5. CALCOLO INTEGRALE

Il calcolo integrale nasce, da un lato per l'esigenza di calcolare l'area di regioni piane o volumi e dall'altro come operatore inverso del calcolo differenziale.

5.1 Integrali indefiniti

Definizione Sia $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale. Si dice *primitiva* di f ogni funzione F derivabile tale che

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall\, x \in [a, b].$$

Esempio $f(x) = \cos x$ ha come primitiva $F(x) = \sin x$, perché la derivata della funzione seno è la funzione coseno, ovvero $F'(x) = \cos x$. Osserviamo che un'altra primitiva di f è $F_1(x) = \sin x + 1$, in quanto $F_1'(x) = F(x)$.

Teorema

Se la funzione $f(x)$ ammette in un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ come primitiva la funzione $F(x)$, allora ammette infinite primitive in I che si ottengono da $F(x)$ aggiungendo una qualsiasi costante.

DIMOSTRAZIONE

Sia $F(x)$ primitiva della funzione $f(x)$. Allora per definizione di primitiva abbiamo che $F'(x) = f(x)$. Sia ora $c \in \mathbb{R}$ allora $[F(x) + c]' = \left(F(x)\right)' + (c)' = F'(x) = f(x)$, che è proprio quello che volevamo dimostrare.

Definizione L'insieme di tutte le primitive di una funzione $f(x)$ si dice *integrale indefinito* di f e si indica con

$$\int f(x)dx = \{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R} \text{ e } F \text{ primitiva di } f\}$$

$f(x)$ è detta *funzione integranda.*

Osservazione: come si vede dalla definizione di integrale indefinito, questo è l'operatore inverso della derivazione.

PROPRIETÀ: linearità

Se f_1 e f_2 sono funzioni continue in $I \subset \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{R}$,

$$\int k f_1(x)dx = k \int f_1(x)dx$$

$$\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$$

PRIMITIVE FONDAMENTALI

$\int 0 \cdot dx = c$	
$\int dx = x + c$	$\int k \cdot f(x) = k \cdot \int f(x)dx$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, (n \neq -1)$	$\int [f(x)]^n \cdot f'(x)dx = \frac{1}{n+1}[f(x)]^{n+1} + c$
$\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + c$	$\int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} dx = \sqrt{f(x)} + c$
$\int sinx\, dx = -\cos x + c$	$\int \text{sen}\, f(x) \cdot f'(x)dx = -\cos f(x) + c$
$\int \cos x\, dx = \text{sen}\, x + c$	$\int \cos f(x) \cdot f'(x)dx = \text{sen}\, f(x) + c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + c$	$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} dx = tg\, f(x) + c$
$\int \frac{1}{\text{sen}^2 x} dx = -ctgx + c$	$\int \frac{f'(x)}{\text{sen}^2 f(x)} dx = -ctg\, f(x) + c$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc\sin x + c$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} dx = arcsin\, f(x) + c$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arctg}\, x + c$	$\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2} dx = \text{arctg}\, f(x) + c$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x \rvert + c$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln\lvert f(x) \rvert + c$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int e^{f(x)} f'(x)dx = e^{f(x)} + c$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int a^{f(x)} f'(x)dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$

Esercizi:

1) $\int x^4 dx$
2) $\int \sqrt{x^3} dx$
3) $\int (3x^2 - 4x + 7)dx$
4) $\int (\sqrt{x} - \frac{1}{x^2} + 2\cos x - 8e^x - \frac{4}{x})dx$

5.2 Tecniche di integrazione

1) Primitive riconducibili a quelle fondamentali

   Esempi:

   a) $\int x(x^2+1)^4 dx =$
   b) $\int \frac{1}{2x-5} dx =$
   c) $\int x^2 e^{-x^3} dx =$
   d) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx =$
   e) $\int \frac{x^2+1}{\sqrt[3]{x^3+3x}} dx =$
   f) $\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx$
   g) $\int x e^{6x^2} dx =$
   h) $\int \frac{1}{x \ln x} dx =$
   i) $\int x\sqrt{4-x^2} dx =$
   j) $\int \sin x \cos^6 x \, dx =$

2) Integrali delle funzioni razionali fratte

   Sono tutti gli integrali della forma:

$$\int \frac{n(x)}{d(x)} dx$$

   Dove $n(x)$ e $d(x)$ sono due funzioni polinomiali.

   Se il grado di $n(x)$ è maggiore o uguale del grado di $d(x)$, allora si procede facendo la divisione polinomiale andando poi a scomporre il numeratore.

   Esempio:

$$\int \frac{4x^4+8x^2+x+3}{2x^2+1} dx = \int \left(2x^3+3+\frac{x}{2x^2+1}\right) dx = \frac{2}{3}x^3+3x+\frac{1}{4}\ln(2x^2+1)+c$$

   Se il grado di $d(x)$ è minore del grado del numeratore allora distinguiamo i casi, quando il grado è uno e quando il grado è due.

   Se $\deg\big(d(x)\big) = 1$ allora ci riconduciamo al logaritmo naturale.

   Esempio:

$$\int \frac{1}{x+6} dx = \ln|x+6| + c$$

   Se $\deg(d(x)) = 2$. In questo caso la risoluzione dell'integrale dipenderà dal delta di $d(x)$
   $d(x) = ax^2+bx+c$ con $\Delta = b^2-4ac$

   - Se $\Delta > 0$. Procediamo andando a scomporre il denominatore, per poi spezzare la funzione razionale fratta nella somma di due funzioni razionali i cui denominatori hanno grado 1.

     Esempio:

$$\int \frac{2x-7}{x^2-x-2} dx =$$

Il denominatore è $x^2 - x - 2$ e ha $\Delta = 1 + 8 = 9 > 0$. Cerchiamo le soluzioni dell'equazione $x^2 - x - 2 = 0$, esse sono $x_1 = 2$ e $x_2 = -1$.
Ricordiamo che per i trinomi di secondo grado $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ dove x_1 e x_2 sono le soluzioni dell'equazione.
Nel nostro caso $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$.
Il nostro scopo sarà trovare $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} = \frac{2x-7}{x^2-2x-2}$$

Procediamo:

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} = \frac{Ax + A + Bx - 2B}{(x-2)(x+1)} = \frac{(A+B)x + A - 2B}{(x-2)(x+1)}$$

Per avere l'uguaglianza uguagliamo i coefficienti della x di ugual grado.

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ A - 2B = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2 - B \\ 2 - 3B = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 3 \end{cases}$$

Quindi l'integrale iniziale si riconduce a

$$= -\int \frac{1}{x-2} dx + 3 \int \frac{1}{x+1} dx = -\ln|x-2| + 3\ln|x+1| + c$$

- Se $\Delta < 0$, dobbiamo ricondurre il denominatore alla somma di due quadrati, e l'integrale in questa forma (che quindi risulta essere un integrale immediato) $\int \frac{f'(x)}{f^2(x)+1} dx = \arctan f(x) + c$

Esempio

$$\int \frac{1}{x^2 - 4x + 6} dx$$

Il denominatore è $x^2 - 4x + 6$ e ha $\Delta = 16 - 24 < 0$.

Proviamo a trasformare il denominatore come somma di quadrati

$x^2 - 4x + 6 = x^2 - 4x + 4 + 2 = (x-2)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2$

Riprendendo l'integrale iniziale risulta

$$= \int \frac{1}{(x-2)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right) + c$$

In generale $\int \frac{1}{(x+k)^2 + n^2} dx = \frac{1}{n} \arctan\left(\frac{x+k}{n}\right) + c$

- Se $\Delta = 0$, scriveremo il denominatore come un quadrato perfetto per poi ricondurci ad un integrale di questa forma $\int \frac{f'(x)}{\left(f(x)\right)^2} dx = -\frac{1}{f(x)} + c$

Esempio

$$\int \frac{2x}{x^2 - 4x + 4} dx$$

Il denominatore è $x^2 - 4x + 4$, il $\Delta = 16 - 16 = 0$

Il denominatore è quindi un quadrato perfetto e infatti $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$.

$$\int \frac{2x}{x^2-4x+4}dx = \int \frac{2x-4+4}{x^2-4x+4}dx = \int \frac{2x-4}{x^2-4x+4}dx + 4\int \frac{1}{(x-2)^2}dx =$$
$$= \ln(x^2-4x+4) - 4\frac{1}{x-2} + c$$

Esercizi

a) $\int \frac{x+7}{x+6}dx$

b) $\int \frac{3x-5}{1+x^2}dx$

c) $\int \frac{1}{(x+1)^2+4}dx$

d) $\int \frac{1}{x^2-4}dx$

e) $\int \frac{x-1}{x^2+x-6}dx$

f) $\int \frac{3x+5}{4x^2+12x+11}dx$

3) Integrali per sostituzione

La regola di sostituzione è utile quando abbiamo integrali del tipo "non visibile", cioè non riusciamo in alcun modo a ricondurli ad integrali immediati. L'idea è quella di fare un cambio di variabile.In pratica:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt$$

Dove si è posto che :

$x = g^{-1}(x)$
$t = g(x)$
$dt = g'(x)dx$

Abbiamo riportato l'intero integrale nella variabile "t", attenzione perché è necessario cambiare anche il dx.

Esempio

$$\int \frac{1}{2(\sqrt{x}-2)}dx = \int \frac{2t}{2(t-2)}dt = \int \frac{t}{(t-2)}dt = \int \frac{t-2+2}{t-2}dt = \int \frac{2}{t-2}dt + \int dt$$
$$= 2\ln|t-2| + t + c = 2\ln|\sqrt{x}-2| + \sqrt{x} + c$$

Abbiamo posto
$$t = \sqrt{x}$$
$$x = t^2$$
$$dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \Rightarrow dx = 2tdt$$

Esercizi

a) $\int x\sqrt{1+x}\,dx$ (poni $t = \sqrt{1+x}$
b) $\int e^x/(1+e^x)\,dx$ (poni $t = e^x$)

4) Integrali per parti

L'integrazione per parti viene generalmente usata quando ci si trova di fronte ad un prodotto che non sia un integrale di quelli immediati. Sfrutta questa regola:

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

Deriva dalla regola di derivazione del prodotto di due funzioni.

Osservazione: si possono prendere come f' delle funzioni facili da integrare (es. e^x, $\sin x$, $\cos x$). Le funzioni $\ln x$ e $\arctan x$ sono da scegliere come g perché non sappiamo come integrarle.

Esempio

$$\int x \sin x \, dx = x(-\cos x) - \int (-\cos x) dx = -x \cos x + \sin x + c$$

Abbiamo posto $\begin{array}{ll} f' = \sin x & g = x \\ f = -\cos x & g' = 1 \end{array}$

Esercizi:

a) $\int \ln x \, dx$

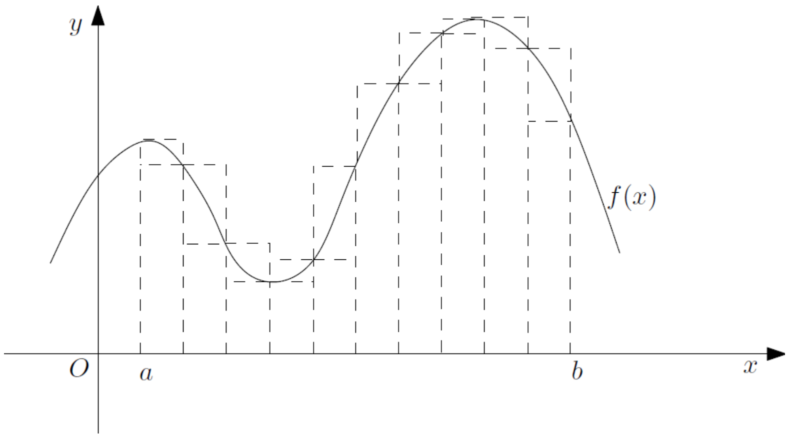
b) $\int x^2 e^x dx$

c) $\int \sin^2 x \, dx$

d) $\int e^{3x} \cos x \, dx$

5.3 Integrale definito

Abbiamo visto che $\int f(x)dx = \{\text{primitive di } f\}$ è detto integrale indefinito perché non esiste un'unica funzione che funge da soluzione.
Supponiamo ora di voler calcolare l'area sottesa al grafico di una funzione f, definita nell'intervallo $[a, b]$ e ivi continua.
Graficamente potremmo "stimarla" per difetto e per eccesso costruendo delle opportune approssimazioni.
Ad esempio, se dividiamo l'intervallo $[a, b]$ in n parti uguali, allora ogni intervallo misura $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ e possiamo costruire i rettangoli di base Δx e altezza il minimo, m_i, o il massimo, M_i, della funzione nell'intervallo considerato.



Allora avremo per certo che l'area compresa tra l'asse delle ascisse e la funzione che chiameremo $\mathcal{A}(T)$ può essere stimata per difetto facendo la somma delle aree di tutti i rettangoli di base Δx che hanno per altezza m_i, e per eccesso andando a fare la somma delle aree di tutti i rettangoli di base Δx e che hanno per altezza il massimo M_i. Ovvero

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x \leq \mathcal{A} \leq \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta x =: S_n$$

Per rendere la stima più accurata possiamo dividere l'intervallo $[a, b]$ per un numero maggiore di intervalli oppure utilizzare dei trapezi.

Definizione Data una funzione $f \geq 0$ in $[a, b]$, tale che esistono e sono finiti e coincidono i $\lim_{n\mapsto+\infty} s_n = \lim_{n\mapsto+\infty} S_n$, si chiama *integrale definito* esteso all'intervallo $[a, b]$ il valore di tale limite e si indica con

$$\int_a^b f(x)dx$$

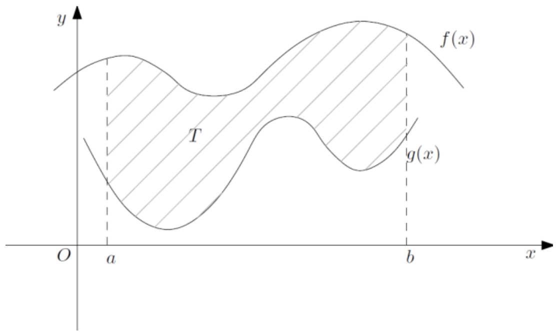
La funzione $f(x)$ è detta *integrabile* in $[a, b]$.

Teorema
Se f è una funzione continua in un intervallo $[a, b]$ allora il

$$\lim_{n\mapsto+\infty} s_n = \lim_{n\mapsto+\infty} S_n = S$$

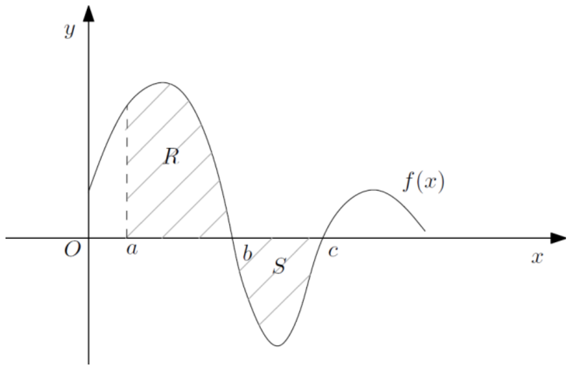
Osservazioni:

- Il simbolo $\int$ deriva da "S" di somma,
- Se $a < b$: $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- Valgono le proprietà di linearità



L'area compresa tra le due funzioni

$$T = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$



Se invece vogliamo capire quanto misura la somma delle aree

$$R + S = \int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx$$

Ciò significa che quando la funzione è negativa in un intervallo anche il valore l'integrale definito è negativo, ma in valore assoluto corrisponde comunque alla misura di un'area.

Definizione consideriamo la funzione $\mathcal{F}: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definita dalla seguente legge :

$$\mathcal{F}(x) = \int_a^x f(t)dt$$

La funzione $\mathcal{F}$ viene chiamata la **funzione integrale** di f. In particolare si ha che $\mathcal{F}(a) = 0$.

Teorema (di Torricelli - Barrow)

Sia f una funzione reale continua nell'intervallo $[a, b]$, allora

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Dove F è una funzione derivabile nell'intervallo $[a, b]$ ed è tale che

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall\, x \in [a, b]$$

Ovvero F è una primitiva per f

DIMOSTRAZIONE

Consideriamo la funzione integrale $\mathcal{F}$, di f. Poiché $\mathcal{F}'(x) = f(x) = F(x)$ per ogni $x \in [a, b]$, allora le funzioni $\mathcal{F}$ e f differiscono per una costante c, $\mathcal{F}(x) - F(x) = c \quad \forall\ x \in [a, b]$

In particolare $\mathcal{F}(a) - F(a) = c = \mathcal{F}(b) - F(b)$, ma $\mathcal{F}(a) = 0$ quindi $F(a) = c$ e $\mathcal{F}(b) = F(a) - F(b)$

In conclusione

$$\mathcal{F}(b) = \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Il teorema di Torricelli Barrow esprime il legame tra integrale indefinito e integrale definito, quindi per calcolare un integrale definito è necessario determinare una primitiva.

Esempi:

a) $\int_2^3 2x dx$
b) $\int_0^1 \frac{1}{e^x - e^{-x}} dx$

Quando usiamo la regola di sostituzione dobbiamo ricordarci di cambiare anche gli estremi di integrazione.

c) $\int_2^3 xe^{4x}dx$

5.4 Integrali impropri o generalizzati

Sono integrali nei quali la funzione integranda agli estremi "non è propriamente definita", cioè non esiste o tende a $\pm\infty$. Sono di due tipi:

- Primo tipo: f è continua in un intervallo illimitato $[a, +\infty)$.
  Definizione: diremo che f è *integrabile in senso improprio o generalizzato* in $[a, +\infty)$ se esiste finito il $\lim_{t\mapsto+\infty} \int_a^t f(x)dx =: \int_a^{+\infty} f(x)dx$
  L'integrale è detto *convergente* se il limite esiste ed è finito, *divergente* se il limite esiste ma è $\pm\infty$ oppure è detto *indeterminato* se il limite non esiste.
  In modo analogo si definisce l'integrale generalizzagto nell'intervallo $(-\infty, b]$.

Esempi:

a) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2} dx$

b) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x+3} dx$

c) $\int_{-\infty}^{\pi} \sin x\, dx$

- Secondo tipo: f è continua nell'intervallo $[a, b)$
  Definizione f è una funzione *integrabile in senso improprio o generalizzato*se esiste ed è finito il $\lim_{t\mapsto b^-} \int_a^t f(x)dx =: \int_a^b f(x)dx$
  Dove b è un punto al di fuori del dominio di f e dove la f non è definita.
  L'integrale è detto *convergente* se il limite esiste ed è finito, *divergente* se il limite esiste ma è $\pm\infty$ oppure è detto *indeterminato* se il limite non esiste.
  In modo analogo si definisce l'integrale generalizzagto nell'intervallo $(a, b]$.

Esempi

a) $\int_0^1 x \ln x\, dx$

b) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx$ integrale contemporaneamente del primo e del secondo tipo.