MATEMATICA CON ELEMENTI DI STATISTICA

A.S. 2015/2016

INFORMAZIONI UTILI:

- Mail: chdlvc@unife.it
- Pagina docente: docente.unife.it/ludovica.chiodera
- Ricevimento: su appuntamento.
- Libro adottato: Patria-Zanghirati, Matematica: corso base per discipline biofarmaceutiche, Pitagora, Bologna.

PROGRAMMA DEL CORSO.

- Richiami su teoria insiemistica, equazioni e disequazioni, funzione esponenziale e logaritmo.
- Funzioni in una variabile.
- Calcolo infinitesimale.
- Continuità e derivabilità.
- Calcolo integrale.
- Probabilità
- Statistica descrittiva.
- Statistica induttiva
- Probabilità continua e statistica.

1. Ripasso

La matematica oltre ad utilizzare la lingua comune, usa un proprio linguaggio e propri simboli per descrivere in modo preciso e conciso il proprio oggetto di studio.

Dizionario matematico:

- "cn": condizione necessaria e "cs": condizione sufficiente
- "cns": condizione necessaria e sufficiente.
- "cvd": come volevasi dimostrare.
- "$\wedge$": et, e "$\vee$": vel, oppure.
- $\forall$: per ogni (vale per tutti gli elementi).
- $\exists$: esiste, $\nexists$: non esiste.
- $\exists!$: esiste ed è unico.
- $P \Rightarrow Q$: P implica Q, se P è vera allora anche Q è vera,
  P è condizione sufficiente per Q,
  Q è condizione necessaria per P.

  Es: "Mi sono laureato in biotecnologia" $\Rightarrow$ "Ho superato l'esame di matematica".
  (Attenzione NON è una cns.)

1.1 Insiemi

Un insieme è una collezione di elementi, ovvero un raggruppamento di elementi aventi una o più caratteristiche in comune. Noi usiamo gli insiemi tutti i giorni, in modo naturale, infatti possiamo liberamente affermare che è una nozione primitiva.

Indicheremo gli insiemi con le lettere maiuscole e racchiuderemo gli elementi tra parentesi graffe.

$A = \{a, b, c, d\}$

$\emptyset = insieme\ che\ non\ ha\ elementi, insieme\ vuoto = \{\ \}$

$\# A$: il numero di elementi di A: "cardinalità".

$a \in A$: *appartiene*, a è *un elemento di* A

$A \subset B$: A è *un sottoinsieme di* B, A è *contenuto in* B, B *contiene tutti gli elementi di* A.

Operazioni con gli insiemi:

- UNIONE: $A \cup B$ insieme che contiene tutti gli elementi che stanno in A o B o in ad entrambi. $= \{x | x \in A \vee x \in B\}$
  Tale operazione gode delle seguenti proprietà:
  i. Commutativa: $A \cup B = B \cup A$
  ii. Associativa: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
  iii. $A \cup A = A$, $\quad A \cup \emptyset = A$.
- INTERSEZIONE: $A \cap B$ insieme che contiene gli elementi che stanno contemporaneamente sia in A che in B. $= \{x | x \in A \wedge x \in B\}$
  Tale operazione gode delle seguenti proprietà:
  i. Commutativa: $A \cap B = B \cap A$
  ii. Associativa: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
  iii. $A \cap A = A$, $\quad A \cap \emptyset = \emptyset$.
- SOTTRAZIONE: $A \setminus B$ insieme che contiene gli elementi che stanno in A e non stanno in B. $=\{x | x \in A \wedge x \notin B\}$.
  Se $B \subset A$ allora $A \setminus B = \mathcal{C}_A B$ ovvero al complementare di B rispetto ad A.
- PRODOTTO CARTESIANO $A \times B$: l'insieme che contiene le coppie ordinate (a, b) dove il primo elemento appartiene ad A e il secondo elemento appartiene a B. $= \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$. Tale operazione non è commutativa in quanto la coppia ordinata (a, b) è diversa dalla coppia ordinata (b, a) con $a \in A$ e $b \in B$.

Esempio: $\quad A = \{1; 3; 7\} \quad B = \{1; 2\} \quad C = \{3; 7\}$
$1 \in A \quad C \subset A$
$A \cup B = \{1; 2; 3; 7\}$
$A \cap B = \{1\}$
$A \times B = \{(1,1), (1,2), (3,1), (3,2), (7,1), (7,2)\}$
$A \setminus B = \{3,7\}$

1.2 Insiemi numerici

Insieme dei numeri naturali: $\mathbb{N} = \{0,1,2,3 \dots\}$
Storicamente è il primo ad essere nato nella nostra testa: nasce dall'idea di contare che è appunto un'idea "naturale". Le cifre sono 10: 0,1,2, … ,9 con le quali possiamo scrivere qualunque numero naturale. È un insieme infinito e totalmente ordinato, cioè presi $a, b \in \mathbb{N}$ valgono le seguenti proprietà:

i. $a \leq a$;
ii. Se $a \leq b$ e $b \leq a$, allora $a = b$;
iii. Se $a \leq b$ e $b \leq c$, allora $a \leq c$;
iv. Vale sempre almeno una delle seguenti relazioni $a \leq b$ oppure $b \leq a$.

In $\mathbb{N}$ riusciamo a definire in modo completo l'operazione di somma (+), mentre non l'operazione di sottrazione (-) può dare risultati che non rientrano nell'insieme dei numeri naturali.

Insieme dei numeri interi: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2; -1; 0; 1; 2 \dots\}$.
Storicamente accettato solo dal XVIII secolo. È un insieme infinito e totalmente ordinato. Qui possiamo svolgere senza problemi le operazioni di somma e sottrazione. Mentre il quoziente di due numeri interi non sempre è un numero intero.

Insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} \middle| m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}\right\}$. Anche questo insieme è totalmente ordinato. In questo insieme le operazioni di somma, sottrazione, moltiplicazione e divisione si comportano "bene". Comunque nasce l'esigenza di ampliare il concetto di numero, oltre a quello di numero razionale in quanto, ad esempio in $\mathbb{Q}$ non è possibile risolvere equazioni del tipo $x^2 - 2 = 0$. Infatti numeri come $\sqrt{2}; \pi; \dots \notin \mathbb{Q}$ in quanto non riusciamo a scriverli nella forma $\frac{m}{n}$ con $n \neq 0$.

Insieme dei numeri reali: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ ovvero è l'unione dei numeri razionali con i numeri irrazionali e trascendenti. Senza entrare troppo nel formale, enunciamo qualche proprietà di questo straordinario insieme.
Siano $a, b \in \mathbb{R}$ si ha che:

i. $a \geq b \Leftrightarrow -a \leq -b \qquad 5 \geq 3 \Leftrightarrow -5 \leq -3;$
ii. $a > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} > 0\,;$
iii. $a \geq b > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} \leq \frac{1}{b} \qquad 5 \geq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq \frac{1}{3}$

In $\mathbb{R}$ è molto importante la funzione valore assoluto $y = |x|$. Per ogni $a \in \mathbb{R}$,

$$|a| = \begin{cases} a & se\ a \geq 0 \\ -a & se\ a < 0 \end{cases}$$

Proprietà del valore assoluto:

i. $|a| \geq 0$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.
ii. $|a||b| = |ab|$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$.
iii. $|a + b| \leq |a| + |b|$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ (disuguaglianza triangolare).
iv. $|a - b| \geq ||a| - |b||$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$.

Teorema: *Siano* $x, a \in \mathbb{R}, a \geq 0$, *allora* $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$.

Una classe importante di sottoinsieme di $\mathbb{R}$ è quella degli <u>intervalli.</u>
$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} =]a, b[$ intervallo aperto.
$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} =]a, b]$ intervallo aperto a sinistra.
$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} = [a, b[$ intervallo aperto a destra.
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ intervallo chiuso.
$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$
$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$
$(-\infty; +\infty) = \mathbb{R}$.

In questa sessione di ripasso vogliamo ricordare che cosa è una PERCENTUALE.
$$10\% = \frac{10}{100} = 0{,}1$$
$$x\% = \frac{x}{100}$$
Il 5% d 700 è un numero che si ottiene dalla proporzione $5: 100 = x: 700$ ovvero dal prodotto
$x = \frac{5}{100} * 700 = 35$.

<u>Esempio:</u> Siano a, b, c le dimensione di un parallelepipedo retto. Se ogni lunghezza aumenta del 10%, di quanto aumenta in percentuale il volume finale?
<u>Svolgimento:</u>
$$V_i = abc$$
$$V_f = (a + 10\%a)(b + 10\%b)(c + 10\%c) = abc(1 + 10\%)^3 = abc(1{,}1)^3 = 1{,}331abc$$
$$V_f - V_i = o, 331abc = 33{,}1\%abc = 33{,}1\%V_i$$

1.3 Equazioni e disequazioni

- Equazioni di primo grado: $ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$ con $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.
- Disequazioni di secondo grado $ax + b > 0 \Rightarrow x > -\frac{b}{a}$ con $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.
  Nel caso in cui a sia negativo, bisogna cambiare il verso della disequazione, ovvero ogni volta che in una disequazione divido per un numero negativo cambio il verso della disequazione.
  Es: $-5x + 4 \geq 0 \Rightarrow -5x \geq -4 \Rightarrow x \leq \frac{4}{5}$.

Mentre nell'equazioni cerchiamo LA soluzione, nelle disequazioni, in generale, cerchiamo un INTERVALLO di soluzioni.

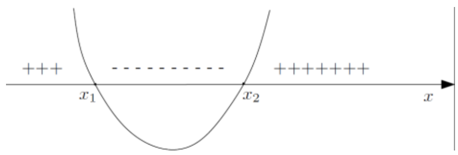
- Equazioni di secondo grado: $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$.
  Come prima cosa si calcola il delta: $\Delta = b^2 - 4ac$

  v. Se $\Delta > 0$ esistono due soluzioni reali distinte $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
  vi. Se $\Delta = 0$ esistono due soluzioni coincidenti $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$
  vii. Se $\Delta < 0$ non esistono soluzioni REALI.

$y = ax^2 + bx + c$ ha come grafico una parabola con asse parallelo all'asse delle y, se $a > 0$ la concavità è rivolta versa l'alto (la parabola ride), se $a < 0$ la concavità è rivolta verso il basso (la parabola piange).
Graficamente cercare $ax^2 + bx + c = 0$ significa andare a trovare i punti in cui la parabola tocca l'asse delle x.
Il trinomio di secondo grado $ax^2 + bx + c$, può essere così scomposto:
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ dove x_1 e x_2 sono le soluzioni dell'equazione di secondo grado.

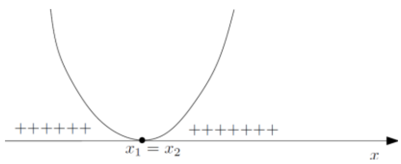
- Disequazioni di secondo grado: $ax^2 + bx + c > 0$ per semplicità ci ricondurremo al caso in cui $a > 0$. Per prima cosa si cercano le soluzioni dell'equazione associata.

  i. Se $\Delta > 0$ ho due soluzioni reali distinte,
  $ax^2 + bx + c > 0$ prendo i valori esterni: $x < x_1 \vee x > x_2$
  $ax^2 + bx + c < 0$ prendo i valori interni: $x_1 < x < x_2$



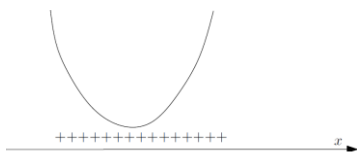
  ii. Se $\Delta = 0$ ho due soluzioni coincidenti

$ax^2 + bx + c > 0$	soluzione	$\mathbb{R} \backslash \{x_1\}$
$ax^2 + bx + c \geq 0$		$\mathbb{R}$
$ax^2 + bx + c < 0$		$\emptyset$
$ax^2 + bx + c \leq 0$		$\{x_1\}$



  iii. Se $\Delta < 0$ l'equazione non ha soluzioni reali.

$ax^2 + bx + c > 0$	soluzione	$\mathbb{R}$
$ax^2 + bx + c < 0$		$\emptyset$



Per risolvere disequazioni fratte del tipo $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$, studio il segno di $f(x)$, poi di $g(x)$ e infine faccio lo studio del segno della frazione.

- Equazioni irrazionali:
  ATTENZIONE : per convezione le radici con indice pari le considereremo sempre positive!!
  Ricordiamo che: $\sqrt{4} = 2$ in $\mathbb{R}$
  $\sqrt{-4} = \nexists$ in $\mathbb{R}$ non esiste alcun numero reale che elevato al quadrato sia negativo
  Ma $\sqrt[3]{8} = 2 \in \mathbb{R}$
  $\sqrt[3]{-8} = -2 \in \mathbb{R}$
  Consideriamo l'equazione $\sqrt{f(x)} = g(x)$,
  Per risolverla impongo le condizione di esistenza e poi risolvo:
  $$C.E{:}\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \qquad f(x) = \left(g(x)\right)^2 = g^2(x)$$
  Applico lo stesso procedimento per $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$ con n pari.
  Invece se ho l'equazione $\sqrt[3]{f(x)} = g(x)$ elevo direttamente alla terza ottenendo $f(x) = g^3(x)$.
  Quando l'indice n della radice è dispari non ho bisogno di imporre le condizioni di esistenza.

- Disequazioni irrazionali:
  n pari: $\sqrt{f(x)} > g(x) \quad \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases}$

  $\sqrt{f(x)} < g(x) \quad \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$

  n dispari: $\sqrt[3]{f(x)} > g(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) > g^3(x)$

  $\sqrt[3]{f(x)} < g(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) < g^3(x)$

Esercizi

1) $\frac{x^2-3x-10}{1-x^2} \leq 0$

2) $\begin{cases} x^2 - 9 > 0 \\ 4 - 2x^2 - 2x \geq 0 \end{cases}$

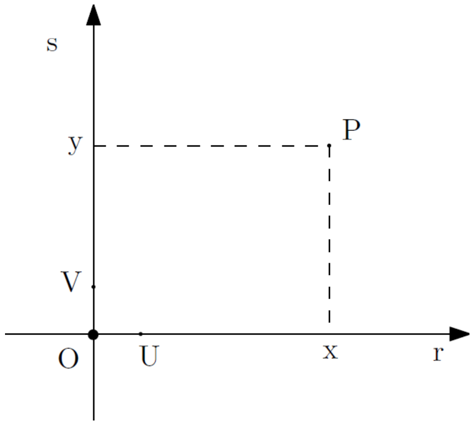
1.4 Geometria analitica

IL PIANO CARTESIANO

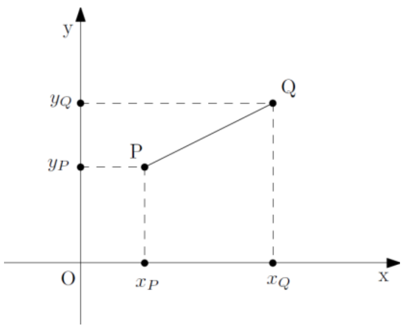
Per definire un riferimento cartesiano nel piano euclideo prendiamo:

i. Un punto O detto origine
ii. Due rette orientate passanti per O.
iii. Due punti $U \in r$ e $V \in s$ per definire le unità di misura $\overline{OU}$ per l'asse r e $\overline{OV}$ per l'asse s.

Il riferimento cartesiano è detto ortogonale quando le due rette r, s sono tra loro perpendicolari; monometrico quando le unità di misura degli assi sono uguali, cioè: $\overline{OU} = \overline{OV}$.
Da ora innanzi considereremo sempre un riferimento cartesiano, ortogonale e monometrico.



Per ogni punto Pdel piano esiste una ed una sola coppia di numeri reali $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, ovvero esiste una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano cartesiano e l'insieme $\mathbb{R}^2$, la prima coordinata, x, è detta ascissa mentre la seconda coordinata, y, è detta ordinata.
Indicheremo con x le retta orizzontale e la chiameremo retta delle ascisse, mentre con y la retta verticale e la chiameremo asse delle ordinate.



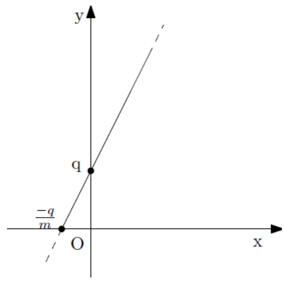
Siano $P(x_P, y_P), Q(x_Q, y_Q)$ punti del piano cartesiano. Per determinare la distanza $\overline{PQ}$ useremo il teorema di Pitagora. Ricaviamo la seguente formula: $\overline{PQ} = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}$

Ne segue che la distanza di un punto P dall'origine degli assi
$\overline{PO} = \sqrt{x_P^2 + y_P^2}$

LA RETTA

Una retta nel piano cartesiano è descritta mediante un'equazione di primo grado nei modi seguenti:

i. Forma implicita: $ax + by + c = 0$
ii. Forma esplicita (solo nel caso in cui $a \neq 0$): $y = mx + q$
   Dove m è chiamato coefficiente angolare e o pendenza della retta, mentre q è chiamato termine noto.



Se $m > 0$ l'angolo che la retta forma con l'asse delle x è acuto, quando invece $m < 0$ l'angolo è ottuso.

Per due punti $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ del piano, passa una ed una sola retta di equazione:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Tutte le rette verticali sono del tipo $x = k$, mentre quelle orizzontali sono del tipo $y = k$, con $k \in \mathbb{R}$.

Le rette r, s di coefficienti angolari rispettivamente m_r, m_s sono

i. Parallele se $m_r = m_s$

ii. Perpendicolari se $m_r = -\frac{1}{m_s}$

Dati il punto $P(x_P, y_P)$ e la retta $r: ax + by + c = 0$, la distanza del punto P dalla retta r è data dalla formula: $d_{Pr} = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

LA PARABOLA

La parabola è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto detto fuoco e da una retta detta direttrice.

Nel piano cartesiano l'equazione di una parabola con asse parallelo all'asse delle y è la seguente

$y = ax^2 + bx + c$

Le coordinate del vertice sono $V(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ e l'asse ha equazione $x = -\frac{b}{2a}$.

Con $a > 0$ la concavità è rivolta verso l'alto,

$a < 0$ la concavità è rivolta verso il basso.

(La parabola verrà spesso utilizzata per risolvere le disequazioni di secondo grado.)