3. LIMITI DI FUNZIONI

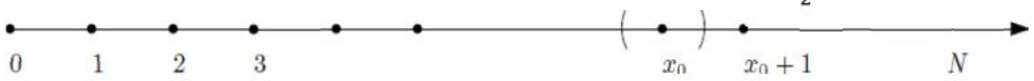
Il concetto di limite e il calcolo infinitesimale permettono di caratterizzare il comportamento delle funzioni nell'intorno di particolari punti del dominio detti *punti di accumulazione.*

Sia A un insieme contenuto in $\mathbb{R}$.

Definizione Sia x_0 un punto fissato di A.
Chiamiamo δ*-intorno* di x_0 e lo indichiamo con I_{x_0} l'intervallo aperto $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ con $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$.
Intorno destro di x_0: $I_{x_0}^{+} = (x_0, x_0+\delta)$
Intorno sinistro di x_0: $I_{x_0}^{-} = (x_0-\delta, x_0)$
Intorno di $+\infty$: $I_{+\infty} = (M, +\infty)$ con $M \in \mathbb{R},\ M \gg 0$
Intorno di $-\infty$: $I_{-\infty} = (-\infty, M)$ con $M \in \mathbb{R},\ M \gg 0$

Definizione Il punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice *punto isolato* di A, se esiste $\delta > 0,\ \delta \in \mathbb{R}$ tale che $(x_0-\delta; x_0+\delta) \cap A = \{x_0\}$.

Esempio: Tutti i punti di $\mathbb{N}$ sono isolati, è sufficiente prendere $\delta = \frac{1}{2}$.



Definizione Il punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice *punto di accumulazione* per l'insieme A se $\forall\, \delta \in \mathbb{R}$ esiste un δ-intorno di x_0, $I_{x_0} = (x_0-\delta, x_0+\delta)$, che contiene infiniti punti di A diversi da x_0, ossia se $(I_{x_0} \cap A)\backslash\{x_0\} \neq \emptyset$.
Notiamo che x_0 non deve necessariamente appartenere ad A.

Esempi:

1) $A = \{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$

$0 \notin A$, ma 0 è un punto di accumulazione per A.
Infatti qualsiasi $\delta \in \mathbb{R}$ scegliamo, esistono infiniti punti di A che stanno nel δ-intorno di 0.

$$(-\delta, \delta) \cap A = \left\{\frac{1}{n} \middle|\ n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\ e\ \frac{1}{n} < \delta\right\} = \left\{\frac{1}{n} \middle|\ n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\ e\ n > \frac{1}{\delta}\right\}$$

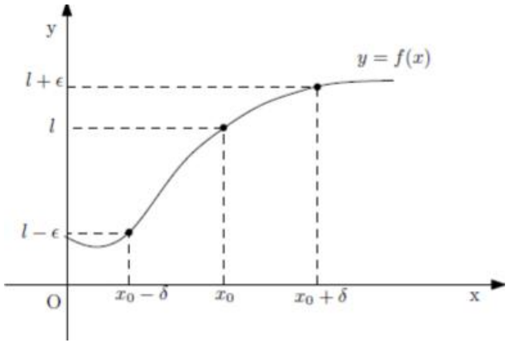
Qualunque sia $\delta \in \mathbb{R}$ scelto esiste sempre un $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > \frac{1}{\delta}$.

2) $A = (a, b)$. $\quad a, b \notin A$ ma sono punti di accumulazione per A.
3) $A = \mathbb{R}$ $\quad$ ogni punto è di accumulazione

Definizione Sia $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ e sia x_0 punto di accumulazione per A. Diremo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \ \in \mathbb{R}$$

Se $\forall\, \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0$ t.c. $\forall\, x \in \big((x_0-\delta_\epsilon, x_0+\delta_\epsilon) \cap A\big) \setminus \{x_0\}$ si ha $|f(x) - l| < \epsilon$
O equivalentemente
□ $\epsilon > 0$, □ $\delta_\epsilon > 0$ t.c. □ $x \in A$ con $x \neq x_0$ e $x_0 - \delta_\epsilon < x < x_0 + \delta_\epsilon$ si ha $l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon$
Questa è la definizione di limite FINITO ($l \in \mathbb{R}$) per x che tende ad un numero finito.



Osservazione Nella definizione di limite non compare il valore $f(x_0)$, essendo x_0 punto di accumulazione per A, può non appartenere ad A e f può non essere definita in x_0.

54

Esempio: dimostriamo mediante la definizione di limite che $\lim_{x\to 1} x + 2 = 3$.
Devo dimostrare che preso un qualsiasi intorno di 3 sull'asse y, $(3 - \epsilon, 3 + \epsilon)$ esiste un intorno di 1 sull'asse x con la seguente proprietà: <u>per ogni x</u> appartenente a quell'intervallo $|(x + 2) - 3| < \epsilon$.
<u>L'esercizio è concluso quando trovo l'intorno di 1 sull'asse x</u>.
Sia quindi $\epsilon > 0$, tale che $|(x + 2) - 3| < \epsilon$, allora

$$\begin{cases} x - 1 < \epsilon \\ x - 1 > -\epsilon \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 1 + \epsilon \\ x > 1 - \epsilon \end{cases} \Rightarrow \quad x \in (1 - \epsilon, 1 + \epsilon)$$ che è un intorno di 1.

Esercizi

1) $f(x) = \begin{cases} 3x & se\ x \neq 1 \\ 1 & se\ x = 1 \end{cases}$ Verifichiamo che il limite di f per $x \to 1$ è uguale a 3.

2) $f(x) = x^3 - 2$ Verifichiamo che il limite di f per $x \to 0$ è uguale a 2.

Definizione Sia $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, e x_0 un punto di accumulazione per A. Diremo che:

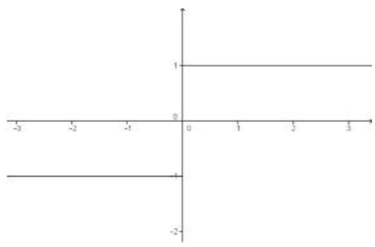
1) $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l$ Se ∀ $\epsilon > 0$ ∃ δ_ϵ tale che ∀ $x \in \left(x_{0,} x_0 + \delta_\epsilon\right) \setminus \{x_0\}$, si ha $|f(x) - l| < \epsilon$
2) $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l$ Se ∀ $\epsilon > 0$ ∃ δ_ϵ tale che ∀ $x \in \left(x_{0,} x_0 + \delta_\epsilon\right) \setminus \{x_0\}$, si ha $|f(x) - l| < \epsilon$

Osservazione Se x_0 è punto di accumulazione per A, per $A^+ = \{x \in A \mid x > x_0\}$ e per $A^- = \{x \in A \mid x < x_0\}$, allora si dimostra che:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = l = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

Esempio: $f(x) = \mathrm{sgn}(x): \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \{-1; 1\}$

$$x \longmapsto \begin{cases} -1 & se\ x < 0 \\ 1 & se\ x > 0 \end{cases}$$



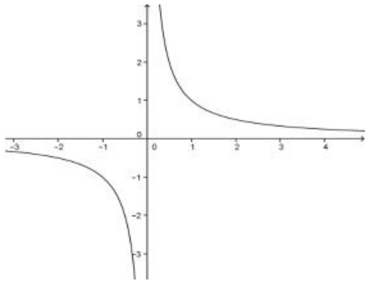
Esistono i limiti
$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$,
$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$,
Ma non esiste il
$\lim_{x\to 0} f(x)$. In quanto il limite destro è diverso dal limite sinistro.

DEFINIZIONE DI LIMITE FINITO PER x CHE TENDE AD INFINITO.
Definizione Sia $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ con A non limitato superiormente [inferiormente]. Diremo che

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = l \qquad [\lim_{x\to -\infty} f(x) = l]$$

Se ∀ $\epsilon > 0$ ∃ δ_ϵ tale che ∀ $x > \delta_\epsilon = (\delta_\epsilon, +\infty)$, [∀ $x < \delta_\epsilon = (-\infty, \delta_\epsilon)$]
si ha $|f(x) - l| < \epsilon$

In questo caso si dice che la funzione ammette un ASINTOTO ORIZZONTALE.

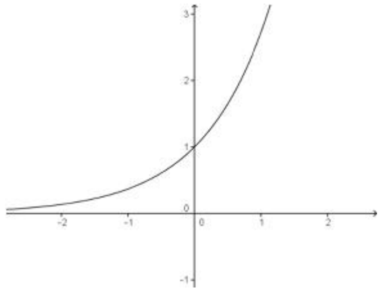


Esempi

1) $f(x) = \frac{1}{x} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$

   Ovviamente il dominio di f non è limitato.

   $\lim_{x \mapsto \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$



2) $f(x) = e^x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

   Anche in questo caso il dominio di f non è limitato e in particolare abbiamo che

   $\lim_{x \mapsto -\infty} e^x = 0$

DEFINIZIONE DI LIMITE INFINITO PER x CHE TENDE A FINITO

Definizione Sia $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ e x_0 un punto di accumulazione per A. Diremo che

$$\left[\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty\right] \lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

se $\forall M > 0$ $\exists \delta_M > 0$ t.c. $\forall x \in \left((x_0 - \delta_M, x_0 + \delta_M) \cap A\right) \setminus \{x_0\}$ si ha

$$f(x) > M \qquad [f(x) < -M]$$

In questo caso si dice che la funzione ammette un ASINTOTO VERTICALE

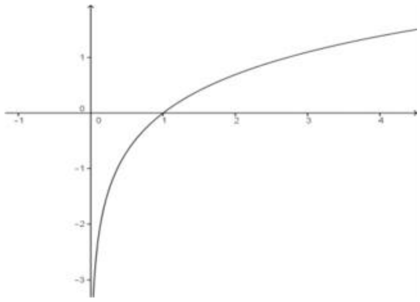
Esempi

1) $f(x) = \frac{1}{x}$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ quindi 0 è punto di accumulazione per il dominio.

   $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

   $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

   Non esiste il limite per $x \mapsto 0$.



2) $f(x) = \ln x$

   $D_f = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ quindi 0 è punto di accumulazione per il dominio di f

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$$

3) $f(x) = \tan x$

   $D_f = x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$

   $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$

   $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$

Osservazione Se $f(x) > 0$ in un δ-intorno di x_0 escluso x_0, allora
$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.
Se $f(x) < 0$ in un δ-intorno di x_0 escluso x_0, allora
$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

DEFINIZIONE DI LIMITI INFINITI PER x CHE TENDE AD INFINITO
Definizione Sia $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, con A non limitato superiormente o inferiormente. Diremo che:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad [-\infty]$$

se $\forall\, M > 0\ \exists \delta_M > 0$ t.c. $\forall\, x > \delta_M$ si ha che $f(x) > M$ $\quad [f(x) < -M]$

e che

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \quad [-\infty]$$

se $\forall\, M > 0\ \exists \delta_M > 0$ t.c. $\forall\, x < -\delta_M$ si ha che $f(x) > M$ $\quad [f(x) < -M]$

Esempi

1) $f(x) = e^x \quad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.
2) $f(x) = \ln x \quad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.