dominio della funzione.

SEGNO.

$$\begin{aligned} f(x) > 0 &\Rightarrow 1 - \sqrt{\frac{x}{x+1}} > 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{x}{x+1}} < 1 \Rightarrow \frac{x}{x+1} < 1 \\ \Rightarrow \frac{x}{x+1} - 1 < 0 &\Rightarrow \frac{x - x - 1}{x+1} < 0 \Rightarrow \frac{-1}{x+1} < 0 \Rightarrow \frac{1}{x+1} > 0 \\ \text{Num.} > 0 &\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\text{Den.} > 0 \Rightarrow x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+1} > 0 \Rightarrow x > -1.$$

Ripetendo per la disequazione irrazionale le stesse considerazioni fatte per l'equazione, bisogna rettificare parzialmente il risultato (tenendo presente il dominio della funzione), per cui $f(x) > 0$ solo se $x > 0$, ossia

$$f(x) > 0 \text{ per } x \in]0; +\infty[.$$

COMPORTAMENTO DELLA FUNZIONE IN PUNTI PARTICOLARI DEL DOMINIO. I punti importanti, per i quali utile stabilire il comportamento della funzione, sono -1 , $-\infty$, $+\infty$. Per $x = 0$ è già stato determinato l'andamento, infatti la funzione è definita per $x = 0$ e si ha $f(0) = 1$.

Abbiamo che:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} 1 - \sqrt{\frac{x}{x+1}} = 1 - \sqrt{\frac{-1}{-1^- + 1}} = 1 - \sqrt{\frac{-1}{0^-}} = 1 - \sqrt{+\infty} = -\infty$$

Pertanto la retta di equazione $x = -1$ è asintoto verticale sinistro per la funzione.

Inoltre, abbiamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \sqrt{\frac{x}{x+1}} = 1 - \sqrt{\frac{+\infty}{+\infty}}$$

forma indeterminata che si risolve mettendo in evidenza

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \sqrt{\frac{x}{x(1 + \frac{1}{x})}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{1}{x}}} = 1 - \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{1}{+\infty}}} = 1 - 1 = 0$$

Analogamente

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \sqrt{\frac{x}{x+1}} = 0.$$

Dunque la retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale per la funzione.

STUDIO DELLA DERIVATA PRIMA. Abbiamo che:

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{x+1}{x}} \cdot \frac{1}{(x+1)^2}$$

Studiamo il segno della derivata prima: ponendo $f'(x) > 0$, otteniamo che

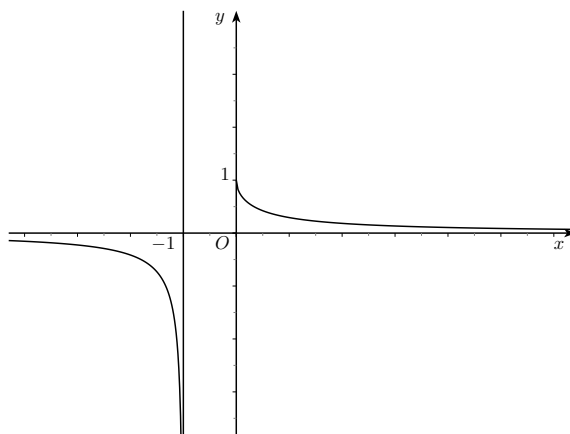
$$-\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{x+1}{x}} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \Rightarrow \frac{1}{(x+1)^2} < 0 \text{ per nessun } x \in D_f.$$

Possiamo concludere che $f'(x) < 0$ per ogni $x \in]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$, quindi che la funzione f è strettamente decrescente nel suo dominio. Inoltre, osserviamo che la derivata prima non è definita in $x = 0$ e, poichè

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{x+1}{x}} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} = -\infty$$

abbiamo che $x = 0$ è un punto a tangente verticale per f .

GRAFICO.



Soluzione. Esercizio 21

$$f(x) = x^2 \cdot e^{-\frac{1}{x}}$$

CLASSIFICAZIONE. È una funzione mista esponenziale fratta.

DOMINIO. L'unica condizione da discutere riguarda il denominatore dell'esponenziale, ossia $x \neq 0$, quindi $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

INTERSEZIONI CON GLI ASSI. Non vi sono intersezioni con l'asse x , né, tantomeno, con l'asse y , visto che $0 \notin D_f$.

SEGNO. Siccome la funzione è un prodotto di due termini, ossia l'esponenziale e il quadrato, sempre strettamente positivi sul dominio fissato, si ha che $f(x) > 0$ per ogni $x \in D_f$.

COMPORTAMENTO DELLA FUNZIONE IN PUNTI PARTICOLARI DEL DOMINIO. I punti importanti, per i quali è utile stabilire il comportamento della funzione, sono $-\infty$, 0 , $+\infty$.

Abbiamo che:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 \cdot e^{-\frac{1}{x}} = 0 \cdot (+\infty),$$

forma indeterminata. Poniamo $y = \frac{1}{x}$ ed otteniamo:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 \cdot e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{1}{y^2} \cdot e^{-y} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{e^{-y}}{y^2} = \frac{+\infty}{+\infty},$$

forma indeterminata che si può risolvere applicando due volte la regola di De l'Hospital:

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{e^{-y}}{y^2} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{-e^{-y}}{2y} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{e^{-y}}{2} = +\infty.$$

Inoltre:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot e^{-\frac{1}{x}} = 0.$$

Poiché solo limite per $x \rightarrow 0^-$ risulta $+\infty$, possiamo concludere che la retta $x = 0$ è asintoto verticale sinistro.

Abbiamo che:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \cdot e^{-\frac{1}{x}} = +\infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot e^{-\frac{1}{x}} = +\infty$$

quindi la funzione non ammette asintoto orizzontale, allora vediamo se esiste l'asintoto obliquo $y = mx + q$. Abbiamo che:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \cdot e^{-\frac{1}{x}} = \pm\infty,$$

dunque non esiste nemmeno l'asintoto obliquo.

STUDIO DELLA DERIVATA PRIMA. La derivata é

$$f'(x) = 2x \cdot e^{-\frac{1}{x}} + x^2 \cdot e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} = 2x \cdot e^{-\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}$$

che, raccogliendo a fattor comune il termine $e^{-\frac{1}{x}}$, risulta

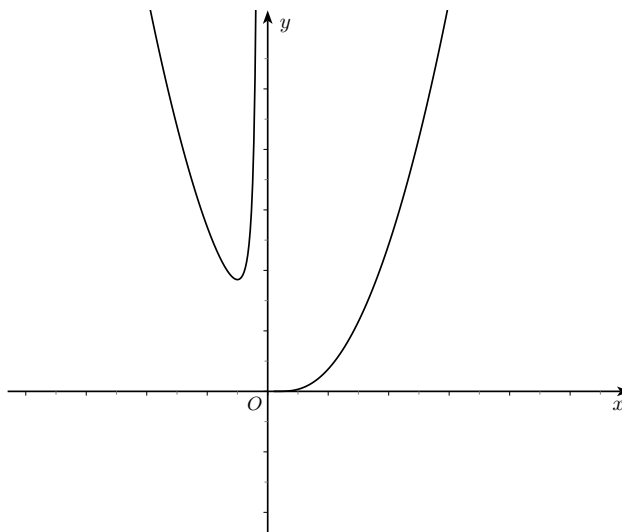
$$(1) \quad f'(x) = e^{-\frac{1}{x}} \cdot (2x + 1).$$

Analizziamo la monotonia della funzione attraverso la disequazione $f'(x) > 0$, che, per la (1), equivale a

$$2x + 1 > 0 \Rightarrow x > -\frac{1}{2}.$$

Pertanto, la funzione è decrescente su $\left] -\infty, -\frac{1}{2} \right]$, mentre è crescente sul resto del dominio e quindi il punto $x_0 = -\frac{1}{2}$ è di minimo locale (locale, perché $f(x_0) = 0.25 \cdot e^2 \simeq 1.84$, mentre $f(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0^+$, come visto in precedenza).

GRAFICO PROBABILE.



Soluzione. Esercizio 22

$$f(x) = e^{\frac{1-x}{x^2}}$$

CLASSIFICAZIONE. È una funzione esponenziale fratta.

DOMINIO. Per determinarne il dominio bisogna porre la condizione che il denominatore dell'esponente sia diverso da zero, e pertanto si deve avere:

$$x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0.$$

Il dominio della funzione è $D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

SEGNO E INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

$$f(x) > 0 \Rightarrow e^{\frac{1-x}{x^2}} > 0 \Rightarrow \text{per ogni } x \in D_f.$$

Dunque $f(x) > 0$ per ogni x appartenente al dominio, inoltre la funzione non è mai nulla, quindi non interseca l'asse x . Infine la funzione non interseca nemmeno l'asse y perché $0 \notin D_f$.

COMPORTAMENTO DELLA FUNZIONE IN PUNTI PARTICOLARI DEL DOMINIO. I punti importanti, per i quali è utile stabilire il comportamento della funzione, sono 0 , $-\infty$, $+\infty$.

Abbiamo che:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1-x}{x^2}} = e^{\frac{1}{(0^-)^2}} = e^{\frac{1}{0^+}} = e^{+\infty} = +\infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1-x}{x^2}} = e^{\frac{1}{(0^+)^2}} = e^{\frac{1}{0^+}} = e^{+\infty} = +\infty;$$

quindi possiamo concludere che la retta $x = 0$ è un asintoto verticale.

Inoltre, abbiamo che:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1-x}{x^2}} = e^{\frac{-\infty}{+\infty}},$$

forma indeterminata che si risolve mettendo in evidenza:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1-x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x \left(\frac{1}{x} - 1 \right)}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\frac{1}{x} - 1}{x}} = e^{\frac{-1}{+\infty}} = e^0 = 1.$$

In modo analogo si ha:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1-x}{x^2}} = e^0 = 1.$$

dunque possiamo concludere che la retta $y = 1$ è un asintoto orizzontale.

STUDIO DELLA DERIVATA PRIMA. Abbiamo che:

$$f'(x) = e^{\frac{1-x}{x^2}} \cdot \frac{x-2}{x^3}.$$

Studiamo il segno della derivata prima: poniamo $f'(x) > 0$, ossia

$$e^{\frac{1-x}{x^2}} \cdot \frac{x-2}{x^3} > 0,$$

poiché $e^{\frac{1-x}{x^2}} > 0$ per ogni x appartenente al dominio, è sufficiente porre

$$\frac{x-2}{x^3} > 0$$

da cui otteniamo

$$f'(x) > 0 \Rightarrow x < 0; x > 2.$$

Possiamo concludere che la funzione f è strettamente crescente per $x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$, mentre f è strettamente decrescente per $x \in]0; 2[$.

Inoltre $x = 2$ è un punto di minimo assoluto. Il minimo della funzione vale $f(2) = e^{-\frac{1}{4}}$.

GRAFICO:

