3. LIMITI DI FUNZIONI

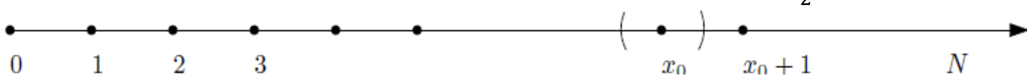
Il concetto di limite e il calcolo infinitesimale permettono di caratterizzare il comportamento delle funzioni nell'intorno di particolari punti del dominio detti *punti di accumulazione.*

Sia A un insieme contenuto in $\mathbb{R}$.

Definizione Sia x_0 un punto fissato di A.
Chiamiamo δ-*intorno* di x_0 e lo indichiamo con I_{x_0} l'intervallo aperto $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ con $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$.
Intorno destro di x_0: $I_{x_0}^{+} = (x_0, x_0+\delta)$
Intorno sinistro di x_0: $I_{x_0}^{+} = (x_0-\delta, x_0)$
Intorno di $+\infty$: $I_{+\infty} = (M, +\infty)$ con $M \in \mathbb{R},\ M \gg 0$
Intorno di $-\infty$: $I_{-\infty} = (-\infty, M)$ con $M \in \mathbb{R},\ M \gg 0$

Definizione Il punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice *punto isolato* di A, se esiste $\delta > 0,\ \delta \in \mathbb{R}$ tale che $(x_0-\delta; x_0+\delta) \cap A = \{x_0\}$.

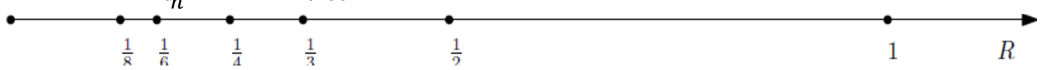
Esempio: Tutti i punti di $\mathbb{N}$ sono isolati, è sufficiente prendere $\delta = \frac{1}{2}$.



Definizione Il punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice *punto di accumulazione* per l'insieme A se $\forall\ \delta \in \mathbb{R}$ esiste un δ-intorno di x_0, $I_{x_0} = (x_0-\delta, x_0+\delta)$, che contiene infiniti punti di A diversi da x_0, ossia se $(I_{x_0} \cap A)\backslash\{x_0\} \neq \emptyset$.
Notiamo che x_0 non deve necessariamente un punto di A.

Esempi:

1) $A = \{\frac{1}{n},\ \ n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$



$0 \notin A$, ma 0 è un punto di accumulazione per A.
Infatti qualsiasi $\delta \in \mathbb{R}$ scegliamo, esistono infiniti punti di A che stanno nel δ-intorno di 0.

$$(-\delta, \delta) \cap A = \left\{\frac{1}{n}\ \middle|\ n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\ \ e\ \ \frac{1}{n} < \delta\right\} = \left\{\frac{1}{n}\ \middle|\ n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\ \ e\ \ n > \frac{1}{\delta}\right\}$$

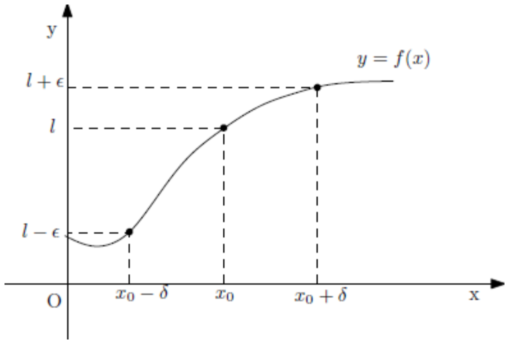
Qualunque sia $\delta \in \mathbb{R}$ scelto esiste sempre un $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > \frac{1}{\delta}$.

2) $A = (a, b)$. $\quad a, b \notin A$ ma sono punti di accumulazione per A.
3) $A = \mathbb{R}$ $\quad$ ogni punto è di accumulazione

Definizione Sia $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ e sia x_0 punto di accumulazione per A. Diremo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l\ \ \in \mathbb{R}$$

Se $\forall\ \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0$ t.c. $\forall\ x \in \big((x_0-\delta_\epsilon, x_0+\delta_\epsilon) \cap A\ \big) \setminus \{x_0\}$ si ha $|f(x) - l| < \epsilon$
O equivalentemente
$\forall\ \epsilon > 0, \exists\ \delta_\epsilon > 0$ t.c. $\forall\ x \in A$ con $x \neq x_0$ e $x_0 - \delta_\epsilon < x < x_0 + \delta_\epsilon$ si ha $l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon$
Questa è la definizione di limite FINITO ($l \in \mathbb{R}$) per x che tende ad un numero finito.



Osservazione Nella definizione di limite non compare il valore $f(x_0)$, essendo x_0 punto di accumulazione per A, può non appartenere ad A e f può non essere definita in x_0.

Esempio: dimostriamo mediante la definizione di limite che $\lim_{x\to 1} x + 2 = 3$.
Devo dimostrare che preso un qualsiasi intorno di 3 sull'asse y, $(3-\epsilon, 3+\epsilon)$ esiste un intorno di 1 sull'asse x con la seguente proprietà: per ogni x appartenente a quell'intervallo $|(x+2)-3| < \epsilon$.
L'esercizio è concluso quando trovo l'intorno di 1 sull'asse x.
Sia quindi $\epsilon > 0$, tale che $|(x+2)-3| < \epsilon$, allora

$$\begin{cases} x-1<\epsilon \\ x-1>-\epsilon \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<1+\epsilon \\ x>1-\epsilon \end{cases} \Rightarrow x \in (1-\epsilon, 1+\epsilon)$$ che è un intorno di 1.

Esercizi

1) $f(x) = \begin{cases} 3x & se\ x \neq 1 \\ 1 & se\ x = 1 \end{cases}$ Verifichiamo che il limite di f per $x \to 1$ è uguale a 3.

2) $f(x) = x^3 - 2$ Verifichiamo che il limite di f per $x \to 0$ è uguale a 2.

Definizione Sia $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, e x_0 un punto di accumulazione per A. Diremo che:

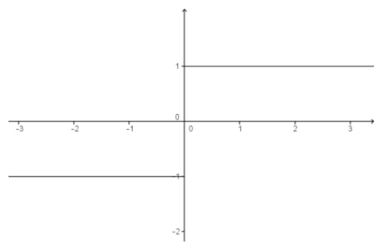
1) $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l$ Se $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta_\epsilon$ tale che $\forall\ x \in \left(x_{0,} x_0 + \delta_\epsilon\right) \setminus \{x_0\}$, si ha $|f(x) - l| < \epsilon$
2) $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l$ Se $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta_\epsilon$ tale che $\forall\ x \in \left(x_{0,} x_0 + \delta_\epsilon\right) \setminus \{x_0\}$, si ha $|f(x) - l| < \epsilon$

Osservazione Se x_0 è punto di accumulazione per A e per $\{x \in A\ |\ x > x_0\}$ e $\{x \in A\ |\ x > x_0\}$, allora si dimostra che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = l = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

Esempio: $f(x) = \mathrm{sgn}(x): \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \{-1; 1\}$

$$x \longmapsto \begin{cases} -1 & se\ x < 0 \\ 1 & se\ x > 0 \end{cases}$$



Esistono i limiti
$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$,
$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$,
Ma non esiste il
$\lim_{x\to 0} f(x)$. In quanto il limite destro è diverso dal limite sinistro.

DEFINIZIONE DI LIMITE FINITO PER x CHE TENDE AD INFINITO.
Definizione Sia $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ con A non limitato superiormente [inferiormente]. Diremo che

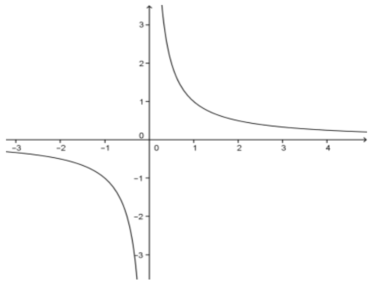
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = l \qquad [\lim_{x\to -\infty} f(x) = l]$$

Se $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta_\epsilon$ tale che $\forall\ x > \delta_\epsilon = (\delta_\epsilon, +\infty)$, $\quad [\forall\ x < \delta_\epsilon = (-\infty, \delta_\epsilon)]$
si ha $|f(x) - l| < \epsilon$

In questo caso si dice che la funzione ammette un ASINTOTO ORIZZONTALE.

Esempi

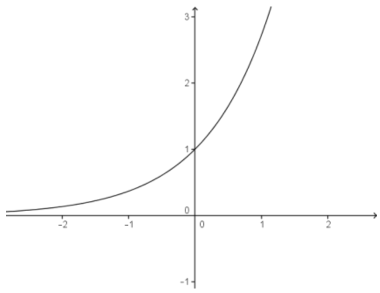
1) $f(x) = \frac{1}{x} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$



Ovviamente il dominio di f non è limitato.

$$\lim_{x \mapsto \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

2) $f(x) = e^x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$



Anche in questo caso il dominio di f non è limitato e in particolare abbiamo che

$$\lim_{x \mapsto -\infty} e^x = 0$$

DEFINIZIONE DI LIMITE INFINITO PER x CHE TENDE A FINITO

Definizione Sia $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ e $x_0$un punto di accumulazione per A. Diremo che

$$[\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty] \lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

se $\forall\, M \gg 0\ \exists \delta_M > 0$ t.c. $\forall\, x \in \big((x_0 - \delta_M, x_0 + \delta_M) \cap A\big) \setminus \{x_0\}$ si ha

$$f(x) > M \qquad\qquad [f(x) < -M]$$

In questo caso si dice che la funzione ammette un ASINTOTO VERTICALE

Esempi

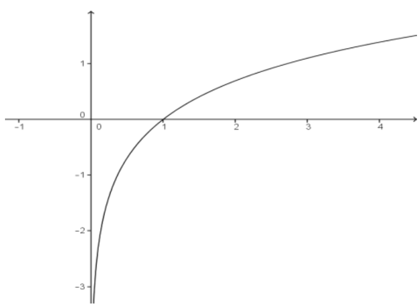
1) $f(x) = \frac{1}{x}$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ quindi 0 è punto di accumulazione per il dominio.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Non esiste il limite per $x \mapsto 0$.

2) $f(x) = \ln x$



$D_f = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ quindi 0 è punto di accumulazione per il dominio di f

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$$

3) $f(x) = \tan x$

$D_f = x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$$

Osservazione Se $f(x) > 0$ in un δ-intorno di x_0 escluso x_0, allora
$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$.
Se $f(x) < 0$ in un δ-intorno di x_0 escluso x_0, allora
$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

DEFINIZIONE DI LIMITI INFINITI PER x CHE TENDE AD INFINITO

Definizione Sia $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, con A non limitato superiormente o inferiormente. Diremo che:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad [-\infty]$$

se $\forall\, M \gg 0\ \exists \delta_M > 0$ t.c. $\forall\, x > M$ si ha che $f(x) > M \qquad [f(x) < -M]$

e che

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad [-\infty]$$

se $\forall\, M \gg 0\ \exists \delta_M > 0$ t.c. $\forall\, x < -M$ si ha che $f(x) > M \qquad [f(x) < -M]$

Esempi

1) $f(x) = e^x \quad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.
2) $f(x) = \ln x \;\; \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

3.1 Proprietà dei limiti

Le enunciamo per $x \mapsto x_0$ ma se non specifichiamo nulla valgono anche per il limite destro, sinistro e per $x \mapsto \pm\infty$.

Teorema *Operazioni con i limiti*.
Siano $f, g: A \longrightarrow \mathbb{R}$, con $A \subset \mathbb{R}$ 2 funzioni e sia x_0 un punto di accumulazione per A. Se $\lim_{x\mapsto x_0} f(x) = l_1$ e $\lim_{x\mapsto x_0} g(x) = l_2$, con $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, allora:

1) $\lim_{x\mapsto x_0}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\mapsto x_0} f(x) + \lim_{x\mapsto x_0} g(x) = l_1 + l_2$
2) $\lim_{x\mapsto x_0} f(x)\, g(x) = l_1 l_2$
3) $\lim_{x\mapsto x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$ con $l_2 \neq 0$.

Teorema *del confronto*.
Siano $f, g, h: A \longrightarrow \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$ tre funzioni.

Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\ \lim_{x\mapsto x_0} f(x) = \lim_{x\mapsto x_0} h(x) = l,\ l \in \mathbb{R}$,

allora $\lim_{x\mapsto x_0} g(x) = l$.

Teorema *della permanenza del segno*
Siano $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione e x_0 un punto di accumulazione per $A \subset \mathbb{R}$.

Se il $\lim_{x\mapsto x_0} f(x) = l$ con $l \neq 0$, allora $\exists\, \delta > 0$ tale che

$\forall\, x \in \left((x_0 - \delta_M, x_0 + \delta_M) \cap A\right) \setminus \{x_0\}$, $f(x)$ ha lo stesso segno di l.

Teorema *limiti di funzioni monotone*
Le funzioni monotone definite su un intervallo (a, b) hanno sempre limite finito o infinito agli estremi.
Precisamente, detto $C_f = (c, d)$ o $[c, d]$, il codominio di f si ha che:

1) Se f è crescente (o strettamente crescente) in (a, b), allora
   $\lim_{x\mapsto a^+} f(x) = \inf C_f$ che può essere un valore finito $c \in \mathbb{R}$ o $-\infty$,
2) Se f è decrescente (o strettamente decrescente) in (a, b), allora
   $\lim_{x\mapsto a^+} f(x) = \sup C_f$ che può essere un valore finito $c \in \mathbb{R}$ o $+\infty$,

I valori di a, b possono essere rispettivamente $-\infty, +\infty$.

Esempio

1) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}: x \longmapsto ax + b$ con $a \neq 0$

   $D_f = \mathbb{R}$ non è limitato.

   Il grafico di f è una retta e abbiamo che $\lim_{x\mapsto\pm\infty} ax + b = \begin{cases} \pm\infty & se\ a > 0 \\ \mp\infty & se\ a < 0 \end{cases}$

   Se $a = 0$ il $\lim_{x\mapsto\pm\infty} f(x) = b$.

Osservazione Quando si fanno operazioni coi limiti e uno o entrambi sono $+\infty$ o $-\infty$, bisogna fare attenzione perché in alcuni casi non si può stabilire, con una regola generale, quanto venga il limite della somma, del prodotto e del quoziente.
Supponiamo ad esempio che:

$$\lim_{x\mapsto x_0} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\mapsto x_0} g(x) = b$$

I valori b, x_0 possono essere anche numeri finiti o infinito, allora:

1) Se $b \neq -\infty$, ossia se $b \in \mathbb{R}$ o $b = +\infty$, si ottiene che
$$\lim_{x\mapsto x_0} (f(x) + g(x)) = +\infty$$
2) Se $b \neq 0$, si ottiene che
$$\lim_{x\mapsto x_0} f(x) \cdot g(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } b > 0 \text{ o } b = +\infty \\ -\infty & \text{se } b < 0 \text{ o } \mathrm{b} = -\infty \end{cases}$$
3) Se $b \neq 0$ e $b \in \mathbb{R}$, si ottiene che
$$\lim_{x\mapsto x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{se } b > 0 \\ -\infty & \text{se } b < 0 \end{cases} \quad e \quad \lim_{x\mapsto x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

Per quanto riguarda le altre possibilità che si possono verificare, non è possibile in generale dire quanto viene il limite della somma, del prodotto e del quoziente in quanto il risultato dipende dalle particolari funzioni che si stanno considerando e, in generale, varia al variare delle funzioni che intervengono nel limite. Per questa ragione, limiti di questo tipo vengono chiamati **"forme indeterminate"**. Esse, in particolare, si presentano quando si hanno limiti del tipo :
$$+\infty - \infty; \ \ 0 \cdot (\pm\infty); \ \ \frac{0}{0}; \ \ \frac{\infty}{\infty}; \ \ 1^{\infty}; \ \ \infty^0; \ \ 0^0$$

Esercizi

1. $\lim_{x\mapsto +\infty} (x^2 + 3x)$
2. $\lim_{x\mapsto +\infty} \frac{x^3+x}{x^2+1}$
3. $\lim_{x\mapsto +\infty} \frac{3\sin x}{\sin x + \cos x}$
4. $\lim_{x\mapsto +\infty} \frac{2}{x^2+4}$
5. $\lim_{x\mapsto +\infty} \frac{x^3}{x^3+7}$
6. $\lim_{x\mapsto +\infty} \frac{x^4}{x^2+4x}$

Osservazione Per procedere quando si ha una F.I. (forma indeterminata) $\frac{\infty}{\infty}$ e si considerano funzioni razionali, basta raccogliere a numeratore e a denominatore il termine di grado più alto.
In generale:
$$\lim_{x\mapsto \infty} \frac{n(x)}{d(x)} = \begin{cases} 0 \ \text{ se } d(x) \text{ ha grado maggiore di } n(x) \\ \infty \ \ \text{ se } d(x) \text{ ha grado minore di } n(x) \\ \text{rapporto dei coefficienti di grado max, quando i gradi sono uguali.} \end{cases}$$

Esercizi

1) 7.1, 7.4, 7.5,7.6.

3.2 Funzioni continue

Definizione Sia $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione con $A \subset \mathbb{R}$. Diremo che f è *continua* in $x_0 \in \mathbb{R}$ se f è definita in quel punto e se

$$\lim_{x \mapsto x_0} f(x) = f(x_0)$$

Inoltre diremo che f è una funzione continua in A se è continua per ogni $x \in A$.

Definizione Se f non è continua in un punto $x_0 \in A$ diremo che f è discontinua on $x_0 \in A$.

Osservazione: Potremo analogamente dare la definizione di funzione continua a destra e a sinistra, usando il concetto di limite destro e sinistro.

PROPRIETÀ :

- Se le funzioni f, g sono continue in x_0 allora $f \pm g$ e $f \cdot g$ sono funzioni continue in x_0
- Se le funzioni f, g sono continue in x_0 e in particolare $g \neq 0$ in un intorno di x_0 allora $\frac{1}{g}$ e $\frac{f}{g}$ sono funzioni continue in x_0.

Esempi:

1) $f(x) = k$ e $g(x) = x$ sono funzioni continue in $\mathbb{R}$.
2) Le funzioni lineari $f(x) = ax + b$, sono continue in $\mathbb{R}$.
3) Le funzioni potenza $f(x) = x^n$ sono continua in $\mathbb{R}$.
4) Le funzioni polinomiali $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ sono continue in $\mathbb{R}$.
5) Le funzioni razionali $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$ sono continue in ogni punto in cui il
6) denominatore non si annulla.

Osservazione: Le funzioni $\sin x$, $\cos x$, a^x sono continue in $\mathbb{R}$, mentre la funzione $\log_a x$ è continua nell'intervallo $(0, +\infty)$.

Osservazione Una funzione f a valori reali definita in A è continua in $x_0 \in \mathbb{R}$ se è definita in x_0 e se

$$\lim_{x \mapsto x_0^-} f(x) = \lim_{x \mapsto x_0^+} f(x) = \lim_{x \mapsto x_0} f(x) = f(x_0)$$

Esercizio (8.4)

Determinare per quale valore di a la funzione f è continua.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + a & \text{se } x < 1 \\ 3x - 2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

FUNZIONI CONTINUE IN UN INTERVALLO

Teorema (di Weirstrass)

Sia $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$. Allora f ammette massimo M e minimo m assoluti in $[a, b]$.

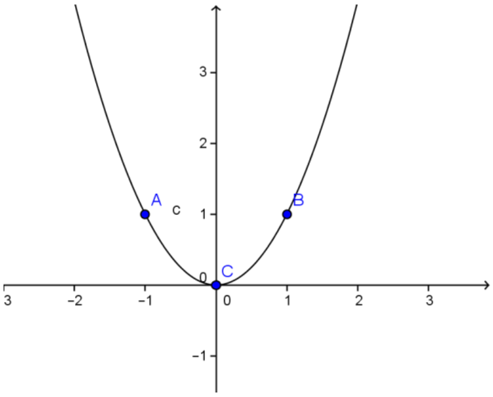
Teorema (dei valori intermedi)

Sia $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$. Allora f assume tutti i valori compresi tra m e M.

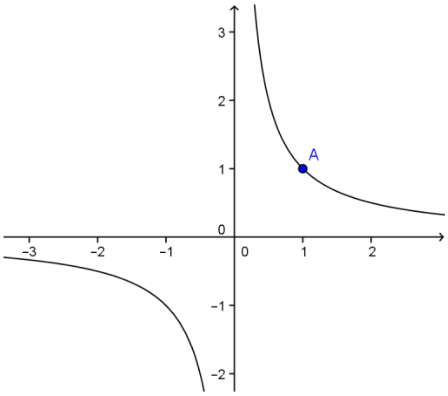
N.B. Questi teoremi valgono sole se consideriamo una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato.

Esempi

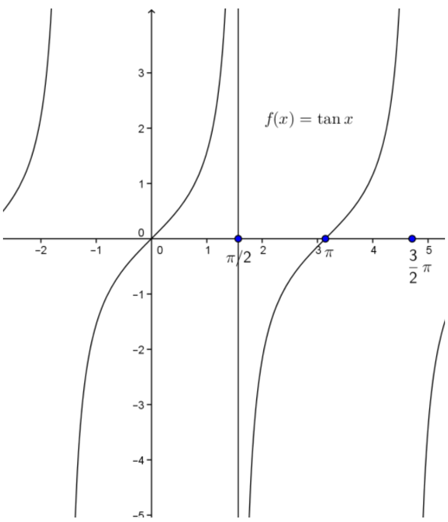
1) $f(x) = x^2$ in $[-1{,}1]$. Stiamo dunque limitando il dominio della funzione.
   f è continua in $[-1{,}1]$, intervallo chiuso e limitato, allora vale il teorema di Weierstrass ovvero esiste massimo e minimo assoluti.
   $M = 1$, e $m = 0$.



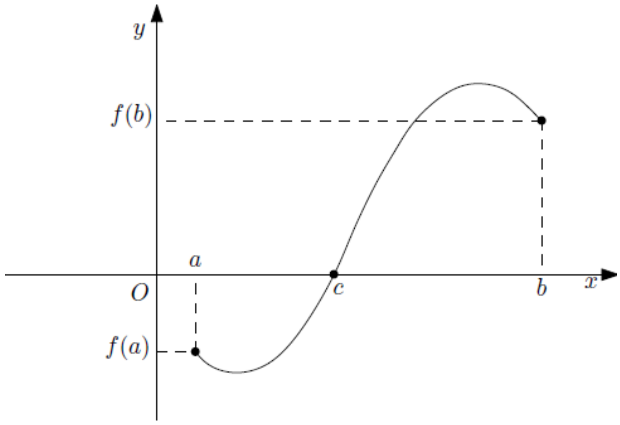
2) $f(x) = \frac{1}{x}$ in $]0{,}1]$. f è una funzione continua ma l'intervallo non è chiuso, quindi non vale il teorema di Weierstrass. Infatti è possibile trovare il minimo, ma non il massimo assoluto.
   $m = 1$, la funzione per $x \mapsto 0^+$ tende a $+\infty$ quindi non esiste il massimo assoluto.



3) $f(x) = \tan x$ in $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ e in $[0, \pi]$.
   Il primo intervallo $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ considerato non è chiuso e quindi non soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass, infatti non esistono né il minimo e né il massimo assoluti.
   Il secondo intervallo $[0, \pi]$ è chiuso ma la funzione non è continua in ogni punto dell'intervallo, infatti $\tan x$ non è continua in $\frac{\pi}{2}$.



Teorema degli zeri
Sia $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$.
DIMOSTRAZIONE:
Senza perdere di generalità possiamo supporre $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Poiché f soddisfa le condizioni del teorema di Weierstrass, ammette massimo M e minimo m assoluti tali che $m \leq f(a) \leq f(b) \leq M$ quindi $m < 0 < M$. Per il teorema dei valori intermedi la funzione f assume tuttii valori compresi tra m e M, in particolare ci sarà un punto in cui f assumerà il valore 0, ovvero esiste $c \in [a, b]$ tale che $f(c) = 0$.



Esempio Sia $f(x) = x^3 - 1$ in $[-1,1]$, $f(-1) = -2$, $f(1) = 0$. Non è possibile applicare il teorema degli zeri in tale intervallo. Ma se consideriamo l'intervallo $[-1,2]$, allora $f(2) = 7$, è possibile applicare il teorema degli zeri che mi dà la certezza dell'esistenza su uno zero ma non i da nessuna indicazione riguardante la soluzione stessa. Quindi sappiamo che esiste $c \in [-1,2]$ tale che $f(c) = 0$. Per quanto visto prima $c = 1$.

Teorema (continuità della funzione composta)
Sia f una funzione continua in x_0 e sia g una funzione continua in $y_0 = f(x_0)$, allora $g \circ f$ è continua in x_0.

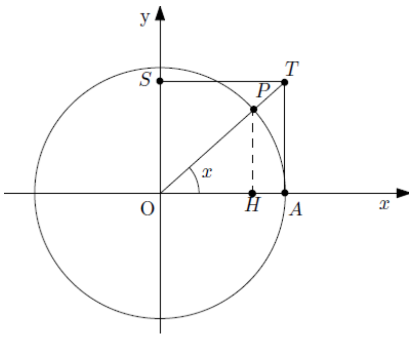
Teorema (continuità della funzione inversa)
Se f è continua in (a, b) e strettamente crescente (decrescente), allora la funzione inversa f^{-1} è continua nel suo naturale insieme di definizione e strettamente crescente (decrescente).

Esempi:

1) La funzione $f(x) = \sqrt{x}$ con $x \geq 0$, è la funzione inversa di $f(x) = x^2$ con $x \geq 0$, che è continua e strettamente crescente, quindi anche $\sqrt{x}$ è continua e strettamente crescente.
2) In generale $f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N}$ sono continue e
   i. se n è pari, f è invertibile solo in $[0, +\infty)$
      con $\lim_{x \mapsto +\infty} x^n = +\infty$ e $\lim_{x \mapsto -\infty} x^n = +\infty$
   ii. se n è dispari, f è invertibile in tutto $\mathbb{R}$
      con $\lim_{x \mapsto +\infty} x^n = +\infty$ e $\lim_{x \mapsto -\infty} x^n = -\infty$

3.3 Limiti notevoli

Ci sono dei limiti che sono forme indeterminate che vengono chiamati limiti notevoli in quanto non risulta essere banale dimostrarne il risultato.
Ne elenchiamo i principali:



1) $\lim_{x\mapsto 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

   $f = \frac{\sin x}{x}$ è una funzione pari in quanto rapporto di funzioni dispari. Per calcolare questo limite è sufficiente calcolare il $\lim_{x\mapsto 0^+}\frac{\sin x}{x}$.

   Considerando la circonferenza goniometrica la misura dell'angolo x è uguale alla misura dell'arco $\widehat{PA}$, $PH = \sin x$, e $TA = \tan x$. Abbiamo quindi che:

   $$\sin x < x < \tan x$$

   Dividendo per $\sin x$

   $$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{\sin x} \Leftrightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Leftrightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

   Per $x \mapsto 0^+ \Rightarrow \cos x \to 1$, 1 è una funzione costante e tende ovviamente a 1, quindi per il teorema del confronto anche $\frac{\sin x}{x} \to 1$.

2) $\lim_{x\mapsto \pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

3) $\lim_{x\mapsto +\infty}\frac{a^x}{x^\beta} = +\infty$ per ogni $a > 1$ e per ogni $\beta > 0$.

4) $\lim_{x\mapsto +\infty}\frac{x^\beta}{(\ln x)^\gamma} = +\infty$.

3.4 Calcolo dei limiti

1) Limite all'infinito di polinomi.

   Per il calcolo di questi limiti andiamo a raccogliere la potenza maggiore di x.

   a) $\lim_{x\mapsto+\infty}(2x^3-3x^2+2x+1)=\mathrm{F.I.}+\infty-\infty$

   b) $\lim_{x\mapsto-\infty}(2x^2-x^4)=\mathrm{F.I.}+\infty-\infty$

   c) $\lim_{x\mapsto-\infty}(-3x^3+x^2+x+7)=\mathrm{F.I.}+\infty-\infty$

2) Rapporto di polinomi F.I. $\frac{0}{0}$

   In questa situazione dobbiamo scomporre denominatore e numeratore.

   a) $\lim_{x\mapsto0}\frac{-x^3+9x^2-x}{x^2+7x}=\mathrm{F.I.}\ \frac{0}{0}$

   b) $\lim_{x\mapsto0}\frac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}=\mathrm{F.I.}\ \frac{0}{0}$

   c) $\lim_{x\mapsto0}\frac{x^2-10x+21}{x-3}=\mathrm{F.I.}\ \frac{0}{0}$

3) Limiti in cui compaiono radici, forma indeterminata $+\infty-\infty$

   La tecnica usata è quella della razionalizzazione

   a) $\lim_{x\mapsto+\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{4x-1}\right)=\mathrm{F.I.}+\infty-\infty$

   b) $\lim_{x\mapsto+\infty}\left(\sqrt{4x^2+5x+2}-2x\right)=\mathrm{F.I.}+\infty-\infty$

   c) $\lim_{x\mapsto-\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2-3}\right)=\mathrm{F.I.}+\infty-\infty$

4) Limiti di funzioni composte

   a) $\lim_{x\mapsto+\infty}\ln(\frac{3x+7}{x+2})$

   b) $\lim_{x\mapsto-\infty}e^{\frac{x^2+2}{x^3-5x+2}}$

5) Limiti che sfruttano il limite notevole $\lim_{x\mapsto0}\frac{\sin x}{x}=1$

   a) $\lim_{x\mapsto0}\frac{\sin 3x}{x}$

   b) $\lim_{x\mapsto0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x}$

   c) $\lim_{x\mapsto0}\frac{\tan x}{x}$

   d) $\lim_{x\mapsto0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

6) Limiti che sfruttano il limite notevole $\lim_{x\mapsto\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

   a) $\lim_{x\mapsto\pm\infty}\left(\frac{x-5}{x}\right)^x$

   b) $\lim_{x\mapsto+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x-1}$

   c) $\lim_{x\mapsto0}\frac{\ln(1+x)}{x}$

   d) $\lim_{x\mapsto0}\frac{\ln(1+ax)}{x}$

e) $\lim_{x\mapsto 0}\frac{e^x-1}{x}$

7) Limiti che sfruttano la relazione tra x^n, e^x e $\ln x$

a) $\lim_{x\mapsto 0}\frac{\ln^2(1+x)}{\sqrt{1+x}}$

b) $\lim_{x\mapsto +\infty}\sqrt{x}\cdot\ln x$

c) $\lim_{x\mapsto 0^+}\sqrt{x}\cdot\ln x$

3.5 Asintoti di una funzione

Definizione Si dice che la retta $x = c$ è *asintoto verticale* per la funzione f se $c \notin D_f$ e

$$\lim_{x \mapsto c^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{o} \quad \lim_{x \mapsto c^-} \pm\infty$$

Si dice che la retta $y = l$ è *asintoto orizzontale* per la funzione f, se una delle seguenti condizioni si verifica:

$$\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = l \quad \text{o} \quad \lim_{x \mapsto -\infty} f(x) = l$$

Sia $f: D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che $\lim_{x \mapsto \infty} f(x) = \infty$. La retta $y = mx + q$ è *asintoto obliquo* per f se esistono finiti i seguenti limiti:

$$m = \lim_{x \mapsto \infty} \frac{f(x)}{x} \neq 0$$

$$q = \lim_{x \mapsto \infty} (f(x) - mx)$$

STUDIO PARZIALE DEL GRAFICO DI UNA FUNZIONE:

0) Classificazione
1) Determinare D_f
2) Intersezione con gli assi ed eventuali simmetrie
3) Determinare il segno di $f(x)$, ovvero studiare quali valori $f(x) \geq 0$
4) Studiare il comportamento agli estremi del dominio.

Esercizi

Studiare in modo parziale le seguenti funzioni:

1) $f(x) = \frac{1-x^2}{x+2}$
2) $f(x) = \frac{x^2+3x}{x^2-1}$
3) $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$
4) $f(x) = \ln\left(\frac{x-2}{x+4}\right)$