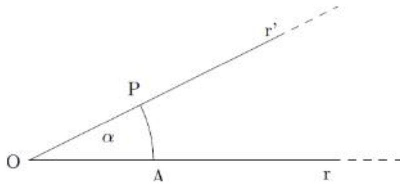
2.3 Goniometria e trigonometria piana

Consideriamo due semirette r, r' uscenti dallo stesso punto O, l'angolo è quella parte di piano ottenuta facendo ruotare una delle due semirette fino a farla sovrapporre all'altra. Le due semirette vengono chiamate *lati* dell'angolo.



Gli angolo possono essere positivi o negativi dipende se la rotazione avviene in senso antiorario o in senso orario. Inoltra abbiamo differenti unità di misura, gradi sessagesimali (meglio conosciuti), radianti, ect.. Ma cosa sono i RADIANTI?

Immaginiamo di tracciare la circonferenza di centro O e raggio $\overline{OP} = \overline{OA}$.

Definizione La misura in radianti dell'angolo α è

$$\alpha_{rad} = \frac{\widehat{PA}}{\overline{OP}}$$

Questa definizione è indipendente dal raggio della circonferenza. Infatti si hanno le seguenti relazioni:

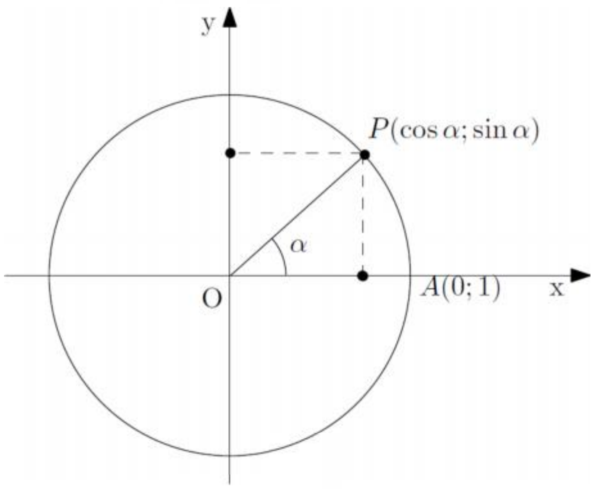
i. $360^\circ \rightarrow \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$
ii. $180^\circ \rightarrow \frac{\pi r}{r} = \pi$
iii. $90^\circ \rightarrow \frac{\pi}{2}$

Possiamo sfruttare la seguente proporzione: $\alpha_{rad} : \pi = \alpha^\circ : 180^\circ$.

Definizione Sia C la circonferenza goniometrica e $P(x_P, y_P)$ un punto su di essa. Chiamiamo α l'angolo che il segmento $\overline{OP}$ forma con l'asse delle ascisse. Allora definiamo le funzione $\cos\alpha$ e $\sin\alpha$, nel modo seguente:

$$\cos\alpha = x_P \qquad \sin\alpha = y_P$$

Ovvero $P(\cos\alpha, \sin\alpha)$.



Osservazione:

Nel primo quadrante: $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

nel secondo quadrante: $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$,

nel terzo quadrante: $\alpha \in \left[\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$,

nel quarto quadrante : $\alpha \in \left[\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$.

Osservazione: Poiché $P \in C$, allora le coordinate di P soddisfano l'equazione della circonferenza goniometrica: $x^2 + y^2 = 1$, quindi abbiamo che

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Tale uguaglianza viene chiamata IDENTITA' FONDAMENTALE della goniometria.

Inoltre osserviamo che per come sono stati definiti:

$$-1 \leq \cos\alpha \leq 1 \qquad -1 \leq \sin\alpha \leq 1$$

e

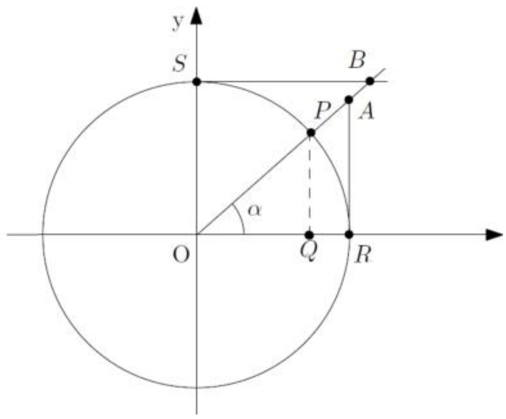
$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha \qquad \sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha$$

per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

Definizione Si definiscono

i. $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \forall\, \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

ii. $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad \forall\, \alpha \neq k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$



Graficamente la tangente rappresenta il segmento orientato $\overline{RA}$ mentre la cotangente rappresenta il segmento orientato $\overline{SB}$.

Sfruttando le regole della geometria piana andiamo a calcolare coseno, seno, tangente e cotangente di alcuni angoli noti.

α	$\alpha\,rad$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
0°	0	1	0	0	$\nexists$
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	0	1	$\nexists$	0
180°	π	-1	0	0	$\nexists$
270°	$\frac{3}{2}\pi$	0	1	$\nexists$	0
360°	2π	1	0	0	$\nexists$

ARCHI ASSOCIATI

Sfruttando la simmetria della circonferenza goniometrica si possono ricavare le seguenti formule:

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha \qquad \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha \qquad \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \qquad \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha \qquad \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha \qquad \cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = -\sin\alpha \qquad \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = \sin\alpha$$

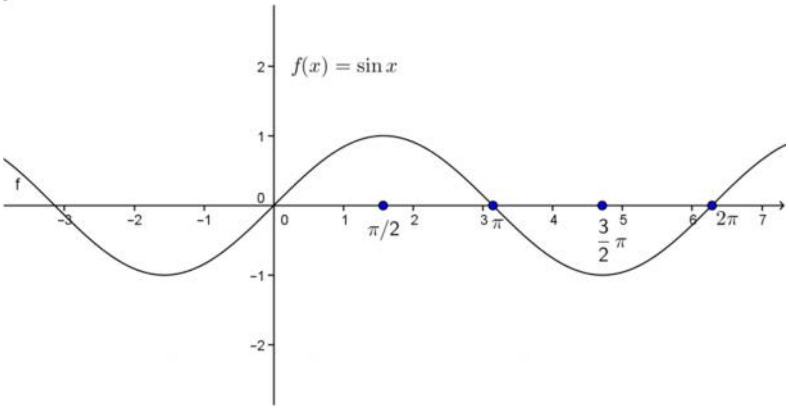
$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha \qquad \sin\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = -\cos\alpha \qquad \sin\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = -\cos\alpha$$

FORMULE DI SOMMA E SOTTRAZIONE, DUPLICAZIONE E BISEZIONE

i. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$
ii. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$
iii. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
iv. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
v. $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$
vi. $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$

LA FUNZIONE SENO

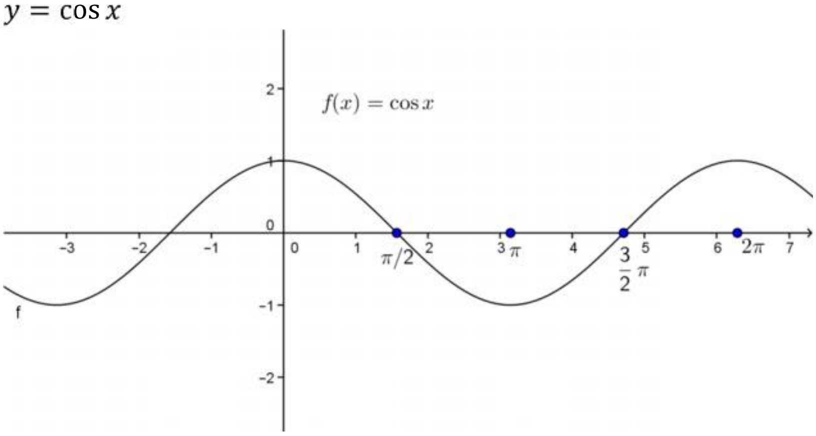
$y = \sin x$



i. $D_f = \mathbb{R}$, $C_f = [-1,1]$ G_f: sinusoide
ii. Limitata
iii. Dispari
iv. Periodica di periodo 2π
v. Non è iniettiva

LA FUNZIONE COSENO

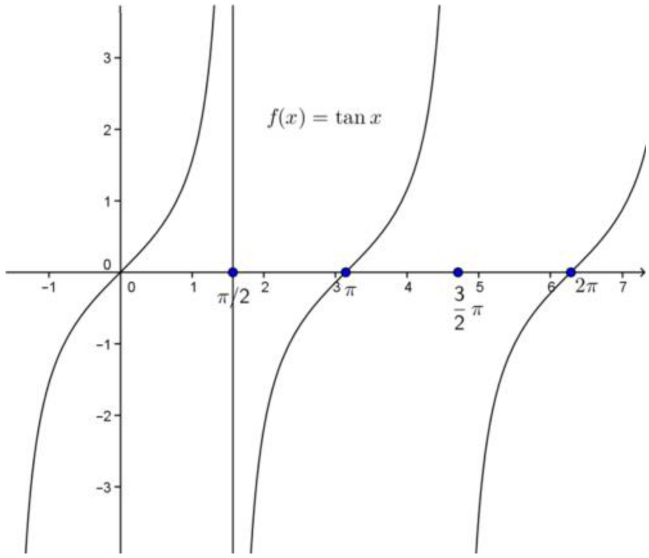
$y = \cos x$



i. $D_f = \mathbb{R}$, $C_f = [-1,1]$ G_f: cosinusoide
ii. Limitata
iii. Pari
iv. Periodica di periodo 2π
v. Non è iniettiva

LA FUNZIONE TANGENTE

$y = \tan x$



i. $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$,

ii. $C_f = \mathbb{R}$

iii. Non è limitata

iv. Strettamente crescente

v. Dispari

vi. Periodica di periodo π

vii. Non è iniettiva

Esercizi:

1) Determina seno coseno e tangente dei seguenti angoli:

$$\frac{2}{3}\pi;\ \ 135°;\ \ \frac{5}{6}\pi;\ \ 180°;\ \frac{3}{2}\pi;\ \ \frac{7}{6}\pi;\ \ 300°$$

2) Risolvi le seguenti equazioni:
   a) $2\sin x = \sqrt{3}$
   b) $2\sin x + 2 = 3\sin x + 4$
   c) $\cos x = -\frac{1}{2}$
   d) $\cos(\frac{\pi}{9} - x) = 0$
   e) $3\tan x = \sqrt{3}$
   f) $\tan x = 2$
   g) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(5x + \frac{\pi}{2}\right)$
   h) $\cos(\frac{3}{4}\pi - 4x) = \cos(2x - \frac{\pi}{3})$

3) Risolvi le seguenti disequazioni
   a) $2\cos x < \sqrt{2}$
   b) $\tan x \geq -\sqrt{3}$
   c) $2\sin 2x - \sqrt{3} < 0$

Esercizi di riepilogo:

Disegna il grafico delle seguenti funzioni indicandone il dominio D_f

1) $f(x) = e^{x-2}$
2) $f(x) = e^x - 3$
3) $f(x) = \ln(x - 4)$
4) $f(x) = \sin(4x)$