6. PROBABILITÀ

L'introduzione alla teoria della probabilità può essere vista come un'applicazione della teoria degli insiemi.
Essa si occupa degli esperimenti il cui esito è incerto.
Ebbe origine a metà del 1600 per predire i risultati dei giochi d'azzardo. Anche qui abbiamo un lessico ad hoc.

Definizioni chiamiamo

- *Esperimento:* insieme di azioni il cui risultato non può essere predetto con certezza.
- *Prova:* una singola esecuzione dell'esperimento
- *Esito:* ogni possibile insieme di dati, ottenuto da un esperimento che ne definisce il risultato.
- *Spazio campione:* insieme di tutti gli esiti di un esperimento, lo indicheremo con Ω.
- *Punto campione:* un elemento dello spazio campione
- *Evento:* un sottoinsieme dello spazio campione ovvero un insieme di esiti.
- *Evento elementare:* un sottoinsieme dello spazio campione che ha un unico elemento.

Ω viene anche detto evento certo
$\emptyset$ è detto evento impossibile
Evidenziamo inoltre che l'insieme Ω può essere finito (numerabile) e lo chiameremo *discreto,* nel caso in cui non sarà numerabile lo chiameremo continuo.

Come dicevamo la teoria della probabilità si occupa di tutti quegli esperimenti il cui esito è incerto (es. lancio di un dado, estrazione di una pallina da un'urna,..ect..). Essa si occupa di:

- Assegnare delle "probabilità " a tutti gli esiti possibili, questo si fa con l'intuito oppure ripetendo molte volte l'esperimento e osservando gli esiti ottenuti.
- Predire l'esito degli esperimenti futuri (es. la probabilità di successo di un'operazione)
- Costruire regole di calcolo per studiare fenomeni più complessi.

Esempio: Lancio di un dado equo (non truccato). Abbiamo che:
$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ spazio campione
Consideriamo i seguenti eventi:
A: "si presenti il numero 5"$= \{5\}$ evento elementare;
B: "si presenti un numero dispari" $= \{1,3,5\}$;
C: "si presenti un numero minore di 7"$= \Omega$ spazio campione, evento certo;
D: "si presenti un numero maggiore o uguale a 8" $= \emptyset$ evento impossibile.

INTERPRETAZIONE PROBABILISTICA DELLE OPERAZIONI INSIEMISTICHE
Dato che gli eventi sono insiemi, possiamo eseguire con degli eventi le operazioni insiemistiche.

- $A \cup B$ si verifica se l'esito appartiene ad A o B.
- $A \cap B$ si verifica se l'esito appartiene si ad A che a B.
- $\Omega \setminus A$ si verifica se l'esito non appartiene ad A, ossia si verifica se non si verifica A.
- $A \subset B$ ogni volta che si verifica A, si verifica anche B.

Definizione Due eventi A e B si dicono *incompatibili* se il verificarsi di uno esclude il verificarsi dell'altro, ossia se $A \cap B = \emptyset$.

Esempi:

1) Lancio due volte una moneta equa (non truccata)
   $\Omega = \{(T,T); (T,C); (C,T); (C,C)\}$ spazio campione.
   A: "esce testa al primo lancio" $= \{(T,T); (T,C)\}$
   B: "esce due volte testa"$= \{(T,T)\}$
   C: "esce croce al secondo lancio"$= \{(T,C); (C,C)\}$
   L'evento "esce testa al primo lancio e croce al secondo" è $A \cap C = \{(T,C)\}$
   Gli eventi B e C sono incompatibili, infatti $B \cap C = \emptyset$
   $B \subset A$.

2) Lancio di un dado equo
   $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ spazio campione.
   A: "esce un numero pari" $= \{2,4,6\}$
   B: "esce un numero dispari"$= \{1,3,5\}$
   C: "esce un numero divisibile per 3"$= \{3,6\}$
   Gli eventi A e B sono incompatibili, infatti $A \cap B = \emptyset$
   $A \cap C$: "esce un numero pari divisibile per 3" $= \{6\}$
   $B \cap C$: "esce un numero dispari divisibile per 3" $= \{3\}$

3) Lancio di due dadi equi
   $\Omega = \{(1,1), (1,2), \dots (6,6)\} = \{(i,j) \mid i,j = 1,2,3,4,5,6\}$ spazio campione.
   A: "escono due numeri la cui somma è 5" $= \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}$
   B: "almeno una faccia è maggiore di 3"$= \Omega \setminus (\text{entrambe le facce sono minori o uguali a tre}) =$
   $\Omega \setminus \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$

6.1 Gli assiomi della probabilità

La maniera assiomatica di introdurre la probabilità è dovuta a Kolmogorov.
Per definire la probabilità ci servono:

- Uno spazio campione Ω
- Una famiglia di insiemi su cui operare che si chiama σ-algebra degli eventi. (per noi saranno gli eventi legati allo spazio campione in questione).

Definizione Sia $\Omega \neq \emptyset$ uno spazio campione. Una famiglia $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di Ω è detta σ-algebra di su Ω se:

1) $\Omega \in \mathcal{A}$,
2) Se $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
3) Se $A_1, A_2, \dots, A_n \dots \in \mathcal{A} \ \Rightarrow A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots \in \mathcal{A}$
4) Ovvero $\mathcal{A}$ è una famiglia chiusa rispetto al complementare e all'unione arbitraria.
5) **Osservazione:** $\emptyset = \Omega \setminus \Omega \in \mathcal{A}$
6) $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \overline{\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \dots \cup \overline{A}_n} \in \mathcal{A}$.

Possiamo definire cosa intendiamo per probabilità:

Definizione dato uno spazio campione Ω e una σ-algebra $\mathcal{A}$ di eventi si Ω, si chiama *probabilità* o *misura di probabilità* un'applicazione che associa ad ogni evento $A \in \mathcal{A}$ un numero reale $p(A)$

$$p: \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$A \longmapsto p(A)$$

tale che:

1) $0 \leq p(A) \leq 1 \qquad \forall \ A \in \mathcal{A}$
2) $p(\Omega) = 1$
3) Se $A \cap B = \emptyset \quad \Rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
4) Dati $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ eventi due a due incompatibili (in numero finito o infinito), allora $p(A_1 \cup A_2 \cup \dots, \cup, \dots) = p(A_1) + p(A_2) + \dots + p(A_n) + \cdots$

La terna $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ si chiama *spazio delle probabilità* e 1), 2), 3) e 4) sono detti *assiomi della probabilità.*

Osservazione: gli assiomi e le proprietà precedenti non danno alcuna informazione sul valore numerico della probabilità. Tale valore dipende dal tipo di esperimento e dallo spazio campione.

Dagli assiomi della teoria di probabilità derivano le seguenti proprietà che sfruttando i diagrammi di Venn risultano essere intuitive e immediate:

1) $p(\emptyset) = 0$ probabilità che non si verifichi nessun esito.
2) $p(\Omega \setminus A) = 1 - p(A)$ probabilità che non si verifichi A, infatti $\Omega = A \dot{\cup} (\Omega \setminus A)$ unione disgiunta.
3) $p(A \setminus B) = p(A) - p(A \cap B)$
4) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
5) Se $A \subset B \quad \Rightarrow \quad p(A) \leq p(B)$
6) $p(A \cap B) \leq p(A) \leq p(A \cup B)$

Esercizio Una ditte produce componenti elettrici che possono presentare 2 tipi di difetti: il difetto x nel 2% della produzione, il difetto y nel 5% della produzione. Il componente elettrico ridulta funzionante se ha solo uno dei due difetti, non funzionante se li ha entrambi, il che succede solo nello $0{,}8\%$ dei casi. Si acquista un componente prodotto da tale ditta.

1) Qual è la probabilità che esso risulti funzionante?
2) Qual è la probabilità che esso non abbia alcun difetto?

6.2 Il caso equiprobabile

Come dicevamo la definizione data non attribuisce agli eventi qualsiasi un valore numerico di probabilità. Esso viene assegnato attraverso dati empirici (dovuti all'esperienza), oppure grazie alla definizione di spazio equiprobabile.

Definizione Uno spazio campione $\Omega = \{e_1, e_2, \dots e_n\}$ finito, si dice *equiprobabile* se ognuno degli esiti $e_1, \dots, e_n$ ha la stessa probabilità di verificarsi, cioè non esistono motivi per cui un esito debba essere favorito rispetto agli altri.

Esempio Lancio di un dado a sei facce non truccato, tutti i numeri da 1 a 6 hanno la stessa probabilità di uscire quando il dado viene lanciato.

Come possiamo definire la probabilità su Ω?
Sappiamo che $\Omega = \{e_1\} \cup \{e_2\} \cup \dots \cup \{e_n\}$ (unione disgiunta) e che $p(\Omega) = 1$. Quindi $1 = p(\{e_{1\}}) + p(\{e_2\}) + \cdots + p(\{e_n\})$, ma essendo Ω equiprobabile $p(\{e_1\}) = p(\{e_2\}) = \cdots = p(\{e_n\})$, quindi

$$1 = np(\{e_1\}) \ \Rightarrow p(\{e_1\}) = \frac{1}{n}$$

In uno spazio campione equiprobabile di cardinalità n, tutti gli eventi elementari hanno probabilità $\frac{1}{n}$.

Sia $A \subset \Omega$ un evento, allora $A = \{e_1 \cup \dots \cup e_{n_A}\}$ dove con n_A indichiamo il numero di elementi di A. Allora abbiamo che $p(A) = p(\{e_{1\}}) + p(\{e_2\}) + \cdots + p(\{e_{n_A}\}) = n_A \cdot \frac{1}{n}$

Teorema
Sia Ω equiprobabile, finito, formato da n punti e sia $A \subset \Omega$ un evento. Allora

$$p(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

La probabilità di un evento così definita coincide con la definizione classica di probabilità dovuta a Laplace :

$$p(A) = \frac{n° \text{ casi favorevoli}}{n° \text{ casi possibili}}$$

Esercizi:

1) Un'urna contiene 2 palline bianche e 5 nere. Si estraggono 2 palline dall'urna (dopo la prima estrazione la pallina non viene rimessa nell'urna).
   Qual è la probabilità che la seconda pallina sia bianca?

2) Si consideri l'insieme di tutte le famiglie italiane con due figli. Si supponga che, ad ogni nascita gli eventi "Maschio" e "Femmina" siano equiprobabili. Si estragga a caso una famiglia da tale insieme Qual è la probabilità che abbia entrambi i figli maschi?

3) Si lanciano contemporaneamente 3 dadi. Qual è la probabilità che almeno 2 mostrino la stessa faccia?

4) Una cassa contiene 180 mele identiche di cui 12 bacate e 38 acerbe. Qual è la probabilità dii estrarre a caso una mela buona se:

a) Non ci sono mele acerbe e bacate
b) Ci sono 4 mele acerbe e bacate.

5) Un’autoconcessionaria espone 80 automobili di cui 15 con vernice metallizzata e 21 con sedili in pelle. Qual è la probabilità di scegliere a caso senza le due caratteristiche se:
a) Non ci sono auto con entrambe le caratteristiche
b) Ci sono 4 auto con entrambe le caratteristiche

6.3 Calcolo combinatorio

Per come è stata definita per riuscire a calcolare la probabilità dobbiamo essere in grado di contare i casi favorevoli e quelli possibili. Riusciamo davvero a "contare"?
Il calcolo combinatorio ci aiuterà in questo.

La maggior parte dei problemi di calcolo combinatorio sono riconducibili al seguente: quante "parole" (anche prive di significato) di k caratteri si possono costruire con un alfabeto di n simboli distinti? La risposta dipende dalle due caratteristiche del problema in esame:

- È importante l'*ordine* dei caratteri delle parole che si vogliono contare?
- Sono consentite *ripetizioni* dei caratteri, ovvero, uno stesso simbolo può comparire più di una volta nella parola?

Familiarizziamo: Si vuole preparare una colonna sonora per una presentazione multimediale: si è deciso di assemblare tre pezzi di musica classica in successione. Il primo brano sarà scelto fra Primavera (P), Estate (E), Autunno (A), Inverno (I), di Vivaldi, il secondo fra le ultime tre sinfonie di Mozart (mi bemolle (m), sol minore (s), do maggiore (d)) e l'ultimo tra l'ottava (8) o la nona (9) sinfonia di Beethoven. Quante colonne sonore si possono ottenere?

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

Principio fondamentale del calcolo combinatorio
Se un oggetto è univocamente determinato da una sequenza di n scelte successive, tali che vi siano k_1 possibilità per la prima scelta, k_2 per la seconda,.., k_n per l'n-esima scelta, il numero totale di oggetti che si possono formare è dato dal prodotto:

$$k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n$$

DISPOSIZIONI E PERMUTAZIONI
Vogliamo costruire modelli generali di riferimento per risolvere problemi che si possono assimilare al conteggio di "parole" ordinate.

Definizione Dati n oggetti distinti si chiama *disposizione semplice* degli n oggetti in k posti, con $k \leq n$, ogni sequenza di k oggetti scelti tra quelli assegnati con il vincolo di non ripetere gli oggetti. Il numero di tali disposizioni è indicato con $D_{n,k}$ e vale

$$D_{n,k} = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

Definizione Una disposizione semplice di n oggetti in n posti è chiamata *permutazione* di n oggetti distinti. Il numero complessivo di permutazioni di n oggetti si indica con P_n e vale

$$P_n = n! = n(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

Esempi

1) Ad una corsa di cavalli ci sono 15 cavalli in gara. Quante classifiche possibili di podio si possono formare?
2) Un'urna contiene 10 palline numerata da 1 a 10, Se ne estraggono successivamente 4 senza reimbussolamento. Quante diverse estrazioni sono possibili tenendo conto dell'ordine dell'estrazione?
3) In quanti modi possibili 6 persone possono essere disposte in fila indiana?
4) Quante sono le possibili funzioni biiettive $f: A \longrightarrow A$, essendo $A = \{1,2,3,4\}$?

Definizione Dati n oggetti distinti si chiama *disposizione con ripetizione* degli n oggetti in k posti, ogni sequenza di k oggetti scelti tra quelli assegnati, ammettendo che sia possibile ripetere gli oggetti. Il numero di tali disposizioni è indicato con ${D^*}_{n,k}$ e vale

$${D^*}_{n,k} = n^k$$

Definizione Si chiama *permutazione con ripetizione* ogni permutazione di n oggetti non tutti distinti tra loro. Dati n oggetti distinti di cui a_1 uguali tra loro, a_2 uguali tra loro e distinti dai precedenti,…, a_k uguali tra loro e distinti da tutti i precedenti, con $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n$, il numero delle permutazioni distinte di questi n oggetti è:

$$\frac{n!}{a_1! \cdot a_2! \cdot \ldots \cdot a_k!}$$

Esempi

5) Un numero di telefono di cellulare di 10 cifre inizia 347. Quanti numeri di telefono di questo tipo ci possono essere?
6) Dati gli insiemi $A\{1,2,3,4\}$ e $B = \{1,2,3,4,5\}$ quante funzioni $f: A \longrightarrow B$ è possibile definire?
7) Quanti sono gli anagrammi della parola "matematica"?
8) In quanti modi diversi una colonna della schedina può essere riempita con 4 segni 1, 6 segni X e 3 segni 2?

COMBINAZIONI

Vogliamo costruire modelli generali di riferimento, per risolvere problemi che si possono assimilare al conteggio di "parole" NON ordinate.

Definizione Dato un insieme di n elementi, si chiama *combinazione semplice* degli n elementi di classe k ogni sottoinsieme dell'insieme dato avente k elementi. Il numero complessivo di combinazini di n oggetti di classe k viene indicato con il simbolo $C_{n,k}$ e vale

$$C_{n,k} = \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

Esempi

9) Quanti sono i possibili terni che si possono giocare al gioco del lotto?
10) Una grossa azienda deve inviare 2 dei suoi 8 ispettori a controllare una filiale lontana. In quanti modi possibili il capo dell'ufficio può determinare la delegazione dei 2 ispettori?

6.4 Probabilità condizionata

Nel calcolo delle probabilità spesso si ha a che fare con situazioni di causa-effetto.
Ci si domanda come può modificare la probabilità di un evento se si possiedono delle informazioni ulteriori.
Ovvero: è accaduto l'evento B qual è la probabilità che si verifichi anche l'evento A?.

Esempio Si lancia un dado equo.
Si vuole sapere la probabilità che la faccia superiore presenti un numero dispari, sapendo che è uscito un numero primo.
Abbiamo che $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, ma abbiamo anche l'informazione che si è verificato per certo l'evento B: "è uscito un numero primo" $= \{2,3,5\} \subset \Omega$.
La probabilità di A: "è uscito un numero dispari" a patto che sia primo viene indicato con $p(A|B) = \frac{2}{3}$ e viene chiamata probabilità condizionata dell'evento A dato l'evento B.
Per calcolare quella probabilità abbiamo dovuto restringere lo spazio campione in questo modo è diminuito sia il numero dei casi possibili sia quello dei casi favorevoli.

Definizione Siano A, B eventi di uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ noto. La *probabilità condizionata* dell'evento A dato l'evento B è

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \qquad \text{dove } p(B) > 0$$

Osservazione: Perché abbia senso il rapporto, $p(B) \neq 0$, quindi B deve essere un evento possibile.

Esempi

1) Si estraggono due palline da un'urna contenente 5 palline verdi e 2 rosse, senza reimbussolamento.
   Calcolare la probabilità di estrarre come seconda una pallina rossa sapendo di aver già estratto come prima una pallina verde
   1° MODO: uso la formula della probabilità condizionata
   $$p(R|V) = \frac{p(R \cap V)}{p(V)}$$
   $\Omega = \{\text{tutte le coppie ordinate di palline}\}$ quindi $\#\Omega = 7 \cdot 6 = 42$
   $p(V) = \frac{5}{7}$
   $R \cap V = 5 \cdot 2 = 10$ quindi $p(R \cap V) = \frac{10}{42} = \frac{5}{21}$
   In conclusione otteniamo che $p(R|V) = \frac{5}{21} \cdot \frac{7}{5} = \frac{1}{3}$
   2° MODO: Restrizione dello spazio campione
   Il nuovo spazio campione B è formato da tutte le coppie di palline in cui la prima pallina è verde, $\#B = 5 \cdot 6 = 30$. Le coppie favorevoli rimangono sempre $5 \cdot 2 = 10$.
   In conclusione otteniamo che $p(R|V) = \frac{\#\text{coppie } (V,R)}{\#B} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$.

2) Lancio di un dado.
   Calcolare la probabilità che esca 5 sapendo che è uscito un numero dispari.

3) Lancio 2 volte una moneta equa.
   Qual è la probabilità che esca T in entrambi i lanci se

a) Al primo lancio esce T
b) Esce almeno una volta T.

Dalla formula della probabilità condizionata segue:
REGOLA DEL PRODOTTO

$$p(A \cap B) = p(A|B) \cdot p(B) = p(B|A) \cdot p(A)$$

Questa regola è particolarmente usata nel calcolo di probabilità di intersezione di eventi e si può generalizzare in questo modo:
Dati n eventi $A_1, \dots, A_n$ tali che $p(A_1 \cap \dots \cap A_n) > 0$ allora

$$p(A_1 \cap \dots \cap A_n) = p(A_1) \cdot p(A_2|A_1) \cdot p(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot p(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Definizione Dati due eventi $A, B \in \mathcal{A}$ di uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, p)$, con $p(B) > 0$, si dice che A, B sono *indipendenti* se il verificarsi di B non modifica la probabilità di A, ossia se $p(A|B) = p(A)$. In tal caso, dalla regola del prodotto si ha:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

Questa definizione si generalizza

Definizione Tre eventi $A, B, C \in \mathcal{A}$ di uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, p)$, con probabilità diverse da zero, si dicono indipendenti se sono indipendenti due a due. In particolare si verifica che

$$p(A \cap B \cap C) = p(A)p(B)p(C)$$

In modo analogo segue la definizione di n eventi indipendenti.

Osservazione: qual è la differenza tra eventi incompatibili ed eventi indipendenti?
Eventi incompatibili: insiemisticamente $A \cap B = \emptyset$
Dal punto di vista probabilistico abbiamo che $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
Eventi indipendenti : insiemisticamente $A \cap B \neq \emptyset$ (supponiamo anche $A \neq \emptyset$)
Dal punto di vista probabilistico abbiamo che $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$
I due concetti non sono in relazione l'uno con l'altro, se due eventi sono incompatibili non è detto siano indipendenti e viceversa.

Esempio Lancio di un dado equo

1) $A = \{2,4,6\}$ numeri pari, $B = \{1,3\}$ numeri dispari minori di 4.
   $A \cap B = \emptyset \quad \Rightarrow \quad A, B$ sono incompatibili, e quindi $p(A \cap B) = 0$.
   Ma $p(A) = \frac{1}{2},\ p(B) = \frac{1}{3}$, quindi $p(A) \cdot p(B) = \frac{1}{6}$ quindi i due eventi non sono indipendenti.
   A, B sono incompatibili ma non indipendenti.
2) $A = \{2,3,5\}$ numeri primi, $B = \{3,6\}$ multipli di tre
   $A \cap B = \{3\} \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad A, B$ non sono incompatibili, e quindi $p(A \cap B) = \frac{1}{6}$.
   Ma $p(A) = \frac{1}{2},\ p(B) = \frac{1}{3}$, quindi $p(A) \cdot p(B) = \frac{1}{6} = p(A \cap B)$, quindi A, B risultano indipendenti ma non incompatibili.

N.B. Non è sempre facile capire se due eventi sono indipendenti o meno.

Esempio Lancio 2 dadi. Intuitivamente gli esiti del primo e del secondo lancio sono indipendenti.
Ma se lancio un unico dado e mi ritrovo ad avere i seguenti eventi A: "numeri primi" e B: "multipli di tre" sembrerebbe che sapere che B si verifica possa in qualche modo influenzare la probabilità di A, invece non è così.

Esercizi

1) Una coppia desidera un figlio maschio. Quanti figli deve mettere in preventivo per avere una probabilità maggiore di $0,8$ di avere un maschio?

2) Abbiamo degli ovetti di cioccolata con all'interno delle sorprese numerata da 1 a 4. Comprando un ovetto scelto a caso, la probabilità di avere la sorpresa numero n è $\frac{1}{4}$.
   a) Calcola la probabilità di avere una sorpresa numero 1 comprando 4 ovetti.
   b) Calcola la probabilità di trovare 3 sorprese diverse comprando 4 ovetti.
   c) Calcola quanti ovetti bisogna comprare per avere una probabilità maggiore o uguale a $0,9$ di trovare almeno una volta la sorpresa 1.

6.5 La formula delle probabilità totali

Risulta utile quando si ha a che fare con esperimenti definiti in termini di ripetizioni o fasi successive.

Definizione Sia $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ uno spazio di probabilità e siano $B_1, .., B_n$ eventi tali che:

1) $B_i \neq \emptyset \quad \forall\ i = 1, \dots, n$
2) $B_1, \dots, B\_n$ incompatibili due a due, ovvero $B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall\ i, j = 1, \dots, n$
3) $B_1 \cup \dots \cup B_n = \Omega$,

Allora diremo che gli eventi $B_1, .., B_n$ costituiscono una partizione di Ω.

Teorema (Delle probabilità totali)
Sia $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ uno spazio di probabilità e siano $B_1, .., B_n$ eventi tali che:

4) $p(B_i) > 0 \quad \forall\ i = 1, \dots, n$
5) $B_1, \dots, B\_n$ incompatibili due a due, ovvero $B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall\ i, j = 1, \dots, n$
6) $B_1 \cup \dots \cup B_n = \Omega$, ossia i B_i costituiscono una partizione di Ω,

Allora per ogni $\forall\ A \in \mathcal{A}, \quad p(A) = p(A|B_1)p(B_1) + \dots + p(A|B_n)p(B_n)$

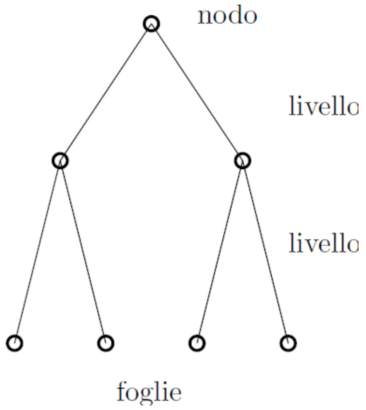
Corollario (legge delle alternative)
Sia $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ uno spazio di probabilità e sia $B \in \mathcal{A}$ un evento tale che $0 < p(B) < 1$, allora $\forall\ A \in \mathcal{A}$:

$$p(A) = p(A|B)P(B) + p(A|\Omega \setminus B)p(\Omega \setminus B)$$

Tale corollario si dimostra usando il teorema delle probabilità totali, usando come eventi gli eventi incompatibili B e $\Omega \setminus B$ la cui unione ci dà l'intero spazio campione.

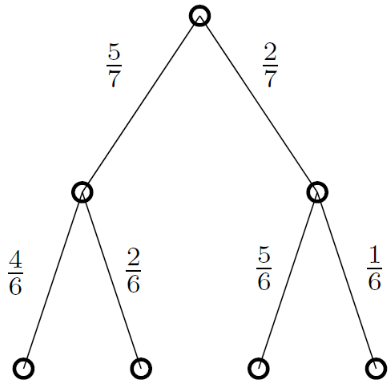
Esempio: Un'urna contiene 5 palline verdi e 2 rosse. Si estraggono 2 palline senza reimbussolamento.
Alternative:
B_1 = "la prima pallina è rossa"
B_2 = " la prima pallina è verde"
A = "estrarre una pallina rossa come seconda"

GRAFI
La legge delle alternative fornisce un metodo di calcolo che si può efficacemente illustrare con un grafo ad albero.
Ogni livello dell'albero corrisponde all'esecuzione di un esperimento, i livelli successivi sono in senso temporale. Ogni nodo dell'albero corrisponde ad una alternativa, ogni foglia ad un esito dell'esperimento. Sui rami scriviamo le probabilità che essi siano percorsi. La probabilità di un evento si ottiene risalendo tutti i rami dell'albero che conducono ad esiti favorevoli all'evento in questione.



Esempi

1) Un'urna contiene 5 palline verdi e 2 rosse. Estraiamo 2 palline senza reimbussolamento. Qual è la probabilità di estrarre la seconda pallina rossa?
   Calcoliamo la probabilità di A: "estrarre la seconda rossa".



2) Lanciamo 4 volte una moneta non truccata. Calcola la probabilità che esca testa almeno due volte.

Osservazione: nel teorema delle probabilità totali possiamo interpretare $p(A|B_i)$ come la probabilità dii avere l'effetto A come conseguenza della causa B_i. La domanda che ora ci poniamo: se so che A si è verificato, ha senso calcolare la $p(B_i|A)$? Cioè la probabilità che l'effetto A sia dovuto alla causa B_i? Quali delle cause $B_1, \dots, B_n$ ha determinato il verificarsi dell'effetto A?

A questa domanda ci risponde il

Teorema (di Bayes o della probabilità delle cause)
Sia $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ uno spazio di probabilità, siano $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{A}$ una partizione di Ω e sia $A \in \mathcal{A}$ un evento tale che $p(A) > 0$. Allora

$$p(B_i|A) = \frac{p(A|B_i)p(B_i)}{p(A)} = \frac{p(A|B_i)p(B_i)}{p(A|B_1)p(B_1) + \cdots + p(A|B_n)p(B_n)}$$

Osservazione: $p(A|B_i)$ è relativo alla probabilità di selezionare prima la causa B_i e successivamente misurare in seguito al verificarsi di B_i, la probabilità di A.
Mentre $p(B_i|A)$ si riferisce alla situazione successiva al verificarsi di A e si cerca di capire se la causa sia stata il verificarsi di B_i. Per questo motivo $p(B_i|A)$ è chiamata anche probabilità a posteriori: mostra come si modifica la probabilità iniziale $p(B_i)$ "sapendo" il fatto che A si sia verificato.

Esercizi:

1) Abbiamo due monete: A è una moneta equa con testa e croce, mentre B è una moneta truccata con due teste. Scegliamo a caso una moneta, la lanciamo ed esce testa. Qual è la probabilità di aver scelto la moneta truccata?

2) Una prova d'esame a crocette consiste di una solo domanda e ci sono 10 possibili risposte. Si suppone che il 35% degli studenti siano onniscienti (indovinano perché sanno la risposta), il resto totalmente ignoranti, rispondono scegliendo a caso tra le risposte. Qual è la probabilità che un compito contenete la risposta corretta sia di uno studente totalmente ignorante?

Esercizi di riepilogo

3) Un’urna contiene 10 palline: 3 bianche e 7 nere. Estraggo a caso 3 palline (una alla volta).
   a) Con reimbussolamento
   b) Senza reimbussolamento

   Qual è la probabilità di avere 0,1,2,3 palline bianche?

4) In un’urna ci sono 3 palline rosse e 4 gialle. Si estrae una pallina a caso dall’urna: se è gialla la si butta, mentre se è rossa la si rimette nell’urna. Si estrae ora una seconda pallina, qual è la probabilità che sia rossa?

5) Un esperimento ha due possibili esiti: S: “successo” con $p(S) = p$ e F: “fallimento” con $p(F) = q = 1 - p$. La probabilità di successo rimane costante ad ogni ripetizione dell’esperimento. Qual è la probabilità di avere $k = 0,1,2,\dots,n$ in n prove ripetute dell’esperimento?

6) Lancio un dado equo per 3 volte. Qual è la probabilità di ottenere 2 numeri pari?

7) Una malattia è presente nel 16% dei casi. La probabilità che, se una persona è sana, il test diagnostico è negativo è dell’ 85%, mentre la probabilità che, se una persona è malata, il test diagnostico risulti positivo è del 90%.
   Scelta a caso una persona qual è la probabilità che il test risulti positivo?
   Scelta a caso una persona con risultato del test negativo, qual è la probabilità che sia sana?
   Scelta a caso una persona con risultato del test positivo, qual è la probabilità che sia malata?