

Matematica con elementi di statistica
ESERCIZI sul calcolo degli integrali
Corso di Laurea in Biotecnologie - anno acc. 2014/2015

Esercizi 10: Calcolo Integrale

Integrali indefiniti. Calcolare i seguenti integrali indefiniti, verificando i risultati indicati.

Esercizio 1. $\int \sqrt{x} \, dx = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c = \frac{2}{3} x \sqrt{x} + c$

Esercizio 2. $\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x}} \, dx = \frac{3}{11} \sqrt[3]{x^{11}} + c = \frac{3}{11} x^3 \sqrt[3]{x^2} + c$

Esercizio 3. $\int (4x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 7x + 2) \, dx = \frac{2}{3} x^6 + \frac{3}{5} x^5 - \frac{1}{2} x^4 + x^3 - \frac{7}{2} x^2 + 2x + c$

Esercizio 4. $\int \left(\sqrt[5]{x} - \frac{5}{x^3} - 3 \sin x + \frac{9}{x} \right) \, dx = \frac{5}{6} \sqrt[5]{x^6} + \frac{5}{2x^2} + 3 \cos x + 9 \ln |x| + c$

Esercizio 5. $\int \left(4 \cos x - \frac{6}{x^2 + 1} + 2e^x - \frac{1}{x^4} \right) \, dx = 4 \sin x - 6 \operatorname{arctg} x + 2e^x + \frac{1}{3x^3} + c$

Esercizio 6. $\int (2x + 1)^7 \, dx = \frac{1}{16} (2x + 1)^8 + c$

Esercizio 7. $\int x (x^2 + 1)^3 \, dx = \frac{1}{8} (x^2 + 1)^4 + c$

Esercizio 8. $\int \sin^2 x \cos x \, dx = \frac{1}{3} \sin^3 x + c$

Esercizio 9. $\int x \sqrt{1 - x^2} \, dx = -\frac{1}{3} \sqrt{(1 - x^2)^3} + c$

Esercizio 10. $\int \sin x \cos^4 x \, dx = -\frac{1}{5} \cos^5 x + c$

Esercizio 11. $\int (2x - 1) \cdot (x^2 - x)^3 \, dx = \frac{1}{4} (x^2 - x)^4 + c$

Esercizio 12. $\int (2x^3 + 1) \cdot \sqrt{x^4 + 2x} \, dx = \frac{1}{3} \sqrt{(x^4 + 2x)^3} + c$

Esercizio 13. $\int \sqrt{3 - x} \, dx = -\frac{2}{3} \sqrt{(3 - x)^3} + c$

Esercizio 14. $\int x \sqrt[3]{4 + x^2} \, dx = \frac{3}{8} \sqrt[3]{(4 + x^2)^4} + c$

$$\textbf{Esercizio 15.} \int \frac{1}{\sqrt{2+x}} dx = 2\sqrt{2+x} + c$$

$$\textbf{Esercizio 16.} \int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} dx = -\sqrt{9-x^2} + c$$

$$\textbf{Esercizio 17.} \int \frac{1}{3x+2} dx = \frac{1}{3} \ln |3x+2| + c$$

$$\textbf{Esercizio 18.} \int \frac{1}{1-6x} dx = -\frac{1}{6} \ln |1-6x| + c$$

$$\textbf{Esercizio 19.} \int \frac{x}{x^2+10} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2+10| + c$$

$$\textbf{Esercizio 20.} \int \frac{x+2}{x^2+4x+1} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2+4x+1| + c$$

$$\textbf{Esercizio 21.} \int \frac{x^2-2}{x^3-6x} dx = \frac{1}{3} \ln |x^3-6x| + c$$

$$\textbf{Esercizio 22.} \int \frac{x-1}{x+5} dx = x - 6 \ln |x+5| + c$$

$$\textbf{Esercizio 23.} \int \frac{x-4}{x-2} dx = x - 2 \ln |x-2| + c$$

$$\textbf{Esercizio 24.} \int \frac{1-x}{x+3} dx = -x + 4 \ln |x+3| + c$$

$$\textbf{Esercizio 25.} \int e^{-3x} dx = -\frac{1}{3} e^{-3x} + c$$

$$\textbf{Esercizio 26.} \int x \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

$$\textbf{Esercizio 27.} \int e^{2-x} dx = -e^{2-x} + c$$

$$\textbf{Esercizio 28.} \int x^2 \cdot e^{x^3+4} dx = \frac{1}{3} e^{x^3+4} + c$$

Integrali di funzioni razionali fratte. Calcolare i seguenti integrali, verificando i risultati indicati.

$$\textbf{Esercizio 1.} \int \frac{x-16}{x^2-2x-8} dx = 3 \ln |x+2| - 2 \ln |x-4| + c$$

$$\textbf{Esercizio 2.} \int \frac{3x-4}{x^2-3x+2} dx = \ln |x-1| + 2 \ln |x-2| + c$$

$$\textbf{Esercizio 3.} \int \frac{12x + 27}{x^2 + x - 12} dx = 3 \ln |x + 4| + 9 \ln |x - 3| + c$$

$$\textbf{Esercizio 4.} \int \frac{2x + 5}{x^2 - 4} dx = \frac{9}{4} \ln |x - 2| - \frac{1}{4} \ln |x + 2| + c$$

$$\textbf{Esercizio 5.} \int \frac{2x + 1}{x^2 + 25} dx = \ln(x^2 + 25) + \frac{1}{5} \operatorname{arctg} \frac{x}{5} + c$$

$$\textbf{Esercizio 6.} \int \frac{1}{x^2 - 5x + 4} dx = \frac{1}{3} \ln |x - 4| - \frac{1}{3} \ln |x - 1| + c$$

$$\textbf{Esercizio 7.} \int \frac{x^2 - 6x + 4}{x^2 + 2x + 4} dx = x - \ln(x^2 + 2x + 4) + \frac{8\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{3}(x + 1)}{3} \right) + c$$

$$\textbf{Esercizio 8.} \int \frac{1}{4x^2 + 12x + 9} dx = \frac{-1}{2(2x + 3)} + c$$

Integrali per sostituzione. Calcolare i seguenti integrali per sostituzione, verificando i risultati indicati (tra parentesi si trova a volte indicata la sostituzione più conveniente).

$$\textbf{Esercizio 1.} \int \frac{1}{\sqrt{x} + x\sqrt{x}} dx = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} + c \quad (\sqrt{x} = t)$$

$$\textbf{Esercizio 2.} \int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx = e^{\operatorname{tg} x} + c$$

$$\textbf{Esercizio 3.} \int \frac{1}{1 + e^x} dx = x - \ln(1 + e^x) + c \quad (t = e^x)$$

$$\textbf{Esercizio 4.} \int \sin^4 x \cos^3 x dx = \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{1}{7} \sin^7 x + c \quad (\sin x = t)$$

$$\textbf{Esercizio 5.} \int \frac{1}{x\sqrt{2x - 1}} dx = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{2x - 1} + c$$

$$\textbf{Esercizio 6.} \int \frac{x^2}{\sqrt[3]{2x + 1}} dx = \frac{3}{64} (2x + 1)^{\frac{8}{3}} - \frac{3}{20} (2x + 1)^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{16} (2x + 1)^{\frac{2}{3}} + c \quad (t = \sqrt[3]{2x + 1})$$

$$\textbf{Esercizio 7.} \int \frac{1}{x(\ln^2 x + 4 \ln x + 5)} dx = \operatorname{arctg}(\ln x + 2) + c$$

Regola di integrazione per parti. Calcolare i seguenti integrali per parti, verificando i risultati indicati.

Esercizio 1. $\int x \cos x \, dx = x \sin x + \cos x + c$

Esercizio 2. $\int x \ln x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + c$

Esercizio 3. $\int x^2 \ln x \, dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + c$

Esercizio 4. $\int x e^x \, dx = x e^x - e^x + c$

Esercizio 5. $\int x e^{-2x} \, dx = -\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + c$

Esercizio 6. $\int x e^{-x} \, dx = -e^{-x}(x+1) + c$

Esercizio 7. $\int x^3 e^x \, dx = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + c$

Esercizio 8. $\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + c$

Esercizio 9. $\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c$

Esercizio 10. $\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{1}{2} x + c$

Esercizio 11. $\int x \operatorname{arctg} x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + c$

Esercizio 12. $\int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + c$

Esercizio 13. $\int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + c$

Esercizio 14. $\int e^{2x} \cos x \, dx = \frac{1}{5} e^{2x} (\sin x + 2 \cos x) + c$

Integrali definiti. Calcolare i seguenti integrali definiti, verificando i risultati indicati.

Esercizio 1. $\int_{-1}^1 (x^2 + 4) \, dx = \frac{26}{3}$

Esercizio 2. $\int_{-2}^2 (x^3 + 2x) dx = 0$

Esercizio 3. $\int_0^2 e^{x+2} dx = e^4 - e^2$

Esercizio 4. $\int_{-1}^0 \sqrt[5]{x} dx = -\frac{5}{6}$

Esercizio 5. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Esercizio 6. $\int_0^2 (x^2 - 3x + 1) dx = -\frac{4}{3}$

Esercizio 7. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (x + 4) \cos x dx = -5 - \frac{\pi}{2}$

Esercizio 8. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (x - 1) \sin x dx = -\frac{1}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

Esercizio 9. $\int_0^{\pi/6} (x + 2) \sin x dx = -\frac{\sqrt{3}}{12} \pi - \sqrt{3} + \frac{5}{2}$

Esercizio 10. $\int_0^{\pi/6} (x - 6) \cos x dx = \frac{\pi}{12} - 4 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

Esercizio 11. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + 3) \sin x dx = 4$

Esercizio 12. $\int_0^1 \ln(1 + x^2) dx = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$

Esercizio 13. $\int_{-1}^0 x e^{-3x} dx = -\frac{1}{9} - \frac{2}{9} e^3$

Esercizio 14. $\int_0^2 x e^{4x} dx = \frac{1}{16} + \frac{7}{16} e^8$

Esercizio 15. $\int_{-4}^1 \ln(x + 5) dx = 6 \ln 6 - 5$

Esercizio 16. $\int_3^5 \ln(x - 2) dx = -2 + 3 \ln 3$

$$\textbf{Esercizio 17.} \int_5^7 \ln(x-4) dx = 3 \ln 3 - 2$$

$$\textbf{Esercizio 18.} \int_6^9 \ln(x-5) dx = 4 \ln 4 - 3$$

$$\textbf{Esercizio 19.} \int_{-5}^1 \ln(x+6) dx = 7 \ln 7 - 6$$

$$\textbf{Esercizio 20.} \int_1^2 \ln(2x-1) dx = \left[x \ln(2x-1) - x - \frac{1}{2} \ln(2x-1) \right]_{x=1}^{x=2} = \frac{3}{2} \ln 3 - 1$$

$$\textbf{Esercizio 21.} \int_2^3 \frac{2x-1}{x^2-9x+20} dx = 16 \ln 2 - 9 \ln 3$$

$$\textbf{Esercizio 22.} \int_{-1}^0 \frac{x-3}{x^2+x-2} dx = \frac{7}{3} \ln 2$$

$$\textbf{Esercizio 23.} \int_{-2}^5 \frac{3x-2}{x^2-3x-18} dx = -\frac{5}{3} \ln 2$$

$$\textbf{Esercizio 24.} \int_1^6 \frac{x-4}{x^2-7x} dx = \frac{1}{7} \ln 6$$

$$\textbf{Esercizio 25.} \int \frac{3x-2}{x^2-4x+4} dx = 3 \ln|x-2| - \frac{4}{x-2} + c$$

$$\textbf{Esercizio 26.} \int \frac{2x+3}{x^2+6x+9} dx = 2 \ln|x+3| + \frac{3}{x+3} + c$$

$$\textbf{Esercizio 27.} \int_{-4}^{-2} \frac{2x-1}{x^2+10x+25} dx = 2 \ln 3 - \frac{22}{3}$$

$$\textbf{Esercizio 28.} \int_5^8 \frac{x-1}{x^2-8x+16} dx = \ln 4 + \frac{9}{4}$$

$$\textbf{Esercizio 29.} \int \frac{2x+1}{x^2+9} dx = \ln(x^2+9) + \frac{1}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right) + c$$

$$\textbf{Esercizio 30.} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2x-3}{x^2+2} dx = \ln 2 - \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{4}$$

Integrali generalizzati. Calcolare i seguenti integrali generalizzati, verificando i risultati indicati.

$$\textbf{Esercizio 1.} \int_3^{+\infty} \frac{x}{x^2+1} dx \quad \text{diverge}$$

Esercizio 2. $\int_1^{+\infty} \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ indeterminato

Esercizio 3. $\int_{-\infty}^{-3} \frac{1}{x^2 - x - 6} dx = \frac{1}{5} \ln 6$

Esercizio 4. $\int_0^1 (x \ln x + x) dx = \frac{1}{4}$

Esercizio 5. $\int_0^1 \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} dx = \frac{5}{3}$

Esercizio 6. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} dx = 3\sqrt[6]{\frac{1}{2}}$

Esercizio 7. $\int_1^4 \frac{1}{x-1} dx$ diverge

Esercizi stile esame.

Esercizio 1. Dopo aver calcolato

$$\int \frac{x^2 - 2}{x^2 - 4x} dx,$$

spiegare la differenza tra i tre seguenti integrali:

$$\int \frac{x^2 - 2}{x^2 - 4x} dx, \quad \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^2 - 2}{x^2 - 4x} dx, \quad \int_0^1 \frac{x^2 - 2}{x^2 - 4x} dx.$$

Esercizio 2. Studiare la funzione

$$f(x) = x \ln^2(2x)$$

fino alla derivata seconda e tracciarne il grafico. Indicare gli eventuali punti di minimo, di massimo (sono relativi o assoluti?) e di flesso.

Facendo riferimento alla funzione precedente

- determinare la primitiva di $f(x)$ che in $x = \frac{1}{2}$ vale 1.
- fornire un esempio di integrale indefinito, definito e generalizzato di $f(x)$ (per questo punto si spieghi la differenza tra i tre integrali aiutandosi, quando è possibile, con il grafico della funzione).