Matematica con elementi di statistica
ESERCIZI sulle derivate
Corso di Laurea in Biotecnologie - anno acc. 2014/2015

Esercizi 7: Derivata di una funzione e sue applicazioni

Calcolare la derivata prima delle seguenti funzioni.

Esercizio 1. $f(x) = 3x + 4 \ln x - 2e^x + 3 \cos x$

Soluzione.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \cdot D(x) + 4 \cdot D(\ln x) - 2 \cdot D(e^x) + 3 \cdot D(\cos x) = \\ &= 3 + 4 \cdot \frac{1}{x} - 2\, e^x + 3 \cdot (-\sin x) = \\ &= 3 + \frac{4}{x} - 2\, e^x - 3 \sin x \end{aligned}$$

Esercizio 2. $f(x) = 4x + 2 \ln x - 3e^x - 5 \sin x$

Esercizio 3. $f(x) = x^5 + 7x^4 - 2x^3 + 3x - 1$

Esercizio 4. $f(x) = x^3 + \sqrt{x} - e^{2x} + \ln x$

Esercizio 5. $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 5x^2 + 2x - 4$

Esercizio 6. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 6x^2 - 3x + 1$

Esercizio 7. $f(x) = x^4 + \sqrt[3]{x} - \ln x + e^x - \operatorname{arctg} x$

Esercizio 8. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}$

Esercizio 9. $f(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^5}$

Esercizio 10. $f(x) = \sqrt[5]{x^3} + \sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{\sqrt[5]{x}}$

Soluzione. $f'(x) = \frac{3}{5\,\sqrt[5]{x^2}} + \frac{2}{3\,\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{5\,\sqrt[5]{x^6}}$

Esercizio 11. $f(x) = \sqrt[5]{x^4} - \sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[5]{x}}$

Esercizio 12. $f(x) = (x^3 + 2x^2 + x) \cdot \ln x$

Soluzione. Per la regola di derivazione del prodotto:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \Big(D(x^3+2x^2+x)\Big)\cdot \ln x + (x^3+2x^2+x)\cdot D(\ln x) = \\ &= (3x^2+4x+1)\cdot \ln x + (x^3+2x^2+x)\cdot \frac{1}{x} = \\ &= (3x^2+4x+1)\cdot \ln x + x^2+2x+1 \end{aligned}$$

Esercizio 13. $f(x) = (x^3 - x^2 + 2x)\cdot \sin x$

Esercizio 14. $f(x) = (3x-2)\cdot(x^2+4x-3)$

Esercizio 15. $f(x) = (2x+3)\cdot(x^2+3x-1)$

Esercizio 16. $f(x) = \dfrac{x^2-3x+5}{x^2-1}$

Soluzione. Per la regola di derivazione del rapporto:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\Big(D(x^2-3x+5)\Big)\cdot(x^2-1) - (x^2-3x+5)\cdot D(x^2-1)}{(x^2-1)^2} = \\ &= \frac{(2x-3)\cdot(x^2-1)-(x^2-3x+5)\cdot(2x)}{(x^2-1)^2} = \\ &= \frac{2x^3-2x-3x^2+3-2x^3+6x^2-10x}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^2-12x+3}{(x^2-1)^2} \end{aligned}$$

Esercizio 17. $f(x) = \dfrac{x^3 - 2\ln x}{x}$

Esercizio 18. $f(x) = \dfrac{3x^2-2x+1}{x^2-2}$

Soluzione. $f'(x) = \dfrac{2(x^2-7x+2)}{(x^2-2)^2}$

Esercizio 19. $f(x) = \dfrac{x^2-3\cos x}{x}$

Esercizio 20. $f(x) = (x^2-3x-5)\cdot(3x^2-2x+1) + \dfrac{x^2+1}{3(x^2-1)}$

Soluzione. $f'(x) = 12x^3 - 33x^2 - 16x + 7 - \dfrac{4x}{3(x^2-1)^2}$

Esercizio 21. $f(x) = \dfrac{(2x^2-x)\cdot \ln x}{x^2-x-2}$

Esercizio 22. $f(x) = \dfrac{x^2+5x+6}{x^2+4x+4}$

Soluzione. $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2+4x+4} = -\dfrac{1}{(x+2)^2}$

Esercizio 23. $f(x) = \dfrac{x^2+5x+4}{x^2+6x+9}$

Soluzione. $f'(x) = \dfrac{x+7}{(x+3)^3}$

Esercizio 24. $f(x) = (3x^2-2x+1)^5$

Soluzione. Dobbiamo applicare la regola di derivazione della funzione composta:

$$D[f(x)^n] = n\, f(x)^{n-1} \cdot f'(x);$$

dunque

$$f'(x) = 5\,(3x^2-2x+1)^4 \cdot [D(3x^2-2x+1)] = 5\,(3x^2-2x+1)^4 \cdot (6x-2).$$

Esercizio 25. $f(x) = (7x^3-2x^2+3x)^4$

Esercizio 26. $f(x) = \cos^5 x$

Esercizio 27. $f(x) = \ln^3 x$

Esercizio 28. $f(x) = (x^2-5x+6)^7$

Esercizio 29. $f(x) = x - \sqrt{1-x^2}$

Soluzione. $f'(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Esercizio 30. $f(x) = \sqrt{3x-x^2} - 4x$

Soluzione. $f'(x) = \dfrac{3-2x}{2\sqrt{3x-x^2}} - 4$

Esercizio 31. $f(x) = x - \sqrt[3]{4-x^2}$

Esercizio 32. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{3x-1}}$

Esercizio 33. $f(x) = \sqrt{\dfrac{3x+7}{8-x}}$

Soluzione. $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{3x+7}{8-x}}} \cdot \dfrac{31}{(8-x)^2}$

Esercizio 34. $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x-9}{1-x}}$

Soluzione. $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{2x-9}{1-x}}} \cdot \dfrac{-7}{(1-x)^2}$

Esercizio 35. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+4}{3-9x}}$

Soluzione. $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x+4}{3-9x}}} \cdot \dfrac{39}{(3-9x)^2}$

Esercizio 36. $f(x) = e^{3+4x-x^2}$

Esercizio 37. $f(x) = e^{\frac{4x+1}{x^2-2}}$

Esercizio 38. $f(x) = e^{\frac{x^2+5}{x+1}}$

Soluzione. $f'(x) = e^{\frac{x^2+5}{x+1}} \cdot \dfrac{x^2+2x-5}{(x+1)^2}$

Esercizio 39. $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x-2}}$

Soluzione. $f'(x) = e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \dfrac{x^2-5x+4}{(x-2)^2}$

Esercizio 40. $f(x) = x^3 \cdot e^{-x^3}$

Soluzione. $f'(x) = e^{-x^3} \cdot (3x^2 - 3x^5)$

Esercizio 41. $f(x) = \ln(2x^4 - 6x^3 + x^2 - 5x + 1)$

Esercizio 42. $f(x) = \ln(x^2+1)$

Soluzione. $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

Esercizio 43. $f(x) = \ln\left(\dfrac{5x+4}{x-3}\right)$

Soluzione.

$$f'(x) = \frac{-19}{(5x+4)\cdot(x-3)}.$$

Esercizio 44. $f(x) = \ln\left(\dfrac{3-x}{2x-10}\right)$

Soluzione. $f'(x) = \dfrac{2}{(3-x)\cdot(x-5)}$

Esercizio 45. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2-9}{1-4x}\right)$

Soluzione. $f'(x) = \dfrac{-4x^2+2x-36}{(x^2-9)\cdot(1-4x)}$

Esercizio 46. $f(x) = \ln\left(\dfrac{4-x^2}{3x+1}\right)$

Soluzione. $f'(x) = \dfrac{-3x^2-2x-12}{(4-x^2)\cdot(3x+1)}$

Esercizio 47. $f(x) = (\sin x^4)\cdot(\cos\sqrt{x})$

Esercizio 48. $f(x) = \sin\sqrt[3]{x} + \cos 2x$

Soluzione.

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\cdot\cos\sqrt[3]{x} - 2\sin 2x.$$

Esercizio 49. $f(x) = \sin\left(\dfrac{3x-2}{2x+7}\right)$

Soluzione. $f'(x) = \cos\left(\dfrac{3x-2}{2x+7}\right)\cdot\dfrac{25}{(2x+7)^2}$

Esercizio 50. $f(x) = \cos\left(\dfrac{x-2}{5x+9}\right)$

Soluzione. $f'(x) = -\sin\left(\dfrac{x-2}{5x+9}\right)\cdot\dfrac{19}{(5x+9)^2}$

Esercizio 51. $f(x) = \ln(\ln x)$

Soluzione. Abbiamo:

$$f'(x) = \frac{1}{\ln x}\cdot[D(\ln x)] = \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x\cdot\ln x}.$$

Esercizio 52. $f(x) = e^{\sqrt{x^2+3x+1}}$

Esercizio 53. $f(x) = \sqrt{\ln(x^2+4)}$

Esercizio 54. $f(x) = \ln(\sqrt{\cos x})$

Soluzione. $f'(x) = -\dfrac{\mathrm{tg}\ x}{2}$

Massimi, minimi di una funzione

Dopo aver determinato il dominio, studiare il segno della derivata prima delle seguenti funzioni, scrivere gli intervalli in cui esse sono strettamente crescenti o decrescenti e determinare eventuali punti di massimo x_M o minimo x_m relativi.

Esercizio 1. $f(x) = x^3 - 3x + 7$

Soluzione. $x_m = 1$; $x_M = -1$

Esercizio 2. $f(x) = 3x^3 - 27x^2 + 1$

Soluzione. $x_m = 6$; $x_M = 0$

Esercizio 3. $f(x) = x \cdot (2 - 3x)^3$

Soluzione. Il dominio della funzione è $\mathbb{R}$. Calcoliamo la derivata prima della funzione mediante la regola di derivazione del prodotto:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (D\,x) \cdot (2-3x)^3 + x \cdot [D(2-3x)^3] = \\ &= (2-3x)^3 + x \cdot [3(2-3x)^2 \cdot D(2-3x)] = \\ &= (2-3x)^3 + x \cdot [3(2-3x)^2 \cdot (-3)] = \\ &= (2-3x)^3 - 9x \cdot (2-3x)^2 = (2-3x)^2 \cdot (2-12x). \end{aligned}$$

Studiamo il segno della derivata prima, ponendo $f'(x) > 0$, ossia

$$(2-3x)^2 \cdot (2-12x) > 0.$$

Abbiamo che

$$(2-3x)^2 > 0 \text{ per ogni } \; x \neq \frac{2}{3};$$

$$2 - 12x > 0 \;\Rightarrow\; x < \frac{1}{6};$$

quindi $(2-3x)^2 \cdot (2-12x) > 0$ per $x < \dfrac{1}{6}$.

Possiamo concludere che la funzione f è strettamente crescente per $x \in \left]-\infty; \dfrac{1}{6}\right[$, mentre f è strettamente decrescente per $x \in \left]\dfrac{1}{6}; \dfrac{2}{3}\right[\cup \left]\dfrac{2}{3}; +\infty\right[$.

Inoltre $x = \dfrac{1}{6}$ è un punto di massimo relativo, mentre $x = \dfrac{2}{3}$ è un punto stazionario che non è né punto di massimo né punto di minimo relativo $\left(\text{in } x = \dfrac{2}{3} \text{ la derivata prima si annulla, ma negli intervalli } \left]\dfrac{1}{6}; \dfrac{2}{3}\right[\text{ e } \left]\dfrac{2}{3}; +\infty\right[\text{ non cambia segno}\right)$.

Esercizio 4. $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-5}$

Soluzione. $x_m = 5 + 2\sqrt{7}$; $x_M = 5 - 2\sqrt{7}$

Esercizio 5. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$

Soluzione. $x_m = 1$; $x_M = -1$

Esercizio 6. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+3x-3}$

Soluzione. $x_m = 2$; $x_M = 0$

Esercizio 7. $f(x) = \dfrac{2x^2+3x+2}{x^2+x+1}$

Soluzione. Il dominio della funzione è $\mathbb{R}$. Calcoliamo la derivata prima della funzione mediante la regola di derivazione del rapporto:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(4x+3)\cdot(x^2+x+1)-(2x^2+3x+2)\cdot(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \\ &= \frac{4x^3+7x^2+7x+3-(4x^3+8x^2+7x+2)}{(x^2+x+1)^2} = \\ &= \frac{-x^2+1}{(x^2+x+1)^2}. \end{aligned}$$

Studiamo il segno della derivata prima, ponendo $f'(x) > 0$, ossia

$$\frac{-x^2+1}{(x^2+x+1)^2} > 0.$$

Abbiamo che

$$\text{Num.} > 0 \;\Rightarrow\; -x^2+1 > 0 \;\Rightarrow\; x^2-1 < 0 \;\Rightarrow\; -1 < x < 1;$$

$$\text{Den.} > 0 \;\Rightarrow\; (x^2+x+1)^2 > 0 \;\Rightarrow\; \text{per ogni } x \in \mathbb{R};$$

quindi $\dfrac{-x^2+1}{(x^2+x+1)^2} > 0$ per $-1 < x < 1$.

Possiamo concludere che f è strettamente crescente per $x \in]-1;1[$, mentre f è strettamente decrescente per $x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$.

Inoltre $x = -1$ è un punto di minimo relativo, mentre $x = 1$ è un punto di massimo relativo (f' non solo si annulla in questi due punti, ma cambia anche segno).

Esercizio 8. $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x-2}}$

Soluzione. Il dominio della funzione è $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$. Calcoliamo la derivata prima della funzione mediante le regole di derivazione del prodotto e della composizione:

$$f'(x)=1\cdot e^{\frac{1}{x-2}}+x\cdot e^{\frac{1}{x-2}}\cdot D\left(\frac{1}{x-2}\right)=e^{\frac{1}{x-2}}+x\cdot e^{\frac{1}{x-2}}\cdot\frac{-1}{(x-2)^2}=$$
$$=e^{\frac{1}{x-2}}\cdot\left(1-\frac{1}{(x-2)^2}\right)=e^{\frac{1}{x-2}}\cdot\frac{x^2-5x+4}{(x-2)^2}.$$

Studiamo il segno della derivata prima, ponendo $f'(x)>0$, ossia

$$e^{\frac{1}{x-2}}\cdot\frac{x^2-5x+4}{(x-2)^2}>0.$$

Poiché $e^{\frac{1}{x-2}}>0$ per ogni x appartenente al dominio, basta porre

$$\frac{x^2-5x+4}{(x-2)^2}>0.$$

Abbiamo che

$$\text{Num.}>0\ \Rightarrow\ x^2-5x+4>0\ \Rightarrow\ x<1\ \vee\ x>4;$$
$$\text{Den.}>0\ \Rightarrow\ (x-2)^2>0\ \Rightarrow\ \text{per ogni } x\neq 2;$$

quindi $\dfrac{x^2-5x+4}{(x-2)^2}>0$ per $x<1\ \vee\ x>4$.

Possiamo concludere che f è strettamente crescente per $x\in]-\infty;1[\cup]4;+\infty[$, mentre f è strettamente decrescente per $x\in]1;2[\cup]2;4[$.

Inoltre $x=1$ è un punto di massimo relativo, mentre $x=4$ è un punto di minimo relativo.

Esercizio 9. $f(x)=e^{\frac{1-x}{x^2}}$

Soluzione. $x_m=2$

Esercizio 10. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

Soluzione. Il dominio della funzione è $]0;+\infty[$. Calcoliamo la derivata prima della funzione mediante la regola di derivazione del rapporto:

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot(x)-(\ln x)\cdot(1)}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}.$$

Studiamo il segno della derivata prima, ponendo $f'(x)>0$, ossia

$$\frac{1-\ln x}{x^2}>0.$$

Abbiamo che

$$\text{Num.} > 0 \;\Rightarrow\; 1 - \ln x > 0 \;\Rightarrow\; \ln x < 1 \;\Rightarrow\; x < e;$$
$$\text{Den.} > 0 \;\Rightarrow\; x^2 > 0 \;\Rightarrow\; \text{per ogni } x \neq 0;$$

poiché il dominio è $]0; +\infty[$, otteniamo che $\dfrac{1 - \ln x}{x^2} > 0$ per $0 < x < e$.

Possiamo concludere che f è strettamente crescente per $x \in]0; e[$, mentre f è strettamente decrescente per $x \in]e; +\infty[$.

Inoltre $x = e$ è un punto di massimo relativo.

Massimi, minimi e flessi di una funzione

Determinare i punti di massimo x_M e di minimo x_m e gli eventuali punti di flesso x_F delle seguenti funzioni.

Esercizio 1. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$

Soluzione. $x_M = -1$; $x_m = 2$; $x_F = \dfrac{1}{2}$

Esercizio 2. $f(x) = -x^3 + 18x^2 + 1$

Soluzione. $x_M = 12$; $x_m = 0$; $x_F = 6$

Esercizio 3. $f(x) = x^2 - x^3$

Soluzione. $x_M = \dfrac{2}{3}$; $x_m = 0$; $x_F = \dfrac{1}{3}$

Esercizio 4. $f(x) = x^4 - 8x^2 - 3$

Soluzione. $x_M = 0$; $x_m = -2$ $x_m = +2$; $x_F = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$; $x_F = +\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

Esercizio 5. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

Soluzione. $x_m = 0$; $x_F = -1$; $x_F = 1$

Esercizio 6. $f(x) = x \cdot e^{-x}$

Soluzione. $x_M = 1$; $x_F = 2$