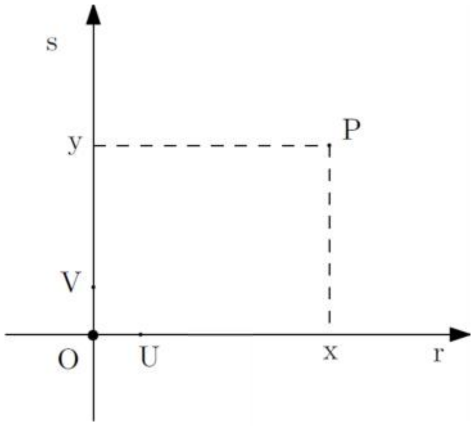
1.4 Geometria analitica

IL PIANO CARTESIANO

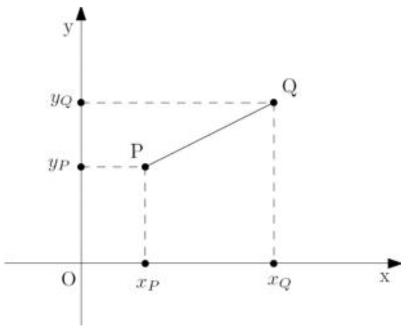
Per definire un riferimento cartesiano nel piano euclideo prendiamo:

i. Un punto O detto origine
ii. Due rette orientate r, s passanti per O.
iii. Due punti $U \in r$ e $V \in s$ per definire le unità di misura $\overline{OU}$ per l'asse r e $\overline{OV}$ per l'asse s.

Il riferimento cartesiano è detto ortogonale quando le due rette r, s sono tra loro perpendicolari; monometrico quando le unità di misura degli assi sono uguali, cioè: $\overline{OU} = \overline{OV}$.
Da ora innanzi considereremo sempre un riferimento cartesiano, ortogonale e monometrico.



Per ogni punto P del piano esiste una ed una sola coppia di numeri reali $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, ovvero esiste una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano cartesiano e l'insieme $\mathbb{R}^2$, la prima coordinata, x, è detta ascissa mentre la seconda coordinata, y, è detta ordinata.
Indicheremo con x le retta orizzontale e la chiameremo asse delle ascisse, mentre con y la retta verticale e la chiameremo asse delle ordinate.

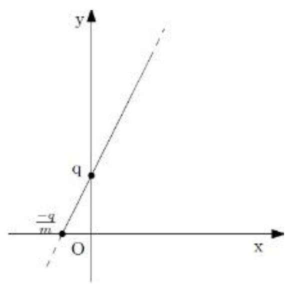


Siano $P(x_P, y_P), Q(x_Q, y_Q)$ punti del piano cartesiano. Per determinare la distanza $\overline{PQ}$ useremo il teorema di Pitagora. Ricaviamo la seguente formula: $\overline{PQ} = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}$
Ne segue che la distanza di un punto P dall'origine degli assi $\overline{PO} = \sqrt{x_P^2 + y_P^2}$

LA RETTA

Una retta nel piano cartesiano è descritta mediante un'equazione di primo grado nei modi seguenti:

i. Forma implicita: $ax + by + c = 0$
ii. Forma esplicita (solo nel caso in cui $b \neq 0$): $y = mx + q$
Dove m è chiamato coefficiente angolare e o pendenza della retta, mentre q è chiamato termine noto.



Se $m > 0$ l'angolo che la retta forma con l'asse delle x è acuto, quando invece $m < 0$ l'angolo è ottuso.

Per due punti $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ del piano, passa una ed una sola retta di equazione:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Tutte le rette verticali sono del tipo $x = k$, mentre quelle orizzontali sono del tipo $y = k$, con $k \in \mathbb{R}$.
Le rette r, s di coefficienti angolari rispettivamente m_r, m_s sono

i. Parallele se $m_r = m_s$
ii. Perpendicolari se $m_r = -\frac{1}{m_s}$

Dati il punto $P(x_P, y_P)$ e la retta $r: ax + by + c = 0$, la distanza del punto P dalla retta r è data dalla formula:

$$d_{Pr} = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

LA PARABOLA

La parabola è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto detto fuoco e da una retta detta direttrice.
Nel piano cartesiano l'equazione di una parabola con asse parallelo all'asse delle y è la seguente
$y = ax^2 + bx + c$
Le coordinate del vertice sono $V(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ e l'asse ha equazione $x = -\frac{b}{2a}$.
Con $a > 0$ la concavità è rivolta verso l'alto,
$a < 0$ la concavità è rivolta verso il basso.
(La parabola verrà spesso utilizzata per risolvere le disequazioni di secondo grado.)

Esercizi

1) Data la retta di equazione $2x - y - 4 = 0$, determina il coefficiente angolare, il termine noto e traccia il grafico sul piano cartesiano.
2) Scrivi l'equazione della retta passante per i punti $P(-1, 3)$ e $Q(1, 7)$.
3) Determina si i punti $A(2, 4), B(-2, 5)$ e $C(-6, 3)$ appartengono alla retta di equazione $r: 2x + 6y - 1 = 0$
4) Determinare il vertice, l'asse e tracciare il grafico di ognuna delle seguenti parabole $\wp_1: y = x^2 - 5x + 1, \wp_2: y = x^2 + 6x + 9$ e $\wp_3: y = x^2 - 4x$,.

2. FUNZIONI IN UNA VARIABILE

Definizione: Dati due insiemi A, B chiamiamo *funzione* da A in B ogni, f, applicazione (legge, corrispondenza) che associa ad ogni elemento di A uno ed uno solo elemento di B. La indicheremo con

$$\begin{aligned} f: A &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Se $B \subset \mathbb{R}$, la funzione si dice reale

Se $A \subset \mathbb{R}$, la funzione si dice a variabile reale.

$A = D_f :=$ dominio della funzione o insieme di definizione

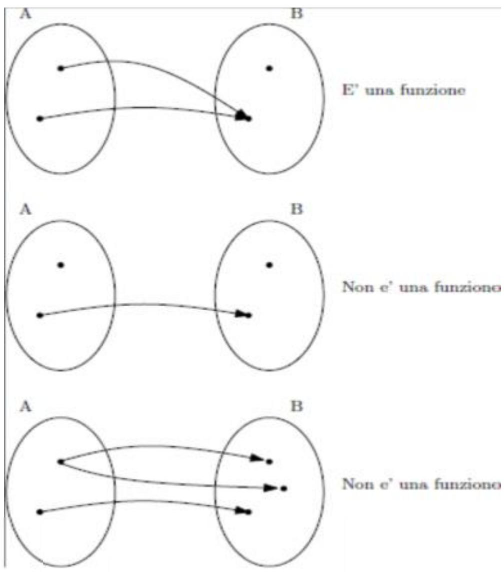
B insieme di arrivo.

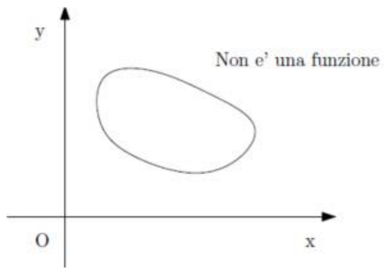
$f(A) = \{y \in B \mid y = f(x), x \in A\} \subset B := C_f$ =codominio, insieme dei valori o insieme delle immagini di f

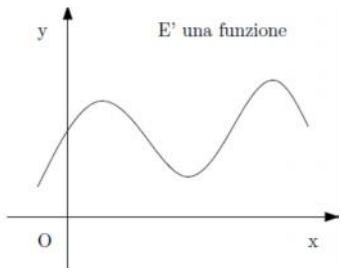
$G_f = \{(x, y) \in A \times B \mid y = f(x)\} :=$ grafico di f

Se $A, B \subset \mathbb{R}$, G_f è una curva del piano cartesiano detta curva di rappresentatrice della funzione.

Esempi:



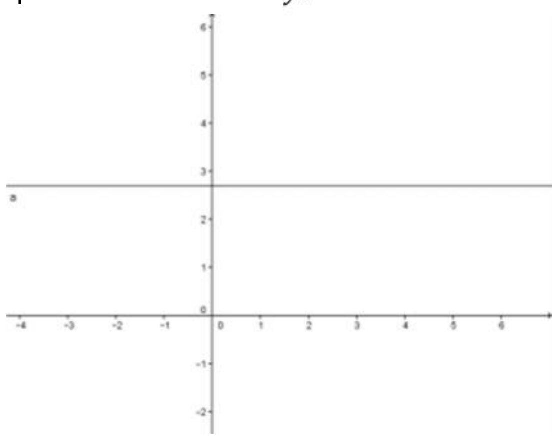




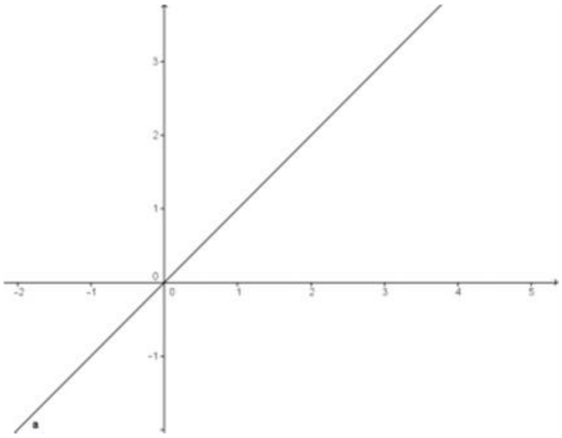
1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: \ x \mapsto f(x) = a$

   Dove $a \in \mathbb{R}$ è una costante.

   Il grafico G_f è una retta parallela all'asse delle y.



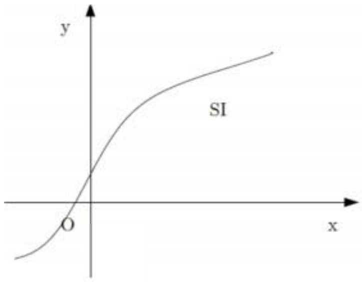
2) f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: $x \mapsto f(x) = x$
   Il grafico G_f rappresenta la retta bisettrice del primo e terzo quadrante

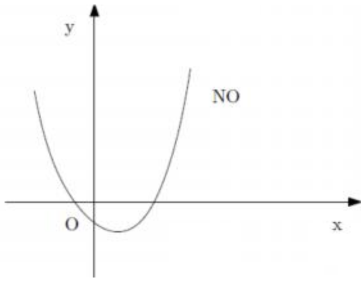


Osservazione: Un insieme di punti del piano cartesiano è il grafico di una funzione f se e solo se ogni retta parallela all'asse delle y interseca tale insieme di punti in al massimo un punto.

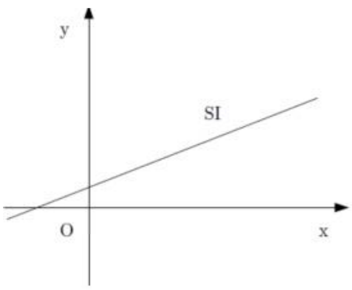
PROPRIETA' DELLE FUNZIONI

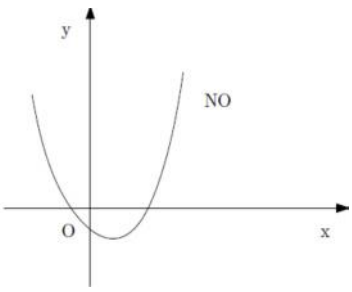
Definizione. Una funzione $f: A \longrightarrow B$ si dice *iniettiva* se per ogni $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 \neq x_2$abbiamo che $f(x_1) \neq f(x_2)$. (Ossia manda elementi distinti di A in elementi distinti di B.)





Graficamente la funzione f è iniettiva se qualsiasi retta parallela all'asse x interseca G_f in al massimo un punto.
Definizione: . Una funzione $f: A \longrightarrow B$ si dice *suriettiva* se $f(A) = B$ ovvero tutti i punti di B sono immagine di un punto di A.





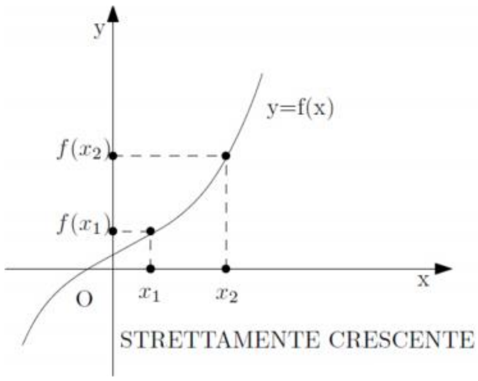
Definizione: Una funzione $f: A \longrightarrow B$ si dice *biiettiva o biunivoca* se è sia suriettiva che iniettiva.

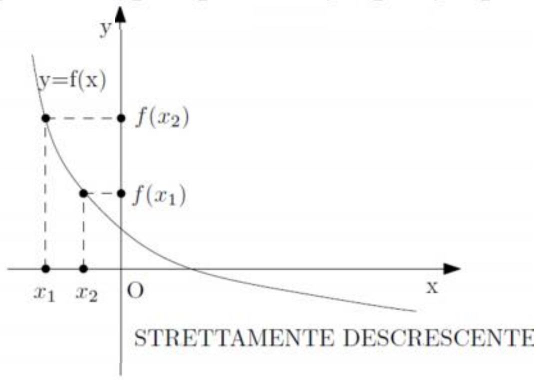
Esercizi

1) Una funzione $y = f(x)$ associa al numero x la differenza tra il cubo del numero e il cubo della somma tra il numero e due. Scrivere $f(x)$ e determinare il codominio se il dominio è $A = \{-1; 0; +1\}$
2) E' vera o falsa l'affermazione: se $f(x) = x^2 - 1$ allora $f(x+k) = x^2 + k - 1$?

D'ora in avanti prenderemo in considerazioni solo funzioni reali a variabile reali, cioè funzioni $f: A \longrightarrow B$ con $A, B \subset \mathbb{R}$.
Rispetto al loro comportamento le funzioni si dividono in funzioni *monotone* e funzioni *non monotone*.
Definizione Sia $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Le funzioni monotone sono definite nel modo seguente, f si dice:

- **i.** Crescente se $\forall x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$ si ha che $f(x_1) \leq f(x_2)$
- **ii.** Strettamente crescente se $\forall x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$ si ha che $f(x_1) < f(x_2)$
- **iii.** Decrescente se $\forall x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$ si ha che $f(x_1) \geq f(x_2)$
- **iv.** Strettamente decrescente se $\forall x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$ si ha che $f(x_1) > f(x_2)$





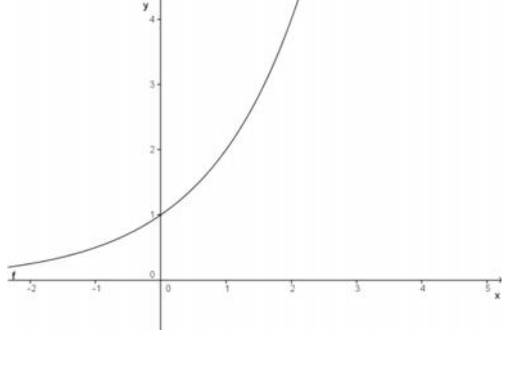
Osservazione: Le funzioni strettamente crescenti o decrescenti sono iniettive.

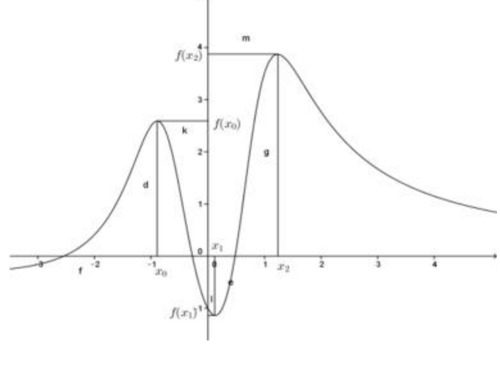
Definizione Data una funzione $f: A \longrightarrow B$, un punto $x_0 \in A$ è detto *punto di massimo (minimo) assoluto* per la funzione f se per ogni $x \in A$ $f(x_0) \geq f(x)$ $\quad \big(f(x_0) \leq f(x)\big)$.
In questo caso, $f(x_0)$ si dice *massimo (minimo) assoluto di* f.

N.B. <u>Il massimo e il minimo sono valori assunti dalla f e quindi relativi all'asse delle y.</u>

Definizione Data una funzione $f: A \longrightarrow B$, un punto $x_0 \in A$ è detto *punto di massimo (minimo) relativo* per f se esiste un intorno $I_\delta(x_0) := (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ con $\delta > 0$, tale che $f(x_0) \geq f(x)$ $\;(f(x_0) \leq f(x))$ $\forall\, x \in I_\delta(x_0) \cap A$.
In questo caso, $f(x_0)$ si dice *massimo (minimo) relativo* per f.

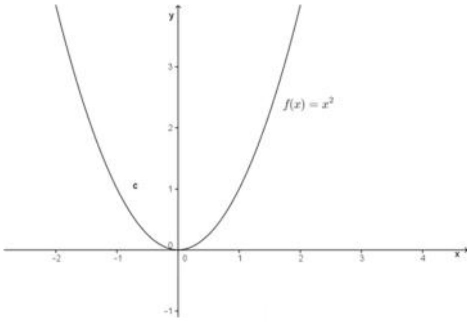
Osservazione: non sempre una funzione ammette massimi o minimi relativi o assoluti.

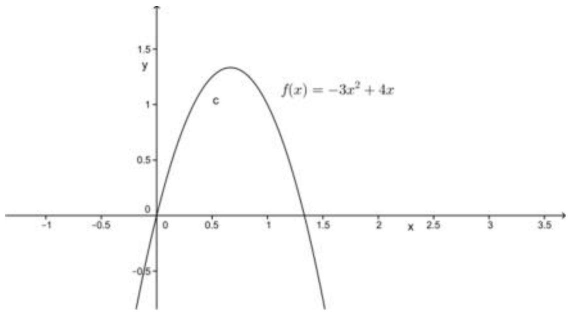




Definizione Una funzione $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice *limitata superiormente (inferiormente)* se C_f è limitato superiormente (inferiormente), ovvero esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \leq M \quad \big(f(x \geq M)\big) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.
Una funzione si dice *limitata* se è limitata sia inferiormente che superiormente.

Esempi:





Definizioni

i. Una funzione f si dice *pari* se $f(x) = f(-x) \;\; \forall \;\, x \in D_f$. Graficamente risulta che G_f è simmetrico all'asse y.
ii. Una funzione f si dice *dispari* se $f(x) = -f(-x) \;\; \forall \;\, x \in D_f$. Graficamente risulta che G_f è simmetrico rispetto all'origine degli assi.
iii. Una funzione f si dice *periodica* di periodo T se $f(x+T) = f(x) \quad \forall \quad x \in D_f$.

Esempi La funzione $f(x) = \sin x$ è una funzione DISPARI e PERIODICA di periodo 2π;
la funzione $f(x) = \cos x$ è una funzione PARI e PERIODICA di periodo 2π.

OPERAZIONI TRA FUNZIONI

Definizione Siano $f: D_f \longrightarrow C_f$ e $g: D_g \longrightarrow C_g$ due funzioni. Se $C_f \subset D_g$ allora è definita l'applicazione

$$\begin{aligned} h: D_f &\longrightarrow C_g \\ x &\longmapsto h(x) = g(f(x)) \end{aligned}$$

La funzione h è detta *funzione composta* di f e g e viene indicata con $h = g \circ f$.
Dunque $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$.
Si usa anche scrivere

$$D_f \xrightarrow{f} C_f \subset D_g \xrightarrow{g} C_g$$

Osservazione: in generale $g \circ f \neq f \circ g$.

Esempi:

1) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}: x \mapsto 3x, \quad g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+: x \mapsto x^2$
Poiché $C_f \subset D_g$ (sono proprio uguali) allora è possibile definire $g \circ f$.
$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(3x) = 9x^2$
Poiché $C_g \subset D_f$ allora è possibile definire anche la funzione $f \circ g$
$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(x^2) = 3x^2$
Risulta evidente che $g \circ f \neq f \circ g$.

2) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x+1, \quad g: \mathbb{R}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}\{0\}: x \mapsto \frac{2}{x}$

Poiché $C_g \subset D_f$ allora è possibile definire $f \circ g$

$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f\left(\frac{2}{x}\right) = \frac{2}{x} + 1$

Notiamo però che $C_f \not\subset D_g$ quindi non è possibile definire $g \circ f$, per fare ciò dovremo restringere il dominio di f.

3) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x+2, \quad g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x-2$

Poiché dominio di f, coincide con il codominio di g e viceversa è possibile definire entrambe le funzioni composte $f \circ g$ e $g \circ f$.

$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(x-2) = x$

$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(x+2) = x$

In entrambi i casi "eccezionalmente" abbiamo ottenuto la funzione identità di $\mathbb{R}$.

Le funzioni f, g dell'ultimo esempio devono avere una sorta di "relazione speciale" in quanto $f \circ g = g \circ f$ ed è uguale alla funzione identità su $\mathbb{R}$ $(Id_{\mathbb{R}})$. Questa relazione si esprime in termini matematici dicendo che f è l'inversa di g e viceversa.

Definizione Sia $f: A \longrightarrow B$ una funzione biiettiva. Esiste allora una funzione $f^{-1}: B \longrightarrow A$, tale che

$$f^{-1} \circ f = Id_A \text{e } f \circ f^{-1} = Id_B$$

La funzione f^{-1} è detta *funzione inversa* di f, mentre f è detta funzione *invertibile.*

Oltre alla composizione di funzioni, possiamo definire le "usuali" operazioni nel modo seguente.
Siano $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, $g: B \longrightarrow \mathbb{R}$ due funzioni tali che $A \cap B \neq \emptyset$. Allora possiamo definire nell'opportuno dominio le seguenti funzioni:

i. $\frac{1}{f}: x \longmapsto \frac{1}{f(x)}$ $\qquad D_{\frac{1}{f}} = A\backslash\{x|f(x) = 0\}$;

ii. $kf: x \longmapsto kf(x)$ $\qquad D = A$;

Questo tipo di operazione è detta *scalatura,* in quanto la funzione f si "restringe" nel caso in cui $0 < k < 1$ e si "allarga" nel caso in cui $k > 1$, ma mantiene fissi i punti di intersezione con l'asse delle x.

iii. $f \pm g: x \longmapsto f(x) \pm g(x)$ $\qquad D = A \cap B$;

Nel caso particolare in cui $g(x) = k$ una costante otteniamo una *traslazione verticale* della funzione f verso il basso quando $k < 0$ e verso l'alto quando $k > 0$.

iv. $fg: x \longmapsto f(x)g(x)$ $\qquad D = A \cap B$;

v. $\frac{f}{g}: x \longmapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ $\qquad D = A \cap B\backslash\{x|g(x) = 0\}$.

Per completezza consideriamo anche le seguenti operazioni. Consideriamo $f: [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$

vi. Traslazione orizzontale $g(x) = f(x+k)$ $\quad D_g = [a-k; b-k]$

Se $k > 0$ la traslazione è verso destra, se invece $k < 0$ la traslazione è verso sinistra.

vii. Dilatazione o contrazione: $g(x) = f(kx)$ $\quad D_g = [\frac{a}{k}; \frac{b}{k}]$

Se $k > 1$ stiamo contraendo la funzione f, mentre se $0 < k < 1$ stiamo dilatando la funzione f. In questo caso rimango fissi i punti di intersezione tra il grafico $G_f$della funzione e l'asse y.