6.2 La probabilità e gli assiomi della probabilità

L'introduzione alla teoria della probabilità può essere vista come un'applicazione della teoria degli insiemi. Essa si occupa degli esperimenti il cui esito è incerto.
Ebbe origine a metà del 1600 per predire i risultati dei giochi d'azzardo. Anche qui abbiamo un lessico ad hoc.

Definizioni chiamiamo

- *Esperimento:* insieme di azioni il cui risultato non può essere predetto con certezza.
- *Prova:* una singola esecuzione dell'esperimento
- *Esito:* ogni possibile insieme di dati, ottenuto da un esperimento che ne definisce il risultato.
- *Spazio campione:* insieme di tutti gli esiti di un esperimento, lo indicheremo con Ω.
- *Punto campione:* un elemento dello spazio campione
- *Evento:* un sottoinsieme dello spazio campione ovvero un insieme di esiti.
- *Evento elementare:* un sottoinsieme dello spazio campione che ha un unico elemento.

Ω viene anche detto evento certo
$\emptyset$ è detto evento impossibile
Evidenziamo inoltre che l'insieme Ω può essere finito (numerabile) e lo chiameremo *discreto,* nel caso in cui non sarà numerabile lo chiameremo continuo.

Come dicevamo la teoria della probabilità si occupa di tutti quegli esperimenti il cui esito è incerto (es. lancio di un dado, estrazione di una pallina da un'urna,..ect..). Essa si occupa di:

- Assegnare delle "probabilità " a tutti gli esiti possibili, questo si fa con l'intuito oppure ripetendo molte volte l'esperimento e osservando gli esiti ottenuti.
- Predire l'esito degli esperimenti futuri (es. la probabilità di successo di un'operazione)
- Costruire regole di calcolo per studiare fenomeni più complessi.

Esempio: Lancio di un dado equo (non truccato). Abbiamo che:
$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ spazio campione
Consideriamo i seguenti eventi:
A: "si presenti il numero 5"$= \{5\}$ evento elementare;
B: "si presenti un numero dispari" $= \{1,3,5\}$;
C: "si presenti un numero minore di 7"$= \Omega$ spazio campione, evento certo;
D: "si presenti un numero maggiore o uguale a 8" $= \emptyset$ evento impossibile.

INTERPRETAZIONE PROBABILISTICA DELLE OPERAZIONI INSIEMISTICHE
Dato che gli eventi sono insiemi, possiamo eseguire con degli eventi le operazioni insiemistiche.

- $A \cup B$ si verifica se l'esito appartiene ad A o B.
- $A \cap B$ si verifica se l'esito appartiene sia ad A che a B.
- $\Omega \setminus A$ si verifica se l'esito non appartiene ad A, ossia si verifica se non si verifica A.
- $A \subset B$ ogni volta che si verifica A, si verifica anche B.

Definizione Due eventi A e B si dicono *incompatibili* se il verificarsi di uno esclude il verificarsi dell'altro, ossia se $A \cap B = \emptyset$.

Esempi:

1) Lancio due volte una moneta equa (non truccata)
   $\Omega = \{(T,T); (T,C); (C,T); (C,C)\}$ spazio campione.
   A: "esce testa al primo lancio" $= \{(T,T); (T,C)\}$
   B: "esce due volte testa"$= \{(T,T)\}$
   C: "esce croce al secondo lancio"$= \{(T,C); (C,C)\}$
   L'evento "esce testa al primo lancio e croce al secondo" è $A \cap C = \{(T,C)\}$
   Gli eventi B e C sono incompatibili, infatti $B \cap C = \emptyset$
   $B \subset A$.

2) Lancio di un dado equo
   $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ spazio campione.
   A: "esce un numero pari" $= \{2,4,6\}$
   B: "esce un numero dispari"$= \{1,3,5\}$
   C: "esce un numero divisibile per 3"$= \{3,6\}$
   Gli eventi A e B sono incompatibili, infatti $A \cap B = \emptyset$
   $A \cap C$: "esce un numero pari, divisibile per 3" $= \{6\}$
   $B \cap C$: "esce un numero dispari, divisibile per 3" $= \{3\}$

3) Lancio di due dadi equi
   $\Omega = \{(1,1), (1,2), \dots (6,6)\} = \{(i,j) \mid i,j = 1,2,3,4,5,6\}$ spazio campione.
   A: "escono due numeri la cui somma è 5" $= \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}$
   B: "almeno una faccia è maggiore di 3"$= \Omega \setminus (\text{entrambe le facce sono minori o uguali a tre}) =$
   $\Omega \setminus \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$

Gli assiomi di probabilità

La maniera assiomatica di introdurre la probabilità è dovuta a Kolmogorov.
Per definire la probabilità ci servono:

- Uno spazio campione Ω
- Una famiglia di insiemi su cui operare che si chiama σ-algebra degli eventi. (per noi saranno gli eventi legati allo spazio campione in questione).

Definizione Sia $\Omega \neq \emptyset$ uno spazio campione. Una famiglia $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di Ω è detta σ-algebra di su Ω se:

1) $\Omega \in \mathcal{A}$,
2) Se $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
3) Se $A_1, A_2, \dots, A_n \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots \in \mathcal{A}$

Ovvero $\mathcal{A}$ è una famiglia chiusa rispetto al complementare e all'unione arbitraria.

Osservazione: $\emptyset = \Omega \setminus \Omega \in \mathcal{A}$

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \overline{\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \dots \cup \overline{A}_n} \in \mathcal{A}.$$

Possiamo definire cosa intendiamo per probabilità:

Definizione: dato uno spazio campione Ω e una σ-algebra $\mathcal{A}$ di eventi si Ω, si chiama *probabilità* o *misura di probabilità* un'applicazione che associa ad ogni evento $A \in \mathcal{A}$ un numero reale $p(A)$

$$p: \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$A \longmapsto p(A)$$

tale che:

1) $0 \leq p(A) \leq 1 \quad \forall\ A \in \mathcal{A}$
2) $p(\Omega) = 1$
3) Se $A \cap B = \emptyset \quad \Rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
4) Dati $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ eventi due a due incompatibili (in numero finito o infinito), allora
$p(A_1 \cup A_2 \cup \dots, \cup A_n, \dots) = p(A_1) + p(A_2) + \dots + p(A_n) + \cdots$

La terna $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ si chiama *spazio delle probabilità* e 1), 2), 3) e 4) sono detti *assiomi della probabilità.*

Osservazione: gli assiomi e le proprietà precedenti non danno alcuna informazione sul valore numerico della probabilità. Tale valore dipende dal tipo di esperimento e dallo spazio campione.

Dagli assiomi della teoria di probabilità derivano le seguenti proprietà che sfruttando i diagrammi di Venn risultano essere intuitive e immediate:

1) $p(\emptyset) = 0$ probabilità che non si verifichi nessun esito.
2) $p(\Omega \setminus A) = 1 - p(A)$ probabilità che non si verifichi A, infatti $\Omega = A \dot\cup (\Omega \setminus A)$ unione disgiunta.
3) $p(A \setminus B) = p(A) - p(A \cap B)$
4) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
5) Se $A \subset B \quad \Rightarrow \quad p(A) \leq p(B)$
6) $p(A \cap B) \leq p(A) \leq p(A \cup B)$

Esercizio Una ditta produce componenti elettrici che possono presentare 2 tipi di difetti: il difetto x nel 2% della produzione, il difetto y nel 5% della produzione. Il componente elettrico risulta funzionante se ha solo uno dei due difetti, non funzionante se li ha entrambi, il che succede solo nello $0{,}8\%$ dei casi. Si acquista un componente prodotto da tale ditta.

1) Qual è la probabilità che esso risulti funzionante?
2) Qual è la probabilità che esso non abbia alcun difetto?

6.3 Il caso equiprobabile

Come dicevamo la definizione data non attribuisce agli eventi qualsiasi un valore numerico di probabilità. Esso viene assegnato attraverso dati empirici (dovuti all'esperienza), oppure grazie alla definizione di spazio equiprobabile.

Definizione Uno spazio campione $\Omega = \{e_1, e_2, \dots e_n\}$ finito, si dice *equiprobabile* se ognuno degli esiti $e_1, \dots, e_n$ ha la stessa probabilità di verificarsi, cioè non esistono motivi per cui un esito debba essere favorito rispetto agli altri.

Esempio Lancio di un dado a sei facce non truccato, tutti i numeri da 1 a 6 hanno la stessa probabilità di uscire quando il dado viene lanciato.

Come possiamo definire la probabilità su Ω?
Sappiamo che $\Omega = \{e_1\} \cup \{e_2\} \cup \dots \cup \{e_n\}$ (unione disgiunta) e che $p(\Omega) = 1$. Quindi $1 = p(\{e_1\}) + p(\{e_2\}) + \dots + p(\{e_n\})$, ma essendo Ω equiprobabile $p(\{e_1\}) = p(\{e_2\}) = \dots = p(\{e_n\})$, quindi

$$1 = np(\{e_1\}) \Rightarrow p(\{e_1\}) = \frac{1}{n}$$

In uno spazio campione equiprobabile di cardinalità n, tutti gli eventi elementari hanno probabilità $\frac{1}{n}$.

Sia $A \subset \Omega$ un evento, allora $A = \{e_1 \cup \dots \cup e_{n_A}\}$ dove con n_A indichiamo il numero di elementi di A. Allora abbiamo che $p(A) = p(\{e_1\}) + p(\{e_2\}) + \dots + p(\{e_{n_A}\}) = n_A \cdot \frac{1}{n}$

Teorema
Sia Ω equiprobabile, finito, formato da n punti e sia $A \subset \Omega$ un evento. Allora

$$p(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

La probabilità di un evento così definita coincide con la definizione classica di probabilità dovuta a Laplace :

$$p(A) = \frac{n^\circ \text{ casi favorevoli}}{n^\circ \text{ casi possibili}}$$

Esercizi:

1) Un'urna contiene 2 palline bianche e 5 nere. Si estraggono 2 palline dall'urna (dopo la prima estrazione la pallina non viene rimessa nell'urna).
   Qual è la probabilità che la seconda pallina sia bianca?

2) Si consideri l'insieme di tutte le famiglie italiane con due figli. Si supponga che, ad ogni nascita gli eventi "Maschio" e "Femmina" siano equiprobabili. Si estragga a caso una famiglia da tale insieme Qual è la probabilità che abbia entrambi i figli maschi?

3) Si lanciano contemporaneamente 3 dadi. Qual è la probabilità che almeno 2 mostrino la stessa faccia?

4) Una cassa contiene 180 mele identiche di cui 12 bacate e 38 acerbe. Qual è la probabilità dii estrarre a caso una mela buona se:
   a) Non ci sono mele acerbe e bacate
   b) Ci sono 4 mele acerbe e bacate.

5) Un'autoconcessionaria espone 80 automobili di cui 15 con vernice metallizzata e 21 con sedili in pelle. Qual è la probabilità di scegliere a caso senza le due caratteristiche se:
   a) Non ci sono auto con entrambe le caratteristiche
   b) Ci sono 4 auto con entrambe le caratteristiche