4. CALCOLO DIFFERENZIALE PER FUNZIONI DI UNA VARIABILE REALE.

Molto spesso $y = f(x)$ rappresenta l'evoluzione di un fenomeno al passare del tempo x. Se siamo interessati a sapere con che rapidità il fenomeno si evolve (ovvero con che rapidità cambiano i valori della funzione f), vuol dire che stiamo in realtà cercando la sua derivata. (es. velocità, accelerazione).

Sia f una funzione definita in $A \subset \mathbb{R}$. Siano $x_0, x_0 + h \in A$. $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$.

Definizioni La differenza $\Delta x = x - x_0 = x_0 + h - x_0 = h$ si dice *incremento della variabile indipendente* x nel passaggio da x_0 a $x_0 + h$.
La differenza $\Delta y = \Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0)$ si dice *incremento della variabile dipendente* y *o della funzione* f, relative all'incremento h e al punto x_0.
Il rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ si dice *rapporto incrementale di* f relativo al punto x_0 e all'incremento h.

Definizione Una funzione $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice *derivabile* in $x_0 \in A$ se esiste finito il limite del rapporto incrementale di f relativo al punto x_0

$$\lim_{x \mapsto x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \mapsto 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Il valore di tale limite si chiama *derivata prima di* f in x_0 e si denota con $f'(x_0), \mathrm{D}f(x_0), \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$.

Osservazione: Se consideriamo i limiti per $x \mapsto x_0^+$ o per $h \mapsto 0^+$ si definisce in modo analogo la *derivata destra* e si indica con $f'_+(x_0)$. Mentre se consideriamo i limiti per $x \mapsto x_0^-$ o per $h \mapsto 0^-$ si definisce la *derivata sinistra* e si indica con $f'_-(x_0)$.

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \mapsto x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \mapsto x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Si dimostra che f è derivabile in x_0 se e solo se $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

Definizione La funzione $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ è *derivabile* in A se lo è in ogni punto di A.

DERIVATE DELLE FUNZIONI ELEMENTARI

1) La funzione costante $f(x) = k$, con $k \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \mapsto x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \mapsto x_0} \frac{k - k}{x - x_0} = 0 = f'(x_0) \ \forall \ x_0 \in \mathbb{R}$$

2) La funzione identità $f(x) = x$

$$\lim_{x \mapsto x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \mapsto x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1 = f'(x_0) \ \forall \ x_0 \in \mathbb{R}$$

3) La funzione lineare $f(x) = ax + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ e con $a \neq 0$

$$\lim_{x \mapsto x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \mapsto x_0} \frac{ax + b - ax_0 - b}{x - x_0} = \lim_{x \mapsto x_0} \frac{a(x - x_0)}{x - x_0} = a \ \forall \ x_0 \in \mathbb{R}$$

4) La funzione quadratica $f(x) = x^2$

$$\lim_{x\mapsto x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\mapsto 0}\frac{x_0^2+h^2-2hx_0-x_0^2}{h}=\lim_{h\mapsto 0}\frac{h(h+2x_0)}{h}=$$

$$=2x_0\ \forall\ x_0\in\mathbb{R}$$

In generale possiamo affermare che $f'(x)=2x$.

CONTINUITÀ E DERIVABILITÀ.

Teorema:
Se $f\colon A\longrightarrow\mathbb{R}$ è derivabile nel punto x_0, allora f è ivi continua.
DIMOSTRAZIONE
Occorre provare che $\lim_{x\mapsto x_0} f(x)=f(x_0)$ o equivalentemente che $\lim_{x\mapsto x_0}(f(x)-f(x_0))=0$.
Ora

$$\lim_{x\mapsto x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=\lim_{x\mapsto x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right)=\lim_{x\mapsto x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\mapsto x_0}(x-x_0)=f'(x_0)\cdot 0$$

Osservazione: in generale il viceversa NON è vero. Esistono funzioni continue in un punto ma non derivabili in tale punto.

Esempio La funzione valore assoluto $f(x)=|x|$ è continua in $x_0=0$ non è ivi derivabile.

$$|x|=\begin{cases}x & \text{se } x>0\\ -x & \text{se } x<0\end{cases}$$

$f(0)=0$, e $\lim_{x\mapsto 0^+} f(x)=\lim_{x\mapsto 0^-} f(x)=0$ e quindi f è continua nel punto $x_0=0$.

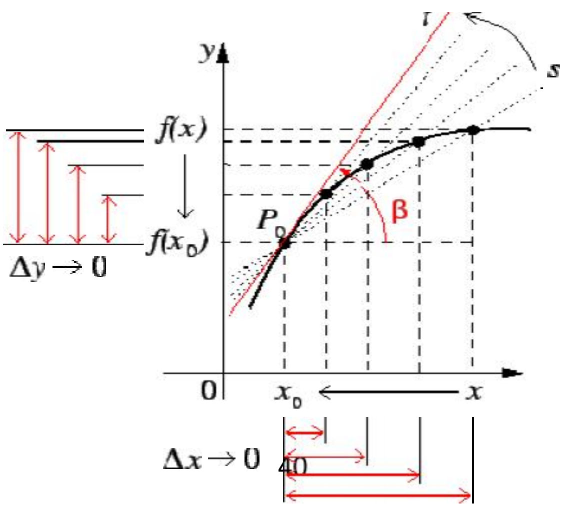
Ma

$$\lim_{x\mapsto 0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-0}=\lim_{x\mapsto 0^+}\frac{x-0}{x-0}=1=f'_+(0)$$

$$\lim_{x\mapsto 0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-0}=\lim_{x\mapsto 0^-}\frac{-x-0}{x-0}=-1=f'_-(0)$$

Essendo $f'_+(0)\neq f'_-(0)$ la funzione non è derivabile in $x_0=0$ e si dice che $x_0=0$ è un punto di non derivabilità per f, in particolare diremo che $x_0=0$ è un *punto angoloso* (punto di non derivabilità in cui la derivata dx è diversa da quella sx.)
Se consideriamo la funzione $f'(x)$ esse non è definita in $x=0$.

SIGNIFICATO GEOMETRICO DELLA DERIVATA



Dal teorema che lega continuità e derivabilità dicendo che se f è derivabile in un punto x_0, allora f è anche continua in x_0 e in particolare il punto di coordinate $P_0(x_0, f(x_0)) \in G_f$.
Consideriamo assieme a P_0 un altro punto $P(x, f(x)) \in G_f$ con $P \not\equiv P_0$. La retta che passa per P, P_0 è secante la funzione con coefficiente angolare $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \alpha$, dove α è l'angolo che la retta forma con l'asse delle ascisse. Per definizione di coefficiente angolare abbiamo che $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, ovvero il coefficiente angolare della retta rappresenta il rapporto incrementale della funzione f.
Cosa succede ora se avviciniamo il punto P al punto P_0?
La retta che passa per i punti P, P_0 sarà sempre più prossima ad essere retta tangente al grafico della funzione nel punto P_0. Possiamo descrivere l'andamento del coefficiente angolare m attraverso il

$$\lim_{x \mapsto x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Ovvero la derivata prima di una funzione f nel suo punto di ascissa x_0 rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione nel punto di ascissa x_0 ed è uguale (per definizione di coefficiente angolare) alla tangente dell'angolo che la retta forma con l'asse delle x.

Esempio Calcolare la retta tangente ad $f(x) = x^2$ nel punto di ascissa $x_0 = 1$.

Teorema (regole di derivazione)
Siano f, g due funzioni derivabili in x_0 (con $x_0 \in D_f \cap D_g$) e sia $k \in \mathbb{R}$ una costante. Allora le funzioni

$$f \pm g, \;\; f \cdot g, \;\; k \cdot f \;\; \text{e} \;\; \frac{1}{g}, \;\; \frac{f}{g} \;\; (\text{se } g'(x_0) \neq 0)$$

Sono derivabili in x_0 e valgono le seguenti relazioni:

i. $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
ii. $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
iii. $(k \cdot f)'(x_0) = kf'(x_0)$
iv. Se $g'(x_0) \neq 0$, $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$
v. Se $g'(x_0) \neq 0$, $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

DIMOSTRAZIONE i) e ii) per esercizio.

Osservazioni: queste formule si possono estendere nel caso si abbiano $n > 2$ funzioni, cioè

i) $(f_1 + f_2 + \cdots + f_n)'(x_0) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(x_0)$
ii) $(f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n)'(x_0) = \sum_{i=1}^{n} (f_i'(x_0) \prod_{j \neq i} f_j(x_0))$

APPLICAZIONE:

1) Funzione potenza $f(x) = x^n \;\; \Rightarrow \;\; f'(x) = nx^{n-1}$
2) Funzione polinomiale
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \;\; \Rightarrow \;\; f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + 2a_2 x +$
$+a_1$.
3) $(\tan x)' = (\frac{\sin x}{\cos x})' = 1 + \tan^2 x$
4) $(\operatorname{cotg} x)' = \left(\frac{1}{\tan x}\right)' = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x)$

5) $(x^{-n})' = -n\, x^{-n-1}$
6) $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Osservazione: La $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ ha $D_f = [0, +\infty)$, ma in $x = 0$, f non è derivabile perché la $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ non è definita nel punto $x = 0$. Il punto $x = 0$ è detto punto a tangente verticale.

Esercizi: Calcola la derivata prima delle seguenti funzioni

1) $f(x) = \sqrt[5]{x^3} = x^{\frac{3}{5}}$
2) $f(x) = x + \sin x + 3$
3) $f(x) = -4\cos x$
4) $f(x) = x^3 \sin x$
5) $f(x) = (3 - 2x - 4x^2)(x^5 - 6x^3)$
6) $f(x) = \frac{1}{x^2-5}$
7) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

9.2 Provare che la funzione $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ x \cdot \sin\frac{1}{x} & \text{se } x = 0 \end{cases}$ è continua ma non derivabile in $x = 0$.

9.3 Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 - x^2 & \text{se } 0 < x < 1 \\ (x-1)^2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

Teorema (derivata della funzione composta regola della catena)
Se f è una funzione derivabile in x_0 e g è una funzione derivabile in $y = f(x_0)$, allora la funzione composta $g \circ f$ (se esiste) è derivabile in x_0 e si ha:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

Esempi:

1) $(f^n(x))' = nf^{n-1}(x)f'(x)$
   $(\sin^4 x)' = 4\sin^3 x \cos x.$
   $((2x^3 - 7x^2 + 3x - 10)^8)' = 8(2x^3 - 7x^2 + 3x - 10)(6x^2 - 14x + 3).$
2) $(\sin f(x))' = \cos f(x)\, f'(x)$
   $(\cos f(x))' = -\sin\big(f(x)\big)\, f'(x).$
   $(\sin 3x)' = \cos 3x \cdot 3.$
   $\left(\cos\sqrt{x}\right)' = -\sin\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}.$

Teorema (derivata della funzione inversa)
Sia f una funzione continua e invertibile su $I \subset \mathbb{R}$. Se f è derivabile in x_0 con $f(x_0) \neq 0$, allora la sua inversa f^{-1} è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e si ha che

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{con} \quad x_0 = f^{-1}(y_0)$$

Esempio
Sia $f(x) = x^2,\ f^{-1}(y) = \sqrt{y} \quad \text{con } y \geq 0.$

$$\left(\sqrt{y}\right)'_{y=y_0} = \frac{1}{(x^2)'_{x_0=f^{-1}(y_0)}} = \frac{1}{(2x)_{x_0=\sqrt{y_0}}} = \frac{1}{2\sqrt{y_0}}$$

Derivata della funzione esponenziale e logaritmo

- $f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^x$

  $\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)} \cdot f'(x),$

  $\left(e^{5x-x^2}\right)' = e^{5x-x^2} \cdot (5-2x),$

  In generale $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
- $f(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}$

  $(\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x),$

  $(\ln(2x^4 - 7x^2 + 17))' = \frac{8x^3-14x}{2x^4-7x^2+17},$

  $\left(\ln\left(\frac{2x+5}{x-9}\right)\right)' = \frac{x-9}{2x+5} \cdot \frac{2(x-9)-(2x+5)}{(x-9)^2} = -\frac{23}{(2x-5)(x-9)}.$

  In generale $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

TABELLE DELLE DERIVATE

Funzione	*Derivata*
funzione _ costante	
$y = k \quad (k \in R)$	$y' = 0$
funzione _ potenza	
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
casi _ particolari:	
$y = x$	$y' = 1$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = \sqrt[n]{x^m}$	$y' = \frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$
funzioni _ goniometriche	
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = tgx$	$y' = \begin{cases} \frac{1}{\cos^2 x} \\ 1+tg^2 x \end{cases}$
$y = ctgx$	$y' = \begin{cases} -\frac{1}{\sin^2 x} \\ -(1+ctg^2 x) \end{cases}$
funzione _ logaritmica	
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$
caso _ particolare:	
$y = lnx$	$y' = \frac{1}{x}$
funzione _ esponenziale	
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
caso _ particolare:	
$y = e^x$	$y' = e^x$

goniometriche _ inverse	
$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = arctgx$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
$y = arc\cot gx$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$
Regole _ derivazioni	
$y = k \cdot f(x)$	$y' = k \cdot f'(x)$
$y = f(x) \pm g(x)$	$y' = f'(x) \pm g'(x)$
$y = f(x) \cdot g(x)$	$y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$y = \frac{f(x)}{g(x)}$	$y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$
$y = g[f(x)]$	$y' = g'[f(x)] \cdot f'(x)$
casi _ particolari	
$y = [f(x)]^n$	$y' = n[f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$
$y = \ln[f(x)]$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$
$y = e^{f(x)}$	$y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$
$y = \sin[f(x)]$	$y' = \cos[f(x)] \cdot f'(x)$
$y = \cos[f(x)]$	$y' = -\sin[f(x)] \cdot f'(x)$
$y = \arcsin[f(x)]$	$y' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$
$y = \arccos[f(x)]$	$y' = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$
$y = arctg[f(x)]$	$y' = \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$