3. CALCOLO DIFFERENZIALE PER FUNZIONI DI UNA VARIABILE REALE.

Molto spesso $y = f(x)$ rappresenta l'evoluzione di un fenomeno al passare del tempo x.Se siamo interessati a sapere con che rapidità il fenomeno si evolve (ovvero con che rapidità cambiano i valori della funzione f), vuol dire che stiamo in realtà cercando la sua derivata. (es. velocità, accelerazione).

Sia f una funzione definita in $A \subset \mathbb{R}$. Siano $x_0, x_0 + h \in A$. $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$.

Definizioni La differenza $\Delta x = x - x_0 = x_0 + h - x_0 = h$ si dice *incremento della variabile indipendente* x nel passaggio da x_0 a $x_0 + h$.
La differenza $\Delta y = \Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0)$ si dice *incremento della variabile dipendente* y *o della funzione* f, relative all'incremento h e al punto x_0.
Il rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ si dice *rapporto incrementale di* f relativo al punto x_0 e all'incremento h.

Definizione Una funzione $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice *derivabile* in $x_0 \in A$ se esiste finito il limite del rapporto incrementale di f relativo al punto x_0

$$\lim_{x \mapsto x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \mapsto 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Il valore di tale limite si chiama *derivata prima di* f in x_0 e si denota con $f'(x_0), \mathrm{D}f(x_0), \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$.

Osservazione: Se consideriamo i limiti per $x \mapsto x_0^+$ o per $h \mapsto 0^+$ si definisce in modo analogo la *derivata destra* e si indica con $f'_+(x_0)$. Mentre se consideriamo i limiti per $x \mapsto x_0^-$ o per $h \mapsto 0^-$ si definisce la *derivata sinistra* e si indica con $f'_-(x_0)$.

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \mapsto x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \mapsto x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Si dimostra che f è derivabile in x_0 se e solo se $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

Definizione La funzione $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ è *derivabile* in A se lo è in ogni punto di A.

DERIVATE DELLE FUNZIONI ELEMENTARI

1) La funzione costante $f(x) = k$, con $k \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \mapsto x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \mapsto x_0} \frac{k - k}{x - x_0} = 0 = f'(x_0)$$

2) La funzione identità $f(x) = x$

$$\lim_{x \mapsto x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \mapsto x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1 = f'(x_0) \ \forall \ x_0 \in \mathbb{R}$$

3) La funzione lineare $f(x) = ax + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ e con $a \neq 0$

$$\lim_{x \mapsto x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \mapsto x_0} \frac{ax + b - ax_0 - b}{x - x_0} = \lim_{x \mapsto x_0} \frac{a(x - x_0)}{x - x_0} = a$$

4) La funzione quadratica $f(x) = x^2$

$$\lim_{x\mapsto x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \lim_{h\mapsto 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\mapsto 0} \frac{x_0^2+h^2-2hx_0-x_0^2}{h} = \lim_{h\mapsto 0} \frac{h(h+2x_0)}{h} = 2x_0$$

In generale possiamo affermare che $f'(x) = 2x$.

CONTINUITÀ E DERIVABILITÀ.

Teorema:
Se $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ è derivabile nel punto x_0, allora f è ivi continua.
DIMOSTRAZIONE
Occorre provare che $\lim_{x\mapsto x_0} f(x) = f(x_0)$ o equivalentemente che $\lim_{x\mapsto x_0}(f(x) - f(x_0)) = 0$.
Ora

$$\lim_{x\mapsto x_0} \left(f(x)-f(x_0)\right) = \lim_{x\mapsto x_0} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot (x-x_0)\right) = \lim_{x\mapsto x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot \lim_{x\mapsto x_0} (x-x_0) = f'(x_0)\cdot 0$$

Osservazione: in generale il viceversa NON è vero. Esistono funzioni continue in un punto ma non derivabili in tale punto.

Esempio La funzione valore assoluto $f(x) = |x|$ è continua in $x_0 = 0$ non è ivi derivabile.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$f(0) = 0$, e $\lim_{x\mapsto 0^+} f(x) = \lim_{x\mapsto 0^-} f(x) = 0$ e quindi f è continua nel punto $x_0 = 0$.

Ma

$$\lim_{x\mapsto 0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-0} = \lim_{x\mapsto 0^+} \frac{x-0}{x-0} = 1 = f'_+(0)$$

$$\lim_{x\mapsto 0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-0} = \lim_{x\mapsto 0^-} \frac{x-0}{x-0} = -1 = f'_-(0)$$

Essendo $f'_+(0) \neq f'_-(0)$ la funzione non è derivabile in $x_0 = 0$ e si dice che $x_0 = 0$ è un punto di non derivabilità per f, in particolare diremo che $x_0 = 0$ è un *punto angoloso* (punto di non derivabilità in cui la derivata dx è diversa da quella sx.)
Se consideriamo la funzione $f'(x)$ esse non è definita in $x = 0$.

SIGNIFICATO GEOMETRICO DELLA DERIVATA
Dal teorema che lega continuità e derivabilità dicendo che se f è derivabile in un punto x_0, allora f è anche continua in x_0 e in particolare il punto di coordinate $P_0\big(x_0, f(x_0)\big) \in G_f$.
Consideriamo assieme a P_0 un altro punto $P\big(x, f(x)\big) \in G_f$ con $P \not\equiv P_0$. La retta che passa per P, P_0 è secante la funzione con coefficiente angolare $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\alpha$, dove α è l'angolo che la retta forma con l'asse delle ascisse. Per definizione di coefficiente angolare abbiamo che $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, ovvero il coefficiente angolare della retta rappresenta il rapporto incrementale della funzione f.
Cosa succede ora se avviciniamo il punto P al punto P_0?
La retta che passa per i punti P, P_0 sarà sempre più prossima ad essere retta tangente al grafico della funzione nel punto P_0. Possiamo descrivere l'andamento del coefficiente angolare m attraverso il

$$\lim_{x \mapsto x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Ovvero la derivata prima di una funzione f nel suo punto di ascissa x_0 rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione nel punto di ascissa x_0 ed è uguale (per definizione di coefficiente angolare) alla tangente dell'angolo che la retta forma con l'asse delle x.

Esempio Calcolare la retta tangente ad $f(x) = x^2$ nel punto di ascissa $x_0 = 1$.

Teorema (regole di derivazione)

Siano f, g due funzioni derivabili in x_0 (con $x_0 \in D_f \cap D_g$) e sia $k \in \mathbb{R}$ una costante. Allora le funzioni

$$f \pm g,\ \ f \cdot g,\ \ k \cdot f \ \text{ e } \ \frac{1}{g},\ \frac{f}{g} \ (\text{se } g'(x_0) \neq 0)$$

Sono derivabili in x_0 e valgono le seguenti relazioni:

i. $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
ii. $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
iii. $(k \cdot f)'(x_0) = kf'(x_0)$
iv. Se $g'(x_0) \neq 0$, $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$
v. Se $g'(x_0) \neq 0$, $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

DIMOSTRAZIONE i) e ii) per esercizio.

Osservazioni: queste formule si possono estendere nel caso si abbiano $n > 2$ funzioni, cioè

i) $(f_1 + f_2 + \cdots + f_n)'(x_0) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(x_0)$
ii) $(f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n)'(x_0) = \sum_{i=1}^{n} (f_i'(x_0) \prod_{j \neq i} f_j(x_0))$

APPLICAZIONE:

1) Funzione potenza $f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = nx^{n-1}$
2) Funzione polinomiale
   $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + 2a_2 x +$
   $+a_1$.
3) $(\tan x)' = (\frac{\sin x}{\cos x})' = 1 + \tan^2 x$
4) $(\operatorname{cotg} x)' = \left(\frac{1}{\tan x}\right)' = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x)$
5) $(x^{-n})' = -n\, x^{-n-1}$
6) $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Osservazione: La $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ ha $D_f = [0, +\infty)$, ma in $x = 0$, f non è derivabile perché la $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ non è definita nel punto $x = 0$. Il punto $x = 0$ è detto punto a tangente verticale.

Esercizi: Calcola la derivata prima delle seguenti funzioni

1) $f(x) = \sqrt[5]{x^3} = x^{\frac{3}{5}}$
2) $f(x) = x + \sin x + 3$
3) $f(x) = -4\cos x$
4) $f(x) = x^3 \sin x$

5) $f(x) = (3 - 2x - 4x^2)(x^5 - 6x^3)$

6) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 5}$

7) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

9.2 Provare che la funzione $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ x \cdot \sin\frac{1}{x} & \text{se } x = 0 \end{cases}$ è continua ma non derivabile in $x = 0$.

9.3 Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 - x^2 & \text{se } 0 < x < 1 \\ (x-1)^2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

Teorema (derivata della funzione composta regola della catena)
Se f è una funzione derivabile in x_0 e g è una funzione derivabile in $y = f(x_0)$, allora la funzione composta $g \circ f$ (se esiste) è derivabile in x_0 e si ha:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

Esempi:

1) $(f^n(x))' = nf^{n-1}(x)f'(x)$

   $(\sin^4 x)' = 4\sin^3 x \cos x.$

   $((2x^3 - 7x^2 + 3x - 10)^8)' = 8(2x^3 - 7x^2 + 3x - 10)(6x^2 - 14x + 3).$

2) $(\sin f(x))' = \cos f(x)\, f'(x)$

   $(\cos f(x))' = -\sin\big(f(x)\big)\, f'(x).$

   $(\sin 3x)' = \cos 3x \cdot 3.$

   $\left(\cos\sqrt{x}\right)' = -\sin\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}.$

Teorema (derivata della funzione inversa)
Sia f una funzione continua e invertibile su $I \subset \mathbb{R}$. Se f è derivabile in x_0 con $f(x_0) \neq 0$, allora la sua inversa f^{-1} è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e si ha che

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{con} \quad x_0 = f^{-1}(y_0)$$

Esempio
Sia $f(x) = x^2,\ f^{-1}(y) = \sqrt{y} \quad \text{con } y \geq 0.$

$$\left(\sqrt{y}\right)'_{y=y_0} = \frac{1}{(x^2)'_{x_0 = f^{-1}(y_0)}} = \frac{1}{(2x)_{x_0 = \sqrt{y_0}}} = \frac{1}{2\sqrt{y_0}}$$

Derivata della funzione esponenziale e logaritmo

- $f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^x$

  $\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)} \cdot f'(x),$

  $\left(e^{5x - x^2}\right)' = e^{5x - x^2} \cdot (5 - 2x),$

In generale $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

- $f(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}$

$(\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$,

$(\ln(2x^4 - 7x^2 + 17))' = \frac{8x^3-14x}{2x^4-7x^2+17}$,

$\left(\ln\left(\frac{2x+5}{x-9}\right)\right)' = \frac{x-9}{2x+5} \cdot \frac{2(x-9)-(2x+5)}{(x-9)^2} = -\frac{23}{(2x-5)(x-9)}$.

In generale $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

TABELLE DELLE DERIVATE

Funzione	*Derivata*
funzione_costante $y = k \qquad (k \in R)$	$y' = 0$
funzione_potenza $y = x^n$ *casi_particolari:* $y = x$ $y = \sqrt{x}$ $y = \sqrt[n]{x^m}$	$y' = nx^{n-1}$ $y' = 1$ $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $y' = \frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$
funzioni_goniometriche $y = \sin x$ $y = \cos x$ $y = tgx$ $y = ctgx$	$y' = \cos x$ $y' = -\sin x$ $y' = \begin{cases} \frac{1}{\cos^2 x} \\ 1 + tg^2 x \end{cases}$ $y' = \begin{cases} -\frac{1}{\sin^2 x} \\ -(1 + ctg^2 x) \end{cases}$
funzione_logaritmica $y = \log_a x$ *caso_particolare:* $y = lnx$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$ $y' = \frac{1}{x}$
funzione_esponenziale $y = a^x$ *caso_particolare:* $y = e^x$	$y' = a^x \ln a$ $y' = e^x$

goniometriche_inverse	
$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = arctgx$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
$y = arc\cot gx$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$
Regole_derivazioni	
$y = k \cdot f(x)$	$y' = k \cdot f'(x)$
$y = f(x) \pm g(x)$	$y' = f'(x) \pm g'(x)$
$y = f(x) \cdot g(x)$	$y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$y = \frac{f(x)}{g(x)}$	$y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$
$y = g[f(x)]$	$y' = g'[f(x)] \cdot f'(x)$
casi_particolari	
$y = [f(x)]^n$	$y' = n[f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$
$y = \ln[f(x)]$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$
$y = e^{f(x)}$	$y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$
$y = \sin[f(x)]$	$y' = \cos[f(x)] \cdot f'(x)$
$y = \cos[f(x)]$	$y' = -\sin[f(x)] \cdot f'(x)$
$y = \arcsin[f(x)]$	$y' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$
$y = \arccos[f(x)]$	$y' = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$
$y = arctg[f(x)]$	$y' = \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$

3.1 Funzione derivata di ordine superiore

Se $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione derivabile in ogni punto di $[a, b]$, possiamo considerare la funzione derivata $f': [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}: x \longmapsto f'(x)$.
Se la funzione f' è derivabile in $x_0 \in [a, b]$ diremo che f è derivabile due volte in x_0 e chiameremo tale valore *derivata seconda* di f in x_0, indicata con $f''(x_0) = \lim_{x \mapsto x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$
In modo analogo, se f è derivabile n volte in x_0, possiamo definire le derivate $f''', f^{iv}, \dots, f^{(n)}$.

Esempio: calcolare la derivata seconda di $f(x) = 3x^4 + 5\sqrt{x} + 6$.
$f'(x) = 12x^3 + \frac{5}{2\sqrt{x}},$
$f''(x) = 36x^2 + \frac{5}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) x^{-\frac{1}{2}-1} = 36x^2 - \frac{5}{4} x^{-\frac{3}{2}}.$

3.2 Applicazioni al calcolo delle derivate

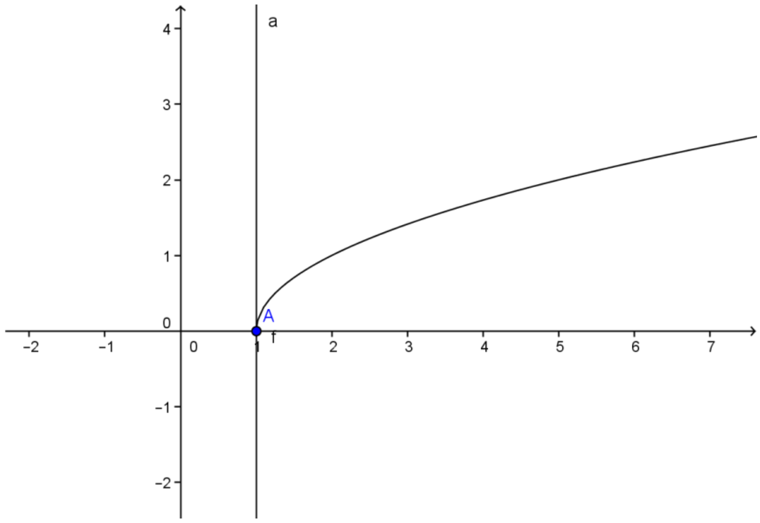
Retta tangente al grafico di una funzione.

Esempi:

1) Determiniamo la retta tangente al grafico della funzione $f(x) = -x^3 + 4x$ nel punto $x_1 = -2$
Per far questo dobbiamo calcolare il valore della funzione nel punto x_1, la funzione derivata prima e il valore della funzione derivata nel punto x_1
$f(x_1) = f(-2) = 8 - 8 = 0,$
$f'(x) = -3x^2 + 4,$
$f'(x_1) = f'(-2) = -12 + 4 = -8.$
Ricordiamo che la formula della retta tangente al grafico di una funzione nel punto di ascissa x_0 è data dalla formula:
$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$
Nel nostro caso diventa
$$y = -8(x + 2) \quad \Rightarrow \quad y = -8x - 16$$
2) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \frac{10}{x^2} - \frac{x}{2}$ perpendicolare al suo asintoto obliquo.

Se $\lim_{x \mapsto x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$ allora f non è derivabile in x_0, ma se f è continua in x_0 la retta tangente a G_f in $(x_0, f(x_0))$ è una retta parallela all'asse y e che il punto x_0 è un punto a tangente verticale o *punto di flesso a tangente verticale*.

Esempio $f(x) = \sqrt{x - 1}.$



Abbiamo detto che la retta tangente a G_f in x_0 è data dall'equazione $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Il secondo membro dell'equazione precedente può essere usato per approssimare $f(x)$ in un intorno del punto x_0.
$$f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

In effetti la retta tangente in un immediato intorno del punto x_0 è molto vicina alla curva e quindi in quell'intorno ne definisce una buona approssimazione. Tale approssimazione è detta *approssimazione del primo ordine.*

Possiamo raffinare tale approssimazione in questo modo:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Tale approssimazione è detta *polinomio di Taylor* di f nel punto x_0.

Esempio Trovare un valore approssimato per $\sqrt[3]{9}$. Per farlo usiamo una approssimazione del primo ordine con questi dati:
$f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x = 9$, $x_0 = 8$.

3.3 Teoremi sulle funzioni derivabili

Teorema (di Fermat)

Sia $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile in $x_0 \in (a, b)$ e si x_0 un punto di massimo o minimo (relativo o assoluto) per f. Allora $f'(x_0) = 0$ si dice anche che x_0 è un punto *stazionario* per f.

DIMOSTRAZIONE:

Lo dimostriamo supponendo che x_0 sia un punto di massimo per f, in modo analogo lo si può dimostrare ponendo x_0 punto di minimo.

Sia dunque x_0 punto di massimo, allora esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (a, b)$

Abbiamo che

$$\forall\, x > x_0 \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad \Rightarrow f'_+(x_0) \leq 0$$

$$\forall\, x < x_0 \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \Rightarrow f'_-(x_0) \geq 0$$

Essendo f derivabile in x_0 abbiamo che $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ e quindi l'unica possibilità è che siano entrambe nulle ovvero $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = 0$.

Osservazioni:

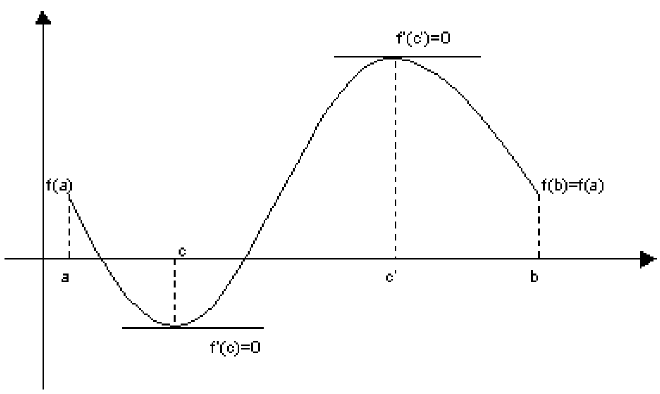
1) Le rette tangenti a G_f nei punti di massimo o minimo di (a, b) sono rette parallele all'asse delle ascisse.
2) Non vale il viceversa del teorema di Fermat, cioè: esistono punto stazionari per f, (dove il valore della derivata prima si annulla), che non sono punti né di massimo e né di minimo. Come ad esempio accade per $f(x) = x^3$.
3) Il punto x_0 deve essere un punto interno ad $[a, b]$ ed x_0 è un punto di massimo o minimo della funzione non è detto che $f'(x_0) = 0$.

Teorema (di Rolle)

Sia $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione

- continua nell'intervallo chiuso $[a, b]$,
- derivabile nell'intervallo aperto (a, b),
- tale che $f(a) = f(b)$,

allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$.



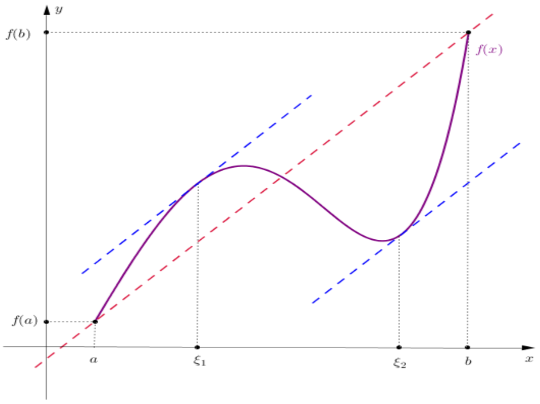
Dal punto di vista geometrico il teorema di Rolle ci dice che sotto le ipotesi del teorema, se $f(a) = f(b)$ allora esiste un punto interno all'intervallo (a, b) che ha tangente orizzontale.

Teorema (di Lagrange)

Sia $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione

- continua nell'intervallo chiuso $[a,b]$,
- derivabile nell'intervallo aperto (a,b),

allora esiste $c \in (a,b)$ tale che $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$



Dal punto di vista geometrico il teorema di Lagrange ci dice che, sotto le ipotesi del teorema, esiste un punto all'interno dell'intervallo la cui retta tangente al grafico è parallela alla retta secante che passa per a, b.

Corollario (test di monotonia)

Sia $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continua in $[a,b]$e derivabile in (a,b). Allora

- f è crescente in $[a,b]$ se e solo se $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a,b)$
- f è decrescente in $[a,b]$ se e solo se $f'(x) \leq 0$ per ogni $x \in (a,b)$

Osservazione: Se $f' > 0 \quad (f' < 0)$ per ogni $x \in (a,b)$ allora diremo che f è strettamente crescente (decrescente).

Non vale il viceversa: se f è strettamente crescente (decrescente) può esistere x_0 tale che $f'(x_0) = 0$. Riusciresti a trovarne un esempio?

Corollario 2

Una funzione f derivabile in $[a,b]$ è costante se e solo se $f'(x) = 0$ per ogni $x \in [a,b]$.

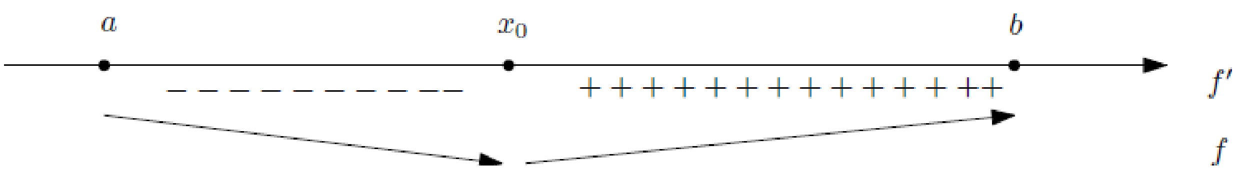
Corollario 3

Siano f, g funzioni derivabili in $[a,b]$. Allora $f' = g' \quad \Leftrightarrow \quad f - g = k$ con $k \in \mathbb{R}$.

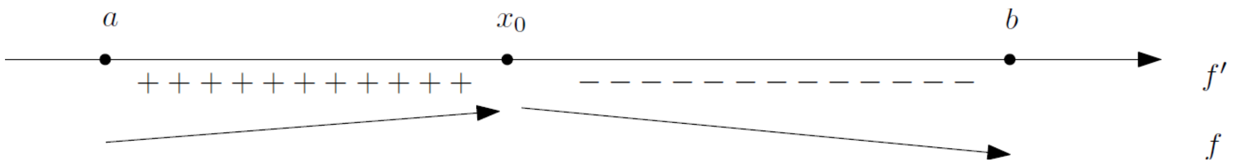
Corollario 4 (Criterio per determinare punti di massimo e minimo)

Sia $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile in (a,b) e sia $x_0 \in (a,b)$ un punto stazionario per f. (cioè $f'(x_0) = 0$).
Abbiamo che:

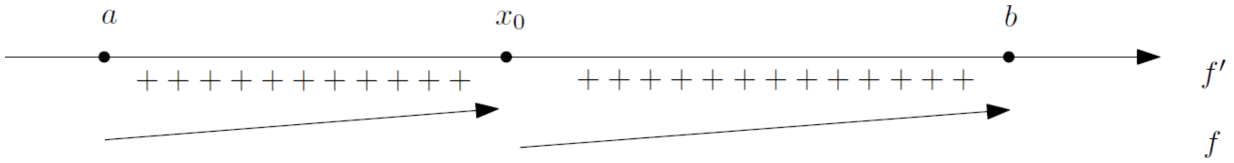
1) Se $f'(x) < 0 \; \forall \, x \in (a, x_0)$ e $f'(x) > 0 \;\; \forall \, x \in (x_0, b)$, allora x_0 è un punto di *min relativo* per f



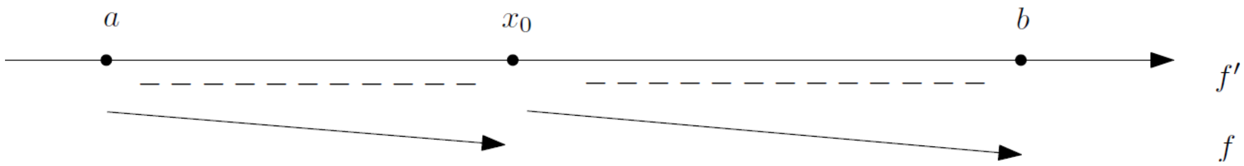
2) Se $f'(x) > 0 \; \forall \, x \in (a, x_0)$ e $f'(x) < 0 \;\; \forall \, x \in (x_0, b)$, allora x_0 è un punto di *max relativo* per f



3) Se $f'(x) < 0 \; \forall \, x \in (a, x_0) \cup (x_0, b)$, allora x_0 è un punto a *tangente orizzontale discendente*



4) Se $f'(x) > 0 \; \forall \, x \in (a, x_0) \cup (x_0, b)$, allora x_0 è un punto a *tangente orizzontale ascendente*



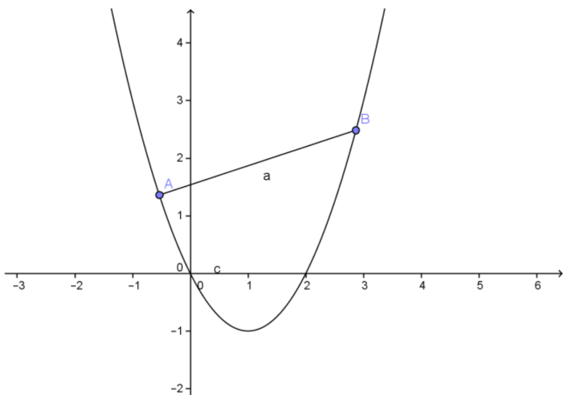
Esercizi: determinare massimi e minimi relativi o assoluti delle seguenti funzioni:

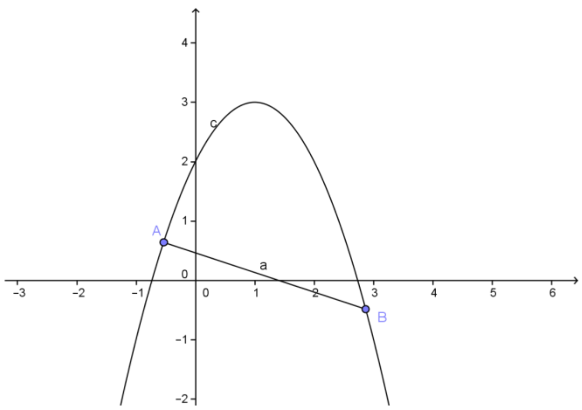
1) $f(x) = x^3 - x^2 - x - 2$
2) $f(x) = x^3(1 - x)$

3.4 Funzioni concave e convesse

Definizione Sia $f:(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. La funzione f si dice *convessa* in (a,b) se, presi due punti qualsiasi $x_1, x_2 \in (a,b)$, il segmento che congiunge $A(x_1, f(x_1))$ e $B(x_2, f(x_2))$ giace "al di sopra" di G_f nell'intervallo compreso tra x_1 e x_2.

Esempi:





Più formalmente:

Definizione: Sia $f:(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale. f si dice *convessa* in (a,b) se presi due punti qualsiasi $x_1 < x_2 \in (a,b)$ si ha che:

$$f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda x_2)\big) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \qquad \forall \lambda \in [0,1]$$

Teorema

Sia f una funzione derivabile due volte in (a,b). Si ha che:

- f è convessa in (a,b) se e solo se $f''(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in (a,b)$
- f è concava in (a,b) se e solo se $f''(x) \leq 0 \quad \forall\, x \in (a,b)$

Definizione Sia $f:(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale. Un punto x_0 dove la funzione f sia derivabile almeno due volte, di dice *punto di flesso* se f è concava in (a, x_0) e convessa in (x_0, b) o viceversa.

Osservazione: il punto di flesso è per definizione un punto in cui cambia la concavità della curva. Nei punti di flesso $f'' = 0$, non è vero il viceversa.

Esempi:

1) $f(x) = x^3$
2) $f(x) = x(x+2)^3$

3.5 Teorema di De L'Hospital

È utile per risolvere dei limiti di forme indeterminate del tipo $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$. Rappresenta quindi l'applicazione del calcolo delle derivate al calcolo dei limiti.

Teorema

Siano f, g due funzioni definite e derivabili almeno in un intorno di x_0 dove x_0 può essere un numero reale oppure $\pm\infty$, con $g'(x) \neq 0$ in tale intorno . Supponiamo inoltre che $\lim_{x\mapsto x_0} f(x) = \lim_{x\mapsto x_0} g(x) = 0$ oppure che $\lim_{x\mapsto x_0} f(x) = \pm\infty$ e il $\lim_{x\mapsto x_0} g(x) = \pm\infty$.

Allora se esiste, finito o non, il $\lim_{x\mapsto x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, allora esiste anche il $\lim_{x\mapsto x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ e tali limiti sono uguali, cioè

$$\lim_{x\mapsto x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\mapsto x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Osservazioni: La conclusione rimane valida anche per il limite destro o sinistro. Quando nel calcolo di un limite applicheremo il teorema di De L'Hospital, porremo una "H" sopra al simbolo di uguaglianza in questo modo:

$$\lim_{x\mapsto x_0} \frac{f(x)}{g(x)} =^H \lim_{x\mapsto x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Definizioni Siano f, g due funzioni definite in un intorno di x_0 dove x_0 può essere un numero reale oppure $\pm\infty$, con $g(x) \neq 0$ in tale intorno. Se

1) $\lim_{x\mapsto x_0} f(x) = 0$ allora f si dice *infinitesimo*
   $\lim_{x\mapsto x_0} f(x) = \pm\infty$ allora f si dice *infinito.*
2) Se nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ si trova che

$$\lim_{x\mapsto x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} l \quad \text{con } l \in \mathbb{R} \setminus \{0\} & \Rightarrow \quad f \text{ è infinitesimo dello stesso ordine di } g \\ 0 & \Rightarrow \quad f \text{ è infinitesimo di ordine superiore} \\ \infty & \Rightarrow \quad f \text{ è infinitesimo di ordine inferiore} \end{cases}$$

   Se nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ si trova che

$$\lim_{x\mapsto x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} l \quad \text{con } l \in \mathbb{R} \setminus \{0\} & \Rightarrow \quad f \text{ è infinito dello stesso ordine di } g \\ 0 & \Rightarrow \quad f \text{ è infinito di ordine inferiore} \\ \infty & \Rightarrow \quad f \text{ è infinito di ordine superiore} \end{cases}$$

Se i limiti non esistono gli infinitesimi o gli infiniti si dicono non confrontabili.

Esempi:

1) $\lim_{x\mapsto 0} \frac{\sin x}{x} =^H \lim_{x\mapsto 0} \cos x = 1$
2) $\lim_{x\mapsto 0} \frac{\ln(\cos x)}{x} =^H \lim_{x\mapsto 0} \frac{1}{\cos x}(-\sin x) = 0$
3) $\lim_{x\mapsto +\infty} \frac{\ln x + x}{x^2} =$
4) $\lim_{x\mapsto +\infty} (x^2 - 1)e^{-3x} =$
5) $\lim_{x\mapsto 0} \frac{2e^x - x^2 - 2x - 2}{x^3} =$

Osservazione: In qualche caso il teorema di De L'Hospital risulta superfluo, non ci dobbiamo dimenticare quanto fatto finora. Mentre in altri casi non è possibile applicarlo.
Per esempio il $\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{\sin x}{x}=0$ si dimostra utilizzando il teorema dei due carabinieri in quanto la funzione seno è limitata.

Esercizio 9.10 Calcoliamo:

a) $\lim_{x\mapsto 0}\frac{\tan x-\sin x}{x-\sin x}$

b) $\lim_{x\mapsto 0}\left(\frac{3}{\sin x}-\frac{2}{x}\right)$

3.6 Studio di funzione

Riprendiamo quanto precedentemente detto andando a completare l'elenco delle azioni che dobbiamo svolgere per studiare in modo completo una funzione.

0) Classificazione
1) Determinare D_f
2) Intersezione con gli assi ed eventuali simmetrie
3) Determinare il segno di $f(x)$, ovvero studiare quali valori $f(x) \geq 0$
4) Studiare il comportamento agli estremi del dominio.
5) Crescenza, decrescenza ed eventuali punti di massimo o minimo relativi o assoluti. Studio del segno di $f'(x)$.
6) Concavità, convessità ed eventuali punti di flesso. Studio del segno di $f''(x)$.

Esercizi:

Razionali fratte

1) $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x^2-6x-9}$
2) $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$

Irrazionali

3) $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$
4) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

Esponenziali

5) $f(x) = e^{\frac{(x-1)}{2x}}$
6) $f(x) = \frac{x^2}{e^{2x}}$

Logaritmiche

7) $f(x) = \ln(x^2-1)$
8) $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+2}\right)$