2.1 La funzione esponenziale

La funzione esponenziale è una funzione della forma $f(x) = a^x$ con $a > 0, a \neq 1$. Tali funzioni ci permettono di estendere il concetto di potenza, ponendo ad esponente un qualsiasi numero reale $x \in \mathbb{R}$. Ovviamente valgono le proprietà delle potenze:

i. $a^{-x_1} = \frac{1}{a^{x_1}}$
ii. $a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$
iii. $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}$

CARATTERISTICHE DELLA FUNZIONE ESPONENZIALE:

1) $a^x > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$;
2) $a^0 = 1$, quindi il grafico di questa funzione passa per il punto di coordinate $(0; 1)$;
3) $D_f = \mathbb{R}$;
4) $C_f = (0; +\infty)$

Un caso particolare è dato dalla funzione $f(x) = e^x$ (esponenziale per antonomasia), dove la base e è chiamata *numero di Nepero*, è un numero reale, trascendente e lo si ricava facendo il $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$
$e \approx 2{,}7183$.. ed ha infinite cifre dopo la virgola che non si ripetono.

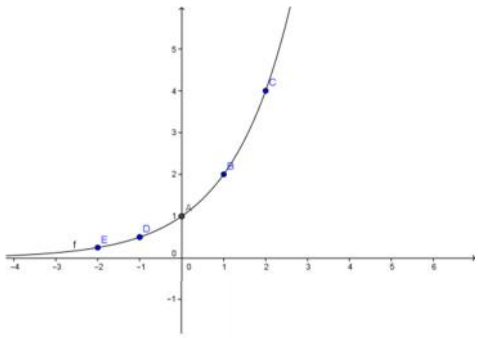
GRAFICI

Per quanto riguarda la funzione esponenziale dobbiamo distinguere i casi in cui $a > 1$ con i casi in cui $0 < a < 1$.

Supponiamo di avere $y = f(x) = 2^x$.

Compiliamo la tabella seguente per capire l'andamento della funzione:

0	1
1	2
2	4
-1	½
-2	¼



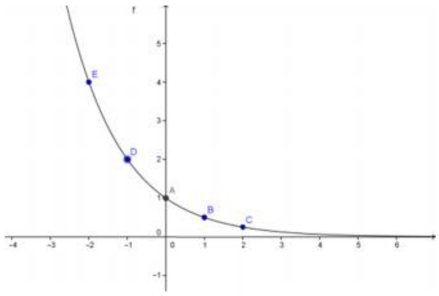
In generale possiamo affermare che:

i. f è strettamente crescente qualunque sia $a > 1$;
ii. f è limitata inferiormente;
iii. f non è pari né dispari.

Supponiamo ora di avere $y = f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Compiliamo
la tabella seguente per capire l'andamento della funzione:

x	y
0	1
1	½
2	¼
-1	2
-2	4



In generale possiamo affermare che:

i. f è strettamente decrescente qualunque sia $0 < a < 1$;
ii. f è limitata inferiormente;
iii. f non è pari né dispari.

Inoltre qualunque sia $a > 0$, $a^x \neq 0 \quad \forall \quad x \in \mathbb{R}$.

Osservazione: $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ hanno un grafico simmetrico rispetto all'asse y, quindi si ha che $f(x) = g(-x)$.

Esercizi

Equazioni e disequazioni esponenziali:

1) $5^{x^2+x} = 25$
2) $\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = 1$
3) $4^x + 2^{x+1} - 3 = 0$
4) $\sqrt[3]{16} < 4^{1-x}$
5) $\left(\frac{1}{3}\right)^x > -1$
6) $5^x < -5$
7) $\begin{cases} 2^{x+1} < 2 \\ 3^{x^2-1} - 1 < 0 \end{cases}$

2.2 La funzione logaritmo

La funzione logaritmo è una funzione della forma $f(x) = \log_a x$, con $a > 0, a \neq 1$. Prima di studiare la funzione vogliamo capire cosa rappresenta il logaritmo di un numero.

Definizione Il $\log_a b$ con $a, b > 0$ e $a \neq 1$ rappresenta l'esponente da dare alla base a per ottenere l'argomento b. Ovvero

$$c = \log_a b \quad \Leftrightarrow \quad a^c = b \qquad (*)$$

Quindi il logaritmo numericamente rappresenta un esponente (quindi può essere sia positivo che negativo) e dalla relazione precedente deduciamo che l'argomento b, essendo una potenza con base a ,non potrà mai essere un numero non negativo.

Da $(*)$ deduciamo le seguenti IDENTITA':

$$a^{\log_a x} = x \qquad \log_a a^x = x$$

La funzione logaritmo risulta essere l'inversa della funzione esponenziale.

CARATTERISTICHE DELLA FUNZIONE LOGARITMO:

i. $\log_a 1 = 0$;
ii. $D_f = (0; +\infty)$, $C_f = \mathbb{R}$

PROPRIETA' DEI LOGARITMI (poniamo $a, b, c > 0$)

i. $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$
ii. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$
iii. $\log_a b^c = c \log_a b$

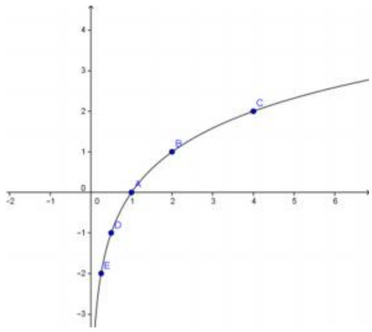
GRAFICI

Anche per quanto riguarda la funzione logaritmica dobbiamo distinguere i casi in cui $a > 1$ con i casi in cui $0 < a < 1$.

Supponiamo di avere $y = \log_2 x$, una funzione con la base maggiore di uno.

Compiliamo la tabella seguente per capire l'andamento della funzione:

x	y
1	0
2	1
4	2
½	-1
¼	-2



N.B
$\log_a x > 0$ se $x > 1$
$\log_a x < 0$ se $0 < x < 1$

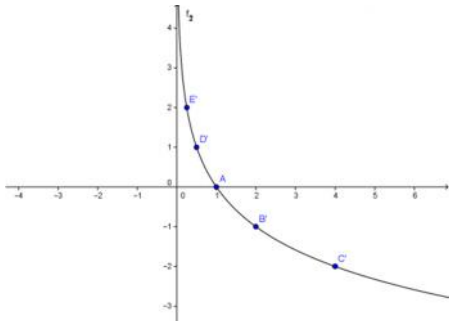
In generale possiamo affermare che:

i. f è strettamente crescente qualunque sia $a > 1$;
ii. f non è limitata e ha un asintoto in $x = 0$;
iii. f non è pari né dispari.

Supponiamo ora di avere $y = f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Compiliamo la tabella seguente per capire l'andamento della funzione:

x	y
1	0
2	-1
4	-2
½	1
¼	2



N.B.
$\log_a x > 0$ se $0 < x < 1$
$\log_a x < 0$ se $x > 1$

In generale possiamo affermare che:

i. f è strettamente decrescente qualunque sia $0 < a < 1$;
ii. f non è limitata e ha un asintoto in $x = 0$;
iii. f non è pari né dispari.

Esercizi:

1) $\log_3 x^2 = 6;$
2) $\log_3(3x - 4) = 2$
3) $\log_{\frac{1}{2}}(3x + 5) < 0$
4) $\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 8) > 0 \\ \log_3(2 + x^2) > 1 \end{cases}$
5) $\ln(x^2 - 6x + 7) > \ln(x - 3)$
6) $\log(\log(2x - 3)) > 0$

Esercizi di riepilogo:

1) $2e^{2x} - 3e^x - 5 = 0$
2) $\ln(e^x + 1) = 2x$
3) $\frac{e^x}{e^x - 1} = 2$
4) $\log x = 1 + \log \sqrt{x}$
5) $e^{2x} \leq 2$
6) $2e^{2x} - 3e^x + 1 \leq 0$
7) $\ln^2 x - \ln x - 2 < 2$
8) $\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{2\log_2 x - 1} < 2$