3.1 Proprietà dei limiti

Le enunciamo per $x \mapsto x_0$ ma se non specifichiamo nulla valgono anche per il limite destro, sinistro e per $x \mapsto \pm\infty$.

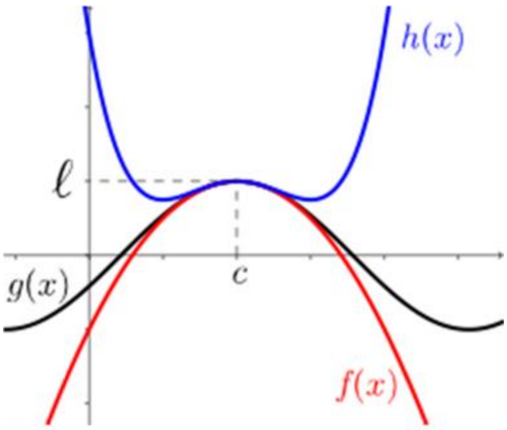
Teorema *Operazioni con i limiti*.
Siano $f, g: A \longrightarrow \mathbb{R}$, con $A \subset \mathbb{R}$ 2 funzioni e sia x_0 un punto di accumulazione per A. Se $\lim_{x \mapsto x_0} f(x) = l_1$ e $\lim_{x \mapsto x_0} g(x) = l_2$, con $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, allora:

1) $\lim_{x \mapsto x_0}(f(x) + g(x)) = \lim_{x \mapsto x_0} f(x) + \lim_{x \mapsto x_0} g(x) = l_1 + l_2$
2) $\lim_{x \mapsto x_0} f(x)\, g(x) = l_1 l_2$
3) $\lim_{x \mapsto x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$ con $l_2 \neq 0$.

Teorema *del confronto*.
Siano $f, g, h: A \longrightarrow \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$ tre funzioni.

Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$ $\lim_{x \mapsto x_0} f(x) = \lim_{x \mapsto x_0} h(x) = l,\ l \in \mathbb{R}$,

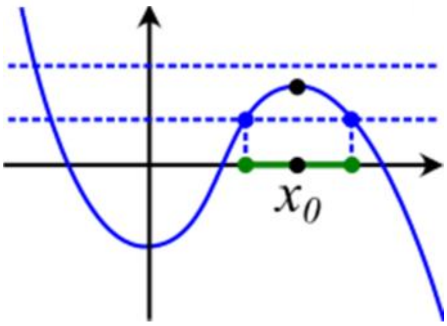
allora $\lim_{x \mapsto x_0} g(x) = l$.



Teorema *della permanenza del segno*
Siano $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione e x_0 un punto di accumulazione per $A \subset \mathbb{R}$.

Se il $\lim_{x \mapsto x_0} f(x) = l$ con $l \neq 0$, allora $\exists\, \delta > 0$ tale che

$\forall\, x \in \big((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A\big) \setminus \{x_0\}$, $f(x)$ ha lo stesso segno di l.



Teorema *limiti di funzioni monotone*
Le funzioni monotone definite su un intervallo (a, b) hanno sempre limite finito o infinito agli estremi.
Precisamente, detto $C_f = (c, d)$ o $[c, d]$, il codominio di f si ha che:

1) Se f è crescente (o strettamente crescente) in (a, b), allora
   $\lim_{x \mapsto a^+} f(x) = \inf C_f$ che può essere un valore finito $c \in \mathbb{R}$ o $-\infty$,
2) Se f è decrescente (o strettamente decrescente) in (a, b), allora
   $\lim_{x \mapsto a^+} f(x) = \sup C_f$ che può essere un valore finito $c \in \mathbb{R}$ o $+\infty$,

I valori di a, b possono essere rispettivamente $-\infty, +\infty$.

Esempio

1) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}: x \longmapsto ax + b$ con $a \neq 0$

   $D_f = \mathbb{R}$ non è limitato.

   Il grafico di f è una retta e abbiamo che $\lim_{x \mapsto \pm\infty} ax + b = \begin{cases} \pm\infty & se\ a > 0 \\ \mp\infty & se\ a < 0 \end{cases}$

   Se $a = 0$ il $\lim_{x \mapsto \pm\infty} f(x) = b$.

Osservazione Quando si fanno operazioni coi limiti e uno o entrambi sono $+\infty$ o $-\infty$, bisogna fare attenzione perché in alcuni casi non si può stabilire, con una regola generale, quanto venga il limite della somma, del prodotto e del quoziente.
Supponiamo ad esempio che:

$$\lim_{x \mapsto x_0} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \mapsto x_0} g(x) = b$$

I valori b, x_0 possono essere anche numeri finiti o infinito, allora:

1) Se $b \neq -\infty$, ossia se $b \in \mathbb{R}$ o $b = +\infty$, si ottiene che

$$\lim_{x \mapsto x_0} (f(x) + g(x)) = +\infty$$

2) Se $b \neq 0$, si ottiene che

$$\lim_{x \mapsto x_0} f(x) \cdot g(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } b > 0 \text{ o } b = +\infty \\ -\infty & \text{se } b < 0 \text{ o } \mathrm{b} = -\infty \end{cases}$$

3) Se $b \neq 0$ e $b \in \mathbb{R}$, si ottiene che

$$\lim_{x \mapsto x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{se } b > 0 \\ -\infty & \text{se } b < 0 \end{cases} \qquad e \qquad \lim_{x \mapsto x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

Per quanto riguarda le altre possibilità che si possono verificare, non è possibile in generale dire quanto viene il limite della somma, del prodotto e del quoziente in quanto il risultato dipende dalle particolari funzioni che si stanno considerando e, in generale, varia al variare delle funzioni che intervengono nel limite. Per questa ragione, limiti di questo tipo vengono chiamati **"forme indeterminate"**. Esse, in particolare, si presentano quando si hanno limiti del tipo :

$$+\infty - \infty; \ \ 0 \cdot (\pm\infty); \ \ \frac{0}{0}; \ \ \frac{\infty}{\infty}; \ \ 1^{\infty}; \ \ \infty^0; \ \ 0^0$$

Esercizi

1. $\lim_{x \mapsto +\infty} (x^2 + 3x)$
2. $\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{x^3+x}{x^2+1}$
3. $\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{3 \sin x}{\sin x + \cos x}$
4. $\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{2}{x^2+4}$
5. $\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{x^3}{x^3+7}$
6. $\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{x^4}{x^2+4x}$

Osservazione Per procedere quando si ha una F.I. (forma indeterminata) $\frac{\infty}{\infty}$ e si considerano funzioni razionali, basta raccogliere a numeratore e a denominatore il termine di grado più alto.
In generale:

$$\lim_{x \mapsto \infty} \frac{n(x)}{d(x)} = \begin{cases} 0 \ \text{ se } d(x) \text{ ha grado maggiore di } n(x) \\ \infty \quad \text{se } d(x) \text{ ha grado minore di } n(x) \\ \text{rapporto dei coefficienti di grado max, quando i gradi sono uguali.} \end{cases}$$

Esercizi

1) 7.1, 7.4, 7.5,7.6.

3.2 Funzioni continue

Definizione Sia $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione con $A \subset \mathbb{R}$. Diremo che f è *continua* in $x_0 \in \mathbb{R}$ se f è definita in quel punto e se

$$\lim_{x \mapsto x_0} f(x) = f(x_0)$$

Inoltre diremo che f è una funzione continua in A se è continua per ogni $x \in A$.

Definizione Se f non è continua in un punto $x_0 \in A$ diremo che f è discontinua in $x_0 \in A$.

Osservazione: Potremo analogamente dare la definizione di funzione continua a destra e a sinistra, usando il concetto di limite destro e sinistro.

PROPRIETÀ :

- Se le funzioni f, g sono continue in x_0 allora $f \pm g$ e $f \cdot g$ sono funzioni continue in x_0
- Se le funzioni f, g sono continue in x_0 e in particolare $g \neq 0$ in un intorno di x_0 allora $\frac{1}{g}$ e $\frac{f}{g}$ sono funzioni continue in x_0.

Esempi:

1) $f(x) = k$ e $g(x) = x$ sono funzioni continue in $\mathbb{R}$.
2) Le funzioni lineari $f(x) = ax + b$, sono continue in $\mathbb{R}$.
3) Le funzioni potenza $f(x) = x^n$ sono continua in $\mathbb{R}$.
4) Le funzioni polinomiali $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ sono continue in $\mathbb{R}$.
5) Le funzioni razionali $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^m + + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$ sono continue in ogni punto in cui il denominatore non si annulla.

Osservazione: Le funzioni $\sin x$, $\cos x$, a^x sono continue in $\mathbb{R}$, mentre la funzione $\log_a x$ è continua nell'intervallo $(0, +\infty)$.

Osservazione Una funzione f a valori reali definita in A è continua in $x_0 \in \mathbb{R}$ se è definita in x_0 e se

$$\lim_{x \mapsto x_0^-} f(x) = \lim_{x \mapsto x_0^+} f(x) = \lim_{x \mapsto x_0} f(x) = f(x_0)$$

Esercizio (8.4)

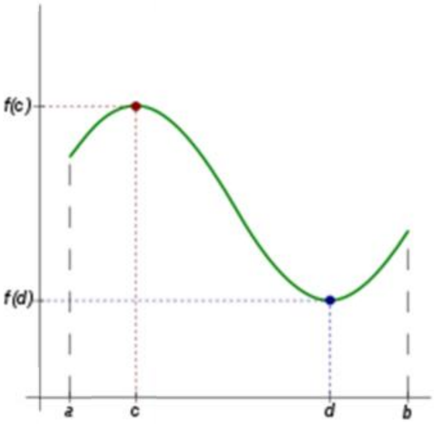
Determinare per quale valore di a la funzione f è continua.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + a & \text{se } x < 1 \\ 3x - 2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

FUNZIONI CONTINUE IN UN INTERVALLO

Teorema (di Weirstrass)

Sia $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$. Allora f ammette massimo M e minimo m assoluti in $[a, b]$.



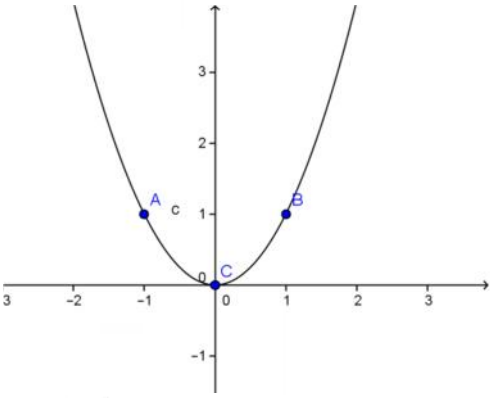
Teorema (dei valori intermedi)

Sia $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$. Allora f assume tutti i valori compresi tra m e M.

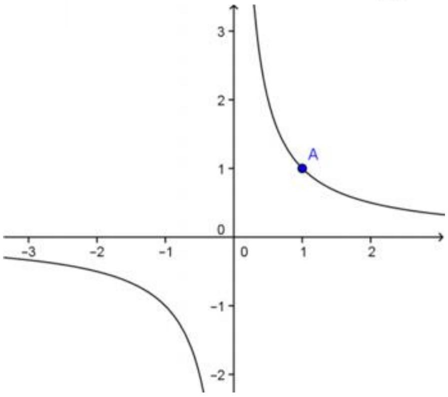
N.B. Questi teoremi valgono sole se consideriamo una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato.

Esempi

1) $f(x) = x^2$ in $[-1,1]$. Stiamo dunque limitando il dominio della funzione.
   f è continua in $[-1,1]$, intervallo chiuso e limitato, allora vale il teorema di Weierstrass ovvero esiste massimo e minimo assoluti.
   $M = 1$, e $m = 0$.

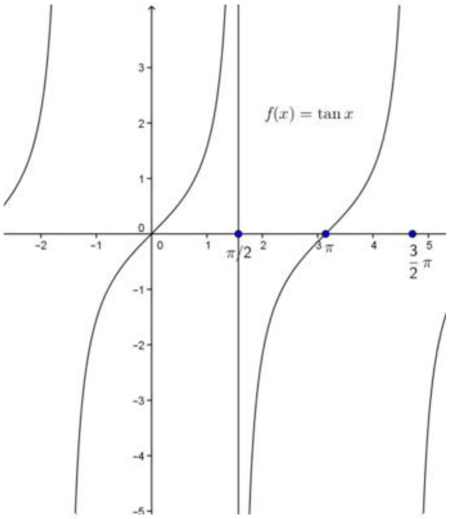


2) $f(x) = \frac{1}{x}$ in $]0,1]$. f è una funzione continua ma l'intervallo non è chiuso, quindi non vale il teorema di Weierstrass. Infatti è possibile trovare il minimo, ma non il massimo assoluto.
   $m = 1$, la funzione per $x \mapsto 0^+$ tende a $+\infty$ quindi non esiste il massimo assoluto.



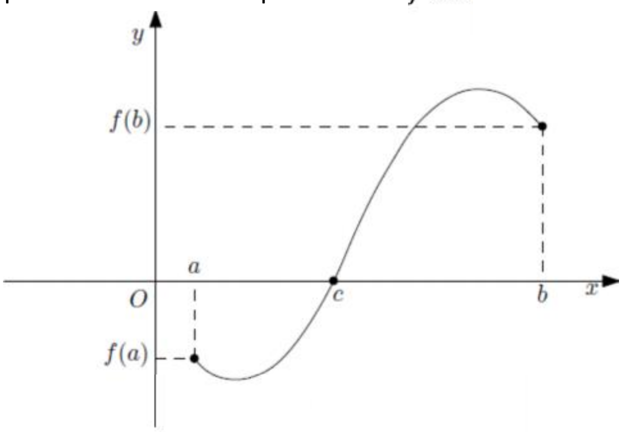
3) $f(x) = \tan x$ in $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ e in $[0, \pi]$.

Il primo intervallo $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ considerato non è chiuso e quindi non soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass, infatti non esistono né il minimo e né il massimo assoluti.
Il secondo intervallo $[0, \pi]$ è chiuso ma la funzione non è continua in ogni punto dell'intervallo, infatti $\tan x$ non è continua in $\frac{\pi}{2}$.



Teorema degli zeri
Sia $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$.

DIMOSTRAZIONE:
Senza perdere di generalità possiamo supporre $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Poiché f soddisfa le condizioni del teorema di Weierstrass, ammette massimo M e minimo m assoluti tali che $m \leq f(a) \leq f(b) \leq M$ quindi $m < 0 < M$. Per il teorema dei valori intermedi la funzione f assume tutti valori compresi tra m e M, in particolare ci sarà un punto in cui f assumerà il valore 0, ovvero esiste $c \in [a, b]$ tale che $f(c) = 0$.



Esempio Sia $f(x) = x^3 - 1$ in $[-1,1]$, $f(-1) = -2$, $f(1) = 0$. Non è possibile applicare il teorema degli zeri in tale intervallo. Ma se consideriamo l'intervallo $[-1,2]$, allora $f(2) = 7$, è possibile applicare il teorema degli zeri che mi dà la certezza dell'esistenza di uno zero ma non mi da nessuna indicazione riguardante la soluzione stessa. Quindi sappiamo che esiste $c \in [-1,2]$ tale che $f(c) = 0$. Per quanto visto prima $c = 1$.

Teorema (continuità della funzione composta)
Sia f una funzione continua in x_0 e sia g una funzione continua in $y_0 = f(x_0)$, allora $g \circ f$ è continua in x_0.

Teorema (continuità della funzione inversa)
Se f è continua in (a, b) e strettamente crescente (decrescente), allora la funzione inversa f^{-1} è continua nel suo naturale insieme di definizione e strettamente crescente (decrescente).

Esempi:

1) La funzione $f(x) = \sqrt{x}$ con $x \geq 0$, è la funzione inversa di $f(x) = x^2$ con $x \geq 0$, che è continua e strettamente crescente, quindi anche $\sqrt{x}$ è continua e strettamente crescente.
2) In generale $f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N}$ sono continue e

viii. se n è pari, f è invertibile solo in $[0, +\infty)$
con $\lim_{x \mapsto +\infty} x^n = +\infty$ e $\lim_{x \mapsto -\infty} x^n = +\infty$

ix. se n è dispari, f è invertibile in tutto $\mathbb{R}$
con $\lim_{x \mapsto +\infty} x^n = +\infty$ e $\lim_{x \mapsto -\infty} x^n = -\infty$