6.4 Probabilità condizionata

Nel calcolo delle probabilità spesso si ha a che fare con situazioni di causa-effetto.
Ci si domanda come può modificare la probabilità di un evento se si possiedono delle informazioni ulteriori.
Ovvero: è accaduto l'evento B qual è la probabilità che si verifichi anche l'evento A?.

Esempio Si lancia un dado equo.
Si vuole sapere la probabilità che la faccia superiore presenti un numero dispari, sapendo che è uscito un numero primo.
Abbiamo che $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, ma abbiamo anche l'informazione che si è verificato per certo l'evento B: "è uscito un numero primo" $= \{2,3,5\} \subset \Omega$.
La probabilità di A: "è uscito un numero dispari" a patto che sia primo viene indicato con $p(A|B) = \frac{2}{3}$ e viene chiamata probabilità condizionata dell'evento A dato l'evento B.
Per calcolare quella probabilità abbiamo dovuto restringere lo spazio campione in questo modo è diminuito sia il numero dei casi possibili sia quello dei casi favorevoli.

Definizione Siano A, B eventi di uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ noto. La *probabilità condizionata* dell'evento A dato l'evento B è

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \qquad \text{dove } p(B) > 0$$

Osservazione: Perché abbia senso il rapporto, $p(B) \neq 0$, quindi B deve essere un evento possibile.

Esempi

1) Si estraggono due palline da un'urna contenente 5 palline verdi e 2 rosse, senza reimbussolamento.
   Calcolare la probabilità di estrarre come seconda una pallina rossa sapendo di aver già estratto come prima una pallina verde
   1° MODO: uso la formula della probabilità condizionata
   $$p(R|V) = \frac{p(V \cap R)}{p(V)}$$
   $\Omega = \{\text{tutte le coppie ordinate di palline}\}$ quindi $\#\Omega = 7 \cdot 6 = 42$
   $p(V) = \frac{5}{7}$
   $\#(V \cap R) = 5 \cdot 2 = 10$ quindi $p(V \cap R) = \frac{10}{42} = \frac{5}{21}$
   In conclusione otteniamo che $p(R|V) = \frac{5}{21} \cdot \frac{7}{5} = \frac{1}{3}$
   2° MODO: Restrizione dello spazio campione
   Il nuovo spazio campione B è formato da tutte le coppie di palline in cui la prima pallina è verde, $\#B = 5 \cdot 6 = 30$. Le coppie favorevoli rimangono sempre $5 \cdot 2 = 10$.
   In conclusione otteniamo che $p(R|V) = \frac{\#\text{coppie}\,(V,R)}{\#B} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$.

2) Lancio di un dado.
   Calcolare la probabilità che esca 5 sapendo che è uscito un numero dispari.

3) Lancio 2 volte una moneta equa.
   Qual è la probabilità che esca T in entrambi i lanci se

a) Al primo lancio esce T
b) Esce almeno una volta T.

Dalla formula della probabilità condizionata segue:
REGOLA DEL PRODOTTO

$$p(A \cap B) = p(A|B) \cdot p(B) = p(B|A) \cdot p(A)$$

Questa regola è particolarmente usata nel calcolo di probabilità di intersezione di eventi e si può generalizzare in questo modo:
Dati n eventi $A_1, \dots, A_n$ tali che $p(A_1 \cap \dots \cap A_n) > 0$ allora

$$p(A_1 \cap \dots \cap A_n) = p(A_1) \cdot p(A_2|A_1) \cdot p(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot p(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Definizione Dati due eventi $A, B \in \mathcal{A}$ di uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, p)$, con $p(B) > 0$, si dice che A, B sono *indipendenti* se il verificarsi di B non modifica la probabilità di A, ossia se $p(A|B) = p(A)$. In tal caso, dalla regola del prodotto si ha:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

Questa definizione si generalizza

Definizione Tre eventi $A, B, C \in \mathcal{A}$ di uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, p)$, con probabilità diverse da zero, si dicono indipendenti se sono indipendenti due a due. In particolare si verifica che

$$p(A \cap B \cap C) = p(A)p(B)p(C)$$

In modo analogo segue la definizione di n eventi indipendenti.

Osservazione: qual è la differenza tra eventi incompatibili ed eventi indipendenti?
Eventi incompatibili: insiemisticamente $A \cap B = \emptyset$
Dal punto di vista probabilistico abbiamo che $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
Eventi indipendenti : insiemisticamente $A \cap B \neq \emptyset$ (supponiamo anche $A \neq \emptyset$)
Dal punto di vista probabilistico abbiamo che $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$
I due concetti non sono in relazione l'uno con l'altro, se due eventi sono incompatibili non è detto siano indipendenti e viceversa.

Esempio Lancio di un dado equo

1) $A = \{2,4,6\}$ numeri pari, $B = \{1,3\}$ numeri dispari minori di 4.
$A \cap B = \emptyset \;\; \Rightarrow \;\; A, B$ sono incompatibili, e quindi $p(A \cap B) = 0$.
Ma $p(A) = \frac{1}{2},\; p(B) = \frac{1}{3}$, quindi $p(A) \cdot p(B) = \frac{1}{6}$ quindi i due eventi non sono indipendenti.
A, B sono incompatibili ma non indipendenti.
2) $A = \{2,3,5\}$ numeri primi, $B = \{3,6\}$ multipli di tre
$A \cap B = \{3\} \neq \emptyset \;\; \Rightarrow \;\; A, B$ non sono incompatibili e $p(A \cap B) = \frac{1}{6}$.
Inoltre $p(A) = \frac{1}{2},\; p(B) = \frac{1}{3}$, quindi $p(A) \cdot p(B) = \frac{1}{6} = p(A \cap B)$, quindi A, B risultano indipendenti ma non incompatibili.

N.B. Non è sempre facile capire se due eventi sono indipendenti o meno.

Esempio Lancio 2 dadi. Intuitivamente gli esiti del primo e del secondo lancio sono indipendenti.
Ma se lancio un unico dado e mi ritrovo ad avere i seguenti eventi A: "numeri primi" e B: "multipli di tre" sembrerebbe che sapere se B si verifica possa in qualche modo influenzare la probabilità di A, invece non è così.

Esercizi

1) Una coppia desidera un figlio maschio. Quanti figli deve mettere in preventivo per avere una probabilità maggiore di $0{,}8$ di avere un maschio?

2) Abbiamo degli ovetti di cioccolata con all'interno delle sorprese numerata da 1 a 4. Comprando un ovetto scelto a caso, la probabilità di avere la sorpresa numero n è $\frac{1}{4}$.
   a) Calcola la probabilità di avere una sorpresa numero 1 comprando 4 ovetti.
   b) Calcola la probabilità di trovare 3 sorprese diverse comprando 4 ovetti.
   c) Calcola quanti ovetti bisogna comprare per avere una probabilità maggiore o uguale a $0{,}9$ di trovare almeno una volta la sorpresa 1.