

6.5 La formula delle probabilità totali

Risulta utile quando si ha a che fare con esperimenti definiti in termini di ripetizioni o fasi successive.

Definizione Sia (Ω, \mathcal{A}, p) uno spazio di probabilità e siano B_1, \dots, B_n eventi tali che:

- 1) $B_i \neq \emptyset \quad \forall i = 1, \dots, n$
- 2) B_1, \dots, B_n incompatibili due a due, ovvero $B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall i, j = 1, \dots, n$
- 3) $B_1 \cup \dots \cup B_n = \Omega$,

Allora diremo che gli eventi B_1, \dots, B_n costituiscono una partizione di Ω .

Teorema (Delle probabilità totali)

Sia (Ω, \mathcal{A}, p) uno spazio di probabilità e siano B_1, \dots, B_n eventi tali da costituire una partizione di Ω , allora per ogni $\forall A \in \mathcal{A}$,

$$p(A) = p(A|B_1)p(B_1) + \dots + p(A|B_n)p(B_n).$$

Corollario (legge delle alternative)

Sia (Ω, \mathcal{A}, p) uno spazio di probabilità e sia $B \in \mathcal{A}$ un evento tale che $0 < p(B) < 1$, allora $\forall A \in \mathcal{A}$:

$$p(A) = p(A|B)p(B) + p(A|\Omega \setminus B)p(\Omega \setminus B)$$

Tale corollario si dimostra usando il teorema delle probabilità totali, usando come eventi gli eventi incompatibili B e $\Omega \setminus B$ la cui unione ci dà l'intero spazio campione.

Esempio: Un'urna contiene 5 palline verdi e 2 rosse. Si estraggono 2 palline senza reimbussolamento.

Alternative:

$B_1 =$ "la prima pallina è rossa"

$B_2 =$ "la prima pallina è verde"

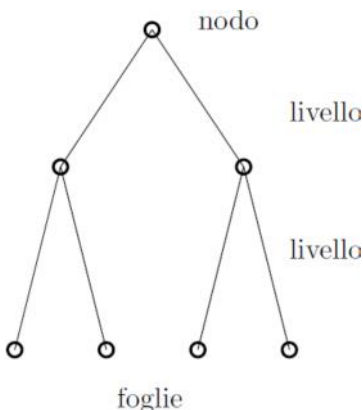
$A =$ "estrarre una pallina rossa come seconda"

GRAFI

La legge delle alternative fornisce un metodo di calcolo che si può efficacemente illustrare con un grafo ad albero.

Ogni livello dell'albero corrisponde all'esecuzione di un esperimento, i livelli successivi sono in senso temporale. Ogni nodo dell'albero corrisponde ad una alternativa, ogni foglia ad un esito dell'esperimento.

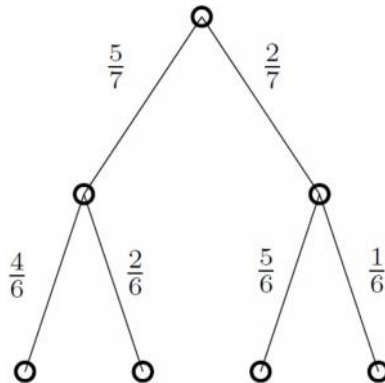
Sui rami scriviamo le probabilità che essi siano percorsi. La probabilità di un evento si ottiene risalendo tutti i rami dell'albero che conducono ad esiti favorevoli all'evento in questione.



Esempi

- 1) Un'urna contiene 5 palline verdi e 2 rosse. Estraiamo 2 palline senza reimpulamento. Qual è la probabilità di estrarre la seconda pallina rossa?

Calcoliamo la probabilità di A : "estrarre la seconda rossa".



- 2) Lanciamo 4 volte una moneta non truccata. Calcola la probabilità che esca testa almeno due volte.

Osservazione: nel teorema delle probabilità totali possiamo interpretare $p(A|B_i)$ come la probabilità di avere l'effetto A come conseguenza della causa B_i . La domanda che ora ci poniamo: se so che A si è verificato, ha senso calcolare la $p(B_i|A)$? Cioè la probabilità che l'effetto A sia dovuto alla causa B_i ? Quali delle cause B_1, \dots, B_n ha determinato il verificarsi dell'effetto A ?

A questa domanda ci risponde il

Teorema (di Bayes o della probabilità delle cause)

Sia (Ω, \mathcal{A}, p) uno spazio di probabilità, siano $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{A}$ una partizione di Ω e sia $A \in \mathcal{A}$ un evento tale che $p(A) > 0$. Allora

$$p(B_i|A) = \frac{p(A|B_i)p(B_i)}{p(A)} = \frac{p(A|B_i)p(B_i)}{p(A|B_1)p(B_1) + \dots + p(A|B_n)p(B_n)}$$

Osservazione: $p(A|B_i)$ è relativo alla probabilità di selezionare prima la causa B_i e successivamente misurare in seguito al verificarsi di B_i , la probabilità di A .

Mentre $p(B_i|A)$ si riferisce alla situazione successiva al verificarsi di A e si cerca di capire se la causa sia stata il verificarsi di B_i . Per questo motivo $p(B_i|A)$ è chiamata anche probabilità a posteriori: mostra come si modifica la probabilità iniziale $p(B_i)$ "sapendo" il fatto che A si sia verificato.

Esercizi:

- 1) Abbiamo due monete: A è una moneta equa con testa e croce, mentre B è una moneta truccata con due teste. Scegliamo a caso una moneta, la lanciamo ed esce testa. Qual è la probabilità di aver scelto la moneta truccata?
- 2) Una prova d'esame a crocette consiste di una sola domanda e ci sono 10 possibili risposte. Si suppone che il 35% degli studenti siano onniventi (indovino perché fanno la risposta), il resto totalmente ignoranti, rispondono scegliendo a caso tra le risposte. Qual è la probabilità che un compito contenente la risposta corretta sia di uno studente totalmente ignorante?

Esercizi di riepilogo

- 3) Un'urna contiene 10 palline: 3 bianche e 7 nere. Estraggo a caso 3 palline (una alla volta).
 - a) Con reimbussolamento
 - b) Senza reimbussolamentoQual è la probabilità di avere 0,1,2,3 palline bianche?

- 4) In un'urna ci sono 3 palline rosse e 4 gialle. Si estrae una pallina a caso dall'urna: se è gialla la si butta, mentre se è rossa la si rimette nell'urna. Si estrae ora una seconda pallina, qual è la probabilità che sia rossa?

- 5) Un esperimento ha due possibili esiti: S : "successo" con $p(S) = p$ e F : "fallimento" con $p(F) = q = 1 - p$. La probabilità di successo rimane costante ad ogni ripetizione dell'esperimento. Qual è la probabilità di avere $k = 0,1,2, \dots, n$ in n prove ripetute dell'esperimento?

- 6) Lancio un dado equo per 3 volte. Qual è la probabilità di ottenere 2 numeri pari?

- 7) Una malattia è presente nel 16% dei casi. La probabilità che, se una persona è sana, il test diagnostico è negativo è dell' 85%, mentre la probabilità che, se una persona è malata, il test diagnostico risulti positivo è del 90%.

Scelta a caso una persona qual è la probabilità che il test risulti positivo?

Scelta a caso una persona con risultato del test negativo, qual è la probabilità che sia sana?

Scelta a caso una persona con risultato del test positivo, qual è la probabilità che sia malata?