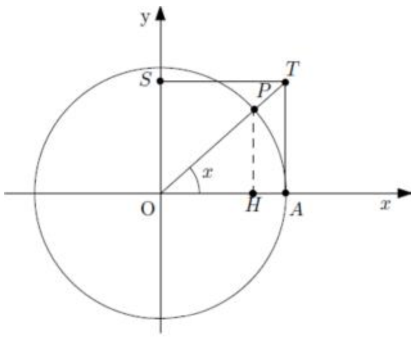
3.3 Limiti notevoli

Ci sono dei limiti che sono forme indeterminate che vengono chiamati limiti notevoli in quanto non risulta essere banale dimostrarne il risultato.
Ne elenchiamo i principali:

1) $\lim_{x \mapsto 0} \frac{\sin x}{x} = 1$



$f = \frac{\sin x}{x}$ è una funzione pari in quanto rapporto di funzioni dispari. Per calcolare questo limite è sufficiente calcolare il $\lim_{x \mapsto 0^+} \frac{\sin x}{x}$.
Considerando la circonferenza goniometrica la misura dell'angolo x è uguale alla misura dell'arco $\widehat{PA}$, $PH = \sin x$, e $TA = \tan x$. Abbiamo quindi che:

$$\sin x < x < \tan x$$

Dividendo per $\sin x$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{\sin x} \Leftrightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Leftrightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Per $x \mapsto 0^+ \Rightarrow \cos x \to 1$, 1 è una funzione costante e tende ovviamente a 1, quindi per il teorema del confronto anche $\frac{\sin x}{x} \to 1$.

2) $\lim_{x \mapsto \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

3) $\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{a^x}{x^\beta} = +\infty$ per ogni $a > 1$ e per ogni $\beta > 0$.

4) $\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{x^\beta}{(\ln x)^\gamma} = +\infty$. per ogni $\beta > 0$ e per ogni $\gamma > 0$.

LIMITI NOTEVOLI

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

3.4 Calcolo dei limiti

1) Limite all'infinito di polinomi.

   Per il calcolo di questi limiti andiamo a raccogliere la potenza maggiore di x.

   a) $\lim_{x\mapsto+\infty}(2x^3-3x^2+2x+1) = \text{F.I.} +\infty-\infty$

   b) $\lim_{x\mapsto-\infty}(2x^2-x^4) = \text{F.I.} +\infty-\infty$

   c) $\lim_{x\mapsto-\infty}(-3x^3+x^2+x+7) = \text{F.I.} +\infty-\infty$

2) Rapporto di polinomi F.I. $\frac{0}{0}$

   In questa situazione dobbiamo scomporre denominatore e numeratore.

   a) $\lim_{x\mapsto0}\frac{-x^3+9x^2-x}{x^2+7x} = \text{F.I. } \frac{0}{0}$

   b) $\lim_{x\mapsto2}\frac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2} = \text{F.I. } \frac{0}{0}$

   c) $\lim_{x\mapsto3}\frac{x^2-10x+21}{x-3} = \text{F.I. } \frac{0}{0}$

3) Limiti in cui compaiono radici, forma indeterminata $+\infty-\infty$

   La tecnica usata è quella della razionalizzazione

   a) $\lim_{x\mapsto+\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{4x-1}\right) = \text{F.I.} +\infty-\infty$

   b) $\lim_{x\mapsto+\infty}\left(\sqrt{4x^2+5x+2}-2x\right) = \text{F.I.} +\infty-\infty$

   c) $\lim_{x\mapsto-\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2-3}\right) = \text{F.I.} +\infty-\infty$

4) Limiti di funzioni composte

   a) $\lim_{x\mapsto+\infty}\ln(\frac{3x+7}{x+2})$

   b) $\lim_{x\mapsto-\infty}e^{\frac{x^2+2}{x^3-5x+2}}$

5) Limiti che sfruttano il limite notevole $\lim_{x\mapsto0}\frac{\sin x}{x} = 1$

   a) $\lim_{x\mapsto0}\frac{\sin 3x}{x}$

   b) $\lim_{x\mapsto0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x}$

   c) $\lim_{x\mapsto0}\frac{\tan x}{x}$

   d) $\lim_{x\mapsto0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

6) Limiti che sfruttano il limite notevole $\lim_{x\mapsto\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

   a) $\lim_{x\mapsto\pm\infty}\left(\frac{x-5}{x}\right)^x$

   b) $\lim_{x\mapsto+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x-1}$

   c) $\lim_{x\mapsto0}\frac{\ln(1+x)}{x}$

   d) $\lim_{x\mapsto0}\frac{\ln(1+ax)}{x}$

e) $\lim_{x \mapsto 0} \frac{e^x - 1}{x}$

7) Limiti che sfruttano la relazione tra x^n, e^x e $\ln x$

a) $\lim_{x \mapsto 0} \frac{\ln^2(1+x)}{\sqrt{1+x}}$

b) $\lim_{x \mapsto +\infty} \sqrt{x} \cdot \ln x$

c) $\lim_{x \mapsto 0^+} \sqrt{x} \cdot \ln x$

3.5 Asintoti di una funzione

Definizione Si dice che la retta $x = c$ è *asintoto verticale* per la funzione f se $c \notin D_f$ e

$$\lim_{x \mapsto c^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{o} \quad \lim_{x \mapsto c^-} \pm\infty$$

Si dice che la retta $y = l$ è *asintoto orizzontale* per la funzione f, se una delle seguenti condizioni si verifica:

$$\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = l \quad \text{o} \quad \lim_{x \mapsto -\infty} f(x) = l$$

Sia $f: D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che $\lim_{x \mapsto \infty} f(x) = \infty$. La retta $y = mx + q$ è *asintoto obliquo* per f se esistono finiti i seguenti limiti:

$$m = \lim_{x \mapsto \infty} \frac{f(x)}{x} \neq 0$$

$$q = \lim_{x \mapsto \infty} (f(x) - mx)$$

STUDIO PARZIALE DEL GRAFICO DI UNA FUNZIONE:

0) Classificazione
1) Determinare D_f
2) Intersezione con gli assi ed eventuali simmetrie
3) Determinare il segno di $f(x)$, ovvero studiare quali valori $f(x) \geq 0$
4) Studiare il comportamento agli estremi del dominio.

Esercizi

Studiare in modo parziale le seguenti funzioni:

1) $f(x) = \frac{1-x^2}{x+2}$
2) $f(x) = \frac{x^2+3x}{x^2-1}$
3) $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$
4) $f(x) = \ln\left(\frac{x-2}{x+4}\right)$